

中華民國第四十六屆中小學科學展覽會
作品說明書

國中組 數學科

030407

神奇一刀剪

學校名稱：桃園縣立八德國民中學

作者：	指導老師：
國一 黃心玫	陳盈婷
國一 曾瑜婷	林香鳳
國一 符昕	
國一 陳韻如	

關鍵詞：一刀剪、挖洞剪、等分剪

神奇一刀剪

摘要：

我們做的是關於一刀剪紙(正方形的紙)，找出在紙中央剪出各種圖形的方法、一刀將一個大正方形等分成 n 個小正方形的方法，及一剪出錐體、柱體的展開圖的方法。

壹、研究動機

今天的公民課要讓我們體驗剪雙喜。將紅紙對摺再對摺，接著畫上草稿，我的雙喜就大致完成了，只剩最後的步驟了，就是把它剪下來。「咦？老師，如果我要剪一個喜，要怎麼剪呢？」「你將紅紙對摺一次就好了呀！」「那為什麼會這樣呢？」「這個就要去問你的數學老師了。」我一下課就去找數學老師，老師說：「其實這些圖形都是利用線對稱的性質來探討的喔！」後來，我們覺得既然可以剪字那應該也可以剪出幾何圖形，於是，我們上網查國立科學教育館的網站找歷屆獲獎研究資料，發現並沒有人做關於此類的研究，於是我們開始了剪紙的旅程.....

貳、研究目的

一、一刀剪出不同形狀的圖形。

(一)長方形

(二)正方形

(三)三角形

1.等腰三角形

2.直角三角形

(四)菱形

(五)箏形

(六)梯形

(七)星形

(八)正多邊形

1.正奇數邊形

2.正偶數邊形

二、一刀可將一個大正方形，剪出 n 個小正方形。

(一)將一個大正方形等分成 n^2 個小正方形。

(二)在邊長 $m \times m$ 的正方形網格中，剪出 n 個小正方形。

三、錐體

四、柱體

參、研究設備及器材

筆、廢紙、剪刀、直尺、量角器、三角尺

肆、研究過程或方法

一、一刀剪出不同形狀的圖形

(一)長方形

1.往下摺

紅線...剪線

綠線...摺處

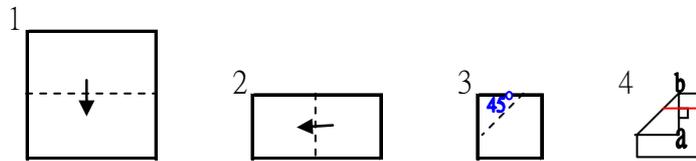
藍線...畫來做記號的線

黑虛線...摺線



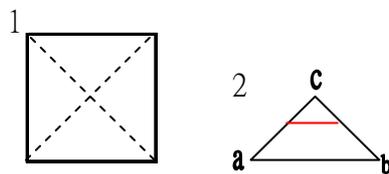
...眼睛看的方向

- 2.往左摺
- 3.拿起左上角往右下摺 (但不可以完全重疊，且摺線需與上面的邊呈 45°)
- 4.畫一條與 \overline{ab} 垂直的線,沿此線剪



(二)正方形

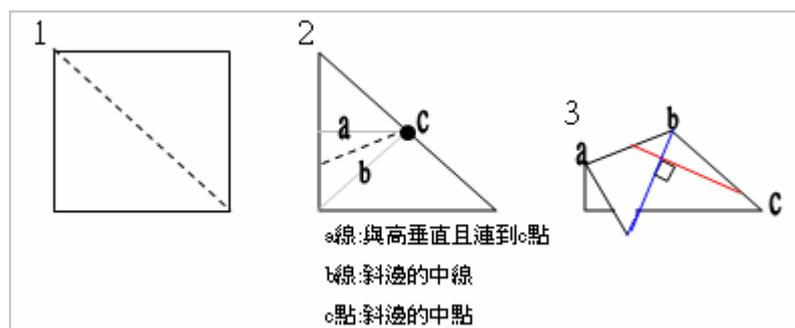
- 1.沿兩條對角線對摺再對摺
- 2.畫條與 \overline{ab} 平行且兩端在 \overline{ca} 及 \overline{bc} 上的線，沿線剪



(三)三角形

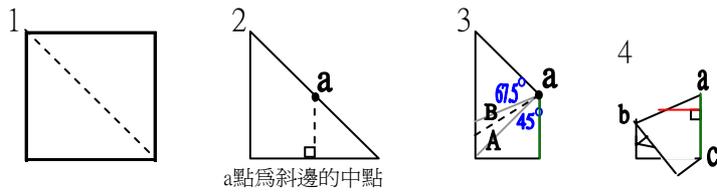
1.等腰三角形：

- (1)沿著對角線往左下摺
- (2)從 c 點畫出一條介於 a、b 兩線中間的線(不可畫在 a、b 線段上)，沿此線摺
- (3)畫一條與藍線垂直的線(兩端分別在 \overline{ab} 及 \overline{bc} 上的直線)，沿此線剪



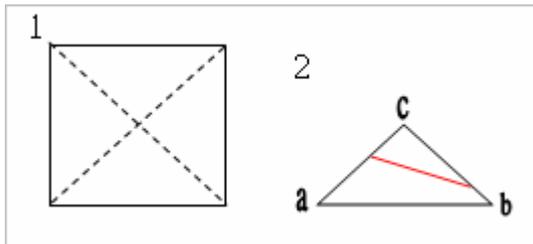
2.直角三角形

- (1)將右上角沿對角線往左下摺。
- (2)從 a 點畫出一條與下面的邊垂直的線，沿此線摺。
- (3)於 A、B 兩線之間(包括 B 線，不包括 A 線)，從 a 點畫條線，最上層沿此線往右摺，最上層碰到綠色摺處後，沿著綠色摺處往左摺，最後手再由右往左壓，此時會再摺出一摺。
- (4)畫一條與綠色摺處垂直且會經過 \overline{ab} 及 \overline{ca} 的線，沿此線剪。



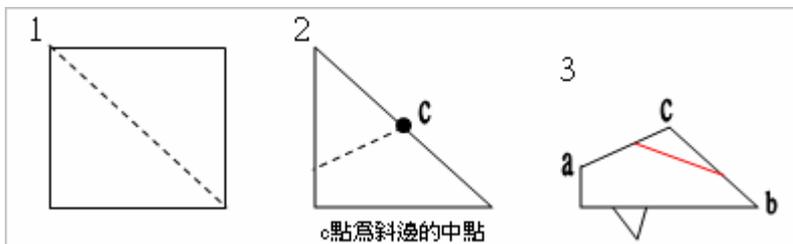
(四)菱形：

- 1.沿兩條對角線對摺再對摺
- 2.在 \overline{ca} 及 \overline{bc} 上各任取一點，以直線相連，剪下去



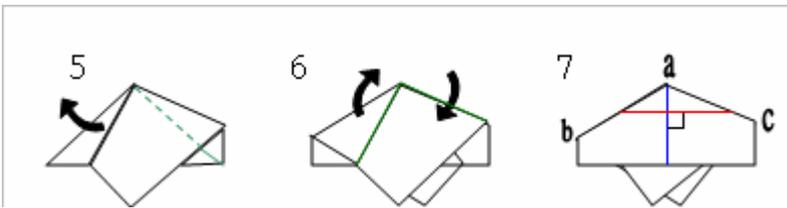
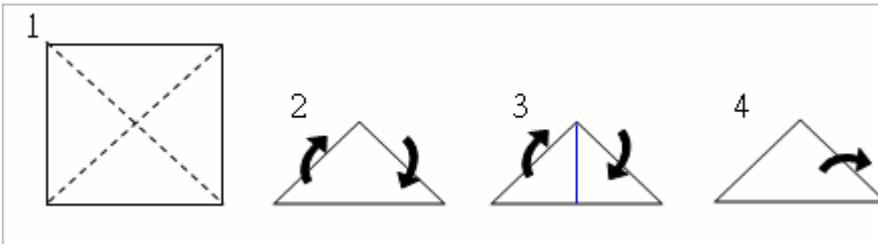
(五)箏形：

- 1.沿著對角線往左下摺
- 2.在非c點所在線段上任取一點，沿著相連它與c點的直線摺
- 3.在 \overline{ca} 及 \overline{bc} 上各任取一點，以直線相連，剪下去



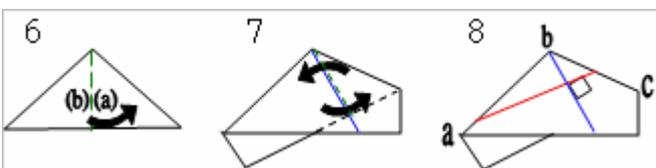
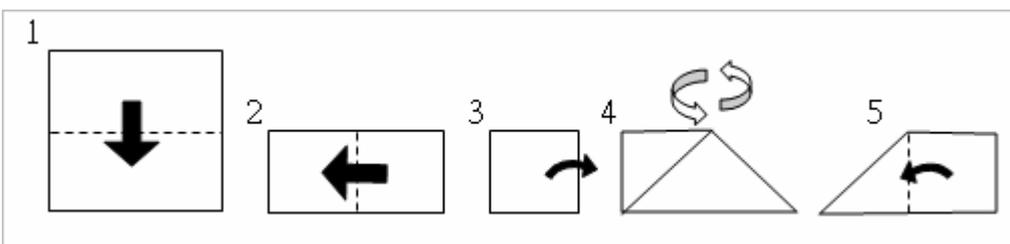
(六)梯形 I：

- 1.沿兩條對角線對摺再對摺(必須先往右下摺，再往左下摺)
- 2.翻面
- 3.在中央畫條記號線後翻回來
- 4.抬起最上層並往右拉〈行此步驟時不會改變第二、三層相接處【圖五的綠色線段】的摺及其位置〉
- 5.抬起第三層並往左拉〈行此步驟時不會改變第一、二層及一、四層的相接處【圖六的兩條綠色線段】的摺及其位置〉
- 6.翻面
- 7.此時應會看見步驟三時所畫的記號線，畫條與其垂直但兩端分別在 \overline{ab} 及 \overline{ac} 上的直線並剪下去



梯形 II :

1. 往下摺
2. 往左摺
3. 拎起最上層並往右拉
4. 翻轉
5. 拎起右邊最上層並往左拉，沿虛線摺
6. 設右邊第二、三層相接處之摺為 a 摺；左邊第二、三層相接處之摺為 b 摺，將 a、b 兩摺同時往右拉（最上層與最下層大小形狀皆須保持相同）
7. 拎起右邊第一、二層並沿 a、b 摺所在的那條線往左摺，後復原，製造出的摺痕便是 a、b 摺之所在，在此摺痕上畫記號線
8. 畫條與記號線垂直且兩端分別需在 \overline{ab} 及 \overline{bc} 上的直線，剪下去

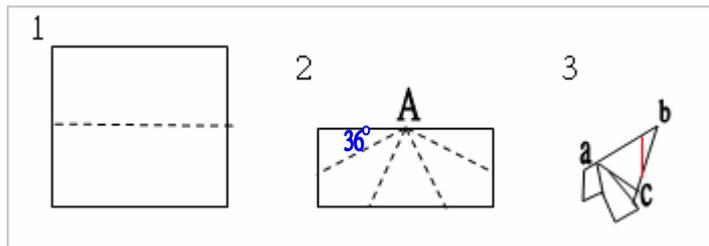


(七) 正 x 角星形(舉五角星為例) :

1. 往下摺

2. 從 A 點(未摺時的中心點)畫出 x 個 $\frac{180^\circ}{x}$ 的角並沿所畫出的線摺

3. 畫條兩端分別在 \overline{ab} 及 \overline{bc} 上的直線（不可與 \overline{ab} 或 \overline{bc} 垂直）剪下去



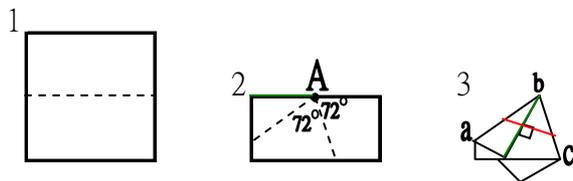
(八)正多邊形

1. 正 x (奇數) 邊形 (舉正五邊形為例) :

(1) 往下摺

(2) 由 A 點 (未摺時的中心點) 畫出 $\frac{x-1}{2}$ 個 $\frac{360^\circ}{x}$ 的角並沿所畫出的線摺 (將綠色摺處摺到最上面)

(3) 畫條與綠色摺處垂直的直線 (兩端分別需在 \overline{ab} 及 \overline{bc} 上) 並剪下去

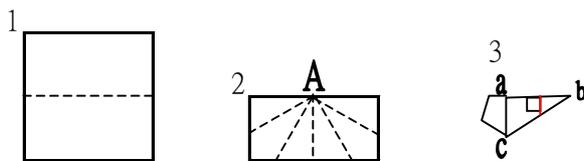


2. 正 x (偶數) 邊形 (舉正六邊形為例) :

(1) 往下摺

(2) 從 A 點 (未摺時的中心點) 畫出 x 個 $\frac{180^\circ}{x}$ 的角並沿所畫出的線摺

(3) 畫條兩端分別在 \overline{ab} 及 \overline{bc} 上, 且與 \overline{ab} 或 \overline{bc} 垂直的直線, 剪下去



二、一刀剪出 n 個小正方形

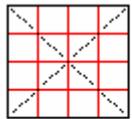
(一) 平分成 n^2 (n 為正整數且非 1) 個正方形: 這個我們是靠試驗並從中找取規則, 以下是我們一一做出的試驗 (從 $2^2 \sim 9^2$)

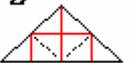
偶數



紅線...剪線
 綠線...摺處
 藍線...畫來做記號的線
 黑虛線...摺線
 ...眼睛看的方向

4x4

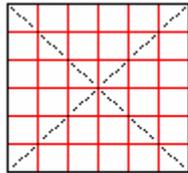
1  沿兩條對角線摺

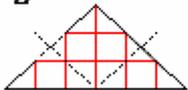
2  腰邊上最中間的橫剪線畫出摺線

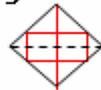
3  沿轉了45度的十字線摺

4 

6x6

4  沿兩條對角線摺

2  腰邊上中間兩條橫剪線中間畫出摺線

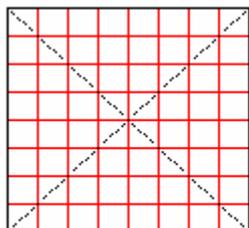
3  沿相連左右角的直線往上摺

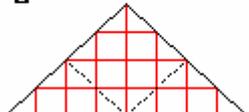
4  腰邊上最中間的橫剪線畫出摺線

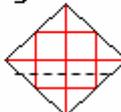
5  沿轉了45度的十字線摺

6 

8x8

1  沿兩條對角線摺

2  腰邊上最中間的橫剪線畫出摺線

3  沿相連左右角的剪線及其下的剪線的中間處往上摺

4  腰邊上中間兩條橫剪線中間畫出摺線

5  沿相連左右角的直線往上摺

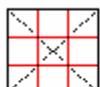
6  腰邊上最中間的橫剪線畫出摺線

7  沿轉了45度的十字線摺

8 

奇數

3x3

1  沿兩條對角線摺

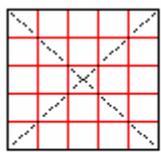
2  兩條摺線分別出從最下列中間那一格底邊的兩端畫出

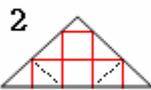
3  沿相連左右角的直線往上摺

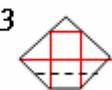
4  兩條摺線從底邊的中間處畫出

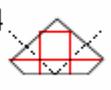
5 

5x5

1  沿兩條對角線摺

2  兩條摺線分別出從最下列中間那一格底邊的兩端畫出

3  沿相連左右角的剪線及其下的剪線的中間處往上摺

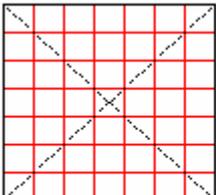
4  兩條摺線從底邊的中間處畫出

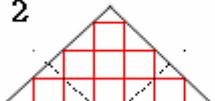
5  沿相連左右角的直線往上摺

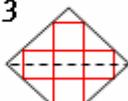
6  兩條摺線從底邊的中間處畫出

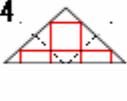
7 

7x7

1  沿兩條對角線摺

2  兩條摺線分別出從最下列中間那一格底邊的兩端畫出

3  沿相連左右角的直線往上摺

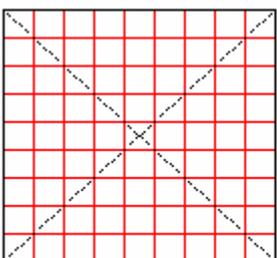
4  兩條摺線從底邊的中間處畫出

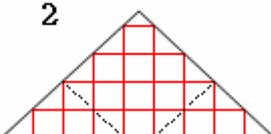
5  沿相連左右角的直線往上摺

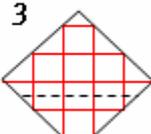
6  兩條摺線從底邊的中間處畫出

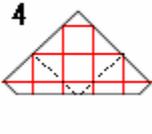
7  兩條摺線從底邊的中間處畫出

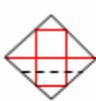
9x9

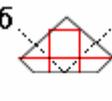
1  沿兩條對角線摺

2  兩條摺線分別出從最下列中間那一格底邊的兩端畫出

3  沿相連左右角的剪線及其下的剪線的中間處往上摺

4  兩條摺線從底邊的中間處畫出

5  沿相連左右角的剪線及其下的剪線的中間處往上摺

6  兩條摺線從底邊的中間處畫出

7  沿相連左右角的直線往上摺

8  兩條摺線從底邊的中間處畫出

9  兩條摺線從底邊的中間處畫出

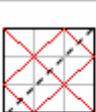
(二)mxm 的網格中，如圖剪出正方形：這個我們是靠實驗並從中找取規則，以下是我們一一做出的試驗(從 2²~ 9²)

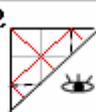
2x2

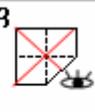
1  往上摺、往左摺

2 

3x3

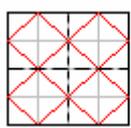
1  沿著沒有剪線的那一條對角線摺

2  腰邊上最中間的橫剪線兩端畫出摺線

3  沿轉了45度的十字線摺

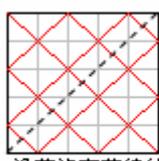
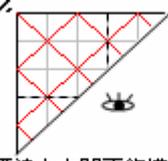
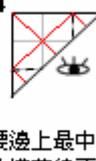
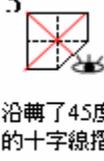
4 

4x4

1  2  3 

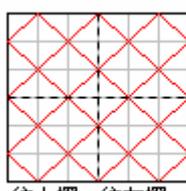
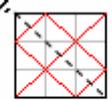
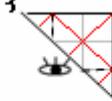
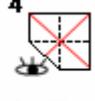
往上摺、往左摺
往上摺、往左摺

5x5

1  2  3  4  5  6 

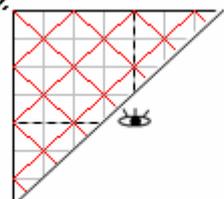
沿著沒有剪線的那一條對角線摺
腰邊上中間兩條橫剪線中間畫出摺線
沿相連左右角的直線往上摺
腰邊上最中間的橫剪線兩端畫出摺線
沿轉了45度的十字線摺

6x6

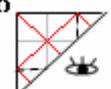
1  2  3  4  5 

往上摺、往左摺
沿著沒有剪線的那一條對角線摺
腰邊上最中間的橫剪線兩端畫出摺線
沿轉了45度的十字線摺

7x7

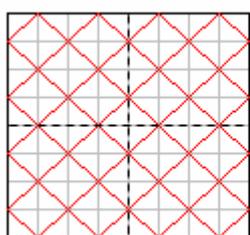
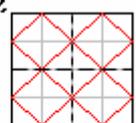
1  2  3  4  5 

沿著沒有剪線的那一條對角線摺
腰邊上最中間的橫剪線兩端畫出摺線
沿相連左右角的對角線及其下的剪線的中間處往上摺
腰邊上中間兩條橫剪線中間畫出摺線
沿相連左右角的直線往上摺

6  7  8 

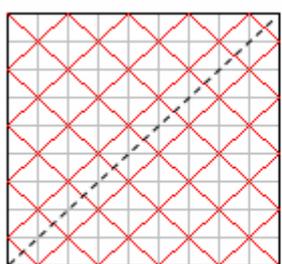
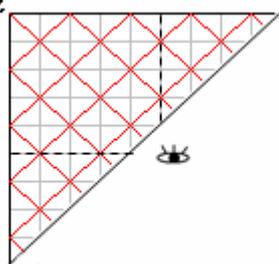
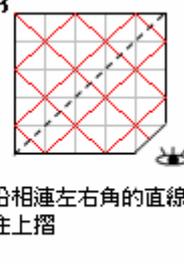
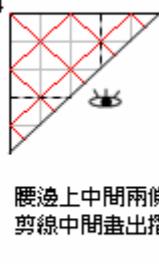
沿轉了45度的十字線摺

8x8

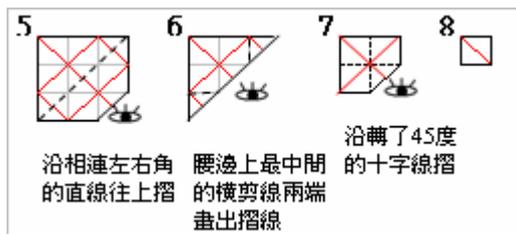
1  2  3  4 

往上摺、往左摺
往上摺、往左摺
往上摺、往左摺

9x9

1  2  3  4 

沿著沒有剪線的那一條對角線摺
腰邊上中間兩條橫剪線中間畫出摺線
沿相連左右角的直線往上摺
腰邊上中間兩條橫剪線中間畫出摺線

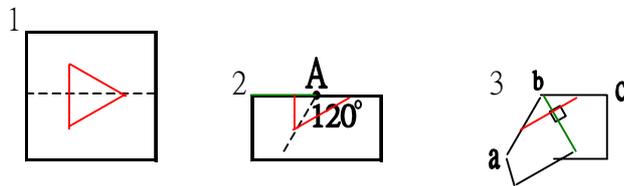


三、錐體：

我們試著將各種錐體展開，發現除了正三角錐展開來後為正三角形，其餘的錐體皆為星形。所以用剪正三角形及星形的方法即可。

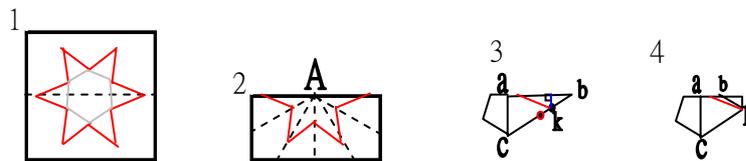
(一)正三角錐

1. 往下摺
2. 由 A 點(未摺時的中心點)畫出 1 個 120° 的角並沿所畫出的線摺(將綠色摺處摺到最上面)
3. 畫條與綠色摺處垂直的直線(兩端分別需在 \overline{ab} 及 \overline{bc} 上)並剪下去



(二)正 x 角錐體(舉六角錐為例)：

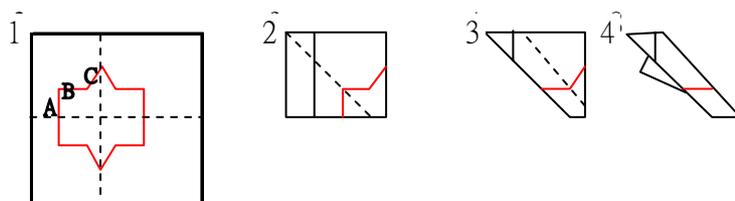
1. 往下摺
2. 從 A 點(未摺時的中心點)畫出 x 個 $\frac{180^\circ}{x}$ 的角並沿所畫出的線摺
3. 於 \overline{bc} 的中點到 b 點之間取點 k，從點 k 畫出一條與 \overline{ab} 垂直的線，沿此線摺
4. 於 a、b 兩點間任取一點(不包括 a、b 兩點)，沿著相連此點與 k 點的線剪



四、柱體：

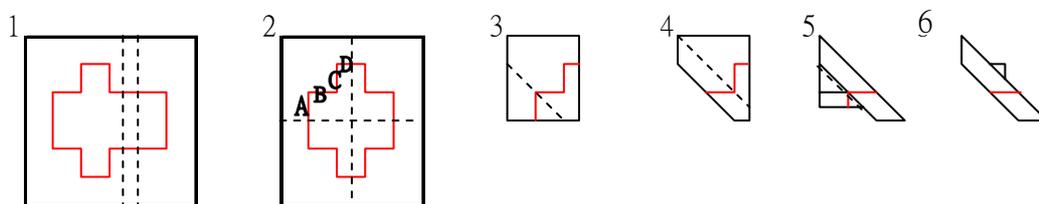
(一)三角柱

1. 沿展開圖中間的縱線與橫線往上往左摺
2. 沿著與 A、B 剪線呈 45° 且往右下斜、通過 A、B 剪線交點的線摺
3. 沿著與 B、C 剪線呈 $\frac{180^\circ}{x}$ 且往右下斜、通過 B、C 剪線交點的線摺
4. 沿剪線剪



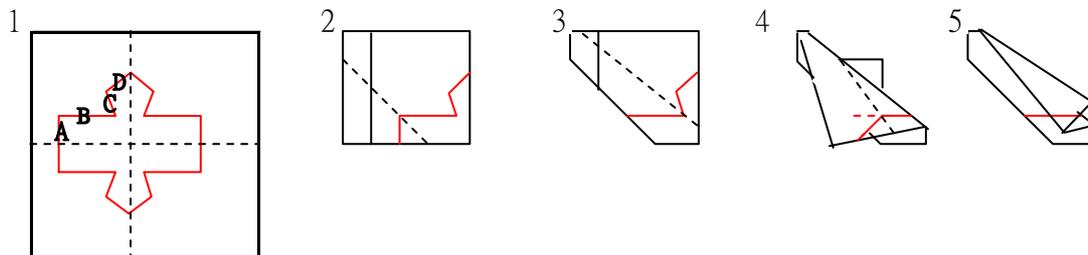
(二)四角柱

- 1.沿圖中二線摺，使之上下左右對稱
- 2.沿展開圖中間的縱線與橫線往上往左摺
- 3.沿著與 A、B 剪線呈 45° 且往右下斜、通過 A、B 剪線交點的線摺
- 4.沿著與 B、C 剪線呈 $\frac{180^\circ}{x}$ 且往右下斜、通過 B、C 剪線交點的線摺
- 5.沿著與 C、D 剪線呈 $90 - \frac{180^\circ}{x}$ 且往右下斜、通過 C、D 剪線交點的線摺
- 6.沿剪線剪



(三)五角柱

- 1.沿展開圖中間的縱線與橫線往上往左摺
- 2.沿著與 A、B 剪線呈 45° 且往右下斜、通過 A、B 剪線交點的線摺
- 3.沿著與 B、C 剪線呈 $\frac{180^\circ}{x}$ 且往右下斜、通過 B、C 剪線交點的線摺
- 4.沿著與 C、D 剪線呈 $90 - \frac{180^\circ}{x}$ 且往右下斜、通過 C、D 剪線交點的線摺
- 5.沿剪線剪



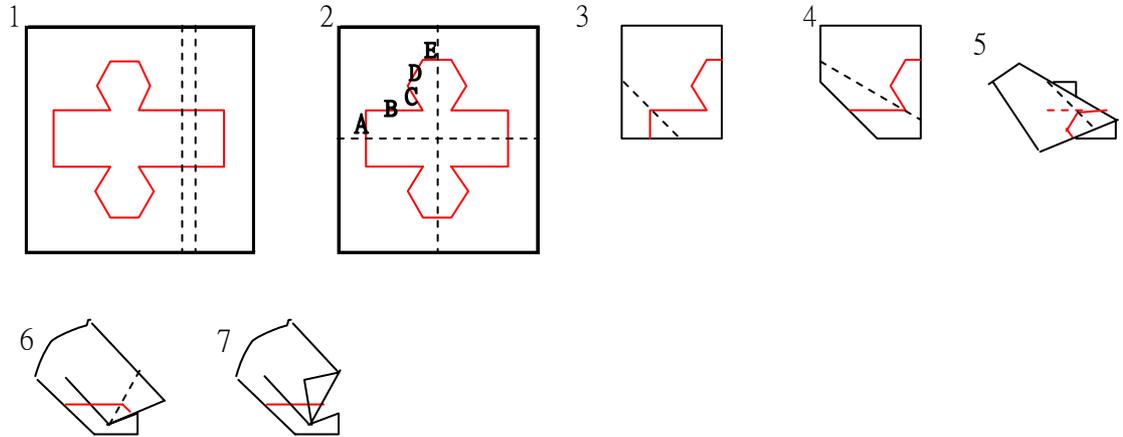
(四)六角柱

- 1.沿圖中二線摺，使之上下左右對稱(若為奇數角柱，則省略此步)
- 2.沿展開圖中間的縱線與橫線往上往左摺
- 3.沿著與 A、B 剪線呈 45° 且往右下斜、通過 A、B 剪線交點的線摺
- 4.沿著與 B、C 剪線呈 $\frac{180^\circ}{x}$ 且往右下斜、通過 B、C 剪線交點的線摺

5.沿著與 C、D 剪線呈 $90 - \frac{180^\circ}{x}$ 且往右下斜、通過 C、D 剪線交點的線摺

6.沿著與 D、E 剪線呈 $90 - \frac{180^\circ}{x}$ 且往左下斜、通過 D、E 剪線交點的線摺

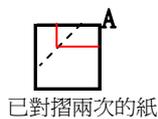
7.沿剪線剪



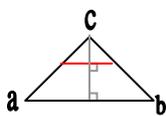
伍、研究結果

一、一刀剪出不同形狀的圖形

(一)長方形：要剪出長方形,照我們的摺法會摺出八個摺處，有四個摺處與剪線垂直不會形成角，另外四個摺處與剪線呈 45° 會形成直角，如圖，只要摺線不通過 A 點，則鄰邊不等長。後來我們發現重疊再紙上的三角形，如果越小，所剪出的長方形，長比寬的比例相差越大。



(二)正方形：我們沿兩條對角線對摺再對摺，如此不論怎麼剪四邊皆等長，然後沿著與 \overline{ca} 及 \overline{bc} 呈 45° 的線剪，便可剪出四個直角，而由於 \overline{ab} 也與 \overline{ca} 及 \overline{bc} 呈 45° ，所以剪線與 \overline{ab} 平行即可。

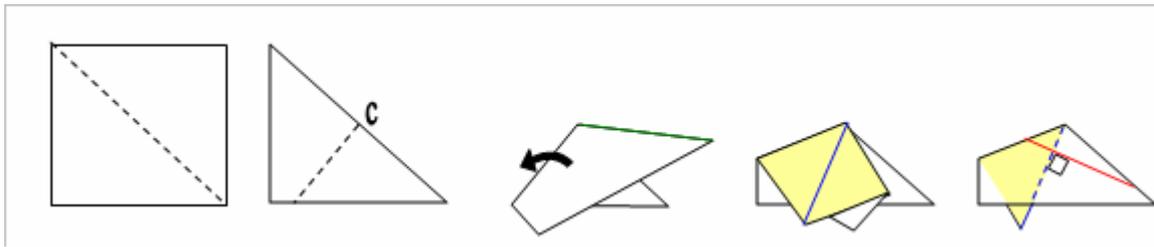


(三)三角形：

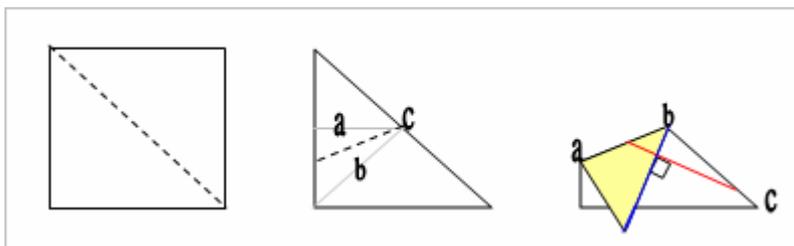
1.等腰三角形：如圖一剪出一個等腰三角形，經我們反覆摺弄後發現上圖中的黃色部分會被摺在裡面，若如圖二將它們摺在外面不但結果完全相同且簡易許多，而實驗後又發現若我們的摺線在圖二 a 線段上的話與藍色摺處垂直的剪線不可能與步驟二的 c 點所在線段(步驟 3 的 \overline{bc})相交；若摺線在 b 線段上的話藍色摺線會與步驟二的 c 點所在線段貼齊且剪線因與左邊的邊(步驟 3 的 \overline{ab})平

行，所以不會與其相交。最後我們得到的結論是：摺線必需在 $a \sim b$ 之間且不包括 a 、 b 線段。

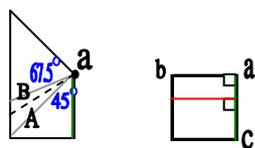
圖一



圖二



2. 直角三角形：此是我們從等腰三角形改一點而來，剪線之所以要與綠色線段垂直，是因為如此便正好與 a 點所在線段呈 45° (及 135°)，打開來後會呈 90° ，也就是直角。而圖中，若是沿著 A 線段摺，與綠色摺處(\overline{ca})垂直的剪線不會經過 \overline{ab} 。而若沿著 B 線段摺，便可摺出等腰直角三角形，若摺線再過去些便不行了。所以我們得知，摺線必須於 A 、 B 線段之間且包括 B 線段。

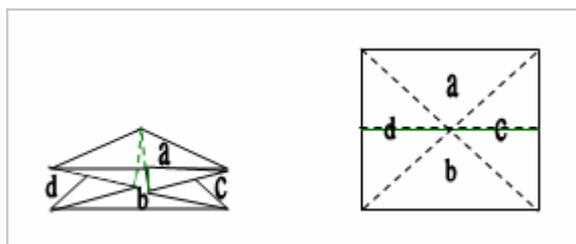


(四) 菱形：菱形的條件是有四個邊且皆等長，於是我們將正方形的紙沿著兩條對角線摺成四個等分，如此不論怎麼剪，四條邊都會等長。

(五) 箏形：既然剪出四個等長的邊要將紙摺成四等份，那要剪出兩對鄰邊分別等長的箏形，只要將紙摺成兩對相鄰部份分別相等即可，我們發現將紙對摺後上下兩層會相等，不管再怎麼摺上下兩層都會摺到並形成相等的兩部份，那麼將上層摺成兩個不相等的部份，下層就會有分別與上層相等的兩部份，如此加起來便有四部分，且兩兩相等。

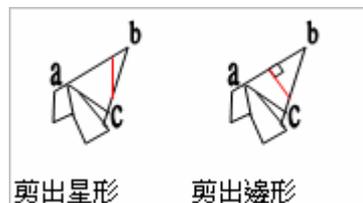
(六) 梯形：梯形是四邊形的一種，於是我們就先將正方形的紙沿對角線摺成四等分。根據菱形的經驗，不管怎麼剪，第一層跟第三層剪出來後都會平行，那麼我們只要想办法動到第二、四層，並不要動到第一、三層即可，但動第二和四層勢必會擴大或縮小第一和三層，經我們剪下去以後發現這只會縮短或延長平行的兩條邊，不會影響兩條邊之間的平行關係。

之後，我們又想：「那能不能找出一個不用工具量也能剪出左右對稱的摺法呢？」我們如下摺出了一個可以剪出六邊形的摺法。我們藉由剪線與綠色線段垂直消掉原本會在綠色摺處上形成的兩個角，使它成為四邊形。經多次試驗後得知只要剪線同時與兩條綠色摺處垂直，則 c 部分上的邊就會與 d 部分上的邊平行，而兩條綠色摺處要同時與一條線垂直，它們倆就要互相平行，由於它們的上端相交，要讓它們平行一定得互相貼齊為一條直線，我們又發現不論怎麼剪 a、b 兩部份上的邊都互相對稱，所以只要將綠色摺處同時往左或右拉並不影響 a、b 兩部份全等關係，然後剪線與綠色摺處垂直即可。



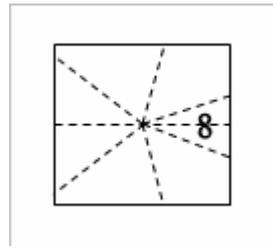
(七)星形：五角星總共有十個角，我們將它對摺後從未摺時的中央點每 $\frac{180^\circ}{5}$ 畫一條

線並沿這些線摺，剛好可將紙摺成十部分，有十個摺處也就是會形成十個角，我們如圖隨意剪，發現只要不剪出正五邊形，就會是正五角星星，而剪線不要與任一條摺處垂直就不會有五邊形。後來我們又發現其他正 n 角星形也可用同樣的方法。

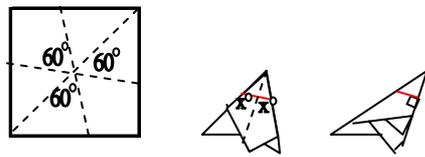


(八)正多邊形

1. 正 x(奇數)邊形：我們在比賽誰能先一刀剪出七邊形時剪出了一個。我們將它拿過來仔細地左瞧瞧，右瞧瞧，才發現它原本應該是八邊形的，因為其中一個該會形成角的摺處與剪線垂直如圖而未形成角，才形成了七角(七邊)。於是我們想如果要從中央畫出一個正七邊形，那就必須從中心點每 $\frac{360^\circ}{7}$ 畫一條直線並每條線都等長，同樣地，要剪出正七邊形就需每 $\frac{360^\circ}{7}$ 摺一摺，如此便有七個摺處，而第八個摺處安排在其中兩個摺處的中間(如圖)，我們沿著八個摺處摺了起來，為了不讓第八個摺處形成角，我們的剪線與其垂直。後來又發現其他正奇數邊形也可以套用此法。



- 2.正 x (偶數)邊形：我們的摺法會摺出 $2x$ 個摺處，其中有一半因為與剪線垂直而不會形成角，加上每個內角角度相等，所以會形成正 x 邊形。如圖(正六邊形為例)摺起來後畫出圖中的剪線剪下去也是可以剪出來，但是還要量，若沿中間縱線對摺，在沿著與摺處垂直的線剪，會簡易些。這種我們所用的方法也可剪出正奇數邊形。



二、一刀剪出 n 個小正方形

(一)平分成 n^2 個正方形 (n 需為正整數)

[n 為偶數]

- 1.將紙沿著兩條對角線對摺再對摺。
- 2.成三角形或五邊形時，從兩個腰邊上各畫出一條與腰邊垂直的直線，沿此兩條線摺。
 - (1)若橫的剪線有偶數條時，兩條線皆從腰邊上中間那兩條橫剪線中間處的高度畫出。
 - (2)若橫的剪線有奇數條時，兩條線皆從腰邊上最中間的那一條橫剪線的兩端畫出。
- 3.此時會成頂角在上的正方形或缺了下角的正方形，畫條相連左右角的直線或是相連左右角的直線下面的直線，沿此往上摺。
 - (1)若沒有剪線相連左右角時，則沿相連左右角的直線往上摺。
 - (2)若有剪線相連左右角時，則沿相連左右角的剪線及其下的剪線的中間處往上摺。
- 4.反覆二、三步驟直到只剩下兩條排成十字狀的剪線。
- 5.畫個跟十字剪線比起來旋轉了 45° 的十字，沿此二線摺。
- 6.沿剪線剪。

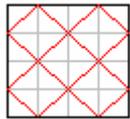
[n 為奇數]

- 1.將只沿著兩條對角線對摺再對摺 (與偶數同)
- 2.(我們將一開始兩條剪線中間的寬或高稱為一格寬或高)成三角形或五邊形時，從最下面的那條邊上的中間或中間的兩旁畫出兩條分別與左右腰邊垂直的線，並沿此摺

- (1)若最下面那一列是半格高時，兩條線皆從底邊的中間處畫出。
- (2)若最下面那一列是一格高時，兩條線分別從最下列中間那一格底邊的兩端畫出。
- 3.此時會成頂角在上的正方形或缺了下角的正方形，畫條相連左右角的直線 或是相連左右角的直線下面的直線，沿此往上摺 (與偶數同)。
 - (1)若沒有剪線相連左右角時，則沿相連左右角的直線往上摺。
 - (2)若有剪線相連左右角時，則沿相連左右角的剪線及其下的剪線的中間處往上摺。
- 4.反覆二、三步驟直到剩下一條剪線。
- 5.沿剪線剪。

(二) $m \times m$ 的網格中，如圖剪出正方形

m 為偶數：1.沿中間線往上摺、往左摺，重複此步驟直到網格成奇數 \times 奇數，跳到「 m 為奇數」的步驟 (若網格是 2 的次方 \times 2 的次方且次方數為正整數，則可以靠重複此步驟摺到剩一條剪線【 1×1 的網格】，剪下去即可，不需跳到「 m 為奇數」的步驟)

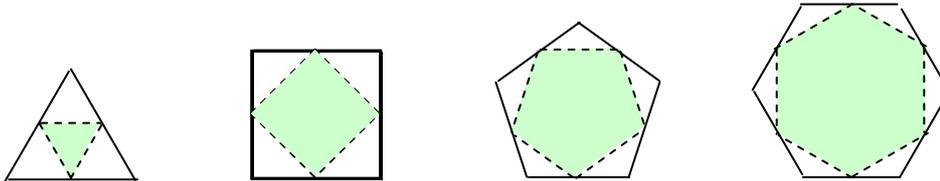


m 為奇數：1.正方形有兩條對角線，沿著沒有剪線的那一條對角線往左上角或右上角摺。

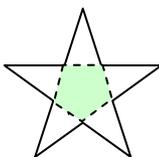
2. 跳至「平分成 n^2 個正方形， n 為偶數」步驟二 ~ 五。

三、錐體

動動腦：正三角形恰是正三角錐的展開圖，那麼正方形、正五邊形、正六邊形也會是正四角錐、正五角錐、正六角錐的展開圖嗎？



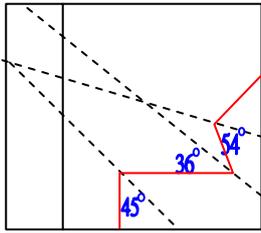
根據上圖我們知道除了正三角形的白色部份大於綠色部分外，正方形白色部份等於綠色部分、正五、六邊形白色部份小於綠色部分都無法組成錐體，正七邊形、正八邊形.....也就更不行了。所以並不是所有星形都可組成錐體，星形的白色部分必須大於綠色部分才可組成錐體(如下圖所示)。



四、柱體

我們是先畫好剪線再試著藉由將各條剪線疊在一起的方法做出來的。得知摺線必須介於要重疊的兩條剪線之間，而剪線的角度是有規則的。如圖我們得知 A、B 剪線間的摺線需與 A、B 剪線呈 $90 \div 2 = 45^\circ$ ；B、C 剪線間的摺線需與 B、C 剪線

線呈 $[180^\circ - 180^\circ (x-2) \div x] \div 2 = 180^\circ \div x$; C、D 剪線間的摺線需與 C、D 剪線呈 $180^\circ (x-2) \div x \div 2 = 90^\circ - 180^\circ \div x$, 而若照圖中排列的方法算來有 E、F、G……剪線, 摺線與它們一樣也呈 $90^\circ - 180^\circ \div x$ 。



陸、討論

一、一刀剪出各種形狀各需要摺幾摺(次)呢?

二、「 $m \times m$ 的網格中, 如圖剪出正方形」到底會剪出幾個正方形呢?

柒、結論

一、一刀剪出不同形狀的圖形

(一)長方形：摺 3 次

(二)正方形：摺 2 次

(三)三角形

1.等腰三角形：摺 2 次

2.直角三角形：摺 5 次

(四)菱形：摺 2 次

(五)箏形：摺 2 次

(六)梯形 I：摺 2 次

(七)正 x 角星形：摺 x 次

(八)正多邊形

1.正 x (奇數)邊形：摺 $(x+1) \div 2$ 次

2.正 x (偶數)邊形：摺 x 次

二、一刀剪出 n 個小正方形

(一)平分成 n^2 個正方形

2^2 個摺 2 次, 4^2 個摺 6 次, 6^2 個摺 9 次, 8^2 個摺 12 次

3^2 個摺 7 次, 5^2 個摺 10 次, 7^2 個摺 10 次, 9^2 個摺 13 次

(二) $m \times m$ 的網格中, 如圖剪出正方形

1. m 為偶數：我們發現總共會有 $m-1$ 列的正方形, 而總是第一列有 $\frac{m}{2}$, 下一列有

$\frac{m}{2}-1$ 個, 再下一列有 $\frac{m}{2}$ 個一直輪流且 $\frac{m}{2}$ 個的列數比 $\frac{m}{2}-1$ 個的列數多一列。於是

得知 $\frac{m}{2}-1$ 個正方形的列共有 $\frac{m-1-1}{2}$ 列, 而 $\frac{m}{2}$ 個正方形的列共有 $1+\frac{m-1-1}{2}$

列, 於是正方形共有：

$$\frac{m-1-1}{2} \times (\frac{m}{2}-1) + (1+\frac{m-1-1}{2}) \times \frac{m}{2}$$

$$= \frac{m-2}{2} \times \frac{m-2}{2} + \frac{m}{2} \times \frac{m}{2}$$

$$= \left(\frac{m-2}{2}\right)^2 + \left(\frac{m}{2}\right)^2 \text{ 個}$$

2.m 為奇數：我們發現總共會有 m-1 列的正方形，而每列皆有 $\frac{m-1}{2}$ 個

$$\frac{m-1}{2} \times (m-1)$$

$$= \frac{(m-1)^2}{2} \text{ 個}$$

三、錐體：x 角錐摺 x 次

四、柱體

奇數角柱摺 $3+(x-1) \div 2$ ；偶數角柱摺 $5+x \div 2$ 次

捌、參考資料及其他

科學研習

http://www.math.ntnu.edu.tw/~cyc/_private/mathedu/me11/pptofspeakers/%B3%AF%B3%D0%B8q.ppt

<http://www.mathland.idv.tw/>

<http://residence.educities.edu.tw/kuen/>

評 語

030407 神奇一刀剪

主題有趣，操作步驟解說清楚有條理，對於對稱性的瞭解有所助益。

部分事先繪圖，再依圖剪開，少有數學論述，應加強具數學性質的工作。