

中華民國第四十六屆中小學科學展覽會
作品說明書

國中組 數學科

第二名

030425

神奇的傑克

學校名稱： 高雄市立龍華國民中學

作者：	指導老師：
國三 葉芸瑄	許建銘
國三 陳以箴	蕭鳳主
國二 蘇楚涵	
國二 趙祐麟	

關鍵詞：神奇的傑克、傑克、正方形

神奇的傑克

摘要

如果將正方形的頂點比擬成它的「手」，兩對角線的交點當成它的「心」，則兩個正方形頂點間、中心點間、或頂點與中心點間的線段相連（或重合），就如同「手」或「心」彼此相連。

我們將四個正方形的某種特殊組合，稱為「傑克結構」(Jack Structure)，它是本研究的圖形主體架構。本文主要探討當傑克「四心相連」，「心手相連」，和「手手相連」，不同連接情況下所連出的四線段，向外作正方形時，連接這些正方形之中心點而成的四邊形，甚至再以此四邊形的四個邊為邊分別向外作正方形，並將四個心相連，這樣一層一層的的不斷擴展下去，推導所連成的每一層四邊形與基準正方形 (Reference Square) 之間的面積關係，並試圖發現不同連接情況下，同一層四邊形間的面積關係。

神奇的傑克

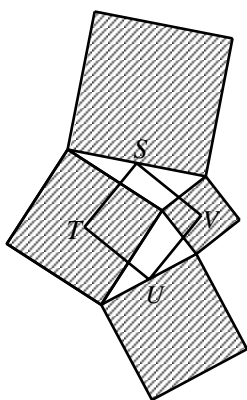
壹、研究動機：

有一次上資優班充實課程的時候，老師提出數學競賽試題中一道有關正方形的問題與同學討論解法，甚至老師還改變問題條件，讓同學嘗試算出答案。由於這次的解題與命題經驗，讓我們得到研究靈感，並確立這個研究主題。

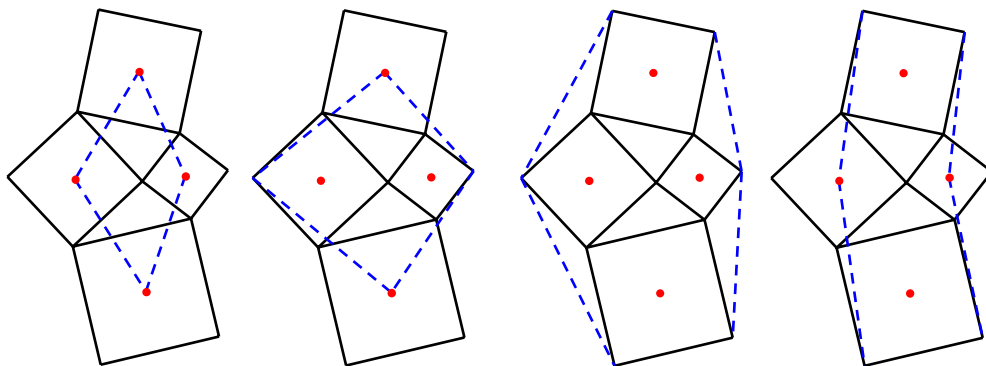
貳、研究目的：

正方形的頂點就好比是它的「手」，兩對角線的交點（即旋轉中心）又似它的「心」，而兩個正方形頂點間或旋轉中心間的線段相連（或重合），也如同「手」或「心」彼此相連。我們將如下圖(一)四個斜線正方形的特殊組合，稱為「傑克結構」(Jack Structure)，它是我們研究圖形的主要架構，而正方形 $STUV$ (T 、 V 分別是兩正方形的中心點)，我們稱之為基準正方形 (Reference Square)。

本文主要探討當傑克「四心相連」，「心手相連」，和「手手相連」，不同連接情況下所連出的四線段，向外作正方形時，連接這些正方形之中心點而成的四邊形，甚至再以此四邊形的四個邊為邊分別向外作正方形，並將四個心相連，這樣一層一層的的不斷擴展下去，推導所連成的每一層四邊形與基準正方形 (Reference Square) 之間的面積關係，並試圖發現不同連接情況下，同一層四邊形間的面積關係。



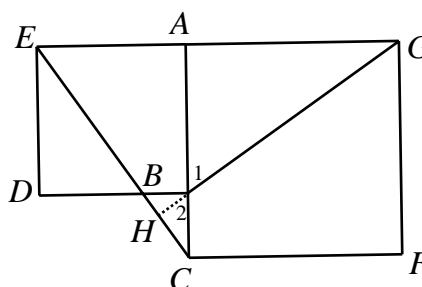
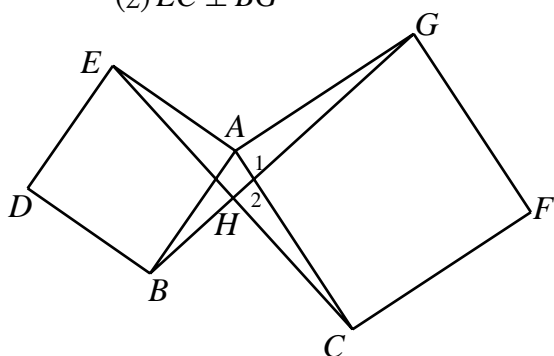
圖(一)

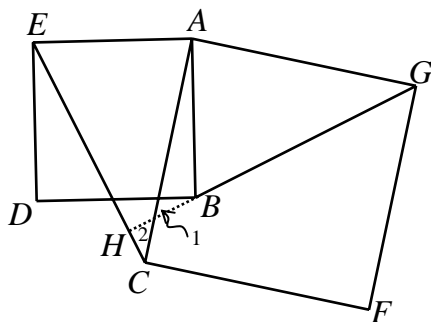


圖(二)

參、預備知識：

【知識 A】如以下三個圖形，四邊形 $ABDE$ 和 $ACFG$ 皆為正方形，試證：(1) $\overline{EC} = \overline{BG}$ ；
(2) $\overline{EC} \perp \overline{BG}$ 。





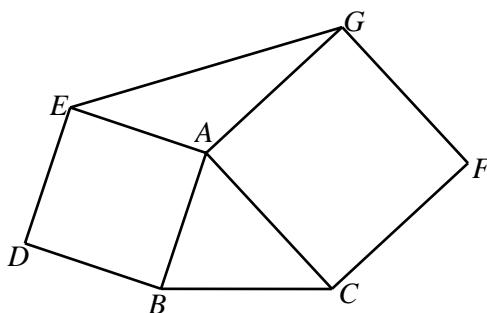
【證明】

- (1) $\ominus \overline{AE} = \overline{AB}$, $\overline{AC} = \overline{AG}$, $\angle EAC = \angle BAG$ $\therefore \triangle EAC \cong \triangle BAG$ 故得證： $\overline{EC} = \overline{BG}$ 。
 (2) 由 $\triangle EAC \cong \triangle BAG \Rightarrow \angle AGB = \angle ACE$

又 $\angle 1 = \angle 2 \therefore \angle GHC = \angle GAC = 90^\circ$

故得證： $\overline{EC} \perp \overline{BG}$ 。

【知識 B】如右圖，以 $\triangle ABC$ 的兩邊 \overline{AB} 、 \overline{AC} 為一邊各向外作正方形 $ABDE$ 和正方形 $ACFG$ 。試證： $\triangle AEG$ 面積 = $\triangle ABC$ 面積。



【證明】

- (1) 令 $\overline{AE} = x$, $\overline{AC} = y$, $\angle BAC = \alpha$ ($\alpha \leq \frac{\pi}{2}$) , 則 $\angle EAG = \pi - \alpha$ 。

- (2) $\triangle ABC$ 面積 = $\frac{1}{2} xy \sin \alpha = \frac{1}{2} xy \sin(\pi - \alpha) = \triangle AEG$ 面積

故得證： $\triangle AEG$ 面積 = $\triangle ABC$ 面積。

【另證】如下圖

- (1) 在 \overline{AE} 的延長線上取點 H , 使得 $\overline{AH} = \overline{AE}$, 連 \overline{HG} 。

- (2) $\ominus \angle 1 + \angle 3 = \angle 2 + \angle 3 = 90^\circ \therefore \angle 1 = \angle 2$ 。

- (3) 由 $\angle 1 = \angle 2$, $\overline{AB} = \overline{AE} = \overline{AH}$, $\overline{AC} = \overline{AG}$

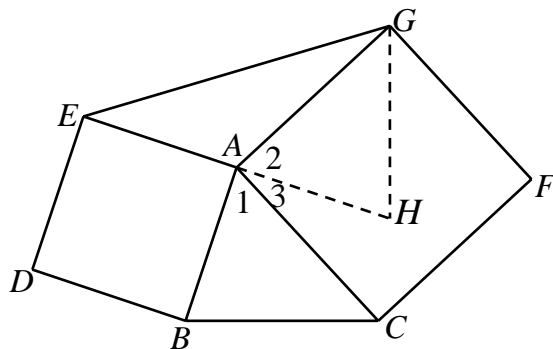
$\Rightarrow \triangle ABC \cong \triangle AHG$

(以上如同以 A 為中心，將 $\triangle ABC$ 逆轉 90° 成 $\triangle AHG$ 。)

- (4) $\ominus \overline{GA}$ 為 $\triangle GEH$ 在 \overline{EH} 邊上的中線

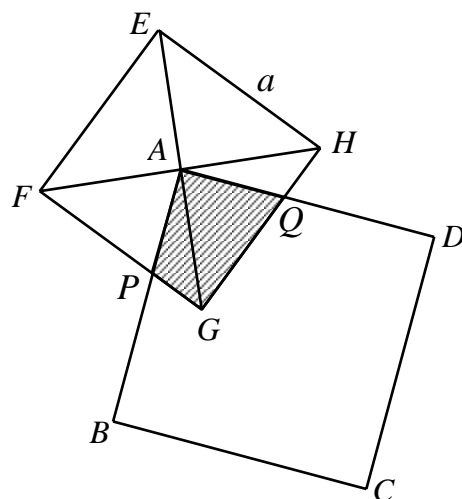
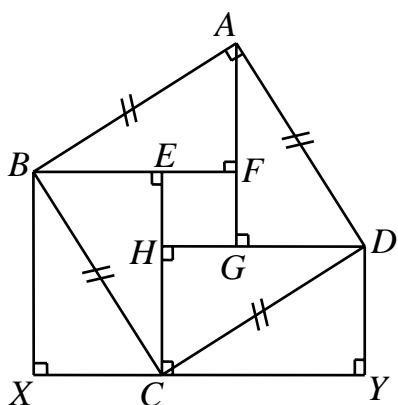
$\therefore \triangle AEG$ 面積 = $\triangle AHG$ 面積

故得證： $\triangle AEG$ 面積 = $\triangle ABC$ 面積。



【知識 C】如下頁左圖， $ABCD$ 為一正方形，而且 $\overline{BX} \perp \overline{XY}$, $\overline{DY} \perp \overline{XY}$, 若 $\overline{BF} \parallel \overline{DH} \parallel \overline{XY}$, $\overline{AG} \parallel \overline{EC} \parallel \overline{BX}$, 則 $\triangle ABF \cong \triangle DAG \cong \triangle CDH \cong \triangle BCE \cong \triangle CBX \cong \triangle DCY$ 。

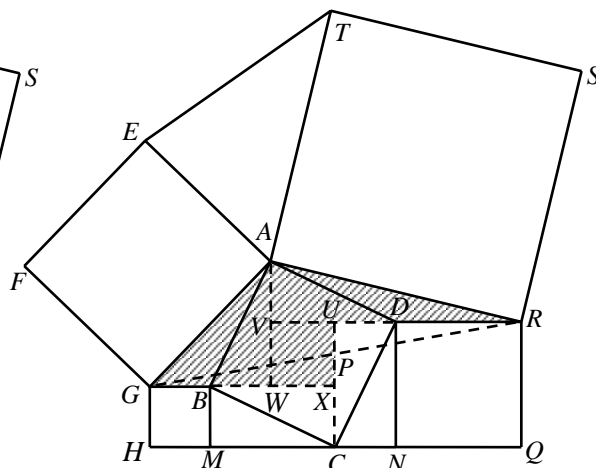
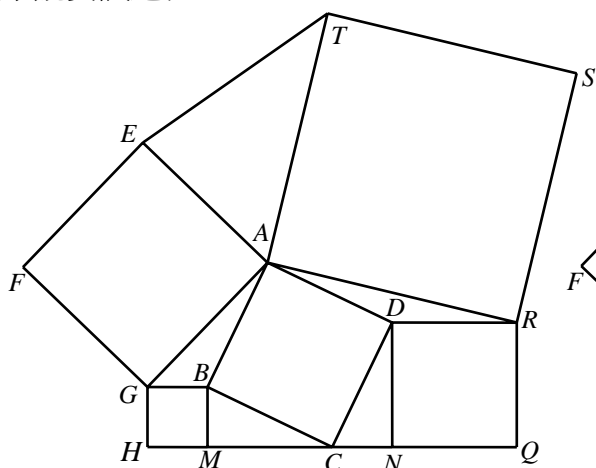
【知識 D】如下頁右圖，將一個正方形 $ABCD$ 的頂點 A 置於另一個正方形 $EFGH$ 的兩對角線的交點上，若正方形 $EFGH$ 的邊長為 a , 則兩正方形斜線重疊處的面積為 $\frac{1}{4} a^2$ 。



肆、研究過程：

(一)、從學習經驗尋找靈感，再發展新命題：

【問題 1】如下左圖，四邊形 $ABCD$ 、 $AEFG$ 、 $BGHM$ 、 $DNQR$ 、 $ARST$ 均為正方形，且 H 、 M 、 C 、 N 、 Q 五點共線， $\overline{HM} < \overline{NQ}$ ，若 $\overline{AB} = 3$ ，求：(1) $\triangle AET$ 的面積；(2) 正方形 $AEFG$ 與 $ARST$ 的面積和。(3) 正方形 $ABCD$ 、 $AEFG$ 、 $BGHM$ 、 $DNQR$ 、 $ARST$ 的面積和。(改寫自數學競賽試題)



【解答】如上右圖

(1) 分別延長 \overline{GB} 、 \overline{RD} ，使 $\overline{BX} = \overline{CM}$ ， $\overline{DV} = \overline{DR}$ 。

作 $\overline{AV} \perp \overline{BX}$ ， $\overline{CX} \perp \overline{DV}$ ，垂足分別為 W ， U ，連 \overline{GR} 交 \overline{CU} 於點 P 。

⊙ $\triangle BMC \cong \triangle CND$ $\therefore \overline{BM} = \overline{CN}$ ， $\overline{CM} = \overline{DN}$ 。

⊙ $\overline{UR} \parallel \overline{GX}$ ， $\overline{UR} = \overline{GX}$ $\therefore \triangle RUP \cong \triangle GXP$

$\Rightarrow \triangle AGR$ 的面積 = 多邊形 $AGXUR$ 的面積 (如上圖中的斜線區域)

又 $\triangle AGB$ 面積 = $\triangle BMC$ 面積 = $\triangle BXC$ 面積， $\triangle ADR$ 面積 = $\triangle DNC$ 面積 = $\triangle CUD$ 面積

故 $\triangle AET$ 面積 = $\triangle AGR$ 面積 = 正方形 $ABCD$ 面積 = $3^2 = 9$ 。

(2) 令 $\overline{BM} = a$ ， $\overline{CM} = b$

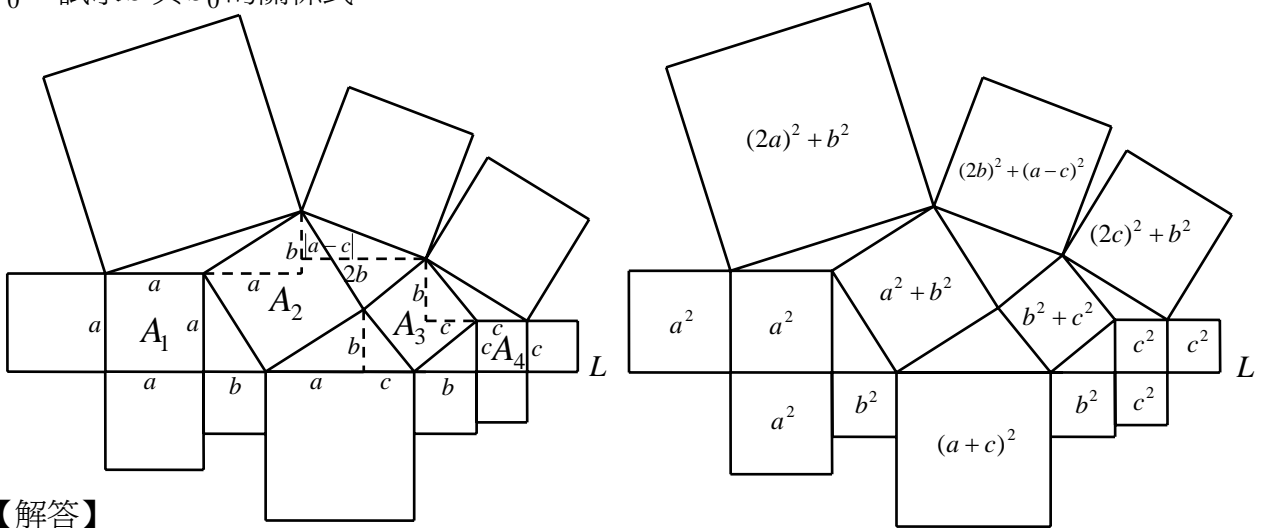
$$\therefore \overline{AG}^2 = (2a)^2 + b^2 = 4a^2 + b^2, \quad \overline{AR}^2 = (2b)^2 + a^2 = 4b^2 + a^2$$

$$\Rightarrow \text{正方形 } AEFG \text{ 與 } ARST \text{ 的面積和} = 5a^2 + 5b^2 = 5 \times (a^2 + b^2)$$

$$= \text{正方形 } ABCD \text{ 面積的 } 5 \text{ 倍} = 3^2 \times 5 = 45$$

(3)五個正方形 $ABCD$ 、 $AEFG$ 、 $BGHM$ 、 $DNQR$ 、 $ARST$ 的面積和為 $45+9+9=63$ 。

【問題 2】如下圖， A_1 、 A_2 、 A_3 、 A_4 皆為正方形（也當成其面積），其中 A_1 與 A_4 各有一邊重疊在直線 L 上， A_2 與 A_3 各有一個頂點落在直線 L 上。圖中除正方形 A_1 、 A_2 、 A_3 、 A_4 以外，還有另十個正方形，假設這十個正方形面積和為 S ，正方形 A_1 、 A_2 、 A_3 、 A_4 面積和為 S_0 ，試求 S 與 S_0 的關係式。



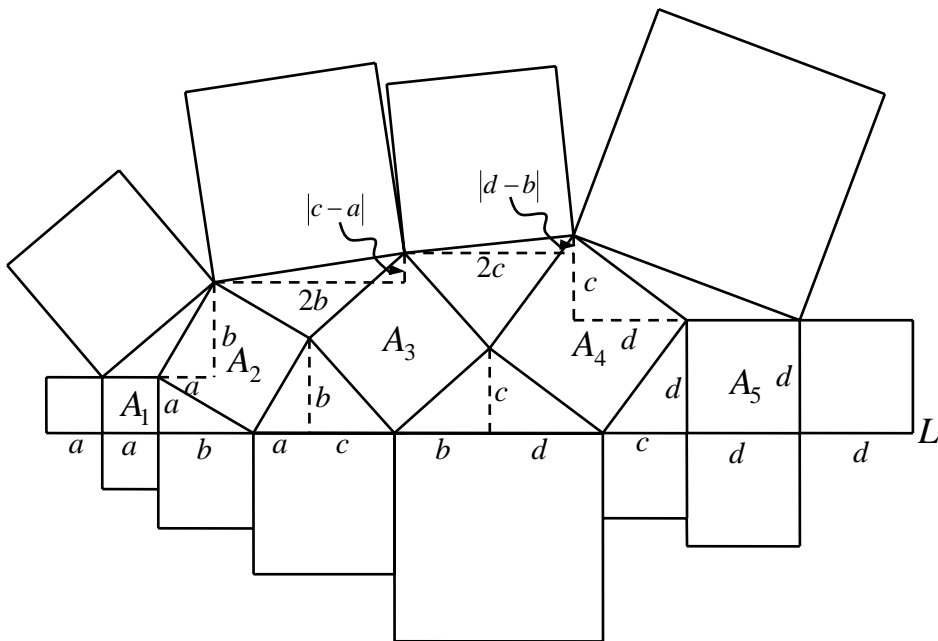
【解答】

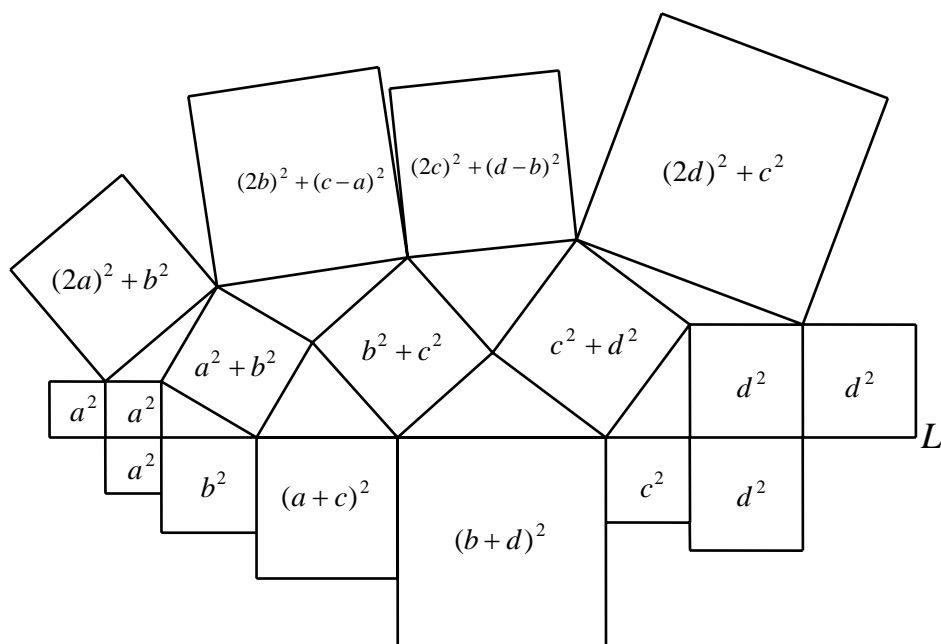
我們先作一些與直線 L 互相平行或垂直的線段（如上左圖的虛線部分），並將有一邊重疊於直線 L 上的正方形邊長以代數表示（如圖中的 a 、 b 、 c ），可依序推知一些直角三角形的兩股長，並表示出所有正方形的面積（如上右圖）。

$$\therefore S = (4a^2 + b^2) + (4b^2 + a^2 - 2ac + c^2) + (4c^2 + b^2) + c^2 + c^2 + b^2 + (a^2 + c^2 + 2ac) + b^2 + a^2 + a^2 = 8a^2 + 8b^2 + 8c^2$$

$$\text{而 } S_0 = a^2 + (a^2 + b^2) + (b^2 + c^2) + c^2 = 2a^2 + 2b^2 + 2c^2 \quad \text{故推得：} S = 4S_0。$$

【推論】較前一問題的圖再多一個正方形（指的是「恰有一頂點落在直線 L 上的正方形」，如下圖）。





$$\begin{aligned} \therefore S &= (4a^2 + b^2) + (4b^2 + c^2 - 2ac + a^2) + (4c^2 + d^2 - 2bd + b^2) + (4d^2 + c^2) + d^2 \\ &\quad + d^2 + c^2 + (b^2 + d^2 + 2bd) + (a^2 + c^2 + 2ac) + b^2 + a^2 + a^2 = 8a^2 + 8b^2 + 8c^2 + 8d^2 \end{aligned}$$

而 $S_0 = a^2 + (a^2 + b^2) + (b^2 + c^2) + (c^2 + d^2) + d^2 = 2a^2 + 2b^2 + 2c^2 + 2d^2$ 故推得： $S = 4S_0$ 。

【引理 1】 $ABCD$ 、 $FRSH$ 、 $CEFG$ 、 $DGHQ$ 皆為正方形，試證：正方形 $ABCD$ 與 $FRSH$ 的面積和 = 正方形 $CEFG$ 與 $DGHQ$ 面積和的 2 倍。

【證明】

(1) 顯然當 $\overline{CD} = \overline{FH}$ 時，本引理成立。

以下假設 $\overline{CD} < \overline{FH}$ ，則不失一般性。

(2) 以 G 為旋轉中心，將 $\triangle GCD$ 與正方形 $ABCD$

順轉 90° 成 $\triangle GC'D'$ 正方形 $A'B'C'D'$ 。

(3) $\ominus \overline{GF} = \overline{GC'}$ ， $\overline{GD} = \overline{GD'} = \overline{GH}$ ，

$$\angle FGH + \angle C'GH = 180^\circ$$

$\therefore \overline{HG}$ 為 $\triangle HFC'$ 的一中線。

(4) 作 $\overline{HK} \perp \overline{FC'}$ ，垂足為 K

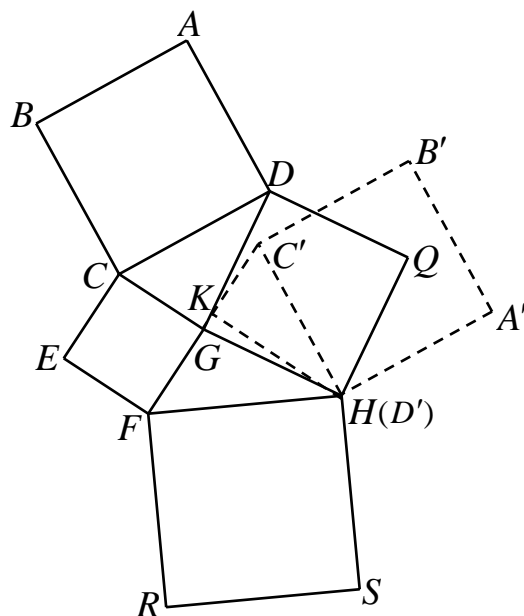
$$\begin{aligned} \overline{CD}^2 &= \overline{C'H}^2 = (\overline{GC'} - \overline{GK})^2 + \overline{KH}^2 \\ &= \overline{GC'}^2 - 2\overline{GC'} \times \overline{GK} + \overline{GH}^2 \dots\dots ① \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overline{FH}^2 &= (\overline{FG} + \overline{GK})^2 + \overline{KH}^2 = \overline{FG}^2 + 2\overline{GF} \times \overline{GK} + \overline{GK}^2 + \overline{KH}^2 \\ &= \overline{FG}^2 + 2\overline{GC'} \times \overline{GK} + \overline{GH}^2 \dots\dots ② \end{aligned}$$

(5) 由 ① + ② $\Rightarrow \overline{CD}^2 + \overline{FH}^2 = 2\overline{FG}^2 + 2\overline{GH}^2$

故得證：正方形 $ABCD$ 與 $FRSH$ 的面積和 = 正方形 $CEFG$ 與 $DGHQ$ 的面積和 2 倍。

【另證】



(1) 令 $\overline{CG} = x$, $\overline{GD} = y$, $\angle CGD = \alpha$ ($\alpha \leq \frac{\pi}{2}$) , 則 $\angle FGH = \pi - \alpha$ 。

(2) 由餘弦定理 $\Rightarrow \overline{CD}^2 = x^2 + y^2 - 2xy \cos \alpha$, $\overline{FH}^2 = x^2 + y^2 - 2xy \cos(\pi - \alpha)$

$$\therefore \overline{CD}^2 + \overline{FH}^2 = x^2 + y^2 - 2xy \cos \alpha + x^2 + y^2 - 2xy \cos(\pi - \alpha)$$

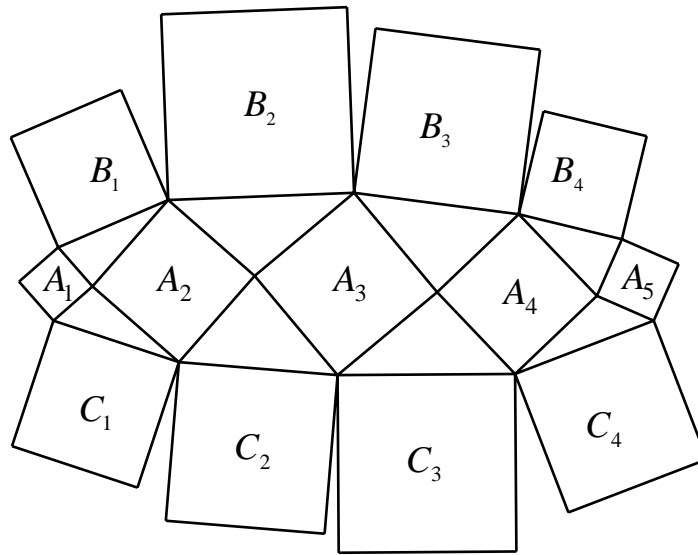
$$= x^2 + y^2 - 2xy \cos \alpha + x^2 + y^2 + 2xy \cos \alpha = 2(x^2 + y^2)$$

故得證：正方形 $ABCD$ 與 $FRSH$ 的面積和 = 正方形 $CEFG$ 與 $DGHQ$ 的面積和 2 倍。

依據以上的引理，可推得下圖中的正方形面積有以下的關係：

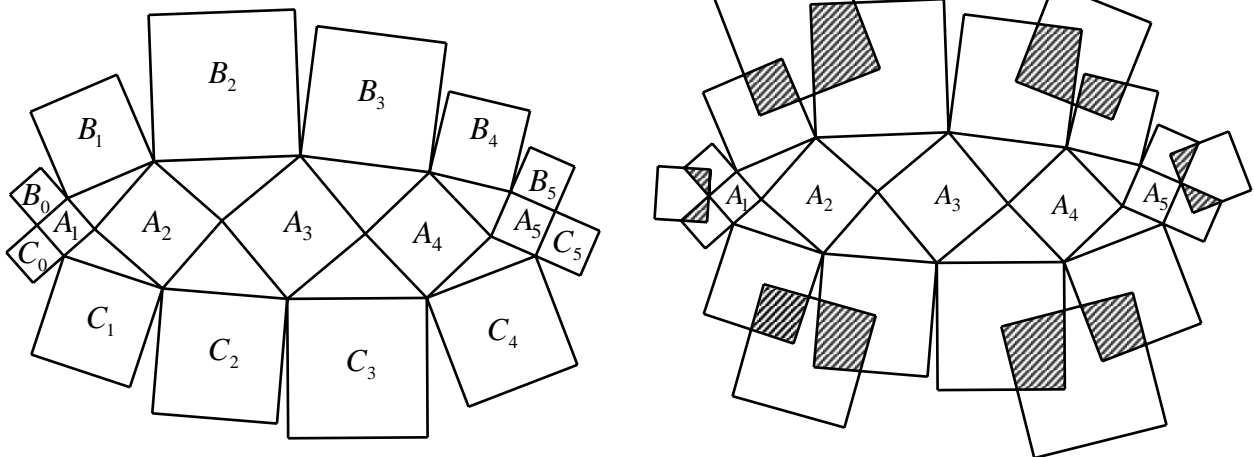
$$B_1 + C_1 = (A_1 + A_2) \times 2 \quad , \quad B_2 + C_2 = (A_2 + A_3) \times 2 \quad , \quad B_3 + C_3 = (A_3 + A_4) \times 2 \quad ,$$

$$B_4 + C_4 = (A_4 + A_5) \times 2 \quad \Rightarrow \quad \sum_{i=1}^4 (B_i + C_i) = 2A_1 + 4A_2 + 4A_3 + 4A_4 + 2A_5$$



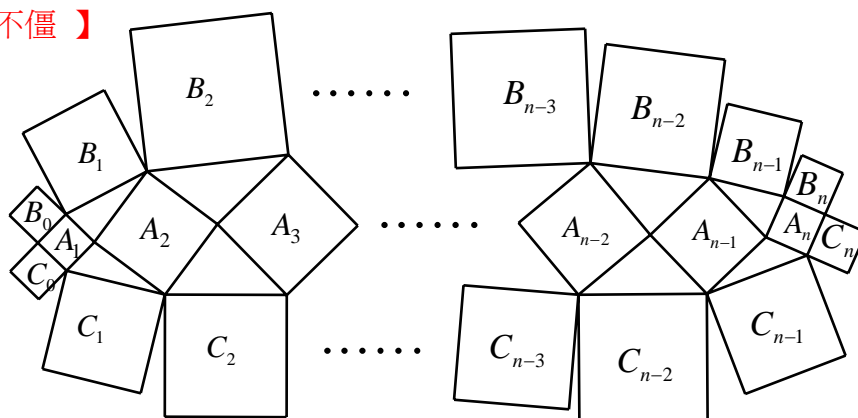
\therefore 若在 A_1 與 A_5 兩個正方形的邊再各添加兩個正方形（如下圖之 B_0 、 C_0 、 B_5 、 C_5 ），則可推得各正方形間的面積有以下關係：

$$\sum_{i=1}^6 (B_{i-1} + C_{i-1}) = 4 \times \sum_{j=1}^5 A_j$$



我們依序作出 $B_0、C_0；B_5、C_5；B_1、B_2；B_3、B_4；C_1、C_2；C_3、C_4$ 兩個相鄰正方形的中心點連線段，並以這六條線段為邊向外作六個正方形，這些新作正方形與前述正方形的重疊面積和（如上頁圖示）會等於 $A_1、A_2、A_3、A_4、A_5$ 的面積和。

【百足之蟲，死而不僵】



若 $A_1、A_2、\dots、A_n；B_0、B_1、B_2、\dots、B_n；C_0、C_1、C_2、\dots、C_n$ 皆表正方形（面積）

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n+1} (B_{i-1} + C_{i-1}) = 4 \times \sum_{j=1}^n A_j$$

(二)、確立主體架構，向外探求生機：

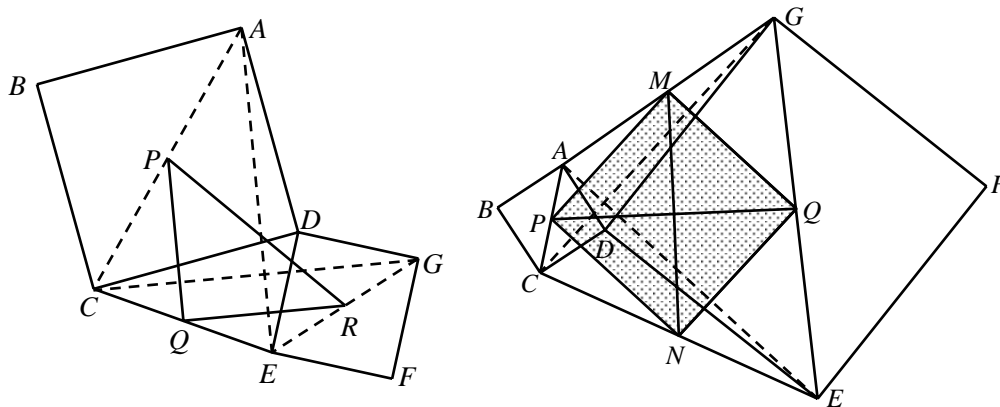
【引理 2】 $P、R$ 分別為正方形 $ABCD、DEFG$ 的中心點， Q 為 \overline{CE} 的中點，試證： ΔPQR 為等腰直角三角形。

【證明】

- (1) 連 $\overline{AE}、\overline{CG}、\overline{AC}、\overline{EG}$ 。
- (2) $\ominus ABCD、DEFG$ 為正方形 $\therefore \overline{AE}$ 與 \overline{CG} 互相垂直， $\overline{AE} = \overline{CG}$ 。
- (3) $\ominus P、Q$ 分別為 \overline{AC} 與 \overline{CE} 中點 $\therefore \overline{PQ} = \frac{1}{2} \overline{AE}$ ， $\overline{PQ} \parallel \overline{AE}$ 。

同理可證： $\overline{QR} = \frac{1}{2} \overline{CG}$ ， $\overline{RQ} \parallel \overline{CG}$ 。

- (4) 由(2)和(3) $\Rightarrow \overline{PQ} \perp \overline{QR}$ ， $\overline{PQ} = \overline{QR}$ ，故得證： ΔPQR 為等腰直角三角形。



【引理 3】 $P、Q$ 分別為正方形 $ABCD、DEFG$ 的中心點， $M、N$ 分別為 $\overline{AG}、\overline{CE}$ 的中點，

試證： $MPNQ$ 為正方形。

【證明】由引理 2 可推知 $\triangle PNQ$ 與 $\triangle PMQ$ 皆為等腰直角三角形，故得證： $MPNQ$ 為正方形。

【定理 1】 $ABCD$ 、 $CEQP$ 、 $DEFG$ 、 $AGNM$ 皆為正方形， T 、 R 、 V 、 H 分別是各個正方形的中心點， S 、 U 分別是 \overline{AG} 、 \overline{CE} 的中點，試證：(I) $\overline{HD} = \overline{DR}$ ；(II) \overline{HR} 與 \overline{TV} 互相垂直；(III) 四邊形 $HTRV$ 的面積 = (正方形 $STUV$ 面積) $\times 2$ 。
(如下圖，我們將四個斜線正方形的特殊組合，稱為「傑克結構」(Jack Structure)，此圖是下段研究圖形的主架構，而正方形 $STUV$ 稱為「基準正方形」(Reference Square)。)

【證明】如下圖

(I)

(1) 連 \overline{AC} 、 \overline{AN} 、 \overline{GE} 。

(2) 以 D 點為旋轉中心，將 $\triangle ADG$ 、正方形 $AGNM$ 、 \overline{AN} 與 \overline{DH} 分別順轉 90° 而成 $\triangle A'DE$ 、正方形 $A'EN'M'$ 、 $\overline{A'N'}$ 與 $\overline{DH'}$ $\Rightarrow \overline{DA'} = \overline{DA} = \overline{DC}$ ， $\angle CDA + \angle ADA' = 180^\circ$ 。

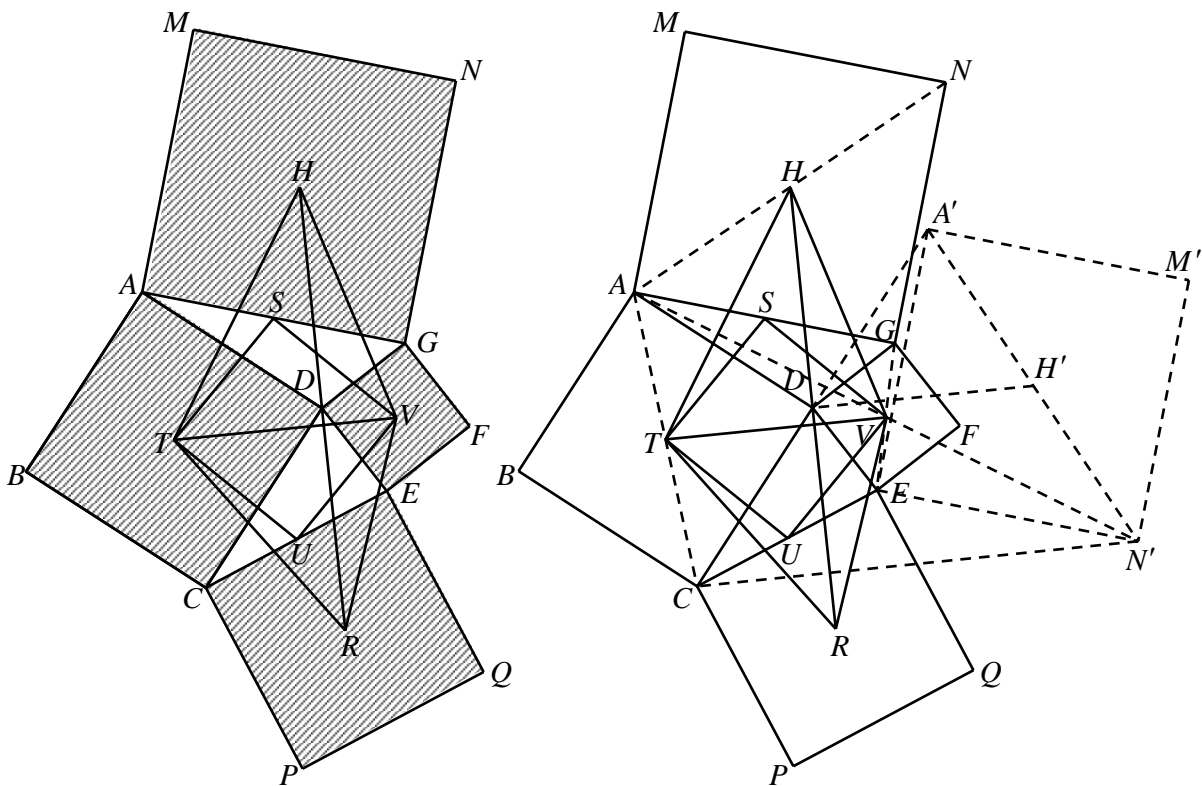
(3) 由引理 2 $\Rightarrow \overline{DR} = \overline{DH'}$ ， $\overline{DR} \perp \overline{DH'}$

又 $\overline{DH} = \overline{DH'}$ $\Rightarrow \angle HDH' + \angle H'DR = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$

(4) 故得證： $\overline{HD} = \overline{DR}$ ， H 、 D 、 R 三點共線。

(II)

(1) 連 \overline{AV} 、 $\overline{VN'}$ 、 $\overline{CN'}$ 。



(2) 在 $\triangle AVG$ 與 $\triangle N'VE$ 中 $\ominus \overline{AG} \parallel \overline{EN'}$ $\therefore \angle AGV = \angle N'VE$ 又 $\overline{AG} = \overline{EN'}$ ， $\overline{GV} = \overline{EV}$
 $\therefore \triangle AVG \cong \triangle N'VE \Rightarrow \overline{AV} = \overline{VN'}$ ，且 A 、 V 、 N' 三點共線。

$$(3) \ominus \overline{AV} = \overline{VN'}, \overline{AT} = \overline{TC} \quad \therefore \overline{TV} \parallel \overline{CN'}, \overline{TV} = \frac{1}{2} \overline{CN'}$$

$$\ominus \overline{A'D} = \overline{DC}, \overline{A'H'} = \overline{H'N'} \quad \therefore \overline{DH'} \parallel \overline{CN'}, \overline{DH'} = \frac{1}{2} \overline{CN'}$$

$$\Rightarrow \overline{TV} \parallel \overline{DH'}, \overline{TV} = \overline{DH'} = \overline{DH}$$

(4) $\ominus \overline{HR} \perp \overline{DH'}$ 故得證： \overline{HR} 與 \overline{TV} 互相垂直。

(III)

$$(1) \text{HTRV 的面積} = \frac{1}{2} \times \overline{HR} \times \overline{TV} = \frac{1}{2} \times 2\overline{DH} \times \overline{TV} = \overline{DH} \times \overline{TV}$$

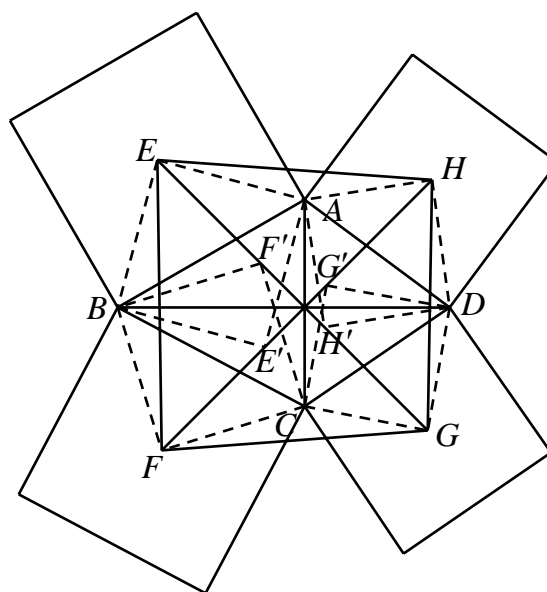
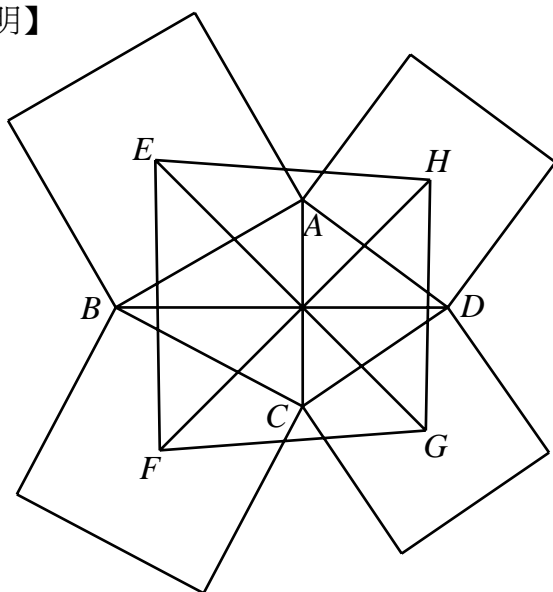
$$(2) \ominus \overline{DH} = \overline{TV} \quad \therefore \text{HTRV 的面積} = \overline{TV}^2 = 2 \times \overline{ST}^2$$

故得證：四邊形 HTRV 的面積 = (正方形 STUV 面積) $\times 2$ 。

(三)、掌握根本、用「心」追求，終於發現「無盡」之美：

【引理 4】四邊形 ABCD 中， $\overline{AC} \perp \overline{BD}$ ， $\overline{AC} = a$ ， $\overline{BD} = b$ ，若分別以 \overline{AB} 、 \overline{BC} 、 \overline{CD} 、 \overline{AD} 為邊，向外作四個正方形，且 E 、 F 、 G 、 H 分別為四個正方形的中心點，試證：(I) $\overline{EG} \perp \overline{FH}$ ， $\overline{EG} = \overline{FH}$ (II) EFGH 的面積 = ABCD 面積的 $\frac{(a+b)^2}{2ab}$ 倍。

【證明】



(I)

(1) 分別以 \overline{AB} 、 \overline{BC} 、 \overline{CD} 、 \overline{AD} 為一條對角線，作正方形 AEBE' 、 BFCF' 、 CGDG' 、 DHAH' 。

(2) $\ominus \text{AEBE}'$ 、 AHDH' 為正方形 $\therefore \overline{AB} : \overline{AE} = \overline{AD} : \overline{AH'} = \sqrt{2} : 1$

$$\text{且 } \angle \text{BAD} = \angle \text{BAH}' + \angle \text{DAH}' = \angle \text{BAH}' + 45^\circ = \angle \text{BAH}' + \angle \text{EAB} = \angle \text{EAH}'$$

$$\Rightarrow \triangle \text{ADB} \sim \triangle \text{AH'E} \Rightarrow \overline{BD} = \overline{EH'} \times \sqrt{2}, \angle \text{AH'E} = \angle \text{ADB}$$

$$\text{同理可證：} \triangle \text{DAC} \sim \triangle \text{DH'G}, \overline{AC} = \overline{H'G} \times \sqrt{2}, \angle \text{DH'G} = \angle \text{DAC}$$

$$\Rightarrow \angle \text{AH'E} + \angle \text{DH'G} + \angle \text{AH'D} = \angle \text{ADB} + \angle \text{DAC} + 90^\circ = 180^\circ$$

$$\therefore \overline{EG} = \overline{EH'} + \overline{GH'} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\overline{BD} + \overline{AC}) = \frac{1}{\sqrt{2}} (a+b)$$

(3)同理可證： $\overline{FH} = \frac{1}{\sqrt{2}}(a+b)$

(4)⊙ $AEBE'$ 、 $AHDH'$ 為正方形 $\therefore \overline{E'H} \perp \overline{EH'} \Rightarrow \overline{EG} \perp \overline{FH}$

故得證： $\overline{EG} \perp \overline{FH}$ ， $\overline{EG} = \overline{FH} = \frac{1}{\sqrt{2}}(a+b)$ 。

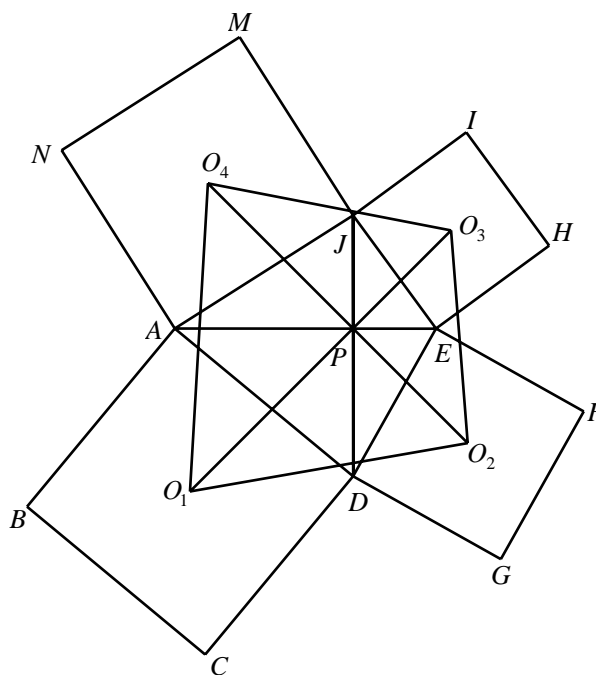
(II)

由 $EFGH$ 的面積 $= \frac{1}{2} \times \frac{1}{\sqrt{2}}(a+b) \times \frac{1}{\sqrt{2}}(a+b) = \frac{1}{4}(a+b)^2$ ，又 $ABCD$ 面積 $= \frac{1}{2}ab$

故可推得： $EFGH$ 的面積 $= ABCD$ 面積的

$\frac{(a+b)^2}{2ab}$ 倍。

【引理 5】四邊形 $ADEJ$ 中， $\overline{AE} = \overline{DJ}$ ， $\overline{AE} \perp \overline{DJ}$ （垂足為 P ），且 $ABCD$ 、 $DEFG$ 、 $EHIJ$ 、 $AJMN$ 皆為正方形， O_1 、 O_2 、 O_3 、 O_4 分別是每個正方形的中心點，試證： $\overline{O_1O_3} = \overline{O_2O_4}$ ， $\overline{O_1O_3} \perp \overline{O_2O_4}$ ，四邊形 $O_1O_2O_3O_4$ 的面積 $= (\text{四邊形 } ADEJ \text{ 面積}) \times 2$ 。



【證明】

令 $\overline{AE} = \overline{DJ} = a$

由引理 4 知： $\overline{O_1O_3} = \overline{O_2O_4}$ ， $\overline{O_1O_3} \perp \overline{O_2O_4}$ ，

$O_1O_2O_3O_4$ 的面積 $= ADEJ$ 面積的 $\frac{(a+a)^2}{2a^2}$ 倍。

故得證：四邊形 $O_1O_2O_3O_4$ 的面積 $= (\text{四邊形 } ADEJ \text{ 面積}) \times 2$ 。

【定理 2】如下頁圖，四邊形 $ABCD$ 、 $CEQP$ 、 $DEFG$ 、 $AGNM$ 皆為正方形， T 、 R 、 V 、 H 四點分別是每一個正方形的中心點， S 、 U 分別是 \overline{AG} 、 \overline{CE} 的中點；四邊形 $THIJ$ 、 $TRLK$ 、 $VRWX$ 、 $HVYZ$ 皆為正方形， O_1 、 O_2 、 O_3 、 O_4 分別是每個正方形的中心點，試證： $\overline{O_1O_3} = \overline{O_2O_4}$ ， $\overline{O_1O_3} \perp \overline{O_2O_4}$ ，且四邊形 $O_1O_2O_3O_4$ 的面積 $= (\text{正方形 } STUV \text{ 面積}) \times \frac{9}{2}$ 。

【證明】

(1)由定理 1 可知：四邊形 $HTRV$ 面積 $=$ 正方形 $STUV$ 面積的 2 倍。

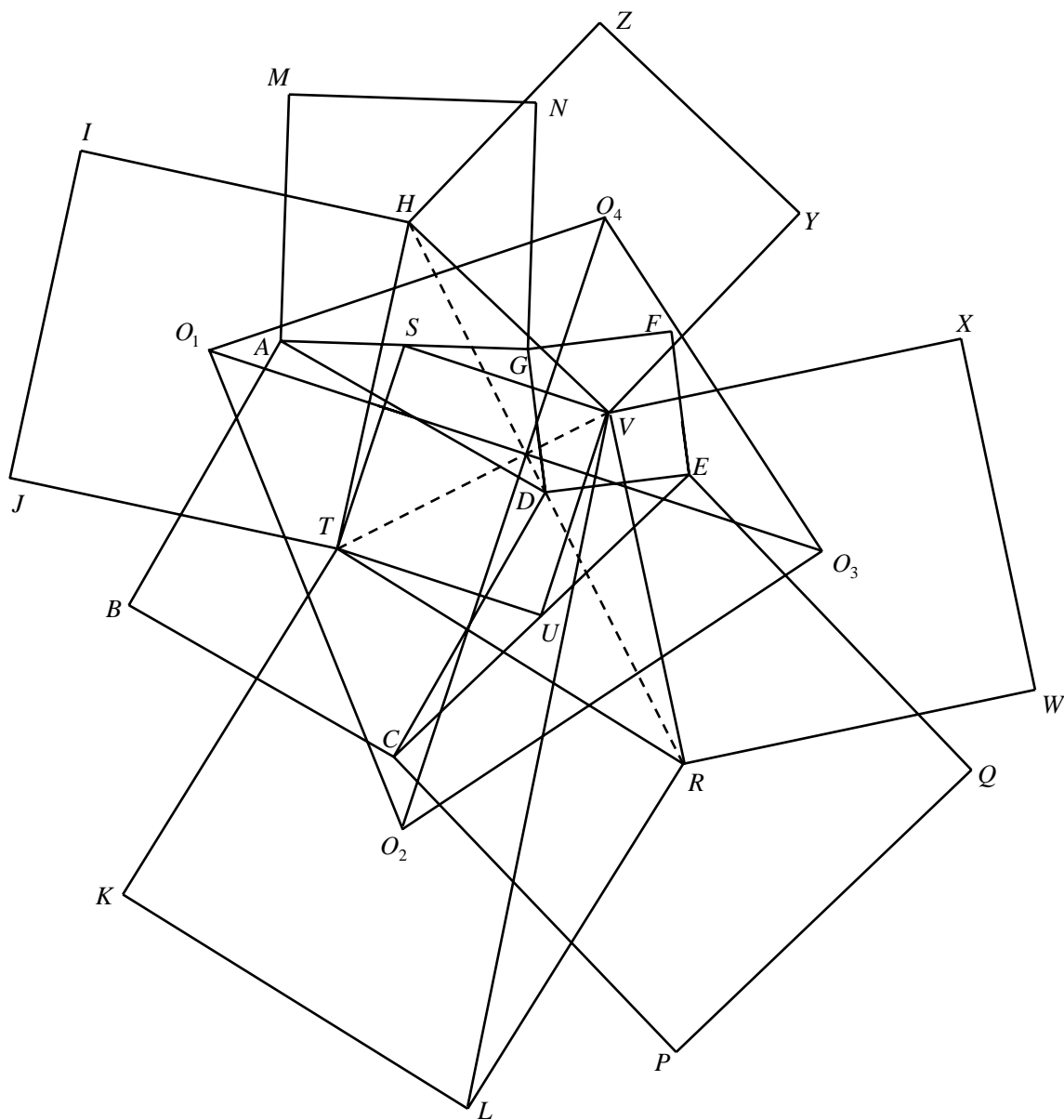
(2)連 \overline{HR} 、 \overline{TV} ，則 $\overline{HR} = 2\overline{TV}$ （令 $\overline{TV} = r$ ， $\overline{HR} = 2r$ ）， $\overline{HR} \perp \overline{TV}$ 。

(3)由引理 4 知： $\overline{O_1O_3} = \overline{O_2O_4}$ ， $\overline{O_1O_3} \perp \overline{O_2O_4}$ ，四邊形 $O_1O_2O_3O_4$ 面積 $= HTRV$ 面積的

$$\frac{(2r+r)^2}{2 \cdot 2r \cdot r} \text{ 倍} \Rightarrow O_1O_2O_3O_4 \text{ 面積} = HTRV \text{ 面積的} \frac{9}{4} \text{ 倍}$$

$$\therefore \text{四邊形 } O_1O_2O_3O_4 \text{ 面積} = \text{正方形 } STUV \text{ 面積的} \frac{9}{4} \times 2 \text{ 倍}$$

故得證：四邊形 $O_1O_2O_3O_4$ 的面積 = (正方形 $STUV$ 面積) $\times \frac{9}{2}$ 。



【引理 6】 $ABCD$ 、 $CEQP$ 、 $DEFG$ 、 $AGNM$ 皆為正方形， T 、 R 、 V 、 H 分別是各個正方形的中心點， S 、 U 分別是 \overline{AG} 、 \overline{CE} 的中點，試證：(I) $\overline{HR} = \overline{BF}$ ， \overline{HR} 與 \overline{BF} 互相垂直；(II) 四邊形 $HBRF$ 的面積 = (正方形 $STUV$ 面積) $\times 4$ 。

【證明】

(I)

(1) 作正方形 $AH GK$ ，由定理 1 可知： $\overline{HD} = \overline{DR}$ ， $\overline{HR} = 2\overline{TV}$ 。

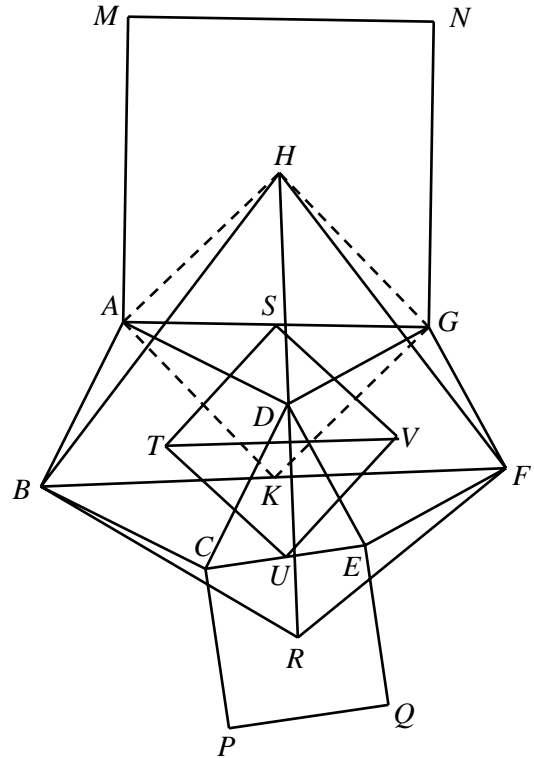
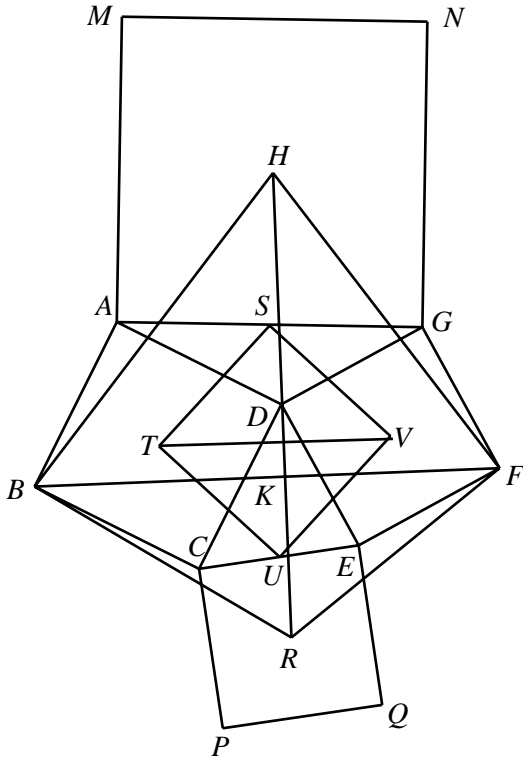
(2) 由正方形 $AH GK$ 與正方形 $ABCD$ 共頂點於 $A \Rightarrow \overline{BK} = \overline{HD}$ ， $\overline{BK} \perp \overline{HD}$ ；

由正方形 $AHGK$ 與正方形 $DEFG$ 共頂點於 $G \Rightarrow \overline{FK} = \overline{HD}$, $\overline{FK} \perp \overline{HD}$

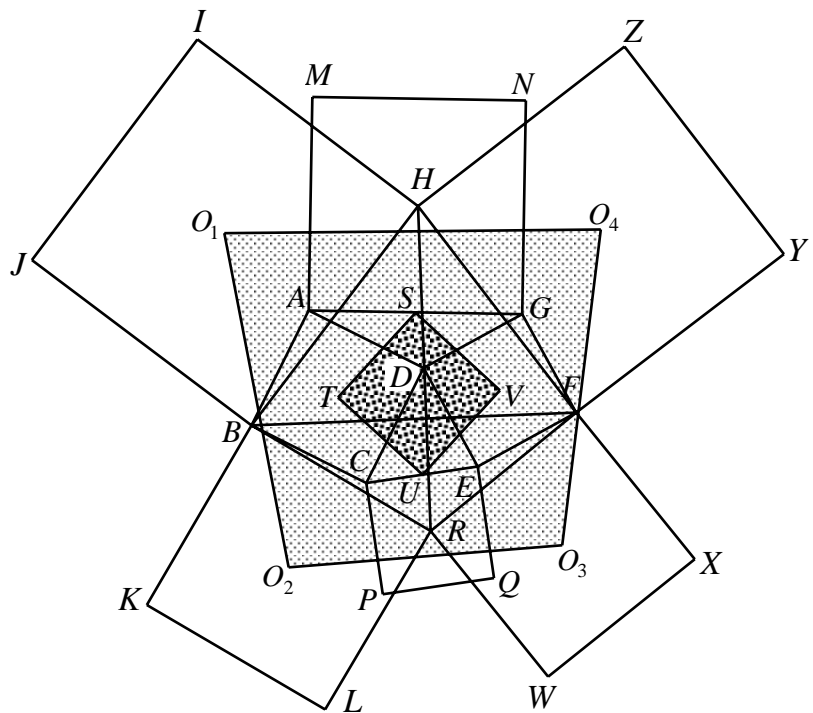
$\therefore B、K、F$ 三點共線 $\Rightarrow \overline{BF} = 2\overline{HD} = \overline{HR}$, \overline{HR} 與 \overline{BF} 互相垂直。

(II)

四邊形 $HBRF$ 的面積 $= \frac{1}{2} \times \overline{BF} \times \overline{HR} = \frac{1}{2} \times 2\overline{TV} \times 2\overline{TV} = 2\overline{TV}^2 = (\text{正方形 } STUV \text{ 面積}) \times 4$ 。



【定理 3】 四邊形 $ABCD$ 、 $CEQP$ 、 $DEFG$ 、 $AGNM$ 皆為正方形， T 、 R 、 V 、 H 分別是每個正方形的中心點， S 、 U 分別是 \overline{AG} 、 \overline{CE} 的中點；四邊形 $BHIJ$ 、 $BRLK$ 、 $FRWX$ 、 $HFYZ$ 皆為正方形， O_1 、 O_2 、 O_3 、 O_4 分別是每個正方形的中心點，試證：四邊形 $O_1O_2O_3O_4$ 的面積 $= (\text{正方形 } STUV \text{ 面積}) \times 8$ 。



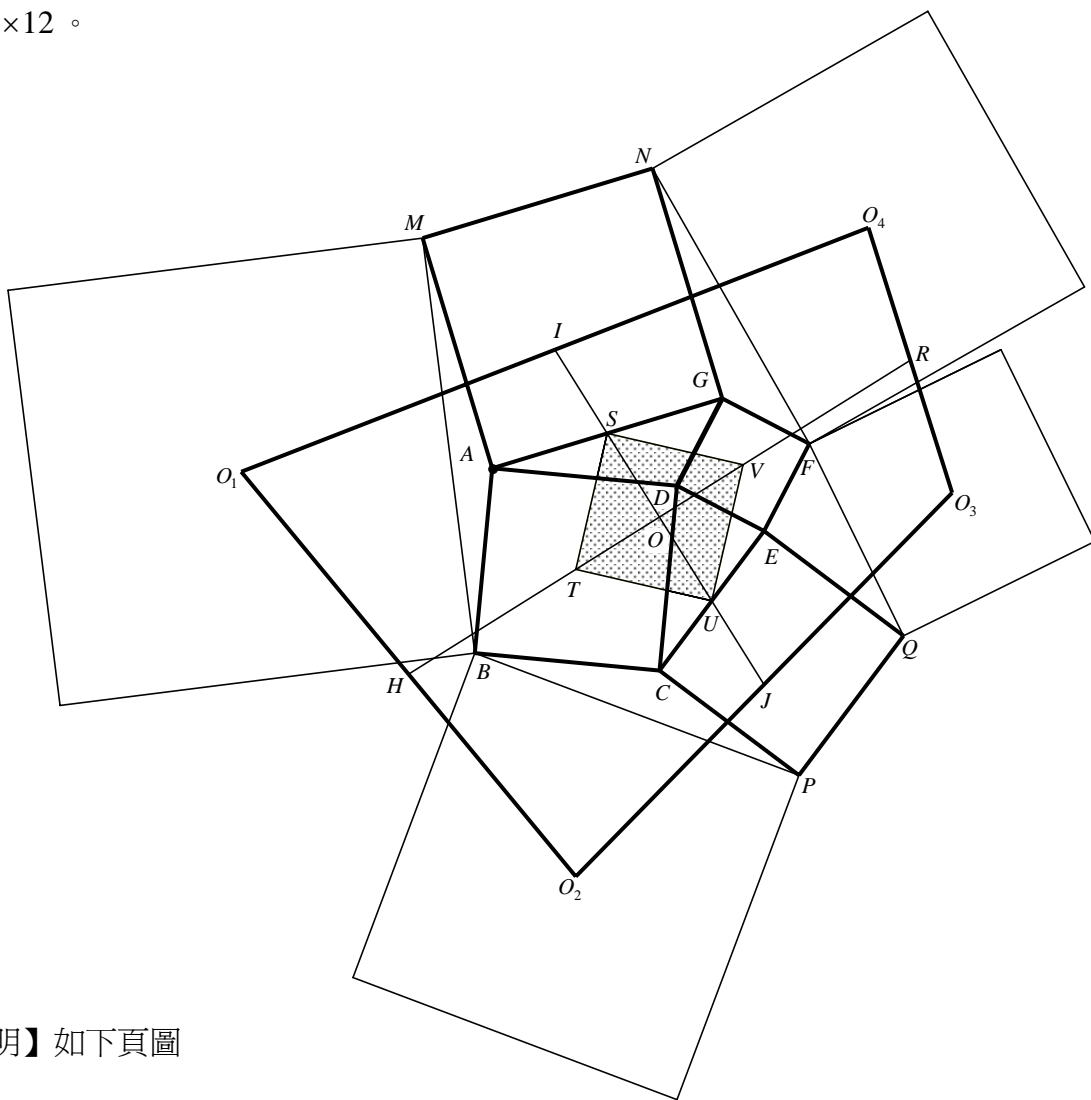
【證明】

(1)由引理 6 可知：四邊形 $HBRF$ 面積 $=$ 正方形 $STUV$ 面積的 4 倍。

(2)由引理 5 可知：四邊形 $O_1O_2O_3O_4$ 面積 $= HBRF$ 面積的 2 倍

\therefore 四邊形 $O_1O_2O_3O_4$ 的面積 $= (\text{正方形 } STUV \text{ 面積}) \times 8$ 。

【引理 7】如下圖，四邊形 $ABCD$ 、 $CEQP$ 、 $DEFG$ 、 $AGNM$ 皆為正方形， T 、 V 分別是 $ABCD$ 與 $DEFG$ 的中心點， S 、 U 分別是 \overline{AG} 、 \overline{CE} 的中點。若分別以 \overline{BM} 、 \overline{BP} 、 \overline{FQ} 、 \overline{FN} 為邊向外作四個正方形， O_1 、 O_2 、 O_3 、 O_4 分別是這四個正方形的中心點，且 \overline{TV} 分別交 $\overline{O_1O_2}$ 、 $\overline{O_3O_4}$ 於 H 、 R ； \overline{SU} 分別交 $\overline{O_1O_4}$ 、 $\overline{O_2O_3}$ 於 I 、 J ，試證：(I) $\overline{HR} = 3\overline{TV}$ ， $\overline{IJ} = 2\overline{SU}$ ， H 、 R 、 I 、 J 分別是 $\overline{O_1O_2}$ 、 $\overline{O_3O_4}$ 、 $\overline{O_1O_4}$ 、 $\overline{O_2O_3}$ 的中點；(II) 四邊形 $O_1O_2O_3O_4$ 的面積 = (正方形 $STUV$ 面積) $\times 12$ 。



【證明】如下頁圖

(I)

(1) 連 $\overline{VO_1}$ 、 $\overline{VO_2}$ 、 $\overline{TO_3}$ 、 $\overline{TO_4}$ 、 \overline{AC} 、 \overline{EG} ，由定理 1 $\Rightarrow \overline{VA} = \overline{AO_1}$ ， $\overline{VC} = \overline{CO_2}$ ， $\overline{TE} = \overline{EO_3}$ ， $\overline{TG} = \overline{GO_4} \Rightarrow \overline{AC} \parallel \overline{O_1O_2}$ ， $\overline{EG} \parallel \overline{O_3O_4}$ 。

$\Rightarrow \overline{VT} = \overline{TH}$ ， $\overline{TV} = \overline{VR} \Rightarrow \overline{HR} = \overline{TH} + \overline{TV} + \overline{VR} = 3\overline{TV}$ 又 $\overline{AT} = \overline{TC} \therefore \overline{O_1H} = \overline{HO_2}$

同理可證： $\overline{O_3R} = \overline{RO_4}$ 。

(2) 分別取 $\overline{O_1O_4}$ 、 $\overline{O_2O_3}$ 的中點 X 與 Y ，連 \overline{AX} 、 \overline{GX} 、 \overline{OA} 、 \overline{OG} 、 $\overline{TO_1}$ 。

(3) $\ominus \overline{VA} = \overline{AO_1}$ ， $\overline{VO} = \overline{OT} \therefore \overline{OA} \parallel \overline{O_1T}$ ， $\overline{OA} = \frac{1}{2} \overline{O_1T}$

又 $\overline{O_4G} = \overline{GT}$ ， $\overline{O_4X} = \overline{XO_1} \therefore \overline{GX} \parallel \overline{O_1T}$ ， $\overline{GX} = \frac{1}{2} \overline{O_1T}$

$\Rightarrow \overline{OA} \parallel \overline{GX}$ ， $\overline{OA} = \overline{GX} \Rightarrow$ 四邊形 $GXAO$ 為平行四邊形 $\Rightarrow \overline{OX}$ 通過 \overline{AG} 的中點 S

又 \overline{OS} 交 $\overline{O_1O_4}$ 於 I \therefore 點 X 與 I 重合 $\Rightarrow I$ 為 $\overline{O_1O_4}$ 的中點。

同理可證：點 Y 與 J 重合 $\Rightarrow J$ 為 $\overline{O_2O_3}$ 的中點。

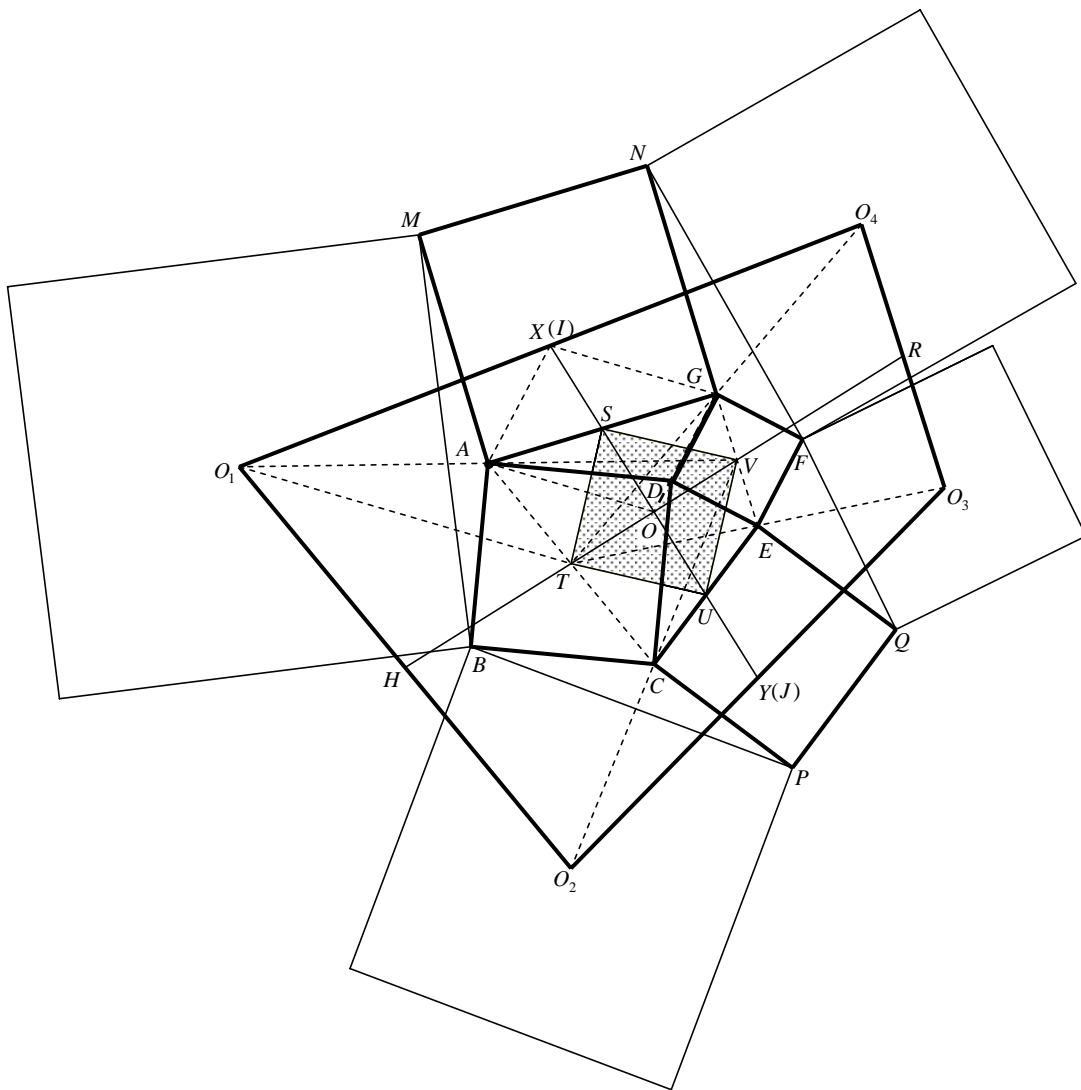
(4) \odot $GXA O$ 為平行四邊形 $\therefore \overline{IS} = \overline{SO} \Rightarrow \overline{IO} = \overline{SU}$

同理可證： $\overline{JU} = \overline{UO} \Rightarrow \overline{JO} = \overline{SU} \therefore \overline{IJ} = \overline{IO} + \overline{JO} = 2\overline{SU}$

(5) 由以上(1)~(4)得證： $\overline{HR} = 3\overline{TV}$ ， $\overline{IJ} = 2\overline{SU}$ ， H 、 R 、 I 、 J 分別是 $\overline{O_1O_2}$ 、 $\overline{O_3O_4}$ 、 $\overline{O_1O_4}$ 、 $\overline{O_2O_3}$ 的中點。

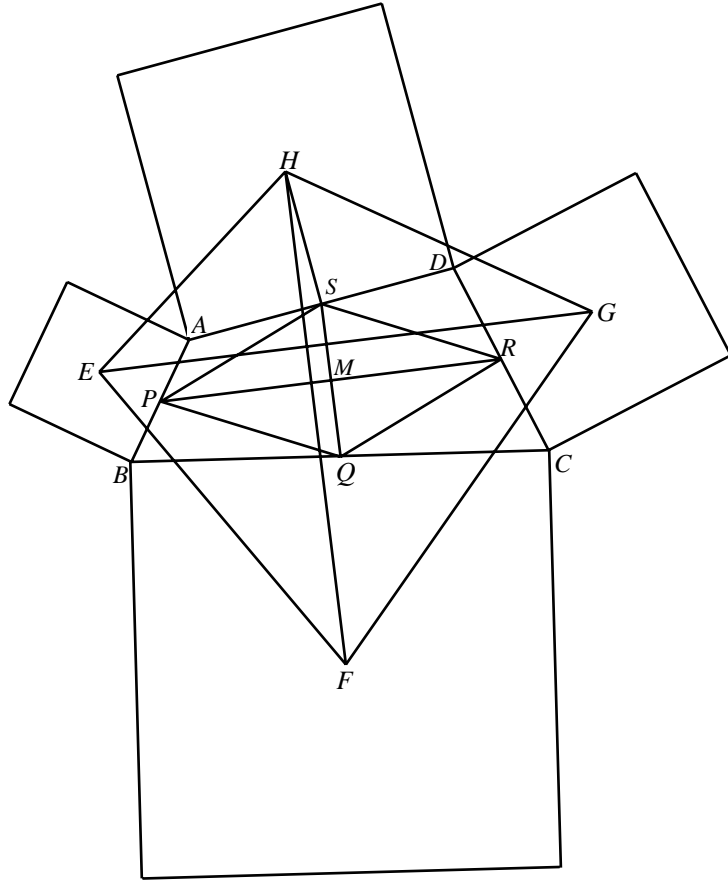
(II) \odot H 、 R 、 I 、 J 分別是 $\overline{O_1O_2}$ 、 $\overline{O_3O_4}$ 、 $\overline{O_1O_4}$ 、 $\overline{O_2O_3}$ 的中點， $\overline{IJ} \perp \overline{HR}$

\therefore 四邊形 $O_1O_2O_3O_4$ 的面積 = $\overline{IJ} \times \overline{HR} = 2\overline{SU} \times 3\overline{TV} = 6\overline{TV}^2 = (\text{正方形 } STUV \text{ 面積}) \times 12$ 。



【引理 8】四邊形 $ABCD$ 中， P 、 Q 、 R 、 S 分別是 \overline{AB} 、 \overline{BC} 、 \overline{CD} 、 \overline{AD} 的中點， $\overline{PR} = a$ ， $\overline{SQ} = b$ ，且 $\overline{PR} \perp \overline{SQ}$ （垂足為 M ）。若分別以 \overline{AB} 、 \overline{BC} 、 \overline{CD} 、 \overline{AD} 為邊，向外作四個正方形，且 E 、 F 、 G 、 H 分別為四個正方形的中心點，試證：(I) $\overline{EG} = \overline{FH}$ ， $\overline{EG} \perp \overline{FH}$ ；(II)

四邊形 $EFGH$ 的面積 = 四邊形 $ABCD$ 面積的 $\frac{(a+b)^2}{2ab}$ 倍。



【證明】

(1)

(1)分別以 \overline{AB} 、 \overline{BC} 、 \overline{CD} 、 \overline{AD} 為一條對角線，作正方形 $AEBE'$ 、 $BFCF'$ 、 $CGDG'$ 、 $DHAH'$ 。

(2)連 $\overline{EH'}$ 、 $\overline{HE'}$ 。

(3)⊙ P 、 Q 、 R 、 S 分別是 \overline{AB} 、 \overline{BC} 、 \overline{CD} 、 \overline{AD} 的中點

$$\therefore SPQR \text{ 為平行四邊形 } \Rightarrow \overline{SM} = \overline{MQ}, \overline{PM} = \overline{RM}$$

$$\text{又 } \overline{PR} \perp \overline{SQ} \quad \therefore SPQR \text{ 為菱形 } \Rightarrow \overline{SP} = \overline{SR} = \overline{RQ} = \overline{PQ}。$$

(4)⊙ $AEBE'$ 、 $AHDH'$ 為正方形 $\therefore \triangle AEH' \cong \triangle AE'H \Rightarrow \overline{EH'} = \overline{E'H}$

$$\ominus \overline{AE} : \overline{AP} = \overline{AH'} : \overline{AS} = \sqrt{2} : 1, \text{ 且}$$

$$\angle EAH' = \angle EAP + \angle PAH' = 45^\circ + \angle PAH' = \angle H'AS + \angle PAH' = \angle PAS$$

$$\Rightarrow \triangle AEH' \sim \triangle APS \Rightarrow \overline{EH'} = \overline{PS} \times \sqrt{2} \quad \therefore \overline{EH'} = \overline{E'H} = \overline{PS} \times \sqrt{2}$$

$$\text{同理可證：} \overline{HG'} = \overline{GH'} = \overline{SR} \times \sqrt{2}, \overline{GF'} = \overline{FG'} = \overline{RQ} \times \sqrt{2}, \overline{FE'} = \overline{EF'} = \overline{PQ} \times \sqrt{2}$$

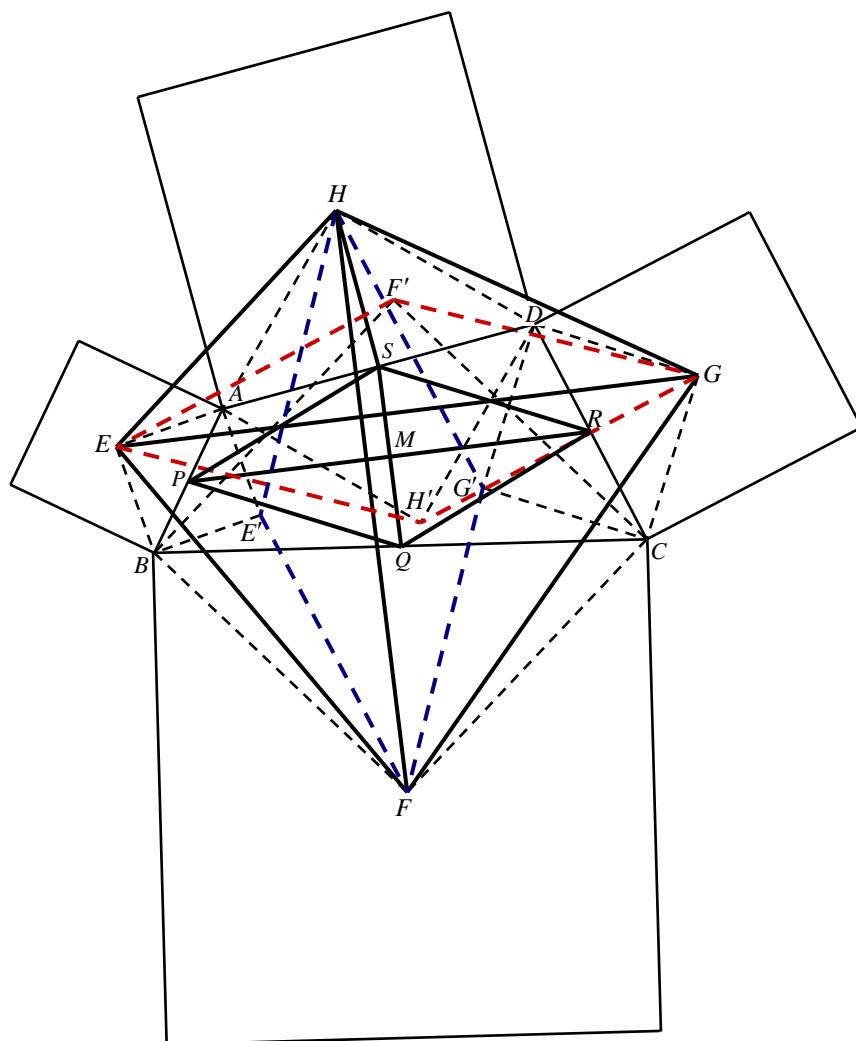
$$\Rightarrow \overline{EH'} = \overline{E'H} = \overline{HG'} = \overline{GH'} = \overline{GF'} = \overline{FG'} = \overline{FE'} = \overline{EF'}$$

即四邊形 $HE'FG'$ 與 $EH'GF'$ 皆為菱形。

(5)⊙ $\overline{EF'} \perp \overline{E'F}$ ， $\overline{E'F} \parallel \overline{HG'}$ $\therefore \overline{EF'} \perp \overline{HG'}$ 又 $\overline{HE'} \perp \overline{EH'}$ $\Rightarrow \angle F'E'H' = \angle E'HG'$

$$\Rightarrow HE'FG' \text{ 與 } EH'GF' \text{ 為全等形 } \Rightarrow \overline{EG} = \overline{HF}$$

$$\ominus \overline{HE'} \perp \overline{EH'} \text{ 又 } \angle GEH' = \angle FHE' \quad \therefore \overline{EG} \perp \overline{FH}$$



(II)

(1) $\ominus \triangle AEH' \sim \triangle APS \quad \therefore \angle AH'E = \angle ASP$

又 $\triangle DH'G \sim \triangle DSR \quad \therefore \angle DH'G = \angle DSR$

$\Rightarrow \angle EH'G + \angle PSR = (\angle AH'E + \angle AH'D + \angle DH'G) + \angle PSR$

$= \angle ASP + 90^\circ + \angle DSR + \angle PSR = 90^\circ + (\angle ASP + \angle DSR + \angle PSR) = 90^\circ + 180^\circ = 270^\circ$

$\therefore \angle F'EH' + \angle SPQ = 90^\circ$

(2) 令 $\angle SPM = \theta$, $\overline{SP} = c$, 則 $\angle F'EG = \frac{\pi}{4} - \theta$, $\overline{EF'} = \sqrt{2} \cdot \overline{SP} = \sqrt{2}c$

$\Rightarrow \overline{EG} = \overline{EF'} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4} - \theta\right) \cdot 2 = 2\sqrt{2}c \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} (\cos\theta + \sin\theta) = 2c \left(\frac{a}{2c} + \frac{b}{2c}\right) = a + b$

(3) $\therefore EFGH$ 的面積 $= \frac{1}{2}(a+b)^2$, $ABCD$ 面積 $= ab$

四邊形 $EFGH$ 的面積 $=$ 四邊形 $ABCD$ 面積的 $\frac{(a+b)^2}{2ab}$ 倍。

【定理 4】四邊形 $ABCD$ 、 $CEQP$ 、 $DEFG$ 、 $AGNM$ 皆為正方形， T 、 V 分別是 $ABCD$ 與 $DEFG$ 的中心點， S 、 U 分別是 \overline{AG} 、 \overline{CE} 的中點。若分別以 \overline{BM} 、 \overline{BP} 、 \overline{FQ} 、 \overline{FN} 為邊向外作四個正方形， O_1 、 O_2 、 O_3 、 O_4 分別是這四個正方形的中心點，若分別以 $\overline{O_1O_2}$ 、 $\overline{O_2O_3}$ 、 $\overline{O_3O_4}$ 、 $\overline{O_4O_1}$ 為邊向外作四個正方形， O_5 、 O_6 、 O_7 、 O_8 分別是這些正方形的中心點，而 H 、 J 、

R 、 I 分別為 $\overline{O_1O_2}$ 、 $\overline{O_2O_3}$ 、 $\overline{O_3O_4}$ 、 $\overline{O_4O_1}$ 的中點，試證：四邊形 $O_5O_6O_7O_8$ 的面積 = (正方形 $STUV$ 面積) $\times 25$ 。

【證明】

(1) 由引理 7 可知：四邊形 $O_1O_2O_3O_4$ 面積 = 正方形 $STUV$ 面積的 12 倍。

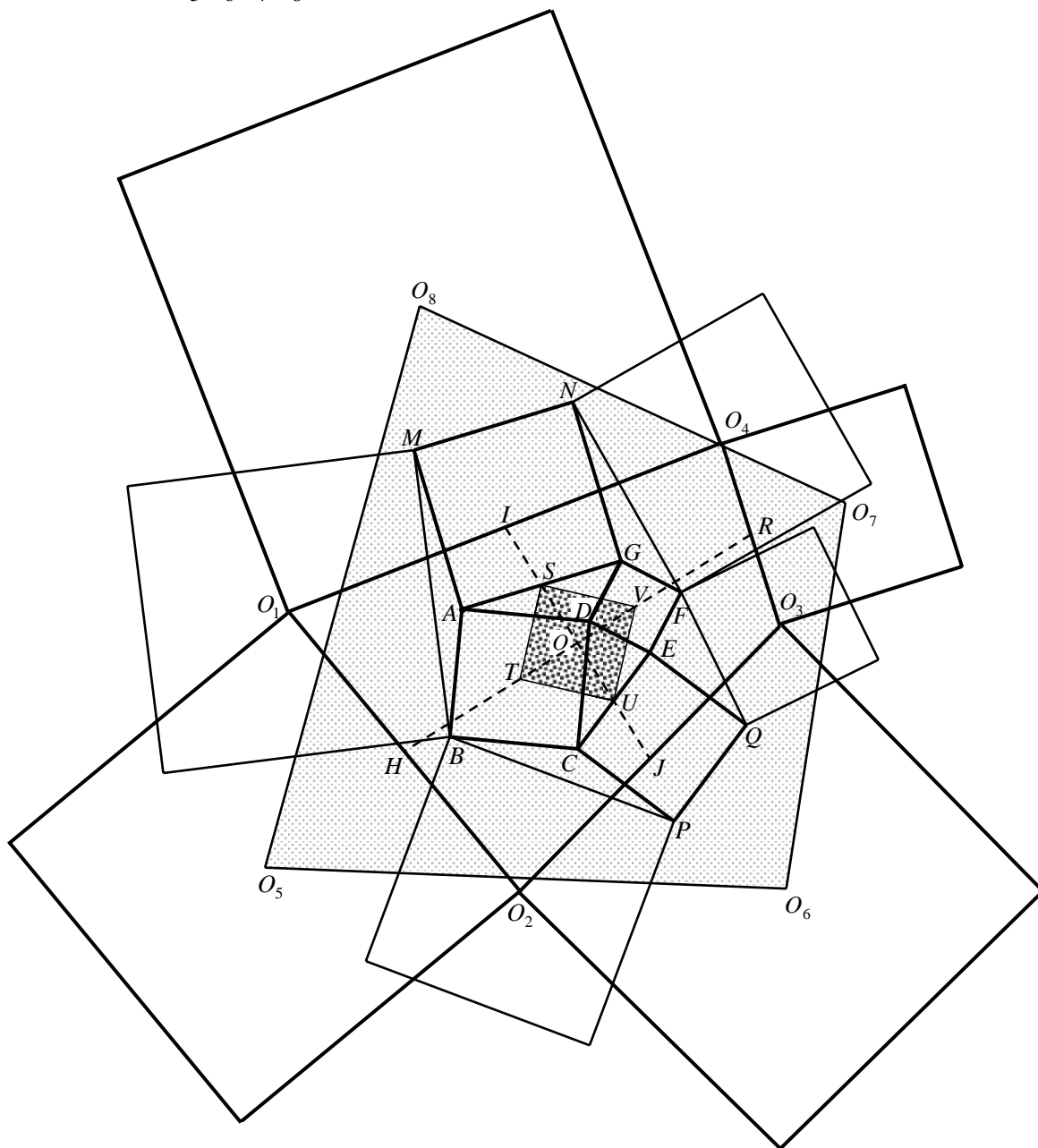
(2) 連 \overline{IJ} 、 \overline{HR} ，則 $\overline{HR} = 3\overline{TV}$ ， $\overline{IJ} = 2\overline{TV}$ (令 $\overline{TV} = r$ ， $\overline{HR} = 3r$ ， $\overline{IJ} = 2r$)， $\overline{HR} \perp \overline{TV}$ 。

(3) 由引理 8 可知：四邊形 $O_5O_6O_7O_8$ 面積 = $O_1O_2O_3O_4$ 面積的 $\frac{(3r+2r)^2}{2 \cdot 3r \cdot 2r}$ 倍

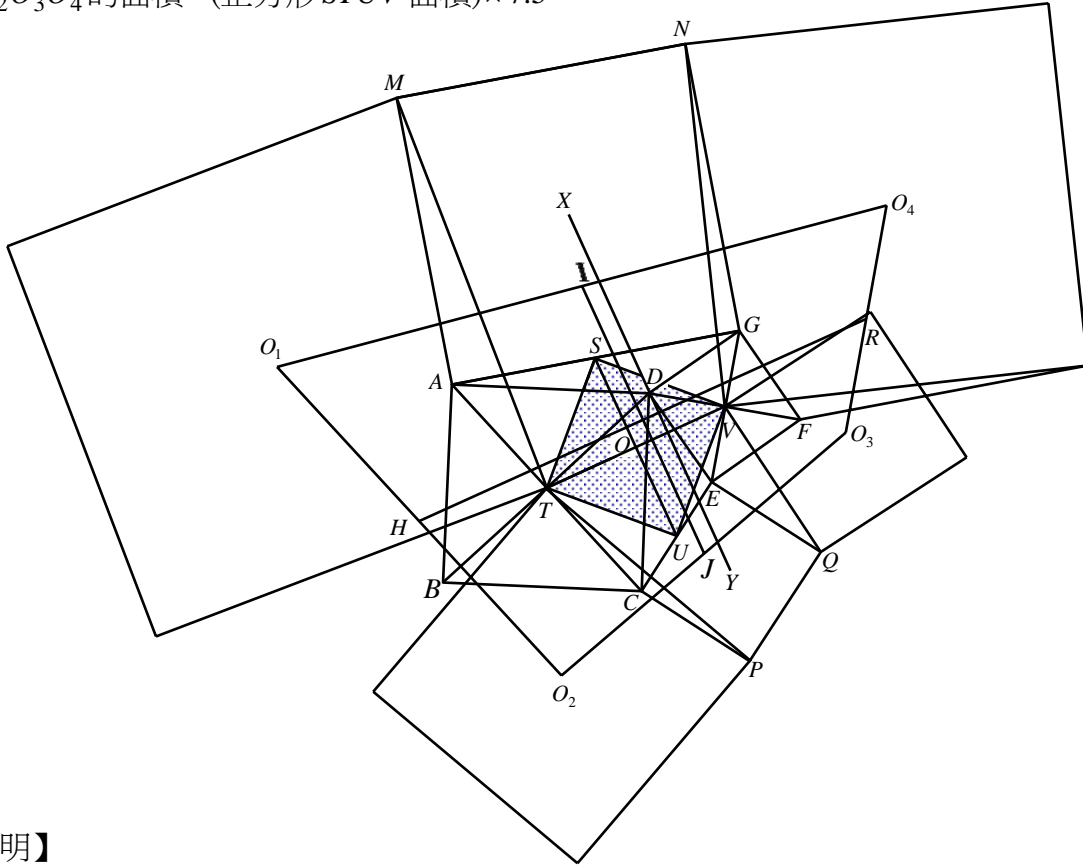
$$\Rightarrow O_5O_6O_7O_8 \text{ 面積} = O_1O_2O_3O_4 \text{ 面積的 } \frac{25}{12} \text{ 倍}$$

$$\therefore \text{四邊形 } O_5O_6O_7O_8 \text{ 面積} = \text{正方形 } STUV \text{ 面積的 } \frac{25}{12} \times 12 \text{ 倍}$$

故得證：四邊形 $O_5O_6O_7O_8$ 的面積 = (正方形 $STUV$ 面積) $\times 25$ 。



【引理 9】如下圖，四邊形 $ABCD$ 、 $CEQP$ 、 $DEFG$ 、 $AGNM$ 皆為正方形， T 、 V 分別是 $ABCD$ 與 $DEFG$ 的中心點， S 、 U 分別是 \overline{AG} 、 \overline{CE} 的中點。若分別以 \overline{MT} 、 \overline{TP} 、 \overline{QV} 、 \overline{VN} 為邊向外作四個正方形， O_1 、 O_2 、 O_3 、 O_4 分別是這四個正方形的中心點， H 、 R 、 I 、 J 分別是 $\overline{O_1O_2}$ 、 $\overline{O_3O_4}$ 、 $\overline{O_1O_4}$ 、 $\overline{O_2O_3}$ 的中點，試證：(I) $\overline{IJ} = 1.5 \times \overline{SU}$ ， $\overline{HR} = 2.5 \times \overline{TV}$ ；(II) 四邊形 $O_1O_2O_3O_4$ 的面積 = (正方形 $STUV$ 面積) $\times 7.5$ 。



【證明】

(I)

(1) 分別取 \overline{NG} 、 \overline{GF} 、 \overline{DG} 的中點 M_1 、 M_2 、 M_3 ，並連 $\overline{M_1O_4}$ 、 $\overline{NM_3}$ 、 $\overline{AM_2}$ 、 $\overline{M_2W}$ 、 $\overline{XM_1}$ 。

(2) 作正方形 $O_1MO_1'T$ ，連 $\overline{NO_1'}$ 、 $\overline{O_1'D}$ 、 \overline{DT} 、 $\overline{SM_2}$ 、 $\overline{VM_2}$ 、 $\overline{VM_3}$ 。

(3) $\ominus \triangle NGM_3 \cong \triangle AGM_2 \Rightarrow \overline{AM_2} = \overline{NM_3}$ ， $\overline{AM_2} \perp \overline{NM_3}$ ；

$\ominus \triangle NVM_3 \cong \triangle WVM_2 \Rightarrow \overline{M_2W} = \overline{NM_3}$ ， $\overline{M_2W} \perp \overline{NM_3}$

$\Rightarrow \overline{AM_2} = \overline{M_2W}$ ，又 $\overline{AS} = \overline{SG}$ $\therefore \overline{SM_2} \parallel \overline{GW}$ ， $\overline{SM_2} = \frac{1}{2} \times \overline{GW}$ 。

(4) $\ominus \overline{M_1O_4} \parallel \overline{GW}$ ， $\overline{M_1O_4} = \frac{1}{2} \times \overline{GW}$ $\therefore \overline{SM_2} \parallel \overline{M_1O_4}$ ， $\overline{SM_2} = \overline{M_1O_4}$ 。

(5) $\triangle M_1GM_3 \cong \triangle SGM_2 \Rightarrow \overline{M_1M_3} = \overline{SM_2}$ ， $\overline{M_1M_3} \perp \overline{SM_2}$ 。

(6) 由(4)與(5) $\Rightarrow \overline{M_1O_4} = \overline{M_1M_3}$ ， $\overline{M_1O_4} \perp \overline{M_1M_3}$ 。

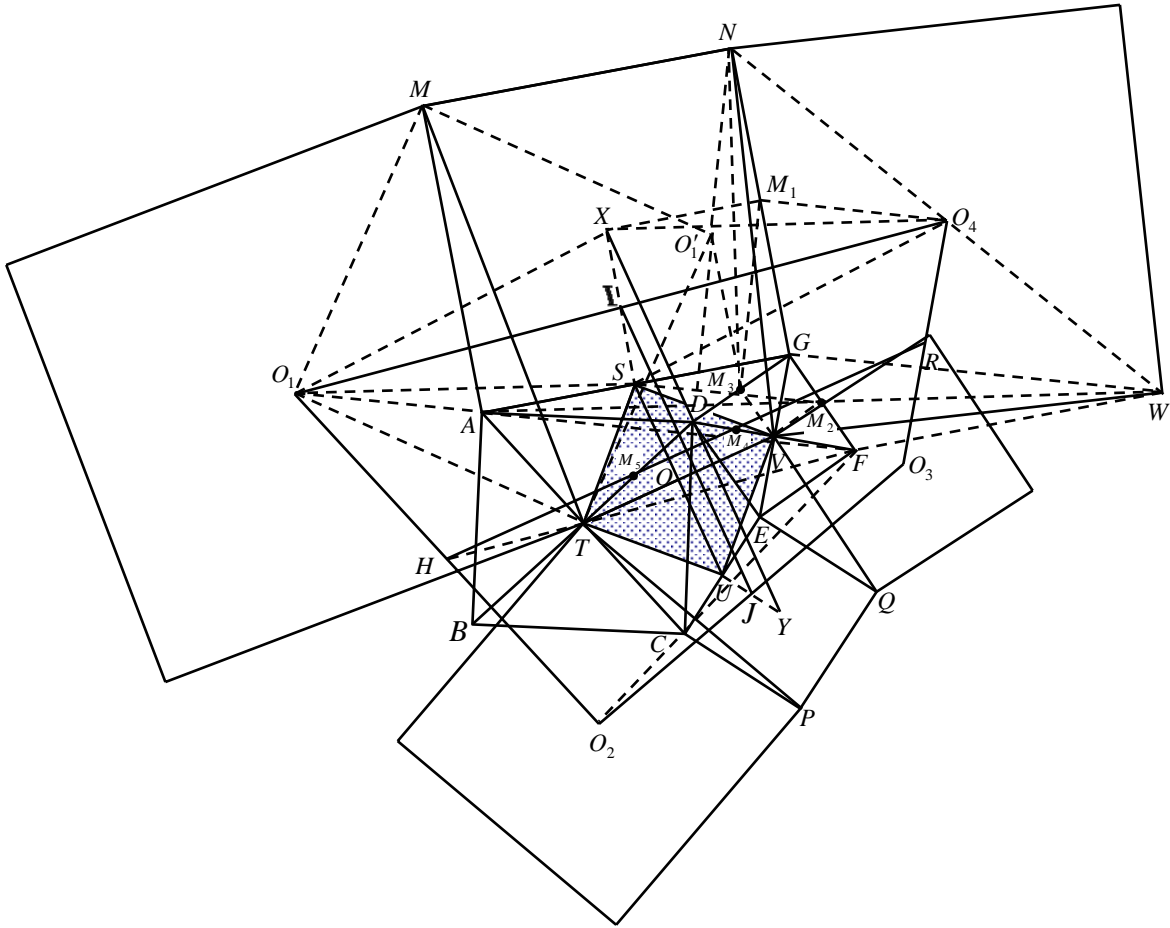
(7) $\ominus \triangle MO_1A \cong \triangle MO_1'N \Rightarrow \overline{O_1A} = \overline{O_1'N}$ ， $\overline{O_1A} \perp \overline{O_1'N}$

$\ominus \triangle O_1TA \cong \triangle O_1'TD \Rightarrow \overline{O_1A} = \overline{O_1'D}$ ， $\overline{O_1A} \perp \overline{O_1'D}$

$\therefore \overline{NO_1'} = \overline{O_1'D}$ ，且 N 、 O_1' 、 D 三點共線。

(8) 又 M_1 、 M_3 分別為 \overline{NG} 、 \overline{DG} 的中點 $\therefore \overline{M_1M_3} \parallel \overline{NO_1'}$ ， $\overline{M_1M_3} = \overline{NO_1'}$ 。

- (9) 由(6)、(7)與(8) $\Rightarrow \overline{M_1O_4} \perp \overline{NO_1}$, $\overline{M_1O_4} = \overline{NO_1} \Rightarrow \overline{M_1O_4} = \overline{O_1A}$, $\overline{M_1O_4} \parallel \overline{O_1A}$ 。
- (10) $\ominus \overline{XM_1} = \overline{AS}$, $\overline{XM_1} \parallel \overline{AS}$; $\overline{M_1O_4} = \overline{O_1A}$, $\overline{M_1O_4} \parallel \overline{O_1A}$
 $\therefore \Delta O_1AS \cong \Delta O_4M_1X \Rightarrow \overline{XO_4} = \overline{O_1S}$, $\overline{XO_4} \parallel \overline{O_1S}$ 。
- (11) 連 $\overline{O_1X}$ 、 $\overline{O_4S}$ $\therefore XO_1SO_4$ 為平行四邊形 $\Rightarrow \overline{XS}$ 通過 I 點。
- (12) 同理可證得： \overline{UY} 通過 J 點。
- (13) $\ominus \overline{SU} \parallel \overline{XY} \therefore \overline{IJ} = \frac{1}{2}(\overline{SU} + \overline{XY}) = \frac{1}{2}(\overline{SU} + 2\overline{SU}) = 1.5 \times \overline{SU}$ 。



- (14) $\ominus \overline{GM_2} = \overline{M_2F}$ 、 $\overline{AM_2} = \overline{M_2W}$ $\therefore AGWF$ 為平行四邊形 $\Rightarrow \overline{GW} = \overline{AF}$ 。
- (15) $\ominus \overline{GW} = 2\overline{M_1O_4} = 2\overline{O_1A}$, $\overline{GW} \parallel \overline{O_1A}$ $\therefore O_1$ 、 A 、 F 三點共線，且 $\overline{FA} = 2\overline{O_1A}$ 。
- (16) 連 \overline{FC} 、 $\overline{CO_2}$ ，則同理可證得： $\overline{FC} = 2\overline{CO_2}$ 。
- (17) 由(15)與(16) $\Rightarrow \overline{FA} : \overline{AO_1} = \overline{FC} : \overline{CO_2} = 2 : 1 \Rightarrow \overline{AC} \parallel \overline{O_1O_2}$
 $\Rightarrow \overline{FT} : \overline{TH} = 2 : 1$ 又 $\overline{AT} = \overline{TC}$ $\therefore \overline{FT}$ 通過 $\overline{O_1O_2}$ 的中點 H
- (18) 分別取 \overline{VD} 、 \overline{TD} 的中點 M_4 、 $M_5 \Rightarrow \overline{FV} : \overline{VM_4} = 2 : 1 = \overline{FT} : \overline{TH}$
 $\therefore \overline{M_4H} = \frac{3}{2} \times \overline{TV}$, $\overline{M_4H} \parallel \overline{TV}$ 同理： $\overline{M_5R} = \frac{3}{2} \times \overline{TV}$, $\overline{M_5R} \parallel \overline{TV}$
- (19) $\ominus \overline{M_4M_5} = \frac{1}{2} \times \overline{TV}$, $\overline{M_4M_5} \parallel \overline{TV}$

$$\therefore \overline{HR} \parallel \overline{TV}, \text{ 且 } \overline{HR} = \overline{M_4H} + \overline{M_5R} - \overline{M_4M_5} = \frac{3}{2}\overline{TV} + \frac{3}{2}\overline{TV} - \frac{1}{2}\overline{TV} = 2.5 \times \overline{TV}.$$

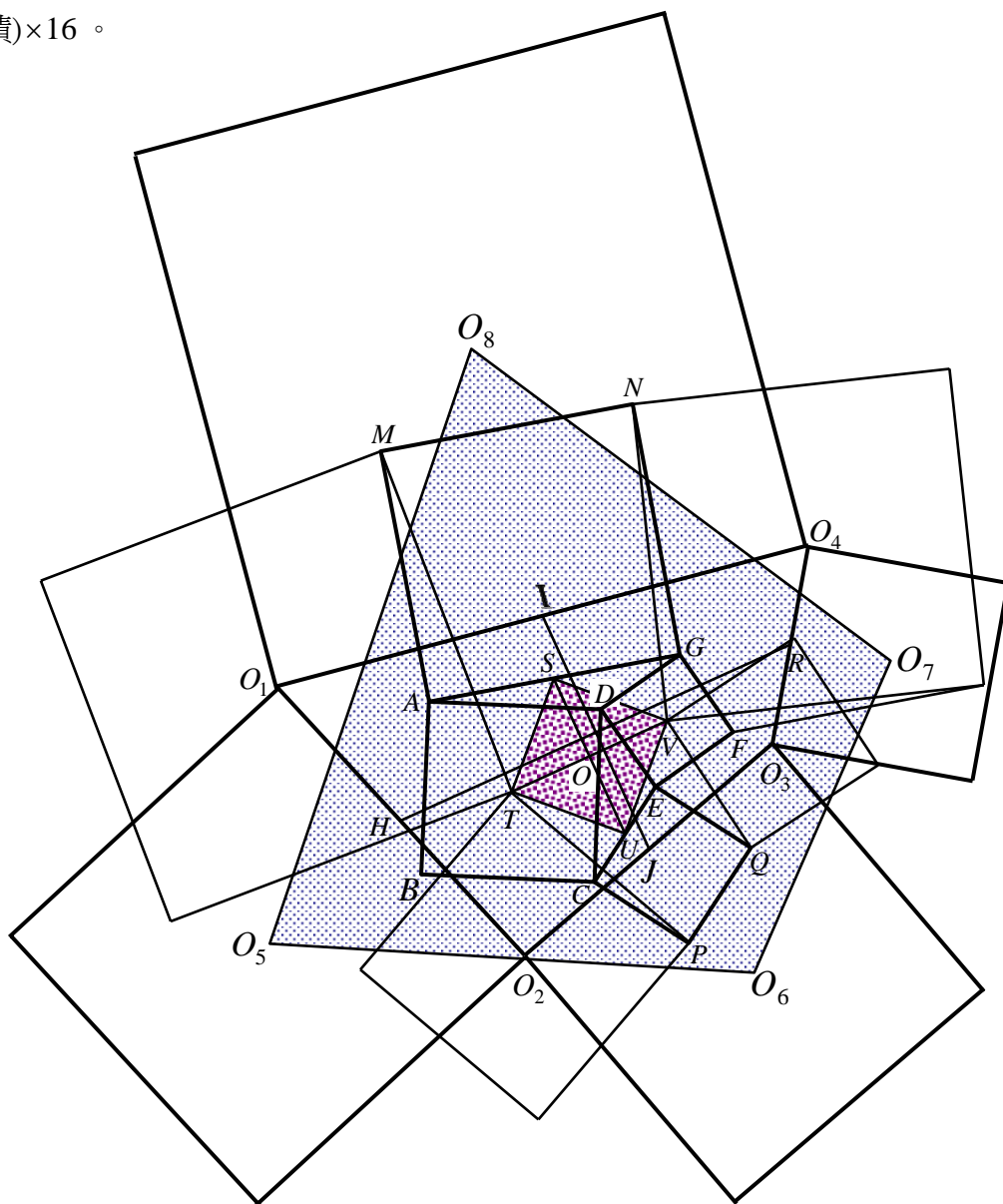
(II)

$$\ominus \overline{HR} \parallel \overline{TV} \therefore \overline{HR} \perp \overline{IJ}$$

$$\Rightarrow \text{四邊形 } O_1O_2O_3O_4 \text{ 面積} = \overline{HR} \times \overline{IJ} = (2.5 \times \overline{TV}) \times (1.5 \times \overline{SU})$$

$$= \frac{15}{4} \times \overline{TV}^2 = (\text{正方形 } STUV \text{ 面積}) \times 7.5.$$

【定理 5】四邊形 $ABCD$ 、 $CEQP$ 、 $DEFG$ 、 $AGNM$ 皆為正方形， T 、 V 分別是 $ABCD$ 與 $DEFG$ 的中心點， S 、 U 分別是 \overline{AG} 、 \overline{CE} 的中點。若分別以 \overline{MT} 、 \overline{TP} 、 \overline{QV} 、 \overline{VN} 為邊向外作四個正方形， O_1 、 O_2 、 O_3 、 O_4 分別是這四個正方形的中心點，若分別以 $\overline{O_1O_2}$ 、 $\overline{O_2O_3}$ 、 $\overline{O_3O_4}$ 、 $\overline{O_4O_1}$ 為邊向外作四個正方形， O_5 、 O_6 、 O_7 、 O_8 分別是這些正方形的中心點，而 H 、 J 、 R 、 I 分別為 $\overline{O_1O_2}$ 、 $\overline{O_2O_3}$ 、 $\overline{O_3O_4}$ 、 $\overline{O_4O_1}$ 的中點，試證：四邊形 $O_5O_6O_7O_8$ 的面積 = (正方形 $STUV$ 面積) $\times 16$ 。



【證明】

(1) 由引理 9 可知：四邊形 $O_1O_2O_3O_4$ 面積 = 正方形 $STUV$ 面積的 7.5 倍。

(2) 連 \overline{IJ} 、 \overline{HR} ，則 $\overline{HR} = 2.5 \times \overline{TV}$ ， $\overline{IJ} = 1.5 \times \overline{TV}$ (令 $\overline{TV} = r$ ， $\overline{HR} = 3.5r$ ， $\overline{IJ} = 1.5r$)， $\overline{HR} \perp \overline{IJ}$ 。

(3)由引理 8 知： $O_5O_6O_7O_8$ 面積 = $O_1O_2O_3O_4$ 面積的 $\frac{(2.5r + 1.5r)^2}{2 \cdot (2.5r) \cdot (1.5r)}$ 倍

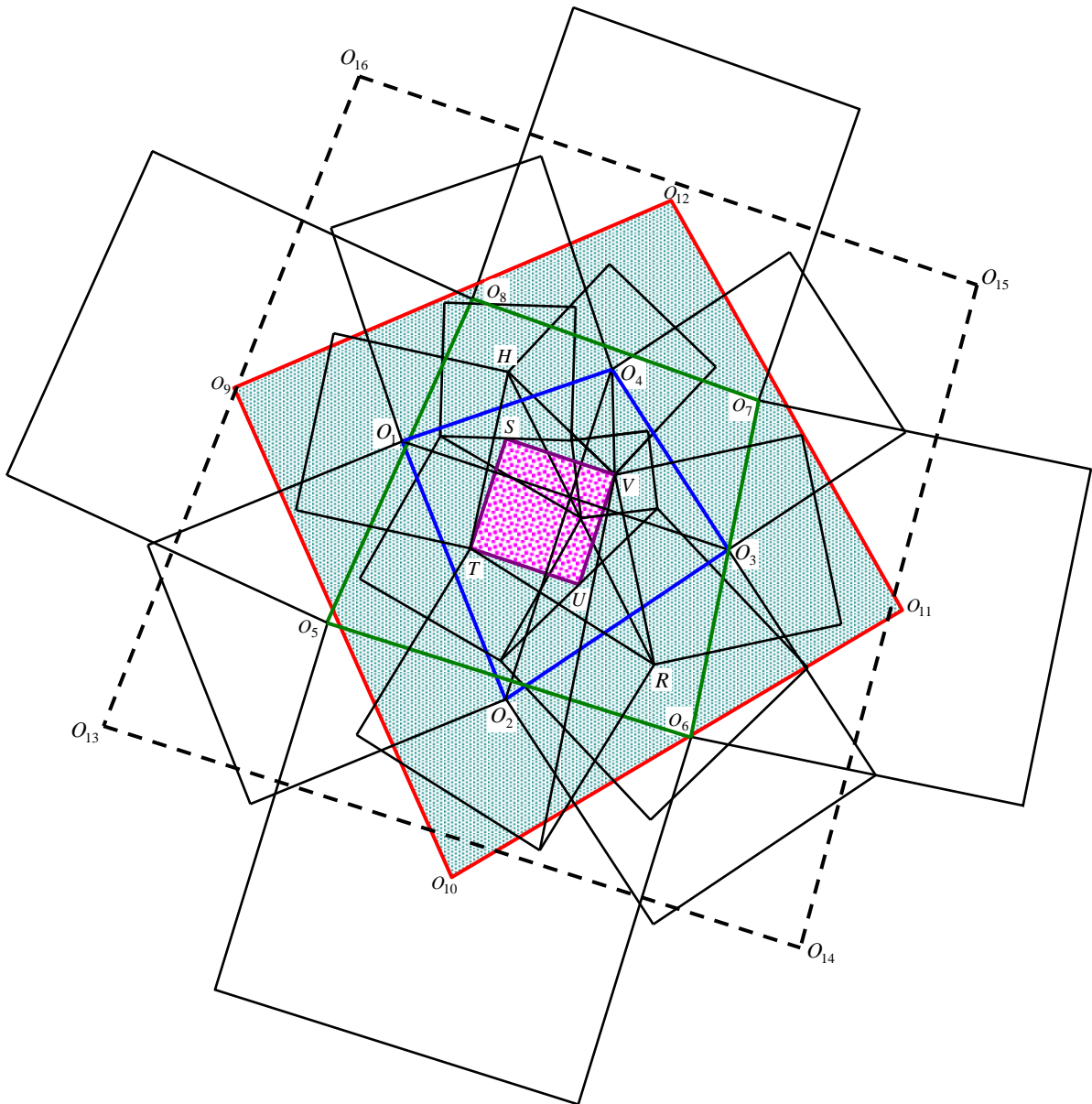
$$\Rightarrow O_5O_6O_7O_8 \text{ 面積} = O_1O_2O_3O_4 \text{ 面積的 } \frac{32}{15} \text{ 倍}$$

$$\therefore \text{四邊形 } O_5O_6O_7O_8 \text{ 面積} = \text{正方形 } STUV \text{ 面積的 } \frac{32}{15} \times \frac{15}{2} \text{ 倍}$$

故得證：四邊形 $O_5O_6O_7O_8$ 的面積 = (正方形 $STUV$ 面積) $\times 16$ 。

伍、研究結論：

【「以管窺天，以蠡測海」之一】

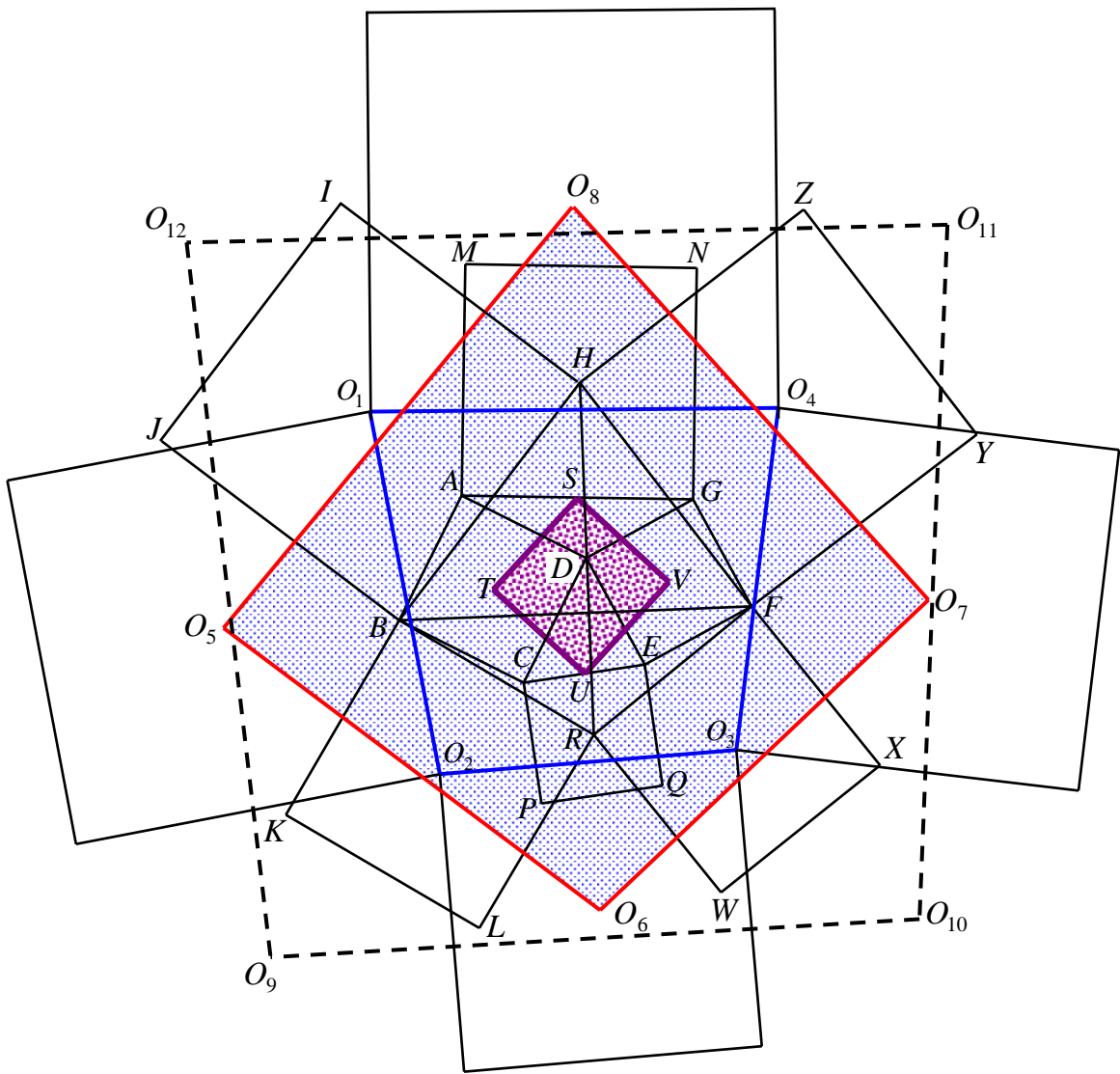


若 $H、T、R、V；O_1、O_2、O_3、O_4；O_5、O_6、O_7、O_8；O_9、O_{10}、O_{11}、O_{12}；\dots\dots；O_{4n-3}、O_{4n-2}、O_{4n-1}、O_{4n}；\dots\dots$ 皆各表上圖中正方形的中心點，四邊形 $STUV$ 為正方形，且令 $STUV$ 的面積為 1，四邊形 $O_{4n-3}O_{4n-2}O_{4n-1}O_{4n}$ 面積 = Γ_n ，則：

- (1) $\Gamma_1 =$ 四邊形 $O_1O_2O_3O_4$ 的面積 $= 1 \times \frac{9}{2} = \frac{9}{2}$ (第 1 層);
- (2) $\Gamma_2 =$ 四邊形 $O_5O_6O_7O_8$ 面積 $= \frac{9}{2} \times 2 = 9$ (第 2 層);
- (3) $\Gamma_3 =$ 四邊形 $O_9O_{10}O_{11}O_{12}$ 面積 $= 9 \times 2 = 18$ (第 3 層);
-
- (n) $\Gamma_n =$ 四邊形 $O_{4n-3}O_{4n-2}O_{4n-1}O_{4n}$ 面積 $= 9 \times 2^{n-2}$ (第 n 層);
-

【說明】綜合定理 1、引理 5、定理 2，即可證得。

【「以管窺天，以蠡測海」之二】



若 $H、T、R、V；O_1、O_2、O_3、O_4；O_5、O_6、O_7、O_8；\dots；O_{4n-3}、O_{4n-2}、O_{4n-1}、O_{4n}；\dots$ 皆各表上圖中正方形的中心點，四邊形 $STUV$ 為正方形，且令 $STUV$ 的面積為 1，則：

(1)四邊形 $O_1O_2O_3O_4$ 的面積 = $1 \times 4 = 4$ (第 1 層);

(2)四邊形 $O_5O_6O_7O_8$ 面積 = $4 \times 2 = 8$ (第 2 層);

(3)四邊形 $O_9O_{10}O_{11}O_{12}$ 面積 = $8 \times 2 = 16$ (第 3 層);

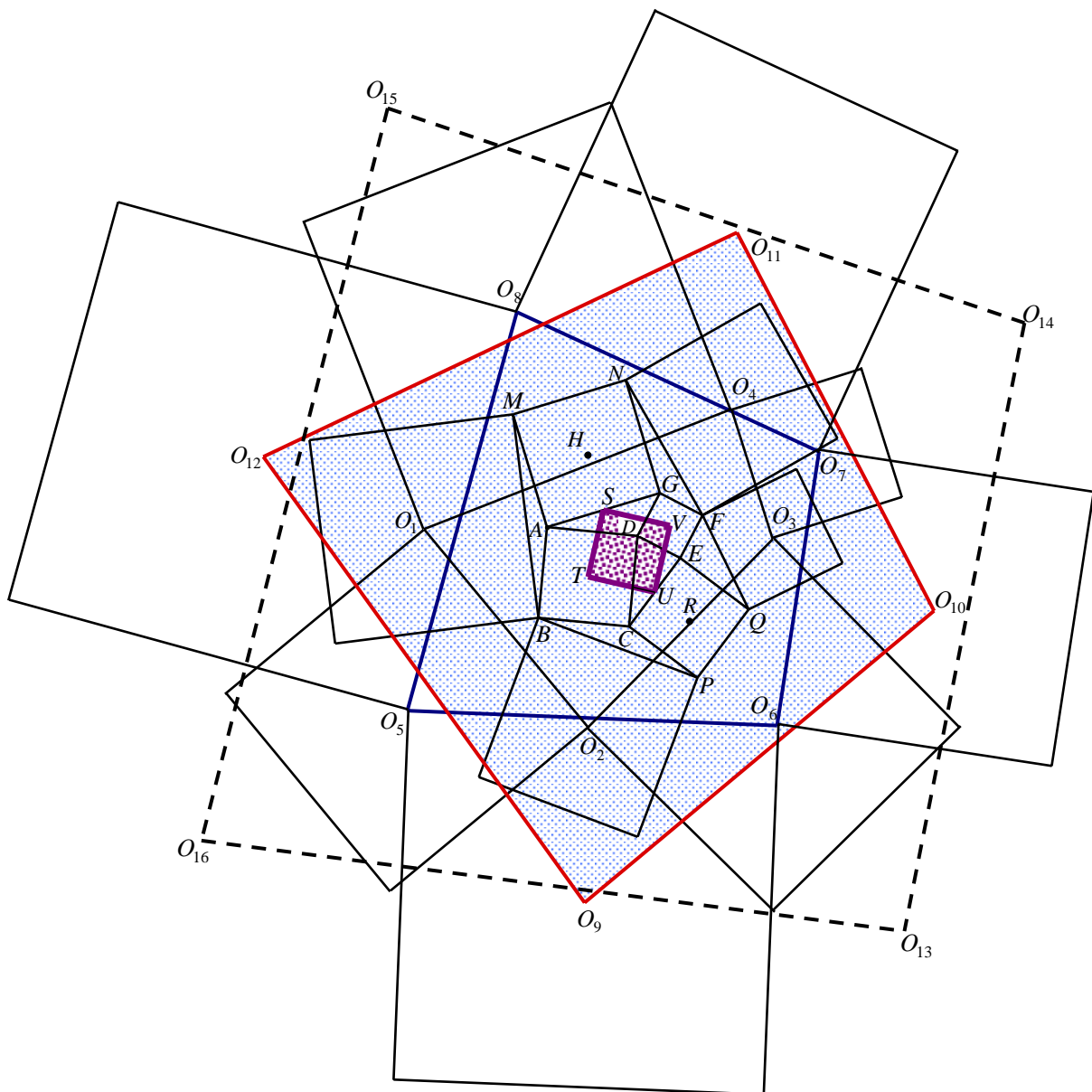
.....

(n)四邊形 $O_{4n-3}O_{4n-2}O_{4n-1}O_{4n}$ 面積 = 2^{n+1} (第 n 層);

.....

【說明】綜合引理 6、定理 3 與引理 5，即可證得。

【「以管窺天，以蠡測海」之(三)】



若 $H、T、R、V$; $O_1、O_2、O_3、O_4$; $O_5、O_6、O_7、O_8$; $O_9、O_{10}、O_{11}、O_{12}$; ; $O_{4n-3}、O_{4n-2}、O_{4n-1}、O_{4n}$; 皆各表上頁圖中正方形的中心點，四邊形 $STUV$ 為正方形，

且令 $STUV$ 的面積為 1，四邊形 $O_{4n-3}O_{4n-2}O_{4n-1}O_{4n}$ 面積 = Ω_n ，則：

(1) $\Omega_1 =$ 四邊形 $O_1O_2O_3O_4$ 的面積 = $1 \times 12 = 12$ (第 1 層)；

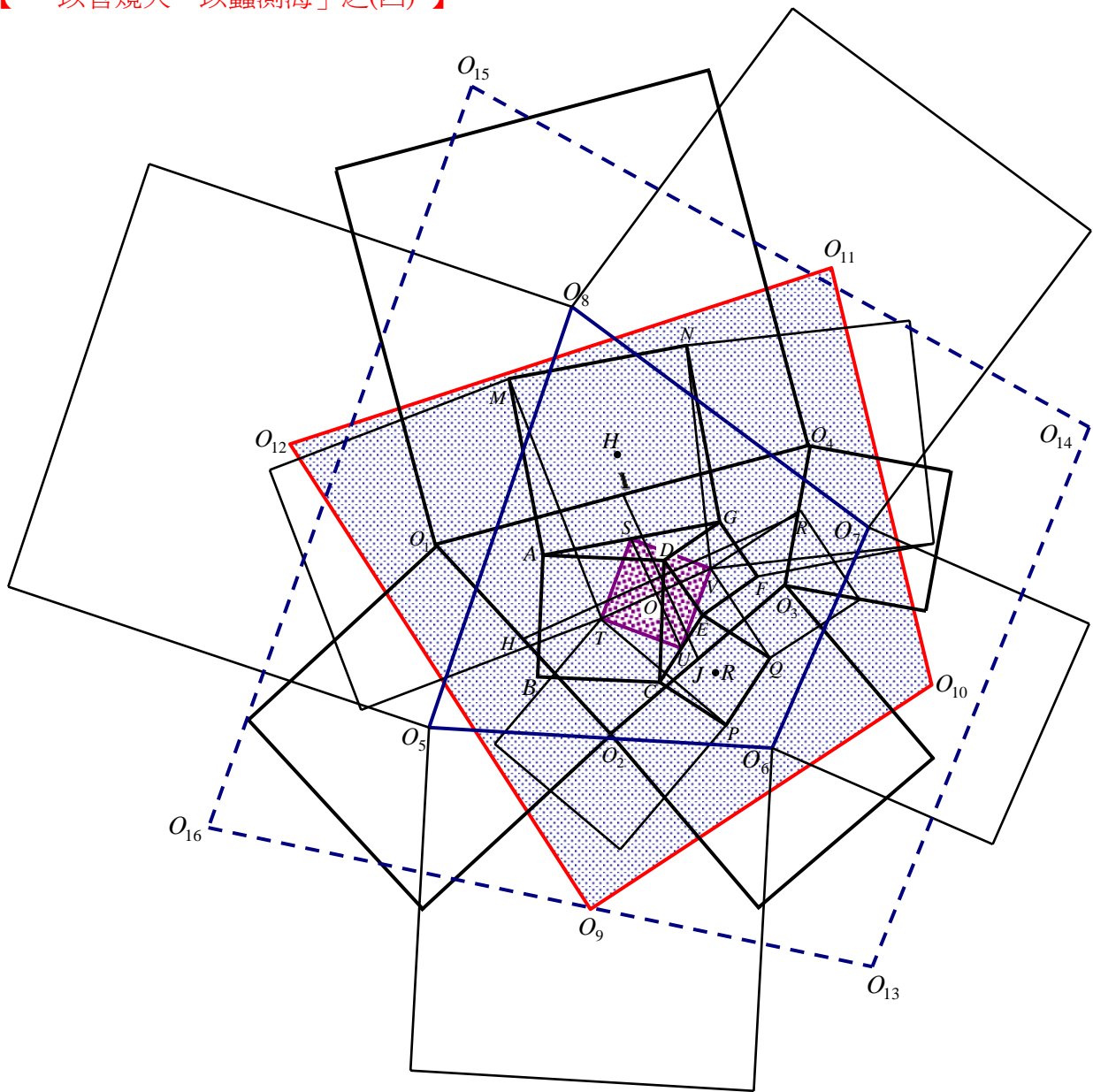
(2) $\Omega_2 =$ 四邊形 $O_5O_6O_7O_8$ 面積 = $12 \times \frac{25}{12} = 25$ (第 2 層)；

(3) $\Omega_3 =$ 四邊形 $O_9O_{10}O_{11}O_{12}$ 面積 = $25 \times 2 = 50$ (第 3 層)；

.....
 (n) $\Omega_n =$ 四邊形 $O_{4n-3}O_{4n-2}O_{4n-1}O_{4n}$ 面積 = $25 \times 2^{n-2}$ (第 n 層， $n \geq 2$)；

【說明】綜合引理 7、引理 8、定理 4 與引理 5，即可證得。

【「以管窺天，以蠡測海」之(四)】



若 $H、T、R、V$ ； $O_1、O_2、O_3、O_4$ ； $O_5、O_6、O_7、O_8$ ； $O_9、O_{10}、O_{11}、O_{12}$ ；.....；

O_{4n-3} 、 O_{4n-2} 、 O_{4n-1} 、 O_{4n} ；……皆各表上頁圖中正方形的中心點，四邊形 $STUV$ 為正方形，且令 $STUV$ 的面積為 1，四邊形 $O_{4n-3}O_{4n-2}O_{4n-1}O_{4n}$ 面積 = Ψ_n ，則：

(1) Ψ_1 = 四邊形 $O_1O_2O_3O_4$ 的面積 = $1 \times 7.5 = 7.5$ (第 1 層)；

(2) Ψ_2 = 四邊形 $O_5O_6O_7O_8$ 面積 = $7.5 \times \frac{32}{15} = 16$ (第 2 層)；

(3) Ψ_3 = 四邊形 $O_9O_{10}O_{11}O_{12}$ 面積 = $16 \times 2 = 32$ (第 3 層)；

.....

(n) Ψ_n = 四邊形 $O_{4n-3}O_{4n-2}O_{4n-1}O_{4n}$ 面積 = $16 \times 2^{n-2}$ (第 n 層， $n \geq 2$)；

.....

【說明】綜合引理 9、定理 5 與引理 5，即可證得。

【 「以管窺天，以蠡測海」之(五) 】

對於任一個「傑克結構」(Jack Structure) 而言，假設其「基準正方形」(Reference Square) 的面積為 1，若 n 為正整數，且定義 Γ_n 、 Ω_n 、 Ψ_n 分別如本段結論之(一)、(三)、(四)，由於 $\Gamma_1 = 4.5$ ， $\Gamma_n = 9 \times 2^{n-2}$ ($n \in N$)； $\Psi_1 = 7.5$ ， $\Psi_n = 16 \times 2^{n-2}$ ($n \geq 2$ ， $n \in N$)； $\Omega_1 = 12$ ， $\Omega_n = 25 \times 2^{n-2}$ ($n \geq 2$ ， $n \in N$)，故 Γ_n 、 Ψ_n 、 Ω_n 三者具有以下關係 (如下頁附表)：

$$\underline{\underline{\Gamma_n + \Psi_n = \Omega_n \quad \forall n \in N}}$$

陸、心得感想：

無論生活上或學習經驗裡，正方形是很常見的幾何圖形，這次的研究成果，也讓自己更加了解正方形的性質。

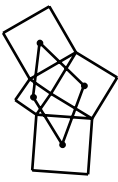
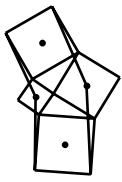
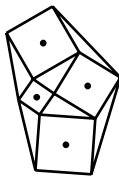
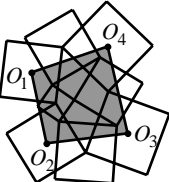
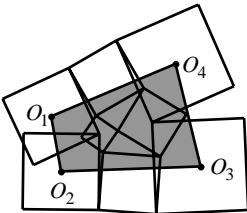
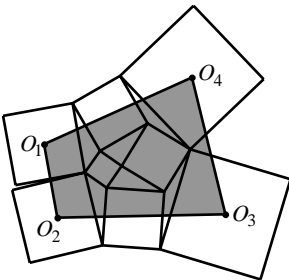
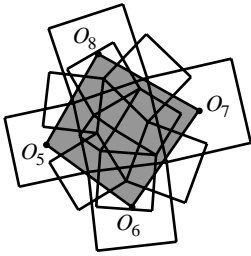
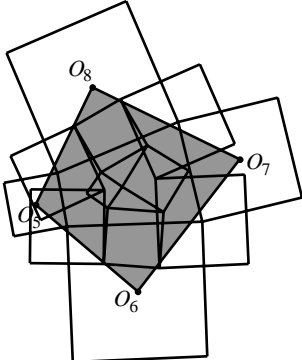
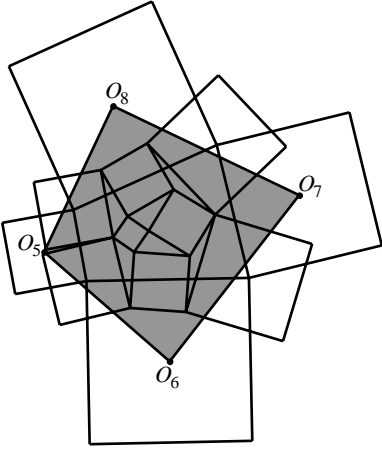
研究過程中，我們曾為幾個複雜的幾何圖形，因為理不清證明思緒而感到挫折，但感謝數學老師一再鼓勵、指導，讓我們堅持一定要找出命題的解答才肯罷手。

我們期待討論得出的面積關係能具有實質的參考價值，我們也相信相關主題還有很大的探討空間，也期許將來有機會做進一步研究，以發現更奧妙的正方形世界。

柒、參考資料：

- 一、台北市九十一年度資賦優異教育方案數學競賽 – 隊際賽問題第參題。
- 二、嚴鎮軍主編《初中數學競賽教程》；台北市；九章出版社；民 88.11。

附表：正方形「心手相連」時， Γ_n 、 Ψ_n 、 Ω_n 三者的關係：

<p>(1)「傑克」的「心」或「手」間相連的其中三種情況。</p>	 <p>「心」與「心」相連</p>	 <p>「手」與「心」相連</p>	 <p>「手」與「手」相連</p>
<p>(2)令「基準正方形」的面積為1，以(1)所連成的四線段為邊，分別向外作正方形，並將它們的「心」依序連成四邊形$O_1O_2O_3O_4$。</p>	 <p>令$O_1O_2O_3O_4$面積=Γ_1 推得：$\Gamma_1 = 4.5$</p>	 <p>令$O_1O_2O_3O_4$面積=Ψ_1 推得：$\Psi_1 = 7.5$</p>	 <p>令$O_1O_2O_3O_4$面積=Ω_1 推得：$\Omega_1 = 12$</p>
<p>(3)分別以(2)之$O_1O_2O_3O_4$的四個邊為邊，向外作正方形，並將這四個正方形的「心」依序連成四邊形$O_5O_6O_7O_8$。</p>	 <p>令$O_5O_6O_7O_8$面積=Γ_2 推得：$\Gamma_2 = 9$</p>	 <p>令$O_5O_6O_7O_8$面積=Ψ_2 推得：$\Psi_2 = 16$</p>	 <p>令$O_5O_6O_7O_8$面積=Ω_2 推得：$\Omega_2 = 25$</p>
<p>...</p>	<p>...</p>	<p>...</p>	<p>...</p>
<p>第n層 ($n \geq 2$)</p>	<p>$O_{4n-3}O_{4n-2}O_{4n-1}O_{4n}$ 面積=$\Gamma_n = 9 \times 2^{n-2}$</p>	<p>$O_{4n-3}O_{4n-2}O_{4n-1}O_{4n}$ 面積=$\Psi_n = 9 \times 2^{n-2}$</p>	<p>$O_{4n-3}O_{4n-2}O_{4n-1}O_{4n}$ 面積=$\Omega_n = 25 \times 2^{n-2}$</p>
<p>Γ_n、Ψ_n、Ω_n 三個值的關係式，n為任意自然數。</p>	<p>$\Gamma_n + \Psi_n = \Omega_n \quad \forall n \in N$</p>		

評 語

030425 神奇的傑克

本作品充分顯示參展團隊在平面幾何上有很深入的學習，探討的問題也非常有特色；若能輔以解析幾何的學習，當可有更優異的表現。