中華民國第四十六屆中小學科學展覽會
作品說明書

國中組　數學科

030420

正多邊形的可造性與可摺性

學校名稱：　臺南縣私立城光國民中學

作者：	指導老師：
國三　葉怡慧	鄭銘城
國二　邱鈺婷	邱冠豪
國二　何詩柔	
國一　鄭景鴻	

關 鍵 詞：黃金分割、相似三角形

正多邊形的可造性與可摺性

摘要

本報告旨在利用國中所學的數學概念、探討如何以尺規作圖作出正多邊形、如何以方形紙摺出正多邊形

壹、研究動機：

國中數學第一、二冊中談到正多邊形，現在我們又學會尺規作圖，從線對稱當中，我們又體會出摺紙和數學的趣味關係，如今我們想融合尺規作圖和摺紙藝術來探討正多邊形

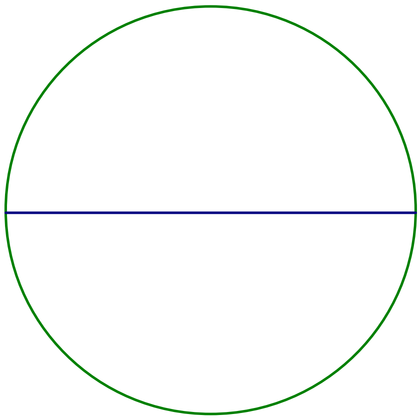
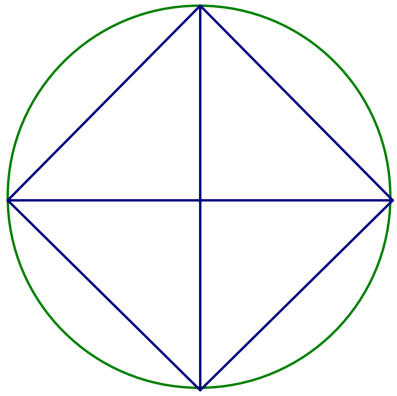
貳、研究目的：

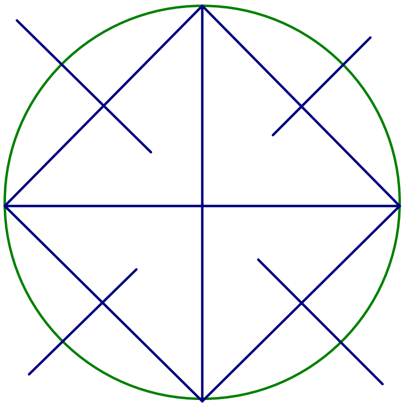
當一個圖形可以用尺規作圖完成時我們稱它具有可造性，若這個圖形可以用方形紙摺出時，我們稱它具有可摺性，以下我們將就我們目前的數學知識來探討正多邊形的可造性與可摺性

參、研究過程：

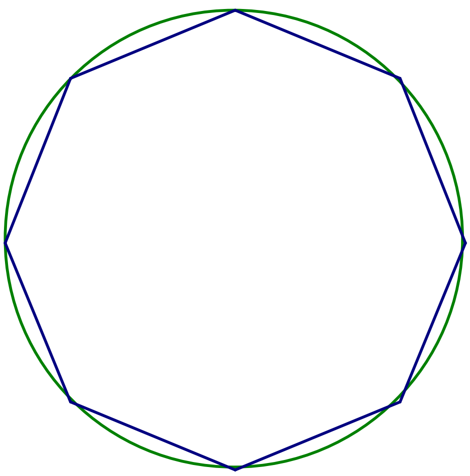
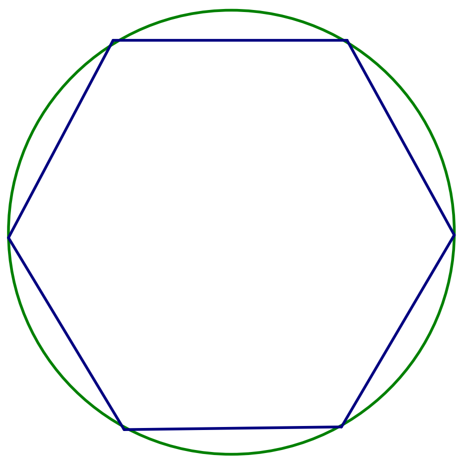
一. 正多邊形的尺規作圖

1. 如果已造出某正 n 邊形，再作每一邊的中垂線令其交正 n 邊外接圓的圓周上一點，可得 n 個交點，連同原來正 n 邊形的 n 個頂點，可逐次連接成正 2n 邊形
2. 反之、如已知正 2n 邊形，從任一點開始每間隔一個頂點逐次作頂點的連接線段，就可造得正 n 邊形
3. 根據 1.2.原則我們開始造邊數最小的正 n 邊形



……

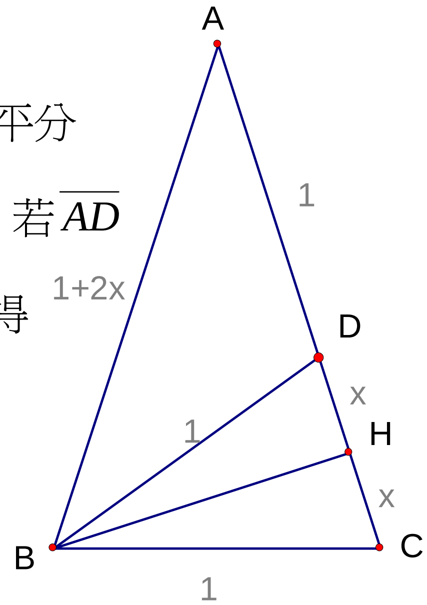



從上圖可知正 2×2^n及正 3×2^n邊形可以尺規造出

4. 若ΔABC爲一頂角爲36°等腰三角形，作$\overline{BD}$平分$\angle ABC$，再作$\overline{BH}\perp\overline{CD}$，設$\overline{DH}=\overline{CH}=\chi$，若$\overline{AD}=\overline{BD}=\overline{BC}=1$，則根據 三角形相似性質可得

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}}=\frac{\overline{BD}}{\overline{CD}}\text{即}\frac{2\chi+1}{1}=\frac{1}{2\chi}\qquad 4X^2+2X-1=0$$

$X=\dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$ 即 18°、72°、90° 的直角三角形之邊長比爲 $\left(\sqrt{5}-1\right):\sqrt{10+2\sqrt{5}}:4$



5. 利用 4. 所得性質按以下步驟即可造出正五邊形

(1)任作一圓 O 並在圓 O 上作互相垂直的兩直徑$\overline{AB}$、$\overline{CD}$

(2)取$\overline{OC}$中點 E 作$\overline{BE}$

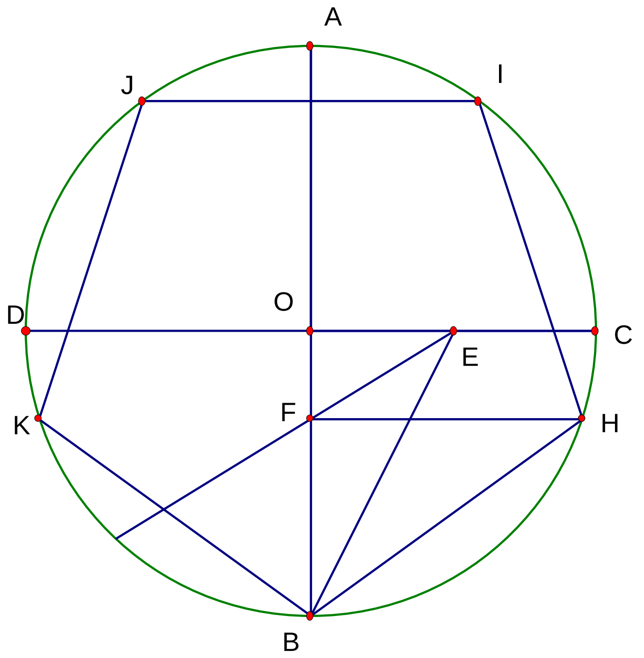
(3)作$\angle OEB$的平分線交$\overline{OB}$於 F

(4)過 F 作$\overline{BO}$的垂直線交圓 O 於 H

(5)在圓 O 上取 I、J、K 三點使弧 BH＝弧 HI＝弧 IJ＝弧 JK＝弧 BK

即成正五邊形 BHIJK

故正 5×2^n邊形也可以尺規作圖造成。

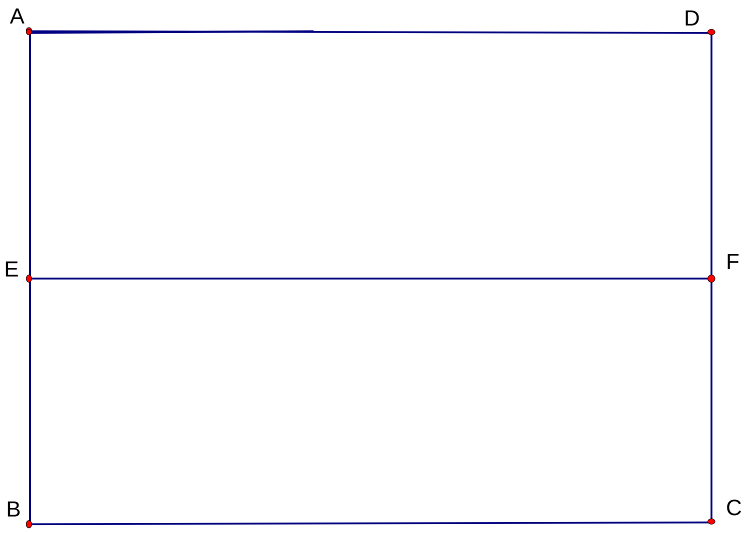


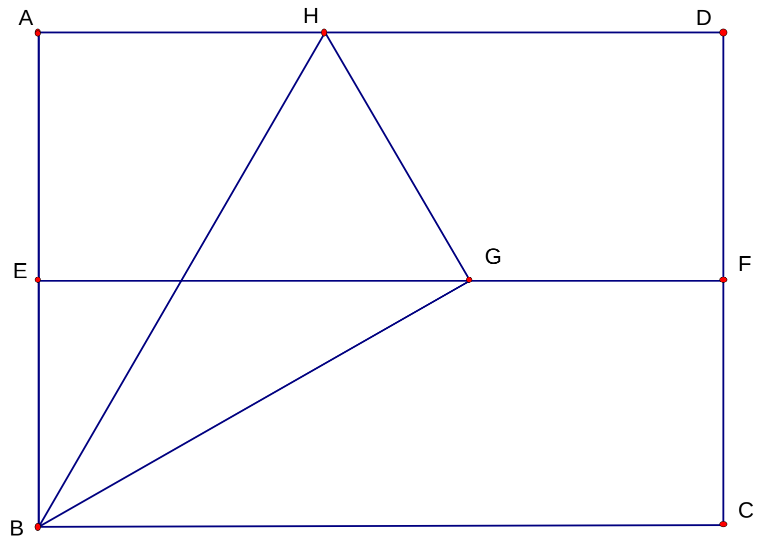
二、正多邊形摺法

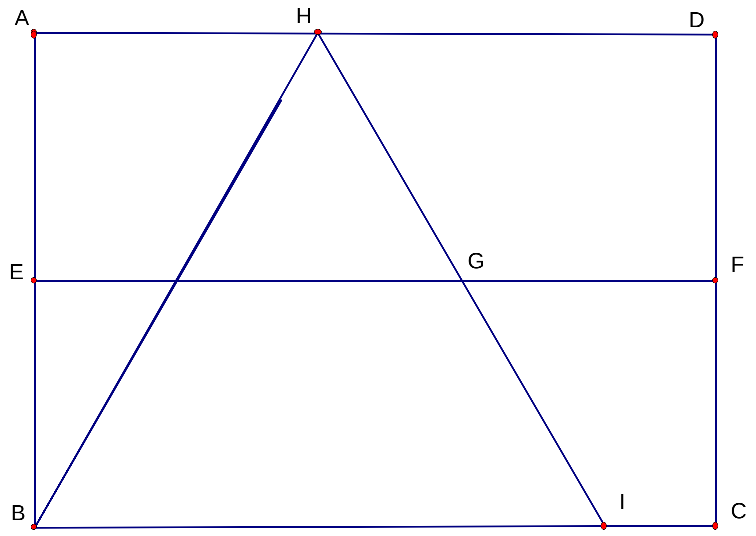
1.正三角形摺法

(1).在矩形 ABCD(設 $\overline{AD} > \overline{AB}$)中取中線 $\overline{EF}$

(2).以 B 點爲中心，將左上角 A 點置於 $\overline{EF}$ 上 G 點摺出摺痕 $\overline{BH}$，再沿 $\overline{HG}$ 摺出摺痕 $\overline{HI}$，則 ΔBHI 即爲正三角形







2. 正五邊形摺法

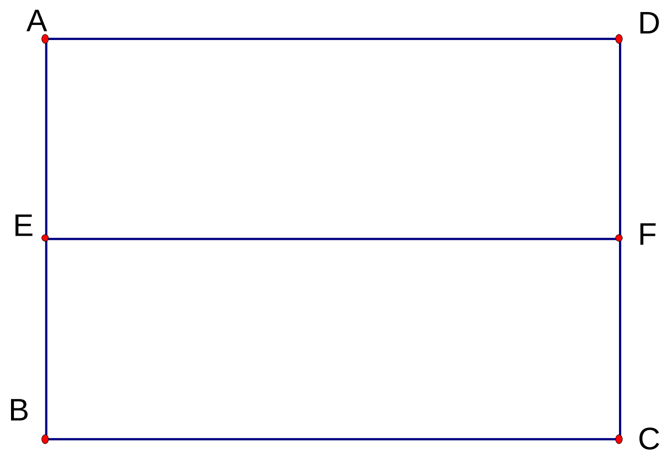
(1).在矩形 ABCD(設$\overline{AD} > \overline{AB}$)中取中線$\overline{EF}$

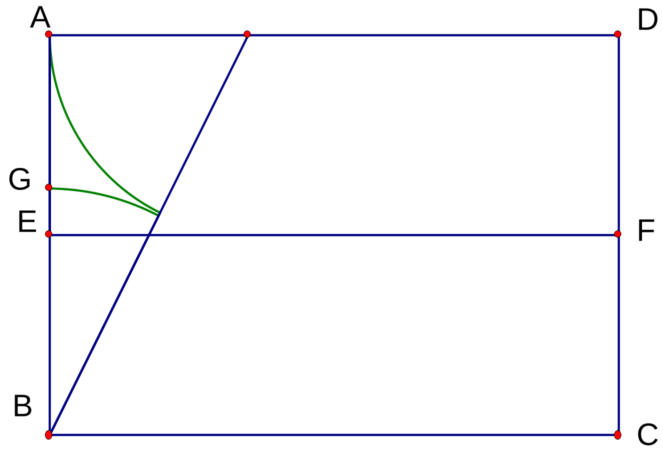
(2).找出$\overline{AB}$的黃金分割點 G

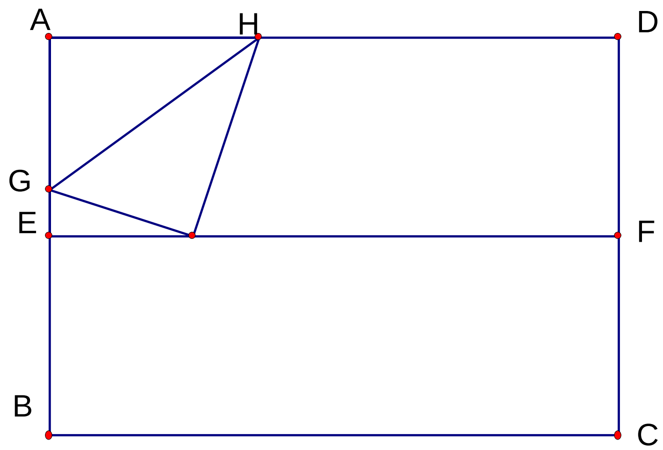
(3).以 G 點爲中心，將 A 點置於$\overline{EF}$上，摺出摺痕$\overline{GH}$ ，

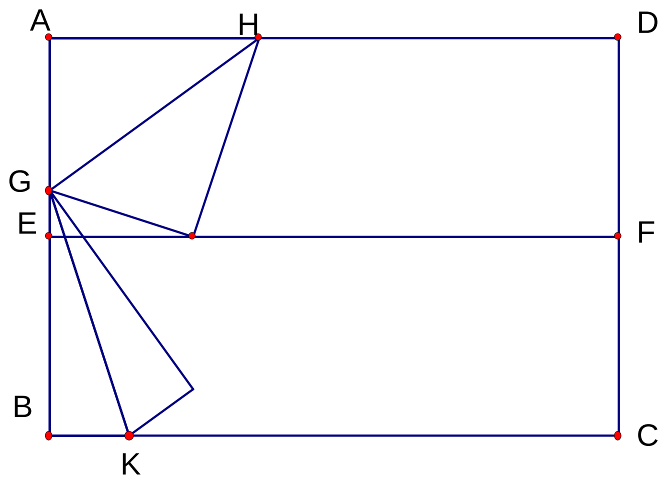
$\overline{GH}$即爲正五邊形的一邊

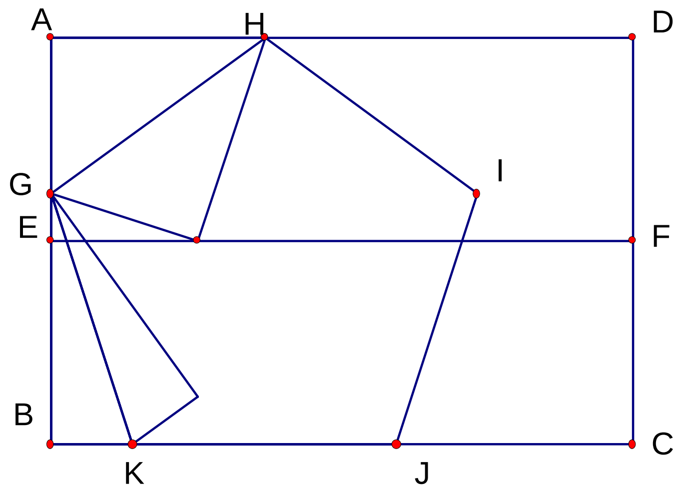
(4).再利用正五邊形的對稱性質即可摺出正五邊形 GHIJK


A
D
E
F
B
C


A
D
G
E
F
B
C


A
H
D
G
E
F
B
C



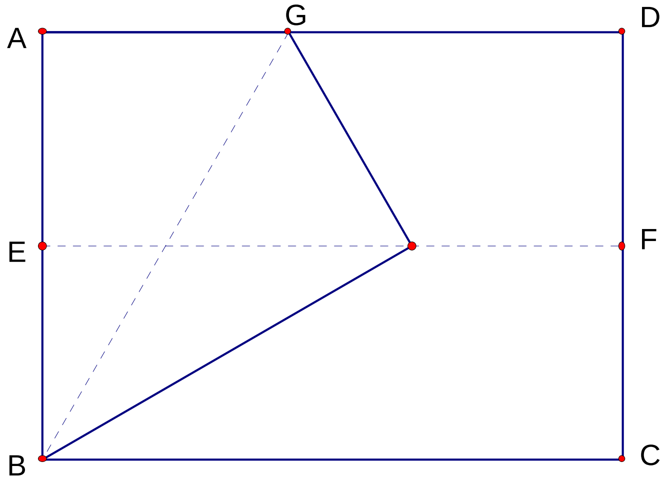


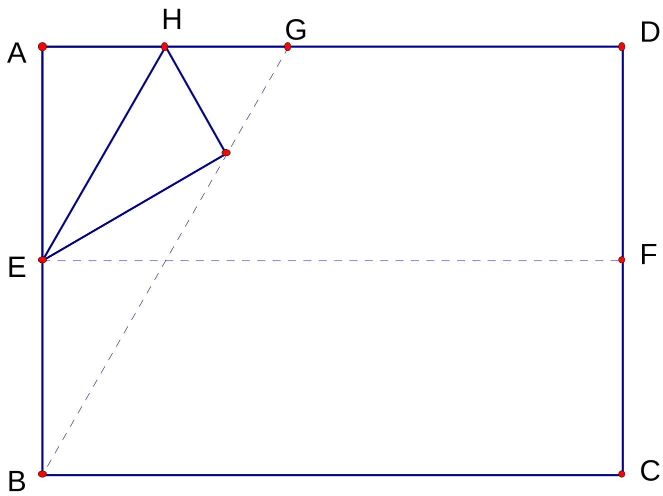
3.正六邊形摺法

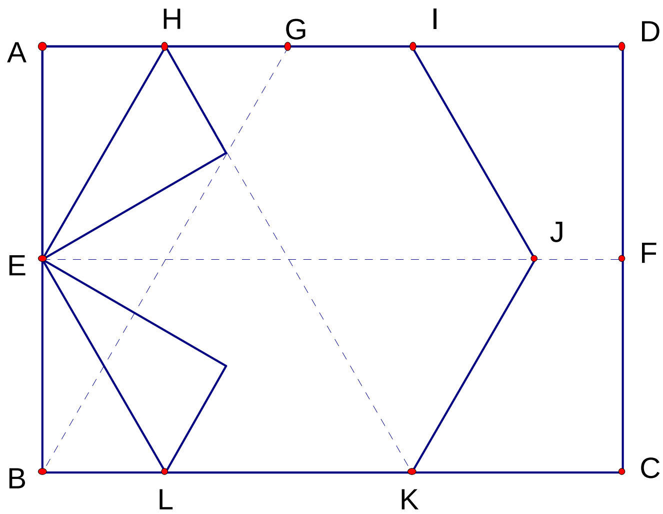
(1).在矩形 ABCD(設$\overline{AD} > \overline{AB}$)中，先利用正三角形摺法的第一步驟找出摺線$\overline{BG}$

(2).以 E 爲中心將 A 點置於$\overline{BG}$上摺出摺痕$\overline{EH}$

(3).再根據正六邊形對稱性質即可作出正六邊形 EHIJKL


A
G
D
E
F
B
C


H
A
G
D
E
F
B
C


H
G
I
A
D
J
E
F
B
C
L
K

4.正八邊形摺法

(1).作一矩形 ABCD 使 $\overline{AB}:\overline{BC}=1:\sqrt{2}$

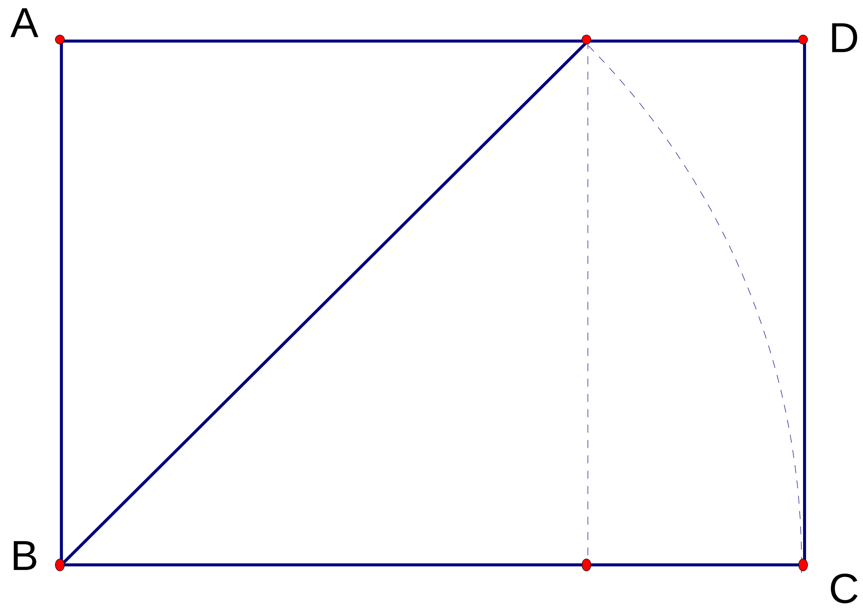
(2).作正方形 ABFE 及其中心 O

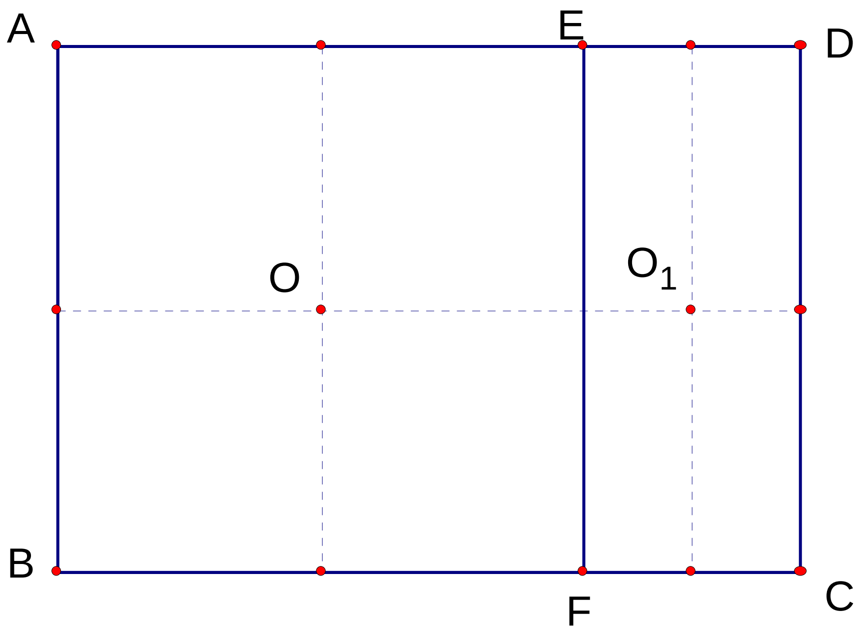
(3).將矩形EFCD剪下並取其中心O_1

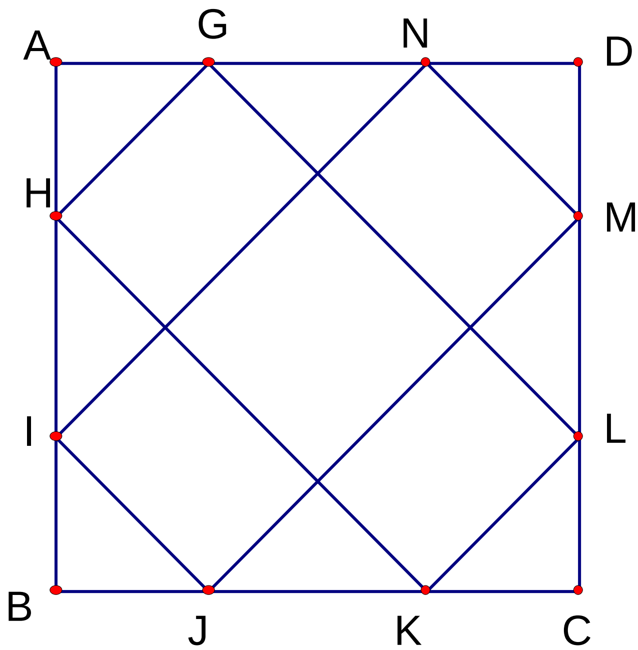
(4).讓矩形EFCD置於正方形ABFE上使O_1點落在O點上矩形的四個頂點分別落在$\overline{AB}$、$\overline{BC}$、$\overline{CD}$、$\overline{AD}$上I、J、M、N四點

(5).按以上方法轉另一個方向取 G、H、K、L 四點，

則成正八邊形 GHIJKLMN







5.正十邊形摺法

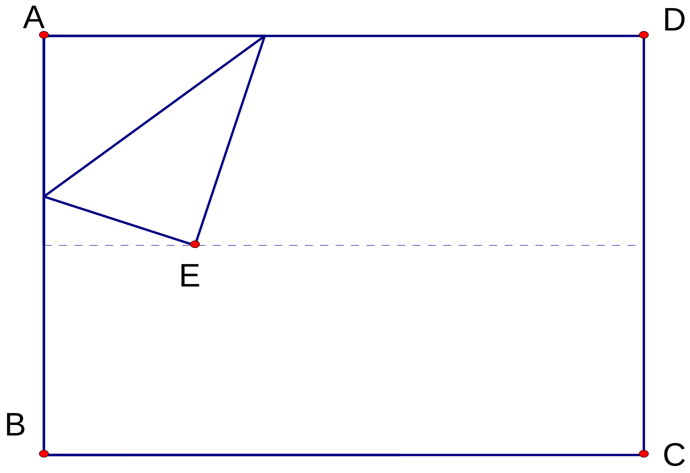
(1).依摺正五邊形的第一步驟在矩形 ABCD 上取 E 點，

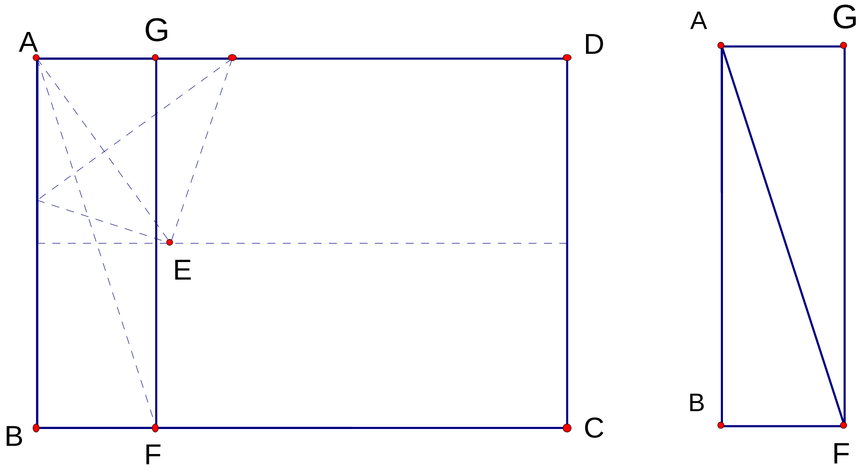
則 $\angle BAE = 36°$

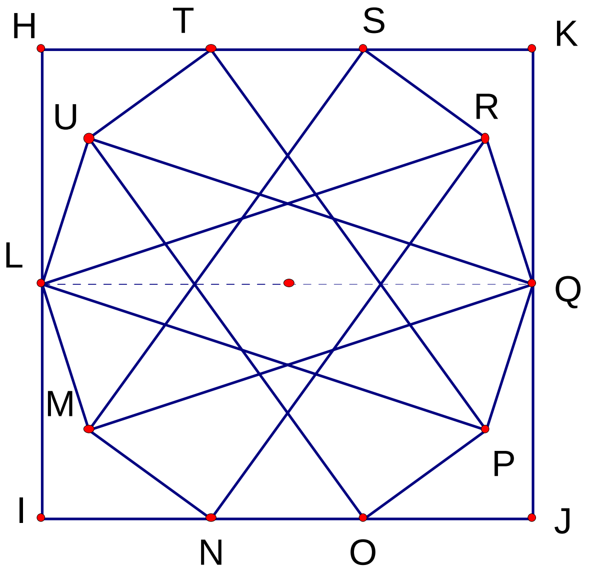
(2).平分 $\angle BAE$ 得 F 點再作矩形 ABFG

(3).作一矩形 HIJK 使 $\overline{HK} = \overline{AF}$、 $\overline{HI} = \overline{AB}$

(4).將矩形 ABFG 移置到矩形 HIJK 上使兩矩形中心重疊，依下圖方法可得正十邊形 LMNOPQRSTU







6.正十二邊形摺法

(1).依正三角形摺法的第一步驟，在矩形 ABCD 上摺一摺痕 $\overline{BE}$ 使

$\angle ABE = 30°$

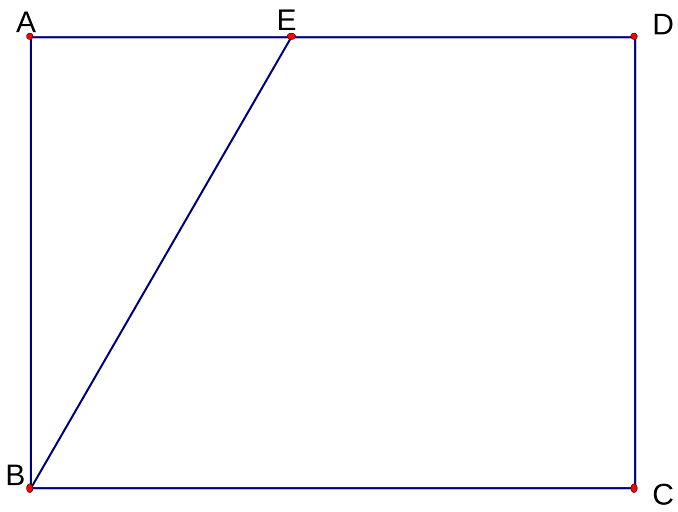
(2).平分 $\angle ABE$ 則＝15°作矩形 ABGF

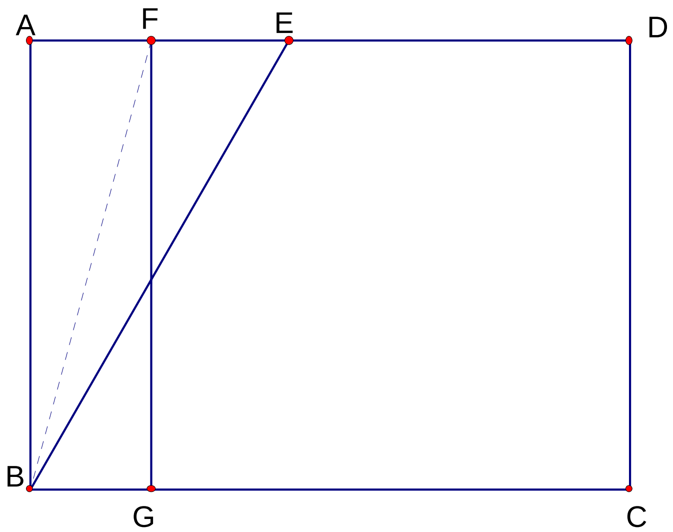
(3).取一正方形 HIJK 使 $\overline{HI} = \overline{AB}$

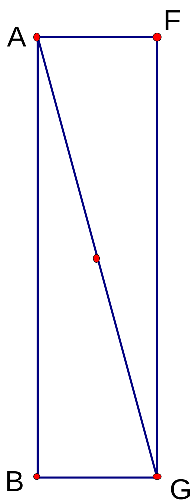
(4).將矩形 ABGF 置於正方形 HIJK 上使矩形與正方形的中心點

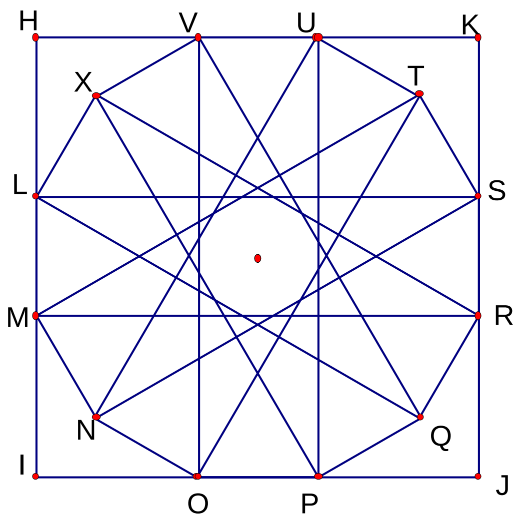
重疊如圖可得 L、M、N、O、P、Q、R、S、T、U、V、X 等

12 點而得正十二邊形


A
E
D
B
C


A
F
E
D
B
G
C


A
F
B
G


H
V
U
K
X
T
L
S
M
R
N
Q
I
O
P
J

肆、結論:

1. 以目前我們所學的數學定理和觀念，應用尺規作圖可作出

   正 4×2^n 邊形、3×2^n 邊形、5×2^n 邊形，其中n＝0、1、2、3、…

2. 以一張矩形紙張依上法可以摺出正三角形、正五邊形、

   正六邊形、正八邊形、正十邊形、正十二邊形

3. 當 n＝4k＋2 時，若能得到 $\frac{180°}{n}$ 角，則可仿正 10 邊形作法摺出

   正 n 邊形(其中 k 為正整數)

4. 當 n＝4k 時，若能得到 $\frac{180°}{n}$ 角，則可仿正 12 邊形作法摺出

   正 n 邊形(其中 k 為正整數)

伍、研究心得:

以上有關正多邊形可造性與可摺性的研究僅止於目前我們所學，盼望往後在數學研究上對相關題材有更進一步的發現

陸、參考文獻 ：

1. 國中數學第 2、3、4、5、6 冊
2. 用摺紙來學數學 (國際村文庫書店有限公司)

評　　語

030420　正多邊形的可造性與可摺性

1. 以摺紙和尺規嘗試各種正多邊形的可造性與可摺性，題材有趣味。
2. 尺規作圖有規定限制，卻被忽略。
3. 部分摺紙可摺性之假設前題，幾乎與解答一樣。