中華民國第四十六屆中小學科學展覽會
作品說明書

國中組　數學科

第三名

最佳創意獎

030424

滾滾紅成

學校名稱：　高雄市立五福國民中學

作者：	指導老師：
國二 薛丞洋	梁益彰
國二 張聿民	余尚芸
國二 陳思罕	
國二 劉恩權	

關 鍵 詞：滾動、軌跡、正多邊形

滾滾紅成

摘要：

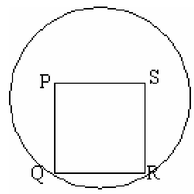
從澳洲 AMC 競賽題出發，嘗試探討一正 n 邊形中的一點在單位圓內滾動，及一正 n 邊形的繞一正 n 邊形滾動軌跡，發現該軌跡均會產生奇妙的循環規律。

接下來推廣探討圓形其他的規律，發現若將一單位圓去繞另一單位圓或其他由單位圓組成的幾何圖形，探討其滾動軌跡，並探討在何種情況該單位圓繞回原出發點時會和原圖相同，從研究中得知所繞全等圓圖形與旋轉圈數和邊長所需個數的關係，如：『邊長為 3 的全等圓正方形』其旋轉圈數是 $2+\frac{4(3-1)}{3}=\frac{14}{3}$ 圈，此時和原圖不同，而回到原點且和原圖相同邊長所需個數則為 $3k+1$（$k\in N$）等。

另外，『繞一間隔大小等於圓直徑的全等圓圖形』是指從第一個圓開始逆時針滾動，若接觸到另一個圓時則往反方向繼續繞圖形滾動，依此類推，探討圓心所繞的軌跡型態及長度繞一間隔全等圓圖形，發現其圓心軌跡型態存在著規律性，且圓必繞回原點。最驚人的是，***應用我們的研究結果於許多商業用途，並創造出寓數學於遊戲的「多功能滾滾樂尺」。***

壹、研究動機：

在澳洲 AMC 競賽題中出現一個題目：『**如圖，一邊長為 1 米正方形置於一半徑為一米的圓內，該正方形以如下的方式在圓內運動：繞點 R 順時針旋轉直到點 S 接觸到圓，繞點 S 順時針旋轉直到點 P 接觸到圓，以此類推，直到正方形有 2 個點到達最初 Q、R 所在的位置，求 P 點的軌跡長？**』結果發現 P 點滾動軌跡有一規律性，嘗試將圓內正方形推廣至正 n 邊形加以討論，這使我對圓形及多邊形的滾動產生好奇心，進而想利用圓的性質（仁林版第二冊單元三－3）深入研究探討其他滾動和圖形、角度、大小的關係。



貳、研究目的：

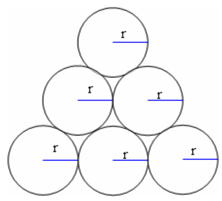
一、探討一正 n 邊形（邊長為 1 單位）中的一點在單位圓內滾動的軌跡。

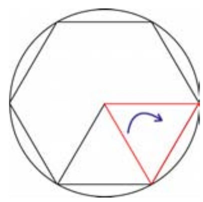
二、探討一正 n 邊形（邊長為 1 單位）中心點繞一正 n 邊形（邊長為 m 單位）的滾動軌跡。

三、探討一單位圓繞邊長為 n 的全等圓圖形的滾動軌跡。

参、解釋名詞：

全等圓圖形：由數個單位圓所組合而成的幾何圖形。





肆、研究過程：

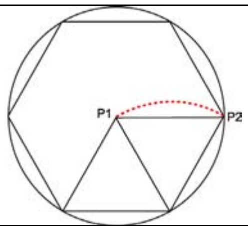
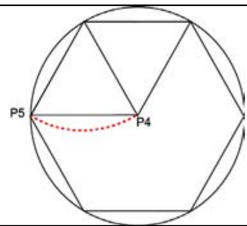
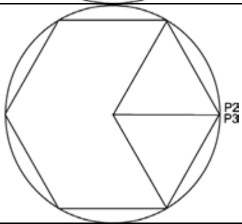
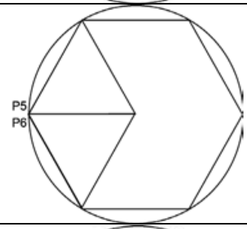
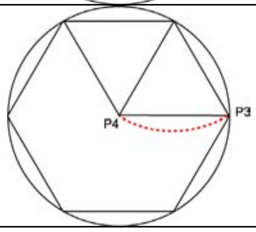
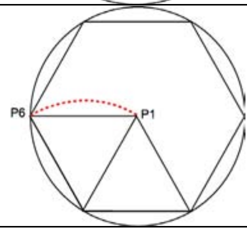
一、探討一正 n 邊形（邊長為 1 單位）中的一點在單位圓內滾動的軌跡

規則：將一邊長為 1 的正多邊形置入半徑為 1 的圓中，沿圓周滾動一週（直到又有兩頂點達到最初圖形頂點的位置）

我們依照規則滾動正多邊形，嘗試探討一正 n 邊形的『頂點』、『中心點』、『內部任一點』滾動後之軌跡圖形及其長度。

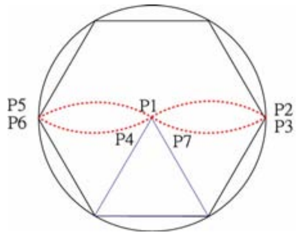
（一）探討一正 n 邊形（邊長爲 1 單位）的『頂點』在單位圓內滾動的軌跡及其旋轉長度

1.探討一正三角形（邊長爲 1 單位）的『頂點』在單位圓內滾動的軌跡及其旋轉長度

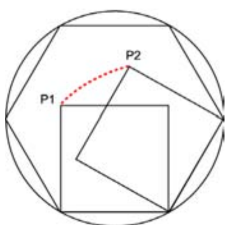
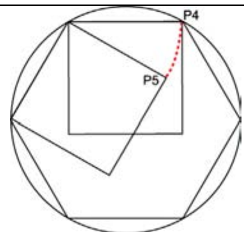
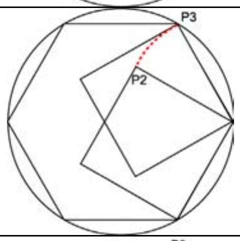
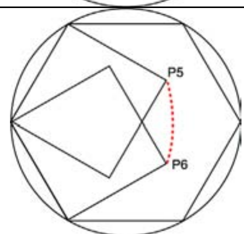
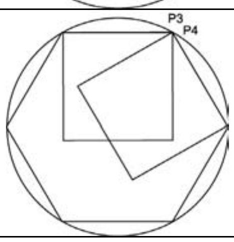
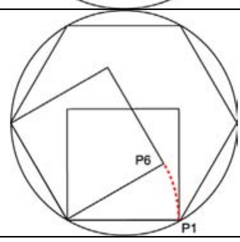
步驟	圖形軌跡變化分解圖	旋轉	旋轉半徑	旋轉長度	步驟	圖形軌跡變化分解圖	旋轉	旋轉半徑	旋轉長度
1		P1 ➔ P2	1	$\frac{1}{3}\pi$	4		P4 ➔ p5	1	$\frac{1}{3}\pi$
2		P2 ➔ P3	0	0	5		P5 ➔ P6	0	0
3		P3 ➔ P4	1	$\frac{1}{3}\pi$	6		P6 ➔ P1	1	$\frac{1}{3}\pi$

發現： 1.正三角形（邊長爲 1 單位）的『頂點』在單位圓內滾動的軌跡如圖所示。

2.由於正三角形的旋轉角度爲 120－60＝60 度，以 P 點計算其軌跡長度，軌跡長度總和＝$\frac{4}{3}\pi$

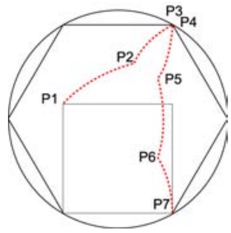


2.探討一正方形（邊長爲 1 單位）的頂點在單位圓內滾動的軌跡及其旋轉長度

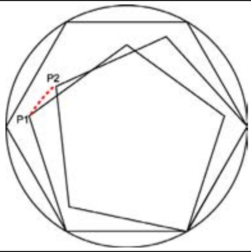
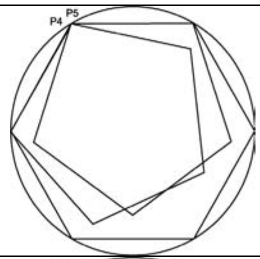
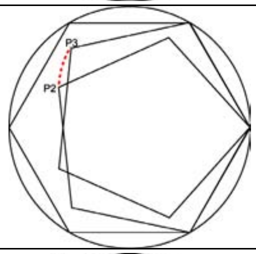
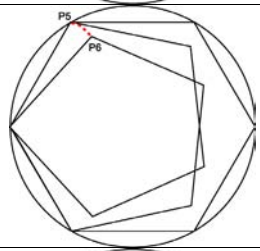
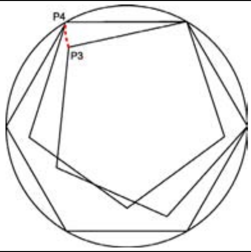
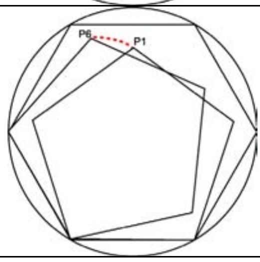
步驟	圖形軌跡變化分解圖	旋轉	旋轉半徑	旋轉長度	步驟	圖形軌跡變化分解圖	旋轉	旋轉半徑	旋轉長度
1		P1 ➔ P2	$\sqrt{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{6}\pi$	4		P4 ➔ p5	1	$\frac{1}{6}\pi$
2		P2 ➔ P3	1	$\frac{1}{6}\pi$	5		P5 ➔ P6	$\sqrt{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{6}\pi$
3		P3 ➔ P4	0	0	6		P6 ➔ P1	1	$\frac{1}{6}\pi$

發現：1.正方形（邊長爲 1 單位）的『頂點』在單位圓內滾動的軌跡如圖。

2.由於正方形的旋轉角度爲 120－90＝30˚度，以 P 點計算其軌跡長度，軌跡長度總和＝$(\frac{\sqrt{2}}{3}+\frac{1}{2})\pi$

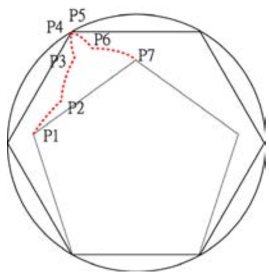


3.探討一正五邊形（邊長爲 1 單位）的頂點在單位圓內滾動的軌跡及其旋轉長度

步驟	圖形軌跡變化分解圖	旋轉	旋轉半徑	旋轉長度	步驟	圖形軌跡變化分解圖	旋轉	旋轉半徑	旋轉長度
1		P1 ➔ P2	$\frac{\sqrt{5}+1}{2}$	$\frac{\sqrt{5}+1}{30}\pi$	4		P4 ➔ p5	0	0
2		P2 ➔ P3	$\frac{\sqrt{5}+1}{2}$	$\frac{\sqrt{5}+1}{30}\pi$	5		P5 ➔ P6	1	$\frac{1}{15}\pi$
3		P3 ➔ P4	1	$\frac{1}{15}\pi$	6		P6 ➔ P1	$\frac{\sqrt{5}+1}{2}$	$\frac{\sqrt{5}+1}{30}\pi$

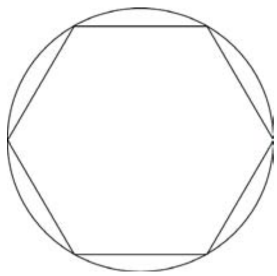
發現：1.正五邊形（邊長爲 1 單位）的『頂點』在單位圓內滾動的軌跡如圖所示。

2.由於正五邊形的旋轉角度爲 120－108＝12˚，以 P 點計算其軌跡長度，軌跡長度總和＝$(\frac{7}{30}+\frac{\sqrt{5}}{10})\pi$



4.探討一正六邊形（邊長爲 1 單位）的頂點在單位圓內滾動的軌跡及其旋轉長度

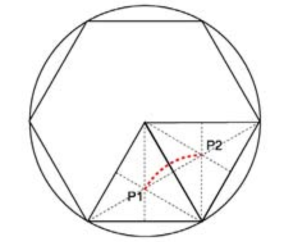
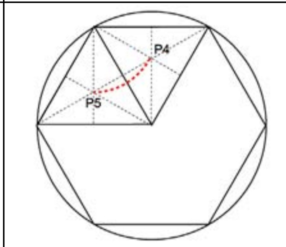
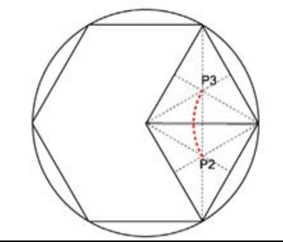
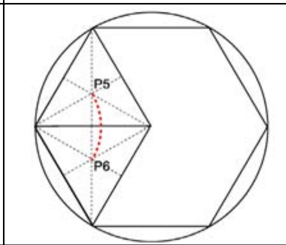
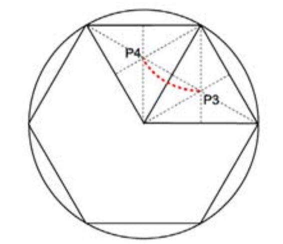
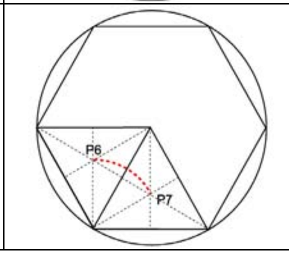
發現：由於正六邊形的旋轉角度爲 120－120＝0˚，故正六邊形（邊長爲 1 單位）在單位圓內無法滾動，軌跡長度爲 0，如圖所示。



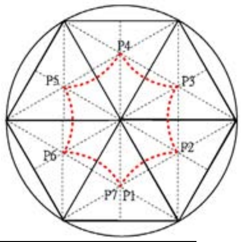
※註：以下因爲正六邊形（邊長爲 1 單位）無法在單位圓內滾動，故不再加以討論。

（二）探討一正 n 邊形（邊長爲 1 單位）的中心點在單位圓內滾動的軌跡

1.探討一正三角形（邊長爲 1 單位）的中心點在單位圓內滾動的軌跡

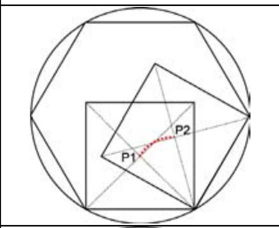
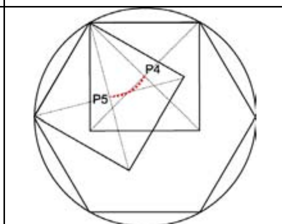
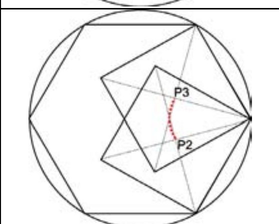
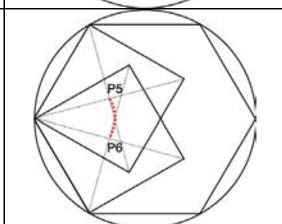
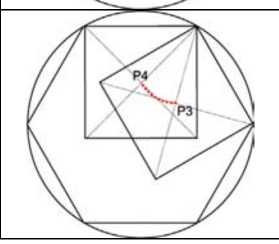
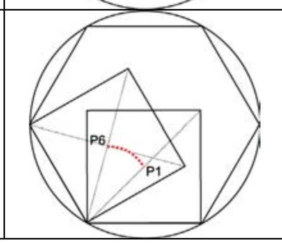
步驟	圖形軌跡變化分解圖	旋轉	旋轉半徑	旋轉長度	步驟	圖形軌跡變化分解圖	旋轉	旋轉半徑	旋轉長度
1		P1 → P2	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{9}\pi$	4		P4 → p5	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{9}\pi$
2		P2 → P3	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{9}\pi$	5		P5 → P6	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{9}\pi$
3		P3 → P4	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{9}\pi$	6		P6 → P1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{9}\pi$

發現：1.正△（邊長爲 1 單位）的『中心點』在單位圓內滾動的軌跡如圖。



2.由於正△的旋轉角度爲 60 度，以 P 點計算其軌跡長度，軌跡長度總和＝$\frac{2\sqrt{3}}{3}\pi$

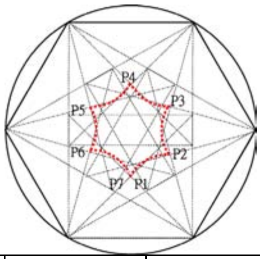
2.探討一正方形（邊長爲 1 單位）的中心點在單位圓內滾動的軌跡

步驟	圖形軌跡變化分解圖	旋轉	旋轉半徑	旋轉長度	步驟	圖形軌跡變化分解圖	旋轉	旋轉半徑	旋轉長度
1		P1 → P2	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{12}\pi$	4		P4 → p5	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{12}\pi$
2		P2 → P3	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{12}\pi$	5		P5 → P6	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{12}\pi$
3		P3 → P4	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{12}\pi$	6		P6 → P1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{12}\pi$

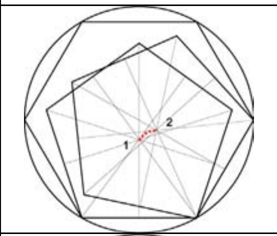
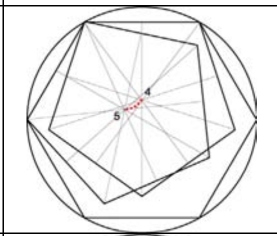
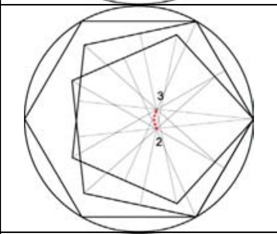
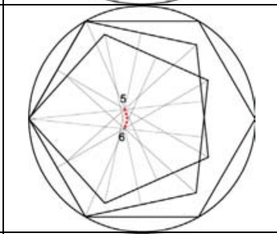
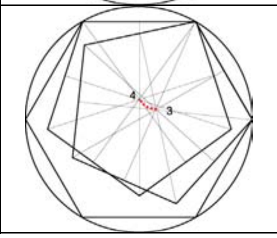
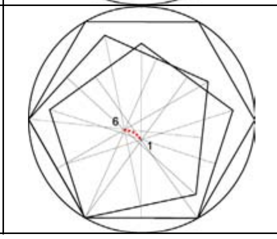
發現：1.正方形（邊長爲 1 單位）的『中心點』在單位圓內滾動的軌跡如圖所示。

2.由於正方形的旋轉角度爲 30 度，以 P 點計算其軌跡長度，

軌跡長度總和＝$\frac{\sqrt{2}}{2}\pi$

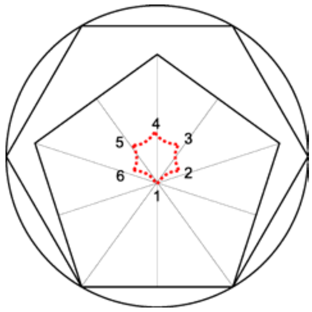


3.探討一正五邊形（邊長爲 1 單位）的中心點在單位圓內滾動的軌跡

步驟	圖形軌跡變化分解圖	旋轉	旋轉半徑	旋轉長度	步驟	圖形軌跡變化分解圖	旋轉	旋轉半徑	旋轉長度
1		P1 → P2	$\frac{4}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}$	$\frac{4}{15\sqrt{10-2\sqrt{5}}}\pi$	4		P4 → p5	$\frac{4}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}$	$\frac{4}{15\sqrt{10-2\sqrt{5}}}\pi$
2		P2 → P3	$\frac{4}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}$	$\frac{4}{15\sqrt{10-2\sqrt{5}}}\pi$	5		P5 → P6	$\frac{4}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}$	$\frac{4}{15\sqrt{10-2\sqrt{5}}}\pi$
3		P3 → P4	$\frac{4}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}$	$\frac{4}{15\sqrt{10-2\sqrt{5}}}\pi$	6		P6 → P1	$\frac{4}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}$	$\frac{4}{15\sqrt{10-2\sqrt{5}}}\pi$

發現：1.正五邊形（邊長爲 1 單位）的『中心點』在單位圓內滾動的軌跡如圖所示。

2.由於正五邊形的旋轉角度爲 12 度，以 P 點計算其軌跡長度，軌跡長度總和＝$\frac{8}{5\sqrt{10-2\sqrt{5}}}\pi$



（三）探討一正 n 邊形（邊長為 1 單位）的內部任一點在單位圓內滾動的軌跡

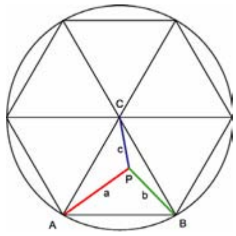
1.探討一正三角形（邊長為 1 單位）的內部任一點在單位圓內滾動的軌跡

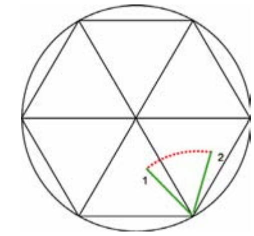
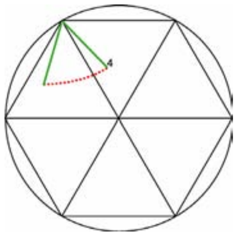
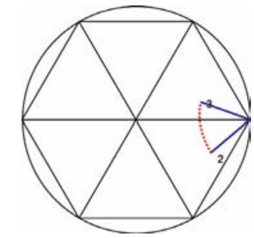
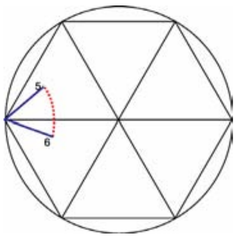
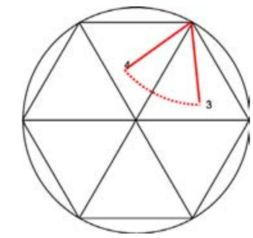
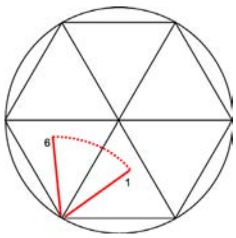
由於探討的是內部任一點，半徑未特定，

故不失一般性地假設點 P 至 A 點的半徑為 a，

點 P 至 B 點的半徑為 b，

點 P 至 C 點的半徑為 c（如圖所示）

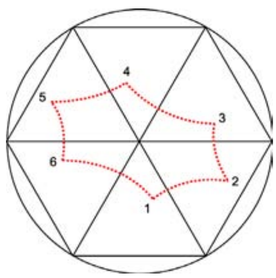


步驟	圖形軌跡變化分解圖	旋轉	旋轉半徑	旋轉長度	步驟	圖形軌跡變化分解圖	旋轉	旋轉半徑	旋轉長度
1		P1 ➔ P2	b	$\frac{b\pi}{3}$	4		P4 ➔ p5	b	$\frac{b\pi}{3}$
2		P2 ➔ P3	c	$\frac{c\pi}{3}$	5		P5 ➔ P6	c	$\frac{c\pi}{3}$
3		P3 ➔ P4	a	$\frac{a\pi}{3}$	6		P6 ➔ P1	a	$\frac{a\pi}{3}$

發現： 1.正三角形（邊長為 1 單位）的『內部任一點』在單位圓內滾動的軌跡如圖所示。

2.由於正三角形的旋轉角度為 60 度，以 P 點計算其軌跡長度，

軌跡長度總和＝$\frac{2(a+b+c)\pi}{3}$



2.探討一正方形（邊長為 1 單位）的內部任一點在單位圓內滾動的軌跡

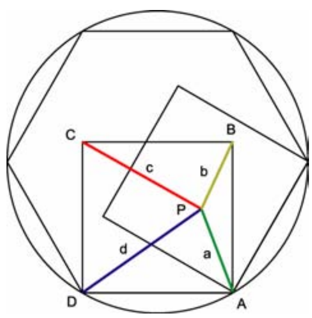
由於探討的是內部任一點，半徑未特定，

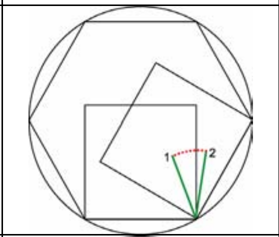
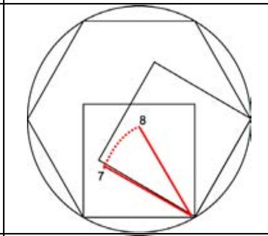
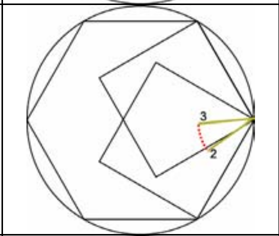
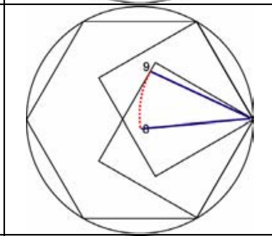
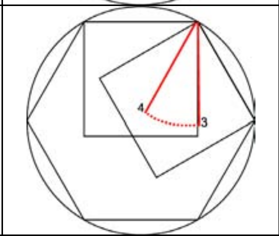
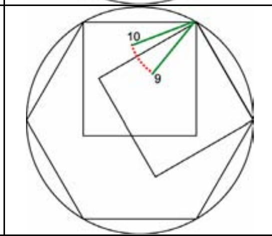
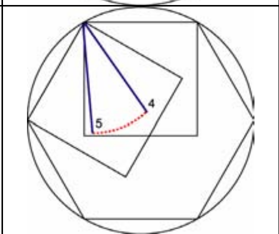
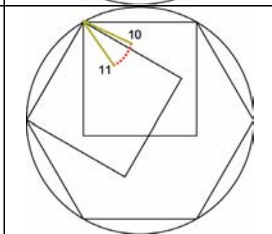
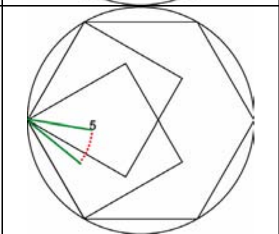
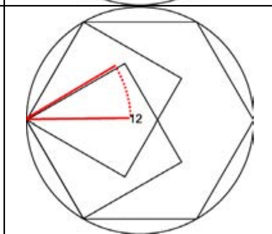
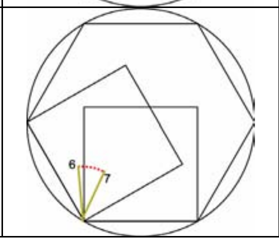
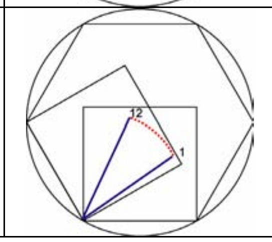
故不失一般性地假設點 P 至 A 點的半徑為 a，

點 P 至 B 點的半徑為 b，

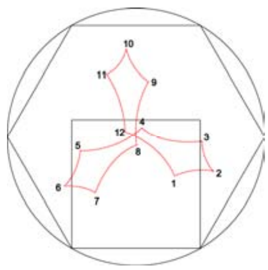
點 P 至 C 點的半徑為 c

點 P 至 D 點的半徑為 d（如圖所示）



步驟	圖形軌跡變化分解圖	旋轉	旋轉半徑	旋轉長度	步驟	圖形軌跡變化分解圖	旋轉	旋轉半徑	旋轉長度
1		P1 → P2	a	$\frac{a\pi}{6}$	7		P7 → P8	c	$\frac{c\pi}{6}$
2		P2 → P3	b	$\frac{b\pi}{6}$	8		P8 → P9	d	$\frac{d\pi}{6}$
3		P3 → P4	c	$\frac{c\pi}{6}$	9		P9 → P10	a	$\frac{a\pi}{6}$
4		P4 → p5	d	$\frac{d\pi}{6}$	10		P10 → P11	b	$\frac{b\pi}{6}$
5		P5 → P6	a	$\frac{a\pi}{6}$	11		P11 → P12	c	$\frac{c\pi}{6}$
6		P6 → P7	b	$\frac{b\pi}{6}$	12		P12 → P1	d	$\frac{d\pi}{6}$

發現：1.正方形（邊長為 1 單位）的『內部任一點』在單位圓內滾動的軌跡如圖所示。

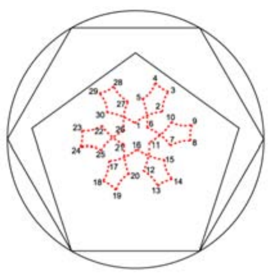


2.由於正方形的旋轉角度為 30 度，以 P 點計算其軌跡長度，

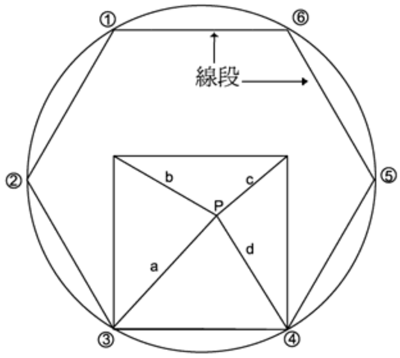
軌跡長度總和＝$\frac{(a+b+c+d)\pi}{2}$

3.探討一正五邊形（邊長為 1 單位）的『內部任一點』在單位圓內滾動的軌跡

以下分解步驟圖共有 30 步驟，故僅列出分解總圖表示



結論：一正 n 邊形（n=3,4,5）置於圓內滾動直到圖形中任一點回到原位置所滾動的軌跡皆形成一個循環，而圖形中任一點回到原位置所滾動的圈數= $\frac{[n,6]}{6}$ 圈

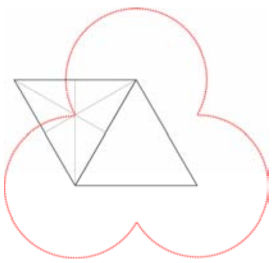


說明：在正 n 邊形內任取一點,此點至圖形頂點的連線共有 n 條，令其長度分別爲 a，b，c…，因重回原點代表那一點至同一頂點的長度相等，所以當線段 a 連接初始頂點，或線段 b 連接初始頂點時即重回原點，因此若將正 n 邊形的 n 條線段分別與正六邊形一一對應，則利用最小公倍數關係可求出其線段重新連接原起點所經過的頂點數，也就是將結果除以 6 可得圖形滾動圈數。

例：右圖，以 d 點爲準，當 d 點重新接到④時所走過的線段除以 6 即爲滾動圈數：$\frac{[4,6]}{6}$=2 圈

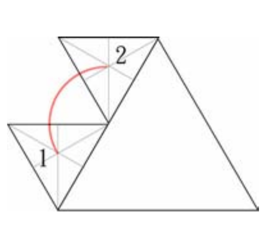
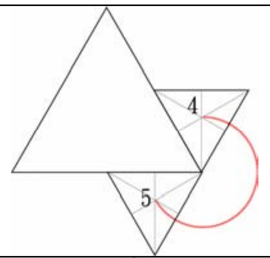
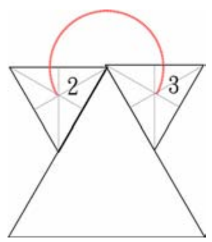
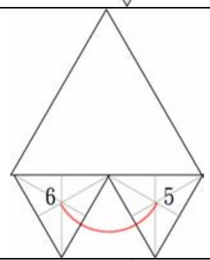
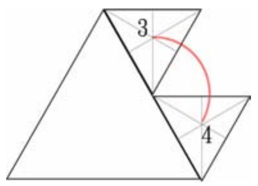
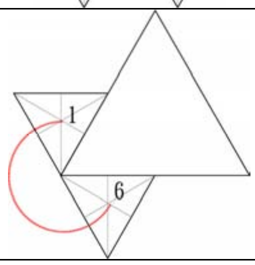
二、探討一正 n 邊形（邊長爲 1 單位）中心點繞一正 n 邊形（邊長爲 m 單位）的滾動軌跡及其長度。

(一) 探討一正三角形（邊長爲 1 單位）中心點繞一正三角形（邊長爲 m 單位）的滾動軌跡及其長度。



首先，探討一正三角形（邊長爲 1 單位）中心點在一正三角形（邊長爲 1 單位）外滾動的軌跡，發現軌跡長度: $\frac{4\sqrt{3}}{3}\pi$ 單位長

1.探討一小正三角形（邊長爲 1 單位）中心點在一大正三角形（邊長爲 2 單位）外滾動的軌跡

步驟	圖形軌跡變化分解圖	旋轉	旋轉半徑	旋轉長度	步驟	圖形軌跡變化分解圖	旋轉	旋轉半徑	旋轉長度
1		P1 → P2	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\frac{2\sqrt{3}}{9}\pi$	4		P4 → P5	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\frac{4\sqrt{3}}{9}\pi$
2		P2 → P3	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\frac{4\sqrt{3}}{9}\pi$	5		P5 → P6	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\frac{2\sqrt{3}}{9}\pi$
3		P3 → p4	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\frac{2\sqrt{3}}{9}\pi$	6		P6 → P1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\frac{4\sqrt{3}}{9}\pi$

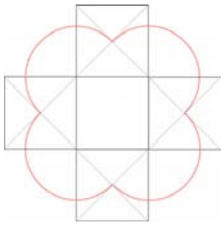
發現：軌跡如右，長度: $2\sqrt{3}\pi$ 單位長

推廣發現：一小正三角形（邊長爲 1 單位）中心點在一大正三角形（邊長爲 m 單位）外滾動的軌跡長度:

$$\frac{2\sqrt{3}}{3}(m+1)\pi$$ 單位長

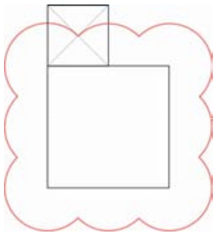
(二) 探討一正方形（邊長爲 1 單位）中心點繞一正方形（邊長爲 m 單位）的滾動軌跡及其長度。

1.探討一正方形（邊長爲 1 單位）中心點在一正方形（邊長爲 1 單位）外滾動的軌跡



發現：軌跡如右，長度: $2\sqrt{2}\pi$ 單位長

2.探討一小正方形（邊長爲 1 單位）中心點在一大正方形（邊長爲 2 單位）外滾動的軌跡

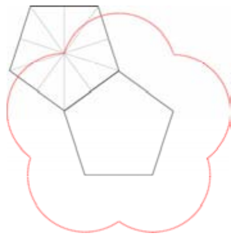


發現：軌跡如右，長度: $3\sqrt{2}\pi$ 單位長

推廣發現：探討一小正方形（邊長爲 1 單位）中心點在一大正方形（邊長爲 m 單位）外滾動的軌跡長度: $(m+1)\sqrt{2}\pi$ 單位長

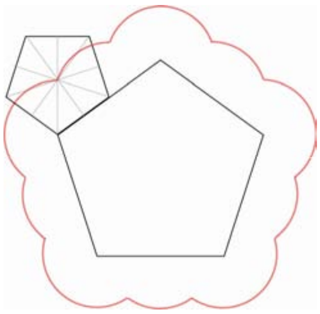
(三) 探討一正五邊形（邊長爲 1 單位）中心點繞一正五邊形（邊長爲 m 單位）的滾動軌跡及其長度。

1.探討一正五邊形（邊長爲 1 單位）中心點在一正五邊形（邊長爲 1 單位）外滾動的軌跡



發現：軌跡如右，長度: $\frac{16}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}\pi$ 單位長

2.探討一小正五邊形（邊長爲 1 單位）中心點在一大正五邊形（邊長爲 2 單位）外滾動的軌跡



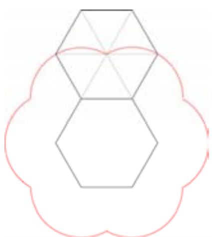
發現：軌跡如右，長度: $\frac{24}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}\pi$ 單位長

推廣發現：一小正五邊形（邊長爲 1 單位）中心點在一大正五邊形（邊長爲 m 單位）外滾動的軌跡長度:

$$\frac{8(m+1)}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}\pi$$ 單位長

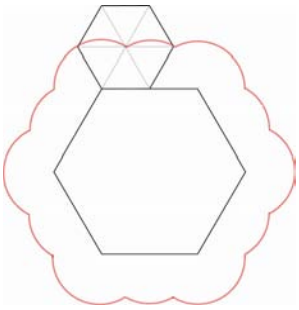
(四) 探討一正六邊形（邊長爲 1 單位）中心點繞一正六邊形（邊長爲 m 單位）的滾動軌跡及其長度。

1.探討一正六邊形（邊長爲 1 單位）中心點在一正六邊形（邊長爲 1 單位）外滾動的軌跡



發現：軌跡如右，長度: 4π 單位長

2.探討一小正六邊形（邊長爲 1 單位）中心點在一大正六邊形（邊長爲 2 單位）外滾動的軌跡



發現：軌跡如右，長度: 6π 單位長

推廣發現：一小正六邊形（邊長爲 1 單位）中心點在一大正六邊形（邊長爲 m 單位）外滾動的軌跡長度:
$2\pi(m+1)$ 單位長

(五) 探討一正 n 邊形（邊長爲 1 單位）中心點繞一正 n 邊形（邊長爲 m 單位）的滾動軌跡及其長度。

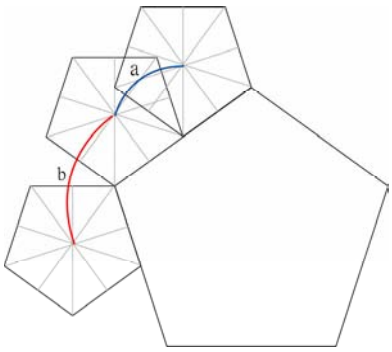
設正 n 邊形的重心至頂點的長度爲 k

正 n 邊形之內角爲 $\frac{180(n-2)}{n}$

如圖，$a = 2k\pi \times \frac{180-\frac{180(n-2)}{n}}{360}$ 共 n(m-1)個

$\therefore$ 全部的 $a = 2k\pi \times n(m-1) \times \frac{180-\frac{180(n-2)}{n}}{360} = 2k\pi(m-1)$

$b = 2k\pi \times \frac{360-\frac{360(n-2)}{n}}{360}$ 共 n 個



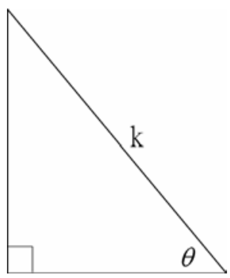
$\therefore$ 全部的 $b = 2k\pi \times n \times \frac{360-\frac{360(n-2)}{n}}{360} = 4k\pi$

總長 $= 2k\pi(m-1) + 4k\pi = 2k\pi(m+1)$

正 n 邊形的重心至頂點的長度 k 之算法

如圖，$\theta = \frac{180(n-2)}{n} \div 2 = 90 - \frac{180}{n}$

$\cos\theta = \frac{\frac{1}{2}}{k} = \frac{1}{2k}$，$2k\cos\theta = 1$，$k = \frac{1}{2\cos\theta}$



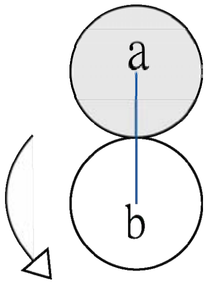
結論： 若 $\theta = 90 - \frac{180}{n}$ (θ是正 n 邊形之內角的一半)
一正 n 邊形（邊長爲 1 單位）中心點繞一正 n 邊形（邊長爲 m 單位）的滾動軌跡總長：$2\pi(m+1) \times \frac{1}{2\cos\theta} = \frac{(m+1)\pi}{\cos\theta}$。

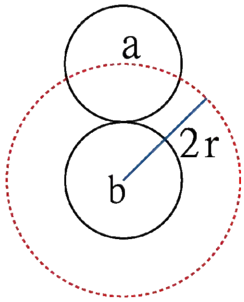
備註：另外探討一正 n 邊形（邊長爲 1 單位）頂點繞一正 n 邊形（邊長爲 m 單位）的滾動軌跡及其長度詳見附件一說明。

三、探討一單位圓繞全等圓圖形的滾動軌跡。

(一)探討一個單位圓繞一字形單位圓時滾動的圈數

1.探討一個單位圓繞另一個單位圓時滾動的圈數：





發現滾動圈數爲 2 圈

證明：設單位圓的半徑爲 r

→a 圓周長＝2πr（圖 1）

→a 圓心軌道＝4πr（圖 2）

→a 滾動圈數＝$\dfrac{4\pi r}{2\pi r}$＝2 圈

結論：一個圓繞另一全等圓滾動其滾動圈數必爲二圈。

2.探討繞一字形 2 個單位圓滾動的圈數：

設圓半徑皆爲 r，有 2 個圓成一字形

圖中紅色部分爲 2 個單位圓的圓心軌道，發現滾動圈數爲 $\dfrac{8}{3}$ 圈

證明： 做兩條直徑分別垂直兩圓的連心線(如圖)

重疊部分可分成兩三角形(如圖)，

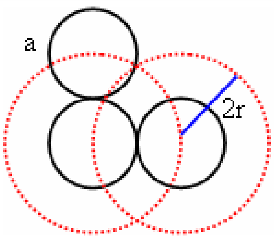
∵三角形三邊皆相等(都等於半徑)，∴正三角形中每一內角皆是 60°，

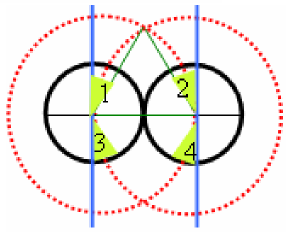
$\therefore \angle 1 = \angle 2 = \angle 3 = \angle 4 = 90^0 - 60^0 = 30^0$

∴x 曲線長(如右圖)便佔一個單位圓心軌道周長的 $\dfrac{30^0}{360^0} = \dfrac{1}{12}$

∴整個一字型圓心軌道長為 $\dfrac{4\pi r}{2} \times 2 + 4\pi r \times \dfrac{1}{12} \times 4 = \dfrac{16\pi r}{3}$

∴單位圓滾動圈數＝ $\dfrac{16\pi r}{3} \div (2\pi r) = \dfrac{8}{3}$ 圈

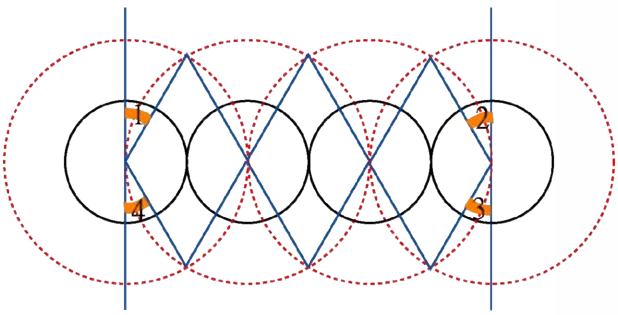




以此類推…

結論：設圓半徑皆爲 r，有 n 個圓成一行，發現單位圓滾動圈數爲 $\dfrac{2n+4}{3}$ 圈

證明：



做兩條直徑分別垂直兩圓的連心線(如圖)

重疊部分可分成兩三角形(如圖)，

∵三角形三邊皆相等(都等於半徑)，∴正三角形中每一內角皆是 60°，

$\therefore \angle 1 = \angle 2 = \angle 3 = \angle 4 = 90^0 - 60^0 = 30^0$

∴x 曲線長(如圖)便佔一個單位圓心軌道周長的 $\dfrac{30^0}{360^0} = \dfrac{1}{12}$

∴整個一字型圓心軌道長為 2×2r×π＝4rπ

$\dfrac{4\pi r}{2} \times 2 + 4\pi r \times \dfrac{1}{12} \times 4 \times (n-1) = 4\pi r \times \dfrac{n+2}{3}$

∴單位圓滾動圈數＝ $(4\pi r \times \dfrac{n+2}{3}) \div (2\pi r) = \dfrac{2n+4}{3}$ 圈

故繞一字形全等圓滾動的圈數等於 $\dfrac{2n+4}{3}$

討論： 因繞行一圈後圓必須是正的，所以 $\dfrac{2n+4}{3}$ 圈必為整數

2n+4=3 的倍數

2x1＋4＝3x2

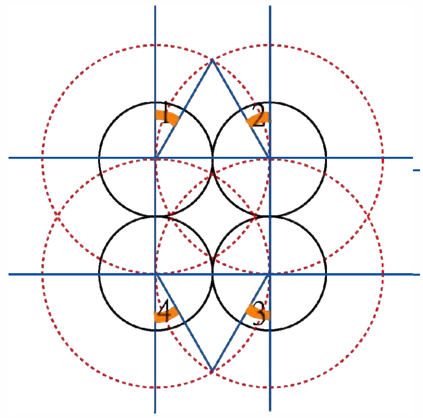
2x4＋4＝3x4

2x7＋4＝3x6

n=1，4，7……

故 n 必須等於 3k+1，k 是 0 或正整數

(二)繞一 nxn 的全等圓正方形所滾動的圈數



1.探討繞一 2x2 正方形滾動的圈數：

設圓半徑皆爲 r，有 2x2 個單位圓成正方形

圖中紅色部分爲 2x2 個單位圓的圓心軌道，發現滾動圈數爲 $\dfrac{10}{3}$ 圈

證明：做四條直徑分別垂直兩圓的連心線(如圖)

重疊部分可分成兩三角形(如圖)，

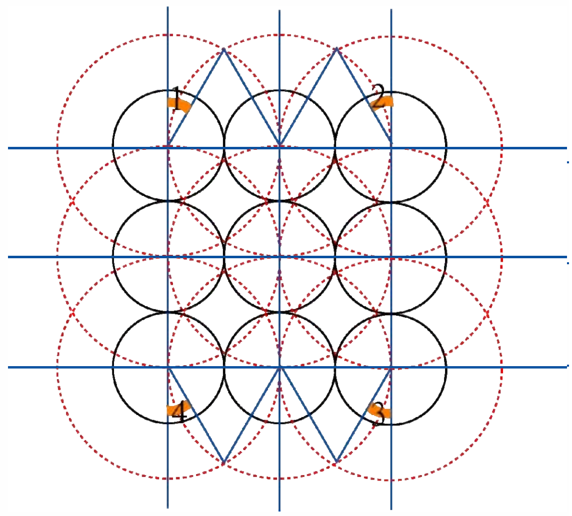
∵三角形三邊皆相等(都等於半徑)，∴正三角形中每一內角皆是 60˚，

$\therefore \angle 1=\angle 2=\angle 3=\angle 4=90^0-60^0=30^0$

∴x 曲線長(如圖)便佔一個單位圓心軌道周長的 $\dfrac{30^0}{360^0}=\dfrac{1}{12}$

∴整個 2x2 正方形圓心軌道長爲 $\dfrac{4\pi r}{4}\times 4+4\pi r\times\dfrac{1}{12}\times 8=\dfrac{20\pi r}{3}$

∴單位圓滾動圈數= $\dfrac{20\pi r}{3}\div(2\pi r)=\dfrac{10}{3}$ 圈



2.探討繞一 3x3 正方形滾動的圈數：

設圓半徑皆爲 r，有 3x3 個單位圓成正方形

圖中紅色部分爲 3x3 個單位圓的圓心軌道，發現滾動圈數爲 $\dfrac{14}{3}$ 圈

證明：做六條直徑分別垂直兩圓的連心線，重疊部分可分成兩三角形(如圖)，

∵三角形三邊皆相等(都等於半徑)，∴正三角形中每一內角皆是 60˚，

$\therefore \angle 1=\angle 2=\angle 3=\angle 4=90^0-60^0=30^0$

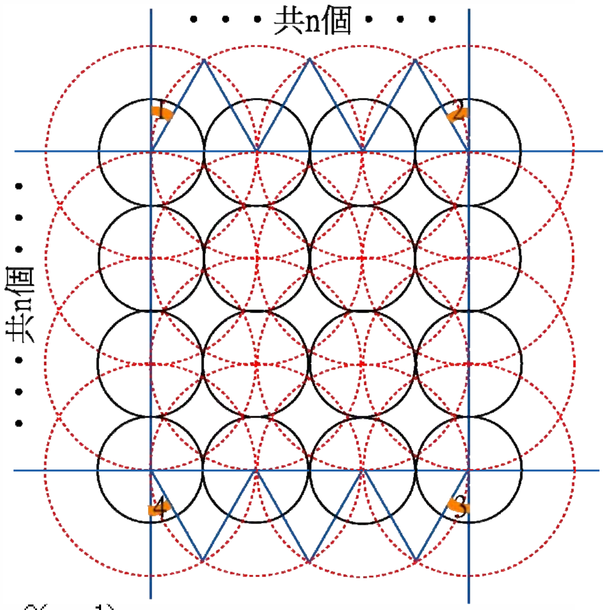
$\therefore$x 曲線長(如圖)便佔一個單位圓心軌道周長的 $\dfrac{30^0}{360^0}=\dfrac{1}{12}$

$\therefore$整個 2×2 正方形圓心軌道長爲 $\dfrac{4\pi r}{4}\times 4+4\pi r\times\dfrac{1}{12}\times 16=\dfrac{28\pi r}{3}$

$\therefore$單位圓滾動圈數＝$\dfrac{28\pi r}{3}\div(2\pi r)=\dfrac{14}{3}$ 圈

以此類推…

結論：發現繞一 n×n 正方形滾動圈數爲 $2+\dfrac{4(n-1)}{3}$ 圈



證明：設圓半徑皆爲 r，有 n×n 個單位圓成正方形，圖中紅色部分爲 n×n 個單位圓圓心軌道。

做 2n 條直徑分別垂直兩圓的連心線(如圖)

重疊部分可分成兩三角形(如圖)，

$\because$三角形三邊皆相等(都等於半徑)，$\therefore$正三角形中每一內角皆是 60°，

$\therefore \angle 1=\angle 2=\angle 3=\angle 4=90^0-60^0=30^0$

$\therefore$x 曲線長(如圖)便佔一個單位圓心軌道周長的 $\dfrac{30^0}{360^0}=\dfrac{1}{12}$

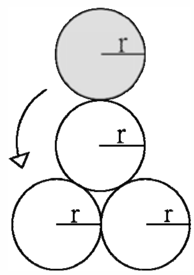
$\therefore$整個 n×n 正方形圓心軌道長爲

$$\frac{4\pi r}{4}\times 4+4\pi r\times\frac{1}{12}\times 4\times 2\times(n-1)=4\pi r+\frac{8(n-1)\pi r}{3}$$

$\therefore$單位圓滾動圈數＝$\{4\pi r+\dfrac{8(n-1)\pi r}{3}\}\div(2\pi r)=2+\dfrac{4(n-1)}{3}$ 圈

討論：故繞一 n×n 全等圓正方形的滾動圈數＝$2+\dfrac{4(n-1)}{3}$

因繞一圈後圓必須是正的，所以 $2+\dfrac{4(n-1)}{3}$ 圈必爲整數，即 4（n-1）＝3 倍數，故 n 必須等於 1+3k（k 是正整數）



(三)繞一邊長爲 n 的全等圓正三角形所滾動的圈數

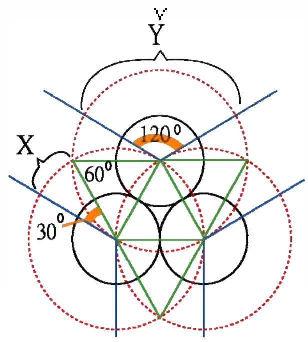
首先探討繞一邊長爲 2 全等圓正三角形滾動的圈數：

設圓半徑皆爲 r，正三角形邊長爲 2 (也就是 3 個單位圓形成正三角形)

圖中紅色部分爲 3 個單位圓的圓心軌道，發現滾動圈數爲 3 圈

證明：分別做三個圓兩兩之間的連心線(如圖)

$\because$三角形三邊皆相等(都等於半徑)，$\therefore$形成正三角形中每一內角皆是 60°，



$\therefore$ y 曲線長(如圖)便佔一個單位圓心軌道周長的 $\dfrac{120^0}{360^0}=\dfrac{1}{3}$

$\therefore$邊長為 2 全等圓正三角形圓心軌道長為 $4\pi r\times\dfrac{1}{3}\times 3+4\pi r\times\dfrac{1}{12}\times 2\times 3=6\pi r$

$\therefore$單位圓滾動圈數$=(6\pi r)\div(2\pi r)=3$ 圈

以此類推…

結論：繞一邊長 n 全等圓正三角形的滾動圈數＝n+1 圈，n 為不為 1 的自然數。

證明：設圓半徑皆為 r，正三角形邊長為 n (也就是 $\dfrac{n(n+1)}{2}$ 個單位圓形成正三角形)

圖中紅色部分為 $\dfrac{n(n+1)}{2}$ 個單位圓的圓心軌道，

分別做兩兩圓之間的連心線(如圖)

$\because$三角形三邊皆相等(都等於半徑)，$\therefore$形成正三角形中每一內角皆是 60˚，

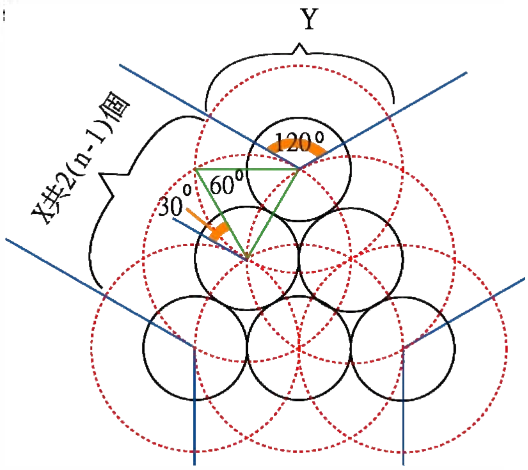
$\therefore$ x 曲線長(如圖)便佔一個單位圓心軌道周長的 $\dfrac{30^0}{360^0}=\dfrac{1}{12}$

$\therefore$ y 曲線長(如圖)便佔一個單位圓心軌道周長的 $\dfrac{120^0}{360^0}=\dfrac{1}{3}$

$\therefore$邊長為 n 全等圓正Δ 圓心軌道長為

$4\pi r\times\dfrac{1}{3}\times 3+4\pi r\times\dfrac{1}{12}\times 2(n-1)\times 3=2(n+1)\pi r$

$\therefore$單位圓滾動圈數$=[2(n+1)\pi r]\div(2\pi r)=n+1$ 圈

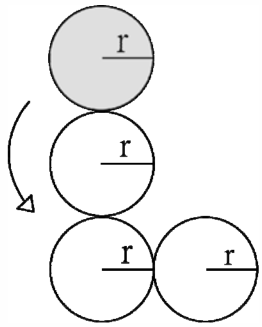


(四)繞一邊長為 n 的全等圓等腰直角三角形所滾動的圈數

首先探討繞一邊長為 2 全等圓等腰直角三角形滾動的圈數：

設圓半徑皆為 r，全等圓等腰直角三角形邊長為 2

圖中紅色部分為 3 個單位圓的圓心軌道，發現滾動圈數為 $\dfrac{19}{6}$ 圈

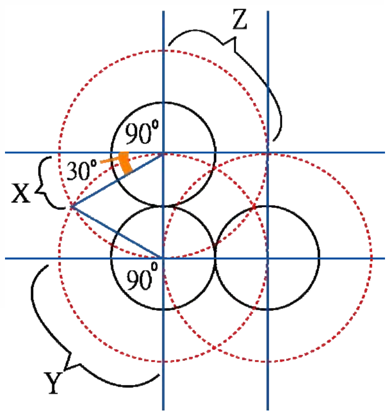


證明：分別做三個圓兩兩之間的連心線形成等腰直角三角形(如圖)

$\because$ x 曲線長(如圖)便佔一個單位圓心軌道周長的 $\dfrac{30^0}{360^0}=\dfrac{1}{12}$

y、z 曲線長(如圖)便佔一個單位圓心軌道周長的 $\dfrac{90^0}{360^0}=\dfrac{1}{4}$

$\therefore$邊長為 2 全等圓等腰直角三角形圓心軌道長為



$$4\pi r\times\frac{1}{4}\times3+4\pi r\times\frac{1}{12}\times2\times2+4\pi r\times\frac{1}{4}\times2=\frac{38}{6}\pi r$$

$\therefore$單位圓滾動圈數$=(\frac{38}{6}\pi r)\div(2\pi r)=\frac{19}{6}$圈

以此類推…

結論：發現繞一邊長為 n 全等圓等腰直角三角形滾動的圈數為 $\frac{7n+5}{6}$ 圈。

證明：設圓半徑皆為 r，全等圓等腰直角三角形邊長為 n

圖中紅色部分為 3 個單位圓的圓心軌道，

分別做三個圓兩兩之間的連心線形成等腰直角三角形(如圖)

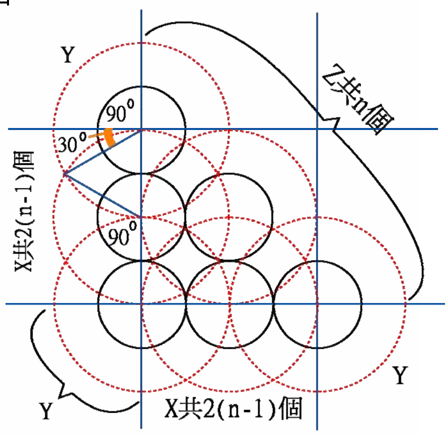
$\because$x 曲線長(如圖)便佔一個單位圓心軌道周長的 $\frac{30^0}{360^0}=\frac{1}{12}$

y、z 曲線長(如圖)便佔一個單位圓心軌道周長的 $\frac{90^0}{360^0}=\frac{1}{4}$

$\therefore$邊長為 2 全等圓等腰直角三角形圓心軌道長為

$$4\pi r\times\frac{1}{4}\times3+4\pi r\times\frac{1}{12}\times2(n-1)\times2+4\pi r\times\frac{1}{4}\times n=\frac{7n+5}{3}\pi r$$

$\therefore$單位圓滾動圈數$=(\frac{7n+5}{12}\pi r)\div(2\pi r)=\frac{7n+5}{6}$圈



討論：因繞一圈後必須是正的，因此 $\frac{7n+5}{6}$ 圈必為整數

故 n＝1+6k，k 是正整數。

(五)繞一 n×n 的全等圓菱形所滾動的圈數

將研究四中的全等圓正方形作一 θ 角的偏轉形成全等圓菱形(如圖所示)

1.探討繞一 2×2 全等圓菱形滾動的圈數：

設圓半徑皆為 r，有 2×2 個單位圓形成偏 θ 角($0^\circ\leq\theta\leq30^\circ$)的菱形

圖中紅色部分為 2×2 個單位圓的圓心軌道，發現滾動圈數為 $\frac{10}{3}$ 圈

證明： 做四條直徑分別做兩圓的連心線(如圖)

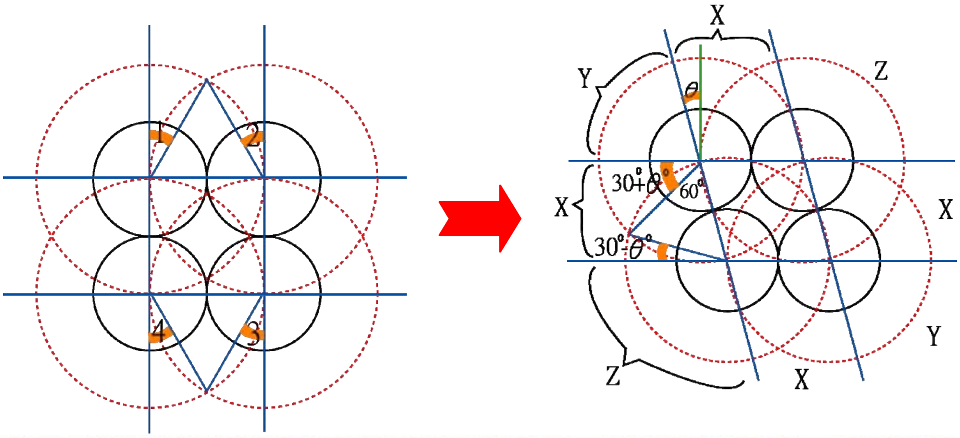
$\because$三角形三邊皆相等(都等於半徑)，$\therefore$正三角形中每一內角皆是 60°，

$\therefore$x 曲線長(如圖)便佔一個單位圓心軌道周長的 $\frac{(30^0+\theta)+(30^0-\theta)}{360^0}=\frac{60^0}{360^0}=\frac{1}{6}$

$\therefore$兩個 y 曲線長(如圖)加上兩個 z 曲線長便佔一個單位圓心軌道周長

$\therefore$整個 2×2 菱形圓心軌道長為 $4\pi r\times\frac{1}{6}\times4+4\pi r\times1=\frac{20}{3}\pi r$

$\therefore$單位圓滾動圈數$=\frac{20\pi r}{3}\div(2\pi r)=\frac{10}{3}$圈



結論：發現菱形角度不影響滾動圈數，所以其圈數＝同邊長全等圓正方形滾動圈數。

故若設圓半徑爲 r，繞一 n×n 全等圓菱形其滾動圈數爲 $2+\dfrac{4(n-1)}{3}$ 圈

(六)繞一邊長爲 n 的全等圓等腰三角形角度與滾動圈數的關係

將研究六中的全等圓等腰直角三角形作一 θ 角($0^\circ \leq \theta \leq 30^\circ$)的偏轉形成全等圓等腰三角形(如圖所示)

發現：繞一邊長爲 n 的全等圓等腰三角形滾動圈數爲 $\dfrac{150+210n+(n-1)\theta}{180}$ 圈

證明：設圓半徑皆爲 r，全等圓等腰三角形邊長爲 n，
圖中紅色部分爲 n 個單位圓的圓心軌道，
分別做圓和圓兩兩之間的連心線形成正三角形(如圖)

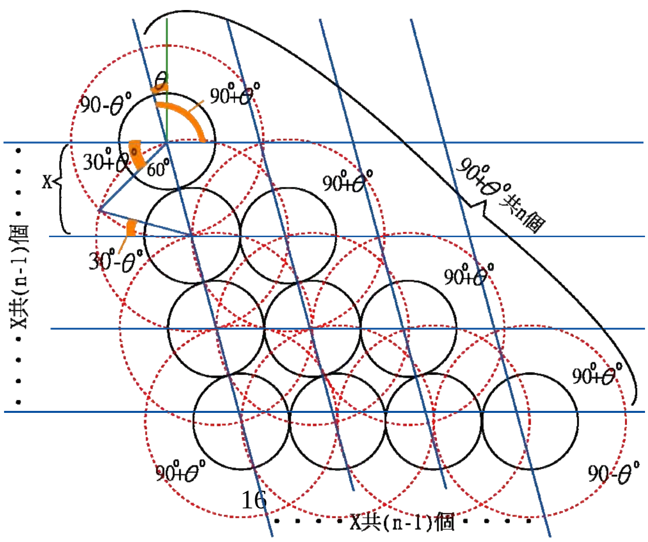
∴x 曲線長(如圖)便佔一個單位圓心軌道周長的 $\dfrac{(30^0+\theta)+(30^0-\theta)}{360^0}=\dfrac{60^0}{360^0}=\dfrac{1}{6}$

∴邊長爲 n 全等圓等腰三角形圓心軌道長爲

$$4\pi r\times[\frac{(90-\theta)+(90+\theta)+(90-\theta)}{360}+\frac{1}{6}\times(n-1)\times 2+\frac{90+\theta}{360}\times n$$

$$=4\pi r\times\frac{150+210n+(n-1)\theta}{360}$$

∴單位圓滾動圈數＝ $\left(4\pi r\times\dfrac{150+210n+(n-1)\theta}{360}\right)\div(2\pi r)=\dfrac{150+210n+(n-1)\theta}{180}$ 圈



(七)繞一全等圓正 n 邊形邊長爲 m 所滾動的圈數

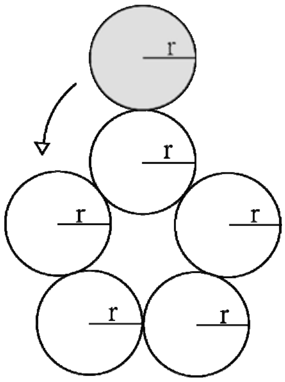
首先探討繞一全等圓正五邊形的滾動圈數（邊長固定爲 2）

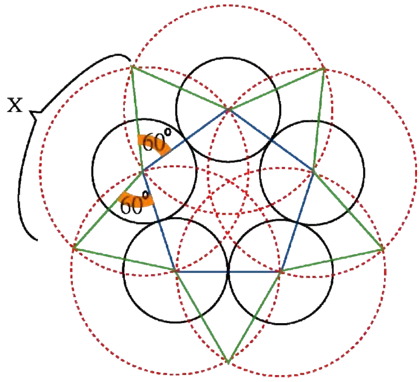
設圓半徑皆爲 r，形成圖形爲正五邊形

∴一 x 曲線長(如圖)佔一單位圓心軌道周長的 $\dfrac{360^0-2\times60^0-\dfrac{540^0}{5}}{360^0}=\dfrac{132^0}{360^0}=\dfrac{11}{30}$

∴邊長爲 2 全等圓正五邊形圓心軌道長爲 $4\pi r\times5\times\dfrac{11}{30}=\dfrac{22\pi r}{3}$

∴單位圓滾動圈數＝ $\dfrac{22\pi r}{3}\div(2\pi r)=\dfrac{11}{3}$ 圈





結論：繞一全等圓正 n 邊形的滾動圈數（邊長固定爲 2）爲 $\dfrac{(n+6)}{3}$ 圈。

證明：設圓半徑皆爲 r，形成圖形爲正 n 邊形

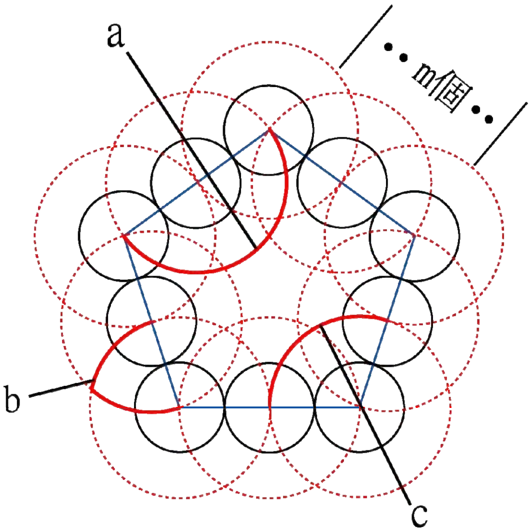
∴一 x 曲線長(如圖)佔一單位圓心軌道周長的

$$\frac{360^0-2\times60^0-\dfrac{(n-2)\times180^0}{n}}{360^0}=\frac{n+6}{6n}$$

∴邊長爲 2 全等圓正 n 邊形圓心軌道長爲 $4\pi r\times\dfrac{n+6}{6n}\times n=\dfrac{(2n+12)\pi r}{3}$

∴單位圓滾動圈數＝ $\dfrac{(2n+12)\pi r}{3}\div(2\pi r)=\dfrac{(n+6)}{3}$ 圈

推廣至繞一全等圓正 n 邊形邊長為 m 個單位圓



結論：滾動圈數：$\dfrac{n(m-1)+6}{3}$圈

證明：全 a 段長: $4r\pi\times\dfrac{1}{2}n(m-2)$

全 b 段長: $4r\pi\times\dfrac{1}{3}n(m-1)$

全 c 段長: $4r\pi\times\dfrac{180(n-2)}{360}$

圓心軌道長：總長-全 a-全 b-全 c

$$4r\pi\times n(m-1)-4r\pi\times\frac{1}{2}n(m-2)-4r\pi\times\frac{1}{3}n(m-1)-4r\pi\times\frac{180(n-2)}{360}=4r\pi\times\frac{n(m-1)+6}{6}$$

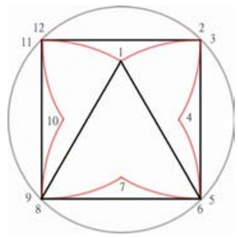
故單位圓滾動圈數=$\dfrac{4r\pi\times\dfrac{n(m-1)+6}{6}}{2r\pi}=\dfrac{n(m-1)+6}{3}$

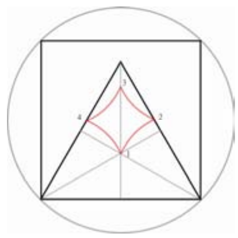
伍、討論：

一、探討一正 m 邊形（邊長為 1 單位）中的一點在正 n 邊形（邊長為 1 單位）滾動的軌跡及長度，其中 m＜n。

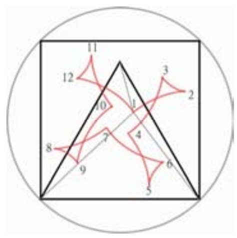
(一) 探討一正三角形（邊長為 1 單位）的一點在正 n 邊形（邊長為 1 單位）內滾動的軌跡

1.正三角形（邊長為 1 單位）的『頂點』在正方形（邊長為 1 單位）內滾動的軌跡長度為$\dfrac{4}{3}\pi$單位長，軌跡如右。





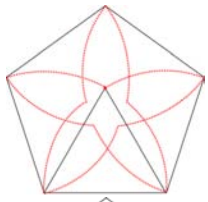
2.正三角形（邊長為 1 單位）的『中心點』在正方形（邊長為 1 單位）內滾動的軌跡長度: $\dfrac{2\sqrt{3}}{9}\pi$ 單位長，軌跡如右。



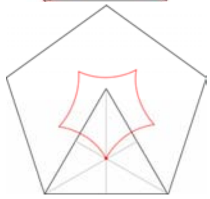
3.正三角形（邊長為 1 單位）的『內部任一點』在正方形（邊長為 1 單位）內滾動的軌跡如右

設任一點至三頂點分別為 a,b,c，則軌跡長度: $\dfrac{2(a+b+c)\pi}{3}$ 單位長

4.正三角形（邊長爲 1 單位）的『頂點』在正五邊形（邊長爲 1 單位）內滾動的軌跡長度爲$\frac{4}{3}\pi$單位長，軌跡如右。

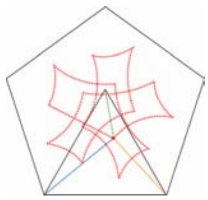


5.正三角形（邊長爲 1 單位）的『中心點』在正五邊形（邊長爲 1 單位）內滾動的軌跡長度: $\frac{2\sqrt{3}}{9}\pi$ 單位長，軌跡如右。



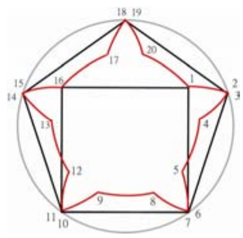
6.正三角形（邊長爲 1 單位）的『內部任一點』在正五邊形（邊長爲 1 單位）內滾動的軌跡如右

設任一點至三頂點分別爲 a,b,c，則軌跡長度: $\frac{2(a+b+c)\pi}{3}$ 單位長



(二) 探討一正方形（邊長爲 1 單位）的一點在正 n 邊形（邊長爲 1 單位）內滾動的軌跡

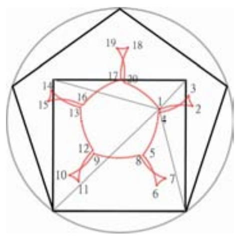
1.正方形（邊長爲 1 單位）的『頂點』在正五邊形（邊長爲 1 單位）內滾動的軌跡長度: $\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\pi$ 單位長，其軌跡如右。



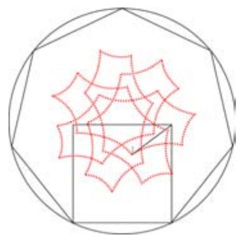
2.正方形（邊長爲 1 單位）的『中心點』在正五邊形（邊長爲 1 單位）內滾動的軌跡長度: $\frac{\sqrt{2}}{4}\pi$ 單位長，其軌跡如右。

3.正方形（邊長爲 1 單位）的『內部任一點』在正五邊形（邊長爲 1 單位）內滾動的軌跡

設任一點至三頂點分別爲 a,b,c,d，軌跡長度: $\frac{(a+b+c+d)\pi}{2}$ 單位長



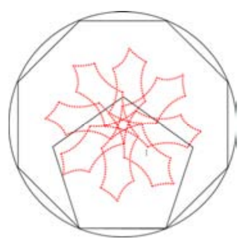
結論：根據上述圖形觀察，所形成的軌跡圖形邊數爲[m，n]（即 m,n 的最小公倍數），以圖形中的各點(中心點、頂點、其他位置的點)所畫出的軌跡圖形都不同。



備註：我們利用上述結論製作了「多功能滾滾樂尺」，詳見柒、應用。

如：1. 正方形的內部任一點在正七邊形內滾動軌跡，邊數爲[4，7]=28

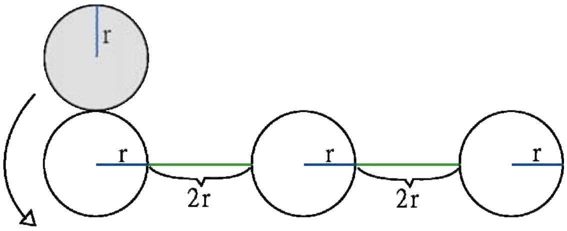
2. 正五邊形的內部任一點在正八邊形內滾動軌跡，邊數爲[5，8]=40



二、探討繞一字形 n 個間隔全等圓滾動的圓心軌跡型態及長度：

如果去繞沒有連接在一起的硬幣，也就是被繞的硬幣與硬幣之間間隔為一個硬幣的寬度時（如圖所示），會怎樣呢？

規則說明：從第一個圓開始逆時針滾動，『間隔大小等於圓直徑的全等圓圖形』，若接觸到另一個圓時則往反方向（也就是變成順時針）繼續繞圖形滾動，依此類推，探討圓心所繞的軌跡型態及長度。



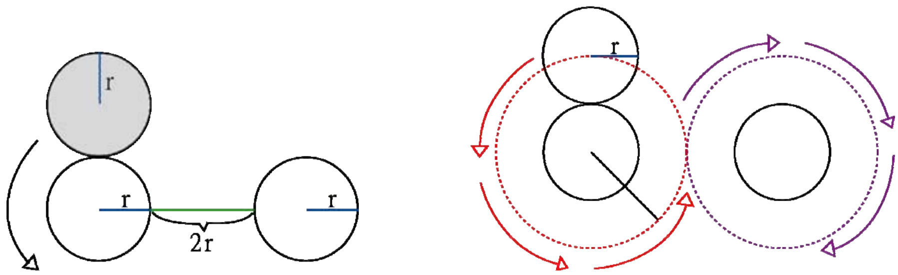
（一）首先探討繞一字型 2 個間隔全等圓滾動的圓心軌跡型態及長度：

設圓半徑皆為 r，有 2 個圓成一字型

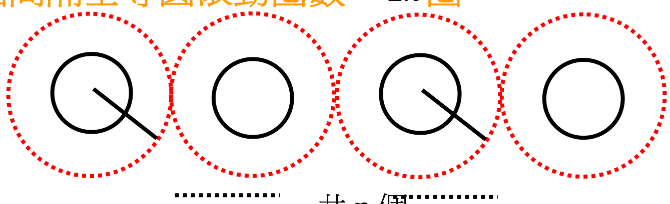
圖中紅色部分為 2 個全等圓的圓心軌道，發現滾動圈數為 4 圈

證明：整個一字型圓心軌道長為 $(4\pi r)\times 2 = 8\pi r$

$\therefore$ 單位圓滾動圈數 $= 8\pi r \div (2\pi r) = 4$ 圈



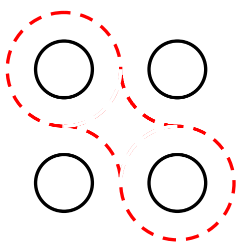
結論：繞一字型 n 個間隔全等圓滾動圈數 $= 2n$ 圈



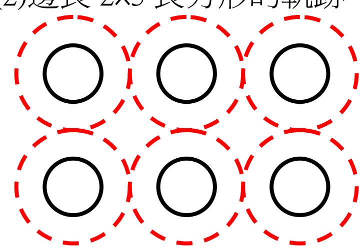
（二）探討繞邊長 m×n 長方形間隔全等圓滾動的圓心軌跡型態及長度：

1.探討繞一邊長 2×n 長方形間隔全等圓的圓心軌跡

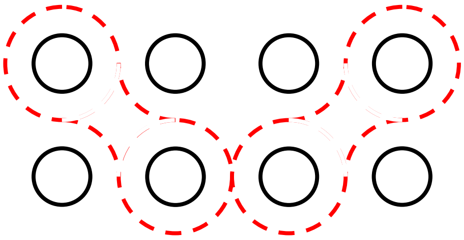
(1)邊長 2×2 長方形的軌跡



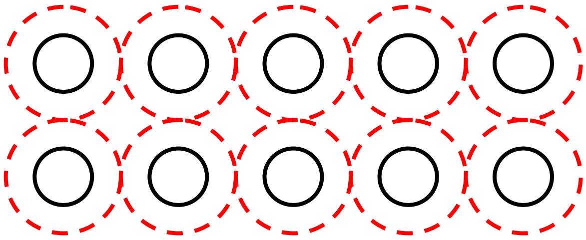
(2)邊長 2×3 長方形的軌跡



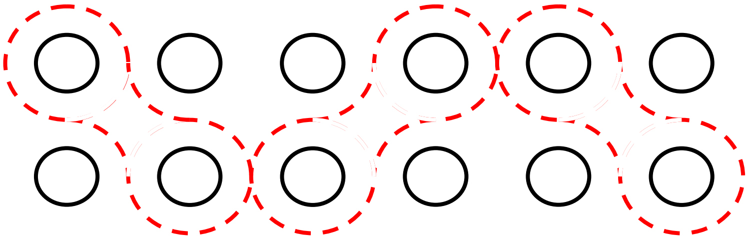
(3)邊長 2×4 長方形的軌跡



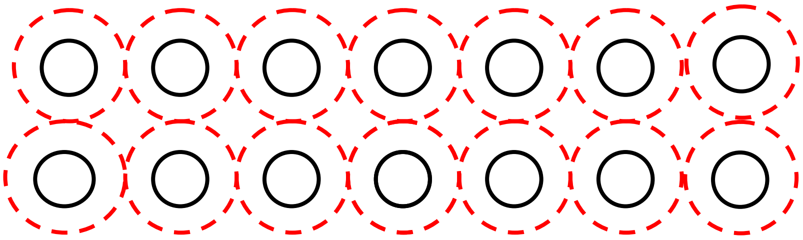
(4)邊長 2×5 長方形的軌跡



(5)邊長 2×6 長方形的軌跡



(6)邊長 2×7 長方形的軌跡



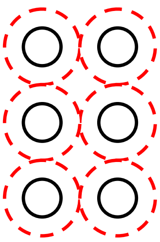
2.探討繞一邊長 2×n 長方形間隔全等圓的滾動圈數

邊長 2×n 長方形間隔全等圓，邊長數與轉圈數關係如下：

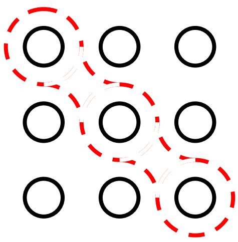
邊長	圓心軌道圓個數	滾動圈數
2×2	2	4
2×3	6	12
2×4	4	8
2×5	10	20
2×6	6	12
2×7	14	28
2×n	2n，n≠2k	4n， n≠2k
	n，n=2k	2n，n=2k

3.探討繞一邊長 3×n 長方形間隔全等圓的軌跡

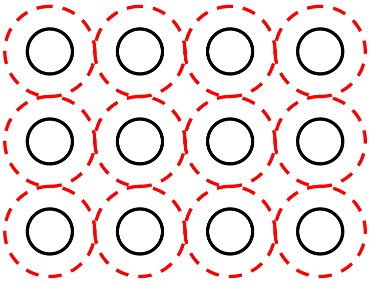
（1）邊長 3×2 長方形的軌跡



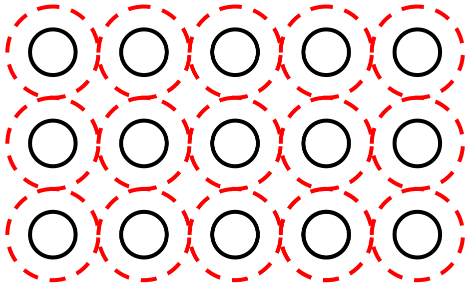
（2）邊長 3×3 長方形的軌跡



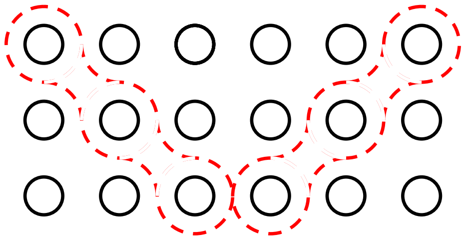
（3）邊長 3x4 長方形的軌跡



（4）邊長 3x5 長方形的軌跡



（5）邊長 3x6 長方形的軌跡



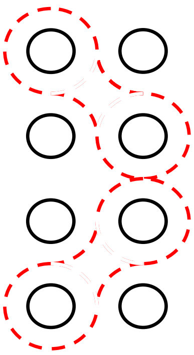
4.探討繞一邊長 3xn 長方形間隔全等圓的滾動圈數

邊長 3xn 長方形間隔全等圓，邊長數與轉圈數關係如下：

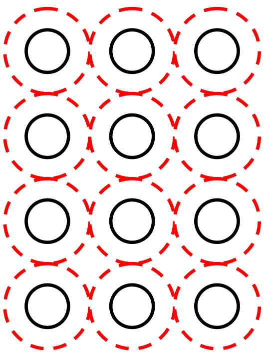
邊長	圓心軌道圓個數	滾動圈數
3x2	6	12
3x3	3	6
3x4	12	24
3x5	15	30
3x6	6	12
3xn	3n，n≠3k	6n， n≠3k
	n，n=3k	2n，n=3k

5.探討繞一邊長 4xn 長方形間隔全等圓的軌跡

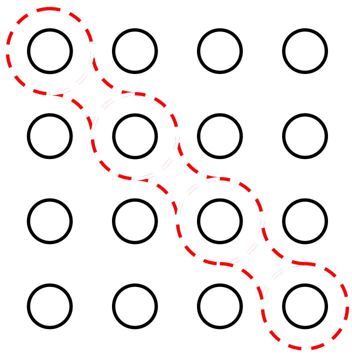
（1）邊長 4x2 長方形軌跡



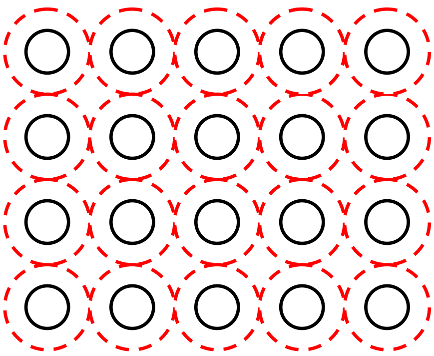
（2）邊長 4x3 長方形軌跡



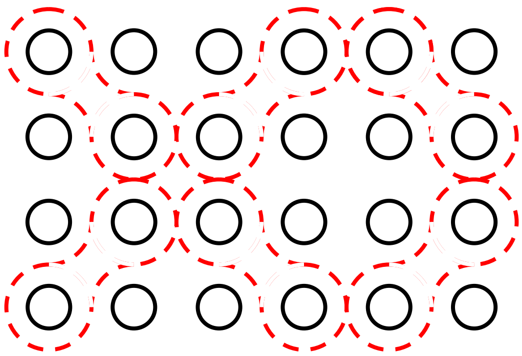
（3）邊長 4x4 長方形軌跡



（4）邊長 4x5 長方形的軌跡



（5）邊長 4x6 長方形的軌跡



6.探討繞一邊長 4xn 長方形間隔全等圓的滾動圈數

邊長 4xn 長方形間隔全等圓，邊長數與轉圈數關係如下：

邊長	圓心軌道圓個數	滾動圈數
4x2	4	8
4x3	12	24
4x4	4	8
4x5	20	40
4x6	12	24
4xn	4n，n≠2k	8n， n≠2k
	2n，n=2k≠4k	4n，n=2k≠4k
	n，n=4k	2n，n=4k

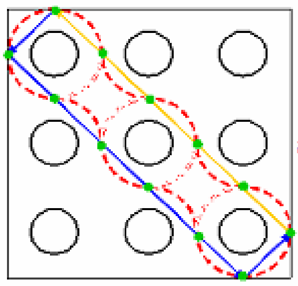
7.探討繞一邊長 mxn 長方形間隔全等圓的滾動圈數

邊長 mxn 長方形間隔全等圓，邊長數與轉圈數關係如下：

m	n	圓心軌道圓個數	滾動圈數
m≠2k	n≠mk	mn	2mn
m≠2k	n=mk	n	2n
m=2k	n≠2k	mn	2mn
m=2k	n≠mk=2k	$\frac{mn}{2}$	mn
m=2k	n=mk	n	2n

三、探討繞一邊長 mxn 長方形間隔全等圓的必回到原出發點的原因

將圓心軌道的轉折點(如右圖綠色處)以直線連接，發現圓的圓心則從出發點朝軌道上下左右四個轉折點前進，並將原本彎曲的路徑看作是直線，如此依反射原理，可快速瞭解其前進的方式及會回到原出發點的原因。



(圖一)

陸、結論：

一、一正 n 邊形（n=3,4,5）置於圓內滾動直到圖形中任一點回到原位置所滾動的軌跡皆形成一個循環，而圖形中任一點回到原位置所滾動的圈數= $\frac{[n,6]}{6}$ 圈

二、一正 n 邊形（邊長爲 1 單位）中心點繞一正 n 邊形（邊長爲 m 單位）的滾動軌跡總長爲 $2\pi(m+1)\times\frac{1}{2\cos\theta}=\frac{(m+1)\pi}{\cos\theta}$（其中 θ 是正 n 邊形的內角度數）

三、所繞全等圓圖形與旋轉圈數和邊長所需個數的關係

全等圓圖形類別	邊長（個）	旋轉圈數	回到原點人頭朝上邊長所需個數
一字行	n	$\frac{2n+4}{3}$	3k+1（k是0或是正整數）
正方形	n	$2+\frac{4(n-1)}{3}$	3k+1（k是正整數）
正三角形	n	n+1	k（不為1的自然數）
直角三角形	n	$\frac{7n+5}{6}$	6k+1（k是正整數）
菱形 （偏轉角度 0°≦θ≦30°）	n	$2+\frac{4(n-1)}{3}$	3k+1（k是正整數） 註：不受偏轉角度影響
等腰三角形 （偏轉角度 0°≦θ≦30°）	n	$\frac{150+210n+(n-1)\theta}{180}$	所需個數和 n、θ值有關。 如：轉 10 度、邊長是 10，則其旋轉圈數為 13 圈
正 n 邊形	2	$\frac{n+6}{3}$	3k（k是正整數）

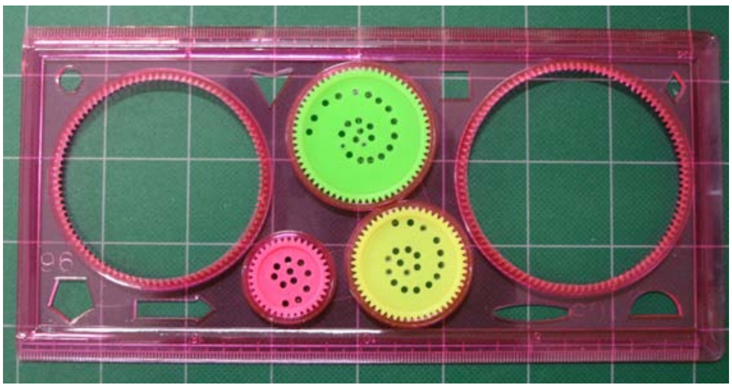
四、繞一邊長 m×n 長方形間隔全等圓的滾動圈數

m	n	圓心軌道圓個數	滾動圈數
m≠2k	n≠mk	mn	2mn
m≠2k	n=mk	n	2n
m=2k	n≠2k	mn	2mn
m=2k	n≠mk=2k	$\frac{mn}{2}$	mn
m=2k	n=mk	n	2n

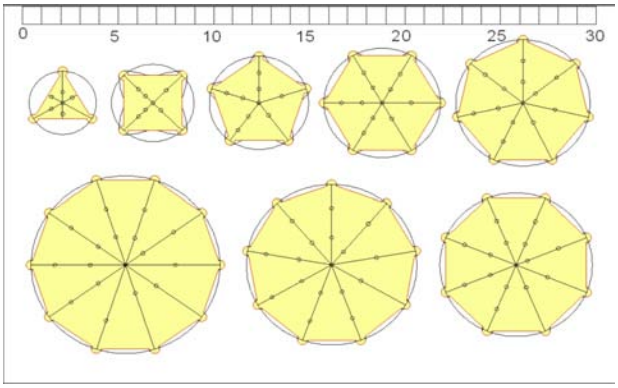
柒、應用：

應用一

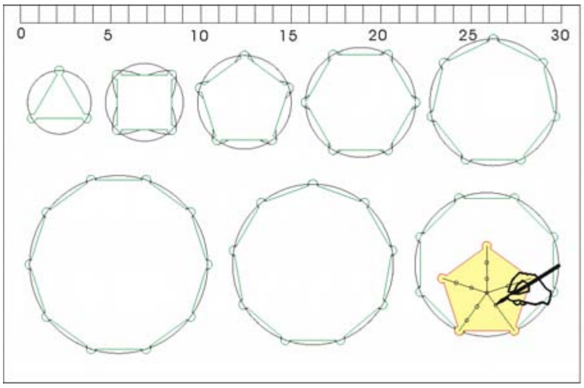
利用討論一中美麗軌跡形成的原理，並結合坊間「圈圈尺」（如下圖）的構想，自行創造出「多功能滾滾樂尺」（已向行政院經濟部智慧財產局提出專利新式樣的申請），該尺具有：①多邊形的圖形組合變化多，共有 28 種變形花紋，也可自行推廣多邊形的邊數，增加變化性；②畫出的圖形花紋最大邊數爲 90 邊；③相當具數學教育意義，如：可利用本尺求多邊形外接圓之半徑長、內角角度…等；④較坊間「圈圈尺（利用齒輪旋轉）」方便容易製作，亦可結合其他九年一貫課程做相關教學。



（一般坊間常見齒輪滾動的圈圈尺）



（多功能滾滾樂尺設計圖）



（多功能滾滾樂尺使用方法）

地址：
收件人：

經濟部智慧財產局 收文日期：095年04月27日

自行收納款項統一收據

NO. 0956662 開立日期：中華民國 095 年 04 月 27 日 095KP001910

繳款人	收入科目	金額	事由	備註
	審查費	$3,000	收文文號：09520248920 案號：095302201 專利名稱：多功能滾滾樂尺	收據妥為保存以供退費或查詢用

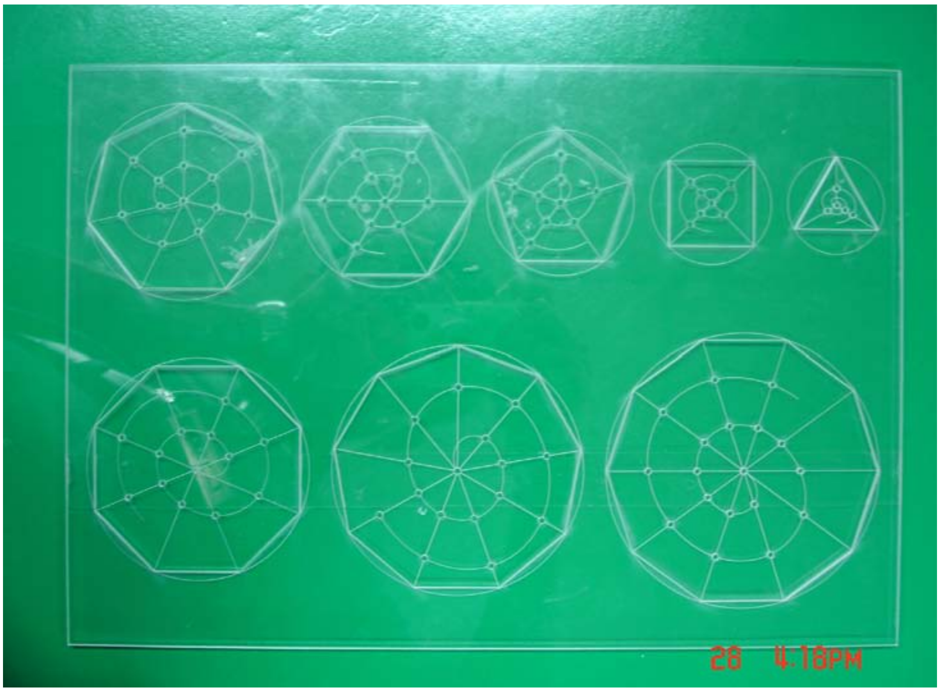
合計 新台幣：參仟元整

機關長官 主辦會計 主辦出納 收件人員 蘇國偉 第31號櫃台

經手人

第一聯 收據（交繳款人收執）

（行政院經濟部智慧財產局申請收據）



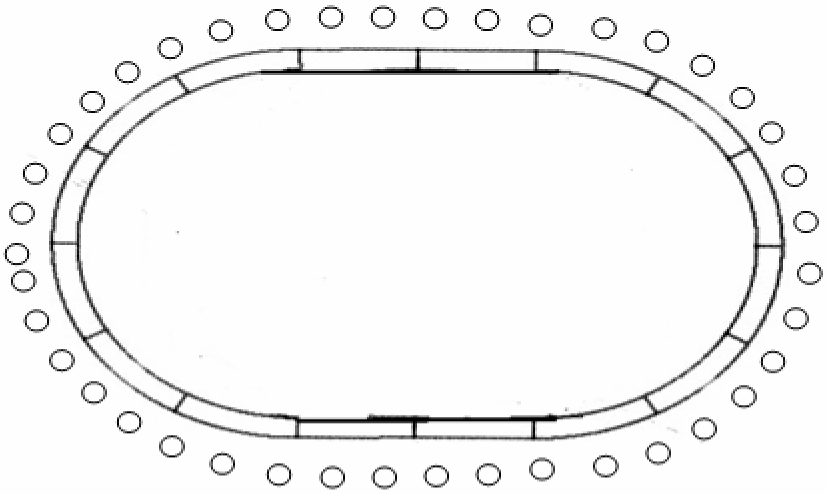
（多功能滾滾樂尺實品）

應用二

本實驗結果可應用於商業用途，如常見的迴轉壽司店，壽司店內常利用一台小火車載運壽司及各種美食不斷的在軌道上行駛，一般其行徑軌道成一大橢圓形，若運用本實驗結果後小火車行走模式更為多樣，增進用餐樂趣，小火車能不重複的經過每一位客人，方便客人取用，**最實用並富商業價值的是：若座位未坐滿，只要修改設定程式後，不論客人坐哪也都能不重複的經過並繞回原點，未坐人的空位火車則不會經過，減少繞行的時間。**

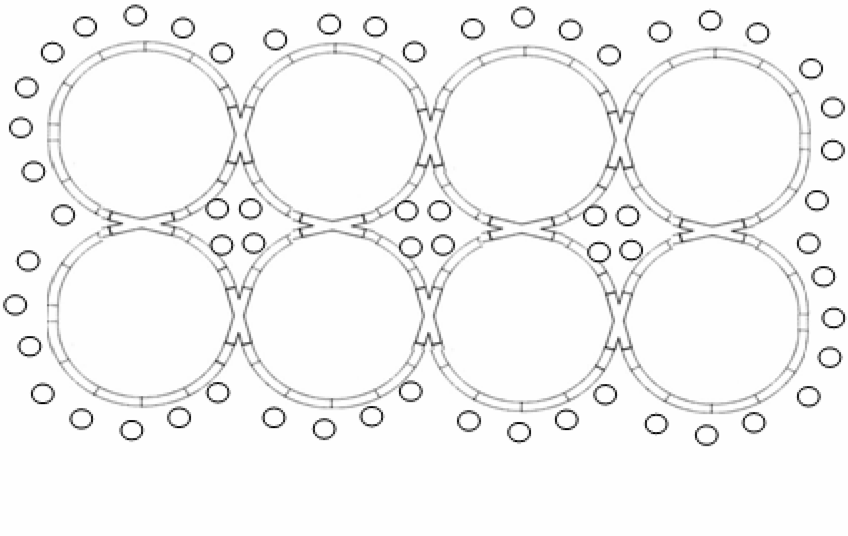
圖中為一般旋轉火鍋現場照片

同此原理，本實驗結果也可應用於動物園、遊樂園、大型博覽會的遊園車上。如在動物園中，遊園車能利用此種行徑路線將遊客載至每一不同動物區而不重複經過，以減少遊客迷路之苦。若某一區休館，只需修改程式，則遊園車就不會前往該區，減少時間上的耗費，可以讓遊客玩得更盡興。



原來型態：

①中間空間使用浪費、②沒有彈性、③若客人未坐滿造成取菜時間的浪費…等



改進後：

①充分使用中間空間、同一空間可坐更多的人、②當客人人數不多時，可彈性改變火車行駛路線，減少營運成本，節省取菜時間、③火車行駛方式多變，富趣味效果…等

捌、參考資料：

一、參考書目：

1. 3－3 圓的性質。仁林版國中數學第二冊。p.101～111。

2. 快樂學習圓形。遠哲科學教育基金會，1997 年 4 月。

3. 裘宗滬。趣味數學 300 題。凡異出版社，1999 年 12 月。p.102～103。

4. 別萊利曼。趣味幾何學。九章出版社，2001 年 2 月。p.196～199。

5. 羅浩源。生活的數學。九章出版社，1998 年 1 月。p.111～113。

6. 數學論壇@卓克索大學。搞定幾何。天下文化，2004 年 12 月。p.130～155。

7. 九章編輯部。幾何學。九章出版社，2003 年。p.151～160；p.183～187。

8. 陸思明。數學小品。建弘出版社，2004 年 12 月。p.204~207。

9. 馮緒寧、袁向東譯。澳洲數學競賽試題解析 1985~1991。九章出版社， 1988 年 2 月 P.87，第 12 題。

二、參考網站：

1.兩個銅板的滾動問題
http://www.mathland.idv.tw/life/coines.htm

2.純滾動與圓周運動
http://www.phy.ntnu.edu.tw/java/FreeRolling/

3.幾何學中的海倫
http://episte.math.ntu.edu.tw/articles/sm/sm_20_11_1/

4.台灣大學生物產業機電工程學系-齒輪系列(2)
http://nova.ame.ntu.edu.tw/~dsfon/Mechanism/gear2.htm

5.台灣百萬城
http://www.haskellco.org/

6.陶宣小火車涮涮鍋
http://www.tao-hsuan.com/home.html

7.爭鮮迴轉壽司店一關於爭鮮
http://www.sushi-express.com.tw/sushi/aboutus.html

評　　語

030424　滾滾紅成

1. 本作品研發創意精神可佳，團隊表現亦佳。

2. 學術性的探討似乎欠缺說服力，例如:軌跡的參數方程式的討論