

中華民國第四十六屆中小學科學展覽會
作品說明書

國中組 數學科

第二名

030417

約瑟夫數列的最後一章

學校名稱： 臺北縣立江翠國民中學

作者： 國一 葉佩雯	指導老師： 李思瑩 顏榮皇
---------------	---------------------

關 鍵 詞：約瑟夫問題

壹、摘要

所謂約瑟夫問題，就是有 n 個自然數排成一環狀，從頭開始，殺 1(個數)留 1(個數)，求最後留下的數會是多少？該問題在台灣的全國中小學科學展覽出現多次（如表二）。而資訊界演算法大師 Donlad E. Knuth 在其著作 The Art of Programing, CONCRETE MATHEMATICS（具體數學），針對該數列作詳細的說明；但是，不論是歷屆科學展覽或是大師著作，對於該問題，都只是談及殺 1 留 β 或是殺 α 留 1。

筆者本研究中利用獨創 α 分類、 n 及 k 分類、 F 函數、 b 函數及循環節，將約瑟夫問題探討範圍提升至殺 α (個數)留 β (個數)，求倒數第 k 個留下的數是多少？

貳、研究動機

羅馬人佔領喬塔帕特後，39 個猶太人與歷史學家 Josephus 及朋友躲到一個洞中，39 個猶太人決定寧願死也不要被敵人抓到，於是決定了一個自殺方式，41 個人排成一個圓圈，由 1、2、3 連續報數，每逢報第 3 人就必須自殺，直到所有人都自殺身亡為止。然而 Josephus 和他的朋友並不想遵從，將朋友與自己安排在第 16 個與第 31 個位置，逃過了這場死亡遊戲。

本研究針對此歷史故事做一系列數學研究。

參、研究目的

任意 n 個自然數排成環狀，從頭開始，殺 α (個數)留 β (個數)，求倒數第 k 個留下的數？也可以說是第 $n+1-k$ 個淘汰的數？本研究需一直到留下最後 1 個數時，遊戲才終止。

肆、研究材料

紙、筆與電腦 EXCEL 軟體

伍、研究過程與方法

一、名詞定義

表一、名詞定義

符號	用意	定義
α	殺 α 留 β 之中的 α 。	
β	殺 α 留 β 之中的 β 。	
n	有 n 個數排成一環狀。	
k	求 n 個自然數中，倒數第 k 個留下來的數，也是第 $n+1-k$ 個淘汰的數。	$k \leq n$
c	使之分類為 α 組。	$c \equiv ((n-1) \bmod \alpha) + 1$
$F(1 \alpha, \beta, c, k)$	求出第一循環節尾數	$F(1 \alpha, \beta, c, k) = \alpha \left[\frac{(k-c) + (\alpha-1)}{\alpha} \right] + c + \alpha \left[\frac{k-1}{\beta} \right]$
$b(1 \alpha, \beta, c, k)$	求出第一循環節尾數減掉留下數字	$b(1 \alpha, \beta, c, k) \equiv (k-1) \bmod \beta$
m	由 $F(x \alpha, \beta, c, k)$ 推展 $F(x+1 \alpha, \beta, c, k)$ ； 由 $b(x \alpha, \beta, c, k)$ 推展 $b(x+1 \alpha, \beta, c, k)$	依據 $F(x \alpha, \beta, c, k)$ 及 $b(x \alpha, \beta, c, k)$ 而做改變。
$F(x \alpha, \beta, c, k)$	求出每一循環節尾數	$F(x \alpha, \beta, c, k)$ 為第 x 循環節結束。
$b(x \alpha, \beta, c, k)$	求出每一循環節尾數減掉留下數字	$b(x \alpha, \beta, c, k)$ 為 $F(x \alpha, \beta, c, k)$ 減掉數字。
循環節	自然數循環節，為了求出公式而分類	$F(x+1 \alpha, \beta, c, k) \geq \text{循環節} > F(x \alpha, \beta, c, k)$

二、文獻探討

歷屆和「約瑟夫問題」有關的科學展覽作品，如表二所示。而，針對「約瑟夫問題」，學長所做的科展作品殺 1 留 1 分析工具如表三所示。

表二、歷屆「約瑟夫問題」科學展覽作品

屆數	組別	作品名稱	研究方法	與本研究比較
39	國小組	公主如何救王子	列舉數據推算解法。	殺 1 留 β ， $k=1$ 。
40	國中組	天生贏家的奧秘—『傳遞問題』之研究與探討	電腦窮舉及數學歸納法證明遞迴一般式。	殺 α 留 1， $k=1$ 。
43	高中組	九死一生	電腦窮舉。	殺 α 留 1 及殺 α 留 α ， $k=1$ 。
44	高中組	公主的抉擇	遞迴關係式。	殺 1 留 β ， $k=1$ 。
44	高中組	我要活下去	數值分析。	殺 α 留 1 及殺 α 留 α ， $k=1$ 。
44	國小組	王位繼承人	列舉數據後整理分類，最後綜合歸納整理。	殺 α 留 1， $k=1$ 。
45	國小組	探索俄羅斯遊戲法則之奧秘	列舉數據，推算解法。	殺 1 留 β ，第 k 項。
45	國小組	老師無法解決的難題	筆者作品	殺 α 留 β ， $k=1$ 。
45	國中組	魔數	等差數列。	殺 1 留 1，第 k 項。
46	國中組	約瑟夫數列的最後一章	筆者作品	本研究，殺 α 留 β ，第 k 項。

表三、學長的殺 1 留 1 (2~100)

原數 n		2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
留下的數		2	2	4	2	4	6	8	2	4	6	8	10	12	14	16	2	4	6	8
原數 n	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
留下的數	10	12	14	16	18	20	22	24	26	28	30	32	2	4	6	8	10	12	14	16
原數 n	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
留下的數	18	20	22	24	26	28	30	32	34	36	38	40	42	44	46	48	50	52	54	56
原數 n	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
留下的數	58	60	62	64	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24	26	28	30	32
原數 n	81	82	83	84	85	86	87	88	89	90	91	92	93	94	95	96	97	98	99	100
留下的數	34	36	38	40	42	44	46	48	50	52	54	56	58	60	62	64	66	68	70	72

三、研究演變

2004 年 7 月，筆者國小五年級暑假，開始接觸「約瑟夫問題」，研究演變如表四所示。

2006 年台灣國際科學展覽，感謝一位專門研究「約瑟夫問題」評審的勉勵：數學研究不要只限定在「報數問題」，應該多多欣賞其他數學的美麗。為了追求數學的夢，決定把本篇研究當做「報數問題」研究的結束；所以，筆者打算從另外一個研究角度切入，探討「報數問題」並以「約瑟夫數列的最後一章」當做本研究題目。

希望，這篇研究能獲得大家的喜愛。

表四、筆者對於「約瑟夫問題」研究之重要演進

年代	重要演變	說明
2004 年	歷屆科展作品	如表二，認識歷屆參賽者對於「約瑟夫問題」研究重點。
	學長科展作品	如表三，啟發「由後推算」的思考方向。
	尾數推算	如表五，筆者由表三發展的分析工具。
2005 年	α 分類	解決「殺 α 留 β ，最後一個留下的數字為何？」問題。
	F 函數、b 函數	推算各循環節，使「最後一個留下的數字為何？」公式一般化。
	第 45 屆國展	以「老師無法解決的難題」參賽，殺 α 留 β ， $k=1$ 。
2006 年	n 及 k 分類	解決「殺 α 留 β ，倒數第 k 個留下的數字為何？」問題。
	電腦模擬	利用 Excel 找出「殺 α 留 β ，倒數第 k 個留下的數字為何？」。
	台灣國際科展	以「約瑟夫數列」參賽，使用「n 及 k 分類」分析工具。
	六大性質	研究討論，發現六大性質並給予證明。
	圖表分析	如圖三~圖六，發展 F 函數、b 函數之圖表分析。
	第 46 屆國展	以「約瑟夫問題的最後一章」參賽並電腦模擬及性質討論。

表五、殺 1 留 1 之尾數推算

循環	代號	演算過程							
1	原數 n	2							
	留下的數 a	2							
	由後推算剩下數 n-a	0							
2	原數 n	3	4						
	留下的數 a	2	4						
	由後推算剩下數 n-a	1	0						
3	原數 n	5	6	7	8				
	留下的數 a	2	4	6	8				
	由後推算剩下數 n-a	3	2	1	0				
4	原數 n	9	10	11	12	13	14	15	16
	留下的數 a	2	4	6	8	10	12	14	16
	由後推算剩下數 n-a	7	6	5	4	3	2	1	0

註、塗黃色表示它是 2^k 的數字。

四、分析工具

(一) F 函數與 b 函數演

針對「約瑟夫問題」的一般式推測，筆者發明新的分析工具 F 函數和 b 函數係。利用此工具，才可以推算出，有 n 個數排成環狀，最後留下的數是多少？表六為 F 函數值和 b 函數值演算，藉此演算，可以發現殺 α 留 β 時，F 函數值和 b 函數值一般式。

筆者創新 F 函數和 b 函數後，也發現 F 函數和 b 函數的性質，其證明、實例及圖表分析，和其發展的電腦模擬如第二十七頁及第二十八頁的說明。

表六、F 函數值和 b 函數值演算

α 值	β 值	F 函數值和 b 函數值
1	1	$F(x 1,1,c,k) = 1m - b(x 1,1,c,k) + b(x+1 1,1,c,k)$ $F(x+1 1,1,c,k) = F(x 1,1,c,k) + 1m$
1	2	$F(x 1,2,c,k) = 2m - b(x 1,2,c,k) + b(x+1 1,2,c,k)$ $F(x+1 1,2,c,k) = F(x 1,2,c,k) + 1m$
1	3	$F(x 1,3,c,k) = 3m - b(x 1,3,c,k) + b(x+1 1,3,c,k)$ $F(x+1 1,3,c,k) = F(x 1,3,c,k) + 1m$
1	β	$F(x 1,\beta,c,k) = \beta m - b(x 1,\beta,c,k) + b(x+1 1,\beta,c,k)$ $F(x+1 1,\beta,c,k) = F(x 1,\beta,c,k) + 1m$
2	1	$F(x 2,1,c,k) = 1m - b(x 2,1,c,k) + b(x+1 2,1,c,k)$ $F(x+1 2,1,c,k) = F(x 2,1,c,k) + 2m$
2	2	$F(x 2,2,c,k) = 2m - b(x 2,2,c,k) + b(x+1 2,2,c,k)$ $F(x+1 2,2,c,k) = F(x 2,2,c,k) + 2m$
2	3	$F(x 2,3,c,k) = 3m - b(x 2,3,c,k) + b(x+1 2,3,c,k)$ $F(x+1 2,3,c,k) = F(x 2,3,c,k) + 2m$
2	β	$F(x 2,\beta,c,k) = \beta m - b(x 2,\beta,c,k) + b(x+1 2,\beta,c,k)$ $F(x+1 2,\beta,c,k) = F(x 2,\beta,c,k) + 2m$
3	1	$F(x 3,1,c,k) = 1m - b(x 3,1,c,k) + b(x+1 3,1,c,k)$ $F(x+1 3,1,c,k) = F(x 3,1,c,k) + 3m$
3	2	$F(x 3,2,c,k) = 2m - b(x 3,2,c,k) + b(x+1 3,2,c,k)$ $F(x+1 3,2,c,k) = F(x 3,2,c,k) + 3m$
3	3	$F(x 3,3,c,k) = 3m - b(x 3,3,c,k) + b(x+1 3,3,c,k)$ $F(x+1 3,3,c,k) = F(x 3,3,c,k) + 3m$
3	β	$F(x 3,\beta,c,k) = \beta m - b(x 3,\beta,c,k) + b(x+1 3,\beta,c,k)$ $F(x+1 3,\beta,c,k) = F(x 3,\beta,c,k) + 3m$
α	β	$F(x \alpha,\beta,c,k) = \beta m - b(x \alpha,\beta,c,k) + b(x+1 \alpha,\beta,c,k)$ $F(x+1 \alpha,\beta,c,k) = F(x \alpha,\beta,c,k) + \alpha m$

(二) α 分類

不同於以往的「約瑟夫問題」研究作品(表二)，取 $c=((n-1) \bmod \alpha)+1$ ，將 n 分成 α 類。本研究之研究結果，均依照此一原則進行分析。

(三) n 及 k 分類

如表七所示，說明殺 1 留 1、 n 及 k 分類。顯然，在殺 1 留 1 情況下， $c=1$ 。

表七中，數字大寫表示該條件留下的數，如 $n=7$ ，最後 1 個留下來的數是 6，最後第 2 個留下來的數是 2，最後第 3 個留下來的數是 4，最後第 4 個留下來的數是 7，接著，依序是 5、3、1。換言之，殺 1 留 1 的順序是 1、3、5、7、4、2、6。數字小寫表示該條件 n 減掉留下數字。

為了表示 n 及 k 分類中第 1 循環節與非第 1 循環節。塗白色表示非第 1 循環節。而第 1 循環節中，塗綠色是 k 的範圍為 $c \geq k$ ，塗黃色是 $k \geq c=1$ 。

研究結果中， n 及 k 分類均依照表七方式進行分析。

表七、殺 1 留 1($c=1$)

n ▼	k ▶														
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1	1 ₀														
2	2 ₀	1 ₁													
3	2 ₁	3 ₀	1 ₂												
4	4 ₀	2 ₂	3 ₁	1 ₃											
5	2 ₃	4 ₁	5 ₀	3 ₂	1 ₄										
6	4 ₂	6 ₀	2 ₄	5 ₁	3 ₃	1 ₅									
7	6 ₁	2 ₅	4 ₃	7 ₀	5 ₂	3 ₄	1 ₆								
8	8 ₀	4 ₄	6 ₂	2 ₆	7 ₁	5 ₃	3 ₅	1 ₇							
9	2 ₇	6 ₃	8 ₁	4 ₅	9 ₀	7 ₂	5 ₄	3 ₆	1 ₈						
10	4 ₆	8 ₂	10 ₀	6 ₄	2 ₈	9 ₁	7 ₃	5 ₅	3 ₇	1 ₉					
11	6 ₅	10 ₁	2 ₉	8 ₃	4 ₇	11 ₀	9 ₂	7 ₄	5 ₆	3 ₈	1 ₁₀				
12	8 ₄	12 ₀	4 ₈	10 ₂	6 ₆	2 ₁₀	11 ₁	9 ₃	7 ₅	5 ₇	3 ₉	1 ₁₁			
13	10 ₃	2 ₁₁	6 ₇	12 ₁	8 ₅	4 ₉	13 ₀	11 ₂	9 ₄	7 ₆	5 ₈	3 ₁₀	1 ₁₂		
14	12 ₂	4 ₁₀	8 ₆	14 ₀	10 ₄	6 ₈	2 ₁₂	13 ₁	11 ₃	9 ₅	7 ₇	5 ₉	3 ₁₁	1 ₁₃	
15	14 ₁	6 ₉	10 ₅	2 ₁₃	12 ₃	8 ₇	4 ₁₁	15 ₀	13 ₂	11 ₄	9 ₆	7 ₈	5 ₁₀	3 ₁₂	1 ₁₄

五、研究步驟

(一) 殺 1 留 1、殺 1 留 2、殺 1 留 3，推算至殺 1 留 β 倒數第 k 個留下的數？

(二) 殺 2 留 1、殺 2 留 2、殺 2 留 3，推算至殺 2 留 β 倒數第 k 個留下的數？

(三) 殺 3 留 1、殺 3 留 2、殺 3 留 3，推算至殺 3 留 β 倒數第 k 個留下的數？

(四) 殺 α 留 1、殺 α 留 2、殺 α 留 3，推算至殺 α 留 β 倒數第 k 個留下的數？

陸、研究結果

一、 $\alpha=1$ ， $\beta=1、2、3\dots$

(一) $n=1、2、3、4、5\dots$ 等，1 的倍數「實驗情形」殺 1 留 1 如前一頁表七所示。

表八、殺 1 留 2($c=1$)

n ▼	k ►												
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
1	1 ₀												
2	2 ₀	1 ₁											
3	3 ₀	2 ₁	1 ₂										
4	3 ₁	2 ₂	4 ₀	1 ₃									
5	2 ₃	5 ₀	3 ₂	4 ₁	1 ₄								
6	5 ₁	3 ₃	6 ₀	2 ₄	4 ₂	1 ₅							
7	2 ₅	6 ₁	3 ₄	5 ₂	7 ₀	4 ₃	1 ₆						
8	5 ₃	2 ₆	6 ₂	8 ₀	3 ₅	7 ₁	4 ₄	1 ₇					
9	8 ₁	5 ₄	9 ₀	3 ₆	6 ₃	2 ₇	7 ₂	4 ₅	1 ₈				
10	2 ₈	8 ₂	3 ₇	6 ₄	9 ₁	5 ₅	10 ₀	7 ₃	4 ₆	1 ₉			
11	5 ₆	11 ₀	6 ₅	9 ₂	2 ₉	8 ₃	3 ₈	10 ₁	7 ₄	4 ₇	1 ₁₀		
12	8 ₄	3 ₉	9 ₃	12 ₀	5 ₇	11 ₁	6 ₆	2 ₁₀	10 ₂	7 ₅	4 ₈	1 ₁₁	
13	11 ₂	6 ₇	12 ₁	3 ₁₀	8 ₅	2 ₁₁	9 ₄	5 ₈	13 ₀	10 ₃	7 ₆	4 ₉	1 ₁₂

表九、殺 1 留 3($c=1$)

n ▼	k ►											
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	1 ₀											
2	2 ₀	1 ₁										
3	2 ₁	3 ₀	1 ₂									
4	3 ₁	4 ₀	2 ₂	1 ₃								
5	3 ₂	4 ₁	2 ₃	5 ₀	1 ₄							
6	2 ₄	3 ₃	6 ₀	4 ₂	5 ₁	1 ₅						
7	6 ₁	7 ₀	4 ₃	2 ₅	3 ₄	5 ₂	1 ₆					
8	3 ₅	4 ₄	8 ₀	6 ₂	7 ₁	2 ₆	5 ₃	1 ₇				
9	7 ₂	8 ₁	4 ₅	2 ₇	3 ₆	6 ₃	9 ₀	5 ₄	1 ₈			
10	2 ₈	3 ₇	8 ₂	6 ₄	7 ₃	10 ₀	4 ₆	9 ₁	5 ₅	1 ₉		
11	6 ₅	7 ₄	2 ₉	10 ₁	11 ₀	4 ₇	8 ₃	3 ₈	9 ₂	5 ₆	1 ₁₀	
12	10 ₂	11 ₁	6 ₆	3 ₉	4 ₈	8 ₄	12 ₀	7 ₅	2 ₁₀	9 ₃	5 ₇	1 ₁₁

表十、殺 1 留 β 公式表

	留下數字	留下數字
殺 1 留 1	$n - (b(x+1 1,1,c,k) + 1 \frac{F(x+1 1,1,c,k) - n}{1})$	$(1+1) \frac{n - F(x 1,1,c,k)}{1} - b(x 1,1,c,k)$
	其中 $F(x+1 1,1,c,k) \geq n > F(x 1,1,c,k)$ 。	
殺 1 留 2	$n - (b(x+1 1,2,c,k) + 2 \frac{F(x+1 1,2,c,k) - n}{1})$	$(1+2) \frac{n - F(x 1,2,c,k)}{1} - b(x 1,2,c,k)$
	其中 $F(x+1 1,2,c,k) \geq n > F(x 1,2,c,k)$ 。	
殺 1 留 3	$n - (b(x+1 1,3,c,k) + 3 \frac{F(x+1 1,3,c,k) - n}{1})$	$(1+3) \frac{n - F(x 1,3,c,k)}{1} - b(x 1,3,c,k)$
	其中 $F(x+1 1,3,c,k) \geq n > F(x 1,3,c,k)$ 。	
殺 1 留 β	$n - (b(x+1 1,\beta,c,k) + \beta \frac{F(x+1 1,\beta,c,k) - n}{1})$	$(1+\beta) \frac{n - F(x 1,\beta,c,k)}{1} - b(x 1,\beta,c,k)$
	其中 $F(x+1 1,\beta,c,k) \geq n > F(x 1,\beta,c,k)$ 。	

二、 $\alpha=2$ ， $\beta=1、2、3...$

(一) $n=1、3、5、7、9...$ 等，2 的倍數+1「實驗情形」

表十一、殺 2 留 1($c=1$)

n ▼	k ►										
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	1 ₀										
3	3 ₀	2 ₁	1 ₂								
5	3 ₂	5 ₀	4 ₁	2 ₃	1 ₄						
7	6 ₁	3 ₄	7 ₀	5 ₂	4 ₃	2 ₅	1 ₆				
9	9 ₀	6 ₃	3 ₆	8 ₁	7 ₂	5 ₄	4 ₅	2 ₇	1 ₈		
11	3 ₈	9 ₂	6 ₅	11 ₀	10 ₁	8 ₃	7 ₄	5 ₆	4 ₇	2 ₉	1 ₁₀
13	6 ₇	12 ₁	9 ₄	3 ₁₀	13 ₀	11 ₂	10 ₃	8 ₅	7 ₆	5 ₈	...
15	9 ₆	15 ₀	12 ₃	6 ₉	3 ₁₂	14 ₁	13 ₂	11 ₄	10 ₅	8 ₇	...
17	12 ₅	3 ₁₄	15 ₂	9 ₈	6 ₁₁	17 ₀	16 ₁	14 ₃	13 ₄	11 ₆	...
19	15 ₄	6 ₁₃	18 ₁	12 ₇	9 ₁₀	3 ₁₆	19 ₀	17 ₂	16 ₃	14 ₅	...
21	18 ₃	9 ₁₂	21 ₀	15 ₆	12 ₉	6 ₁₅	3 ₁₈	20 ₁	19 ₂	17 ₄	...
23	21 ₂	12 ₁₁	3 ₂₀	18 ₅	15 ₈	9 ₁₄	6 ₁₇	23 ₀	22 ₁	20 ₃	...
25	24 ₁	15 ₁₀	6 ₁₉	21 ₄	18 ₇	12 ₁₃	9 ₁₆	3 ₂₂	25 ₀	23 ₂	...
27	27 ₀	18 ₉	9 ₁₈	24 ₃	21 ₆	15 ₁₂	12 ₁₅	6 ₂₁	3 ₂₄	26 ₁	...

表十二、殺 2 留 2(c=1)

n ▼	k ►										
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	1 ₀										
3	3 ₀	2 ₁	1 ₂								
5	4 ₁	3 ₂	5 ₀	2 ₃	1 ₄						
7	3 ₄	7 ₀	4 ₃	6 ₁	5 ₂	2 ₅	1 ₆				
9	7 ₂	4 ₅	8 ₁	3 ₆	9 ₀	6 ₃	5 ₄	2 ₇	1 ₈		
11	11 ₀	8 ₃	3 ₈	7 ₄	4 ₇	10 ₁	9 ₂	6 ₅	5 ₆	2 ₉	1 ₁₀
13	4 ₉	12 ₁	7 ₆	11 ₂	8 ₅	3 ₁₀	13 ₀	10 ₃	9 ₄	6 ₇	...
15	8 ₇	3 ₁₂	11 ₄	15 ₀	12 ₃	7 ₈	4 ₁₁	14 ₁	13 ₂	10 ₅	...
17	12 ₅	7 ₁₀	15 ₂	4 ₁₃	16 ₁	11 ₆	8 ₉	3 ₁₄	17 ₀	14 ₃	...
19	16 ₃	11 ₈	19 ₀	8 ₁₁	3 ₁₆	15 ₄	12 ₇	7 ₁₂	4 ₁₅	18 ₁	...
21	20 ₁	15 ₆	4 ₁₇	12 ₉	7 ₁₄	19 ₂	16 ₅	11 ₁₀	8 ₁₃	3 ₁₈	...
23	3 ₂₀	19 ₄	8 ₁₅	16 ₇	11 ₁₂	23 ₀	20 ₃	15 ₈	12 ₁₁	7 ₁₆	...
25	7 ₁₈	23 ₂	12 ₁₃	20 ₅	15 ₁₀	4 ₂₁	24 ₁	19 ₆	16 ₉	11 ₁₄	...
27	11 ₁₆	27 ₀	16 ₁₁	24 ₃	19 ₈	8 ₁₉	3 ₂₄	23 ₄	20 ₇	15 ₁₂	...

表十三、殺 2 留 3(c=1)

n ▼	k ►										
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	1 ₀										
3	3 ₀	2 ₁	1 ₂								
5	5 ₀	4 ₁	3 ₂	2 ₃	1 ₄						
7	5 ₂	4 ₃	3 ₄	7 ₀	6 ₁	2 ₅	1 ₆				
9	3 ₆	9 ₀	8 ₁	5 ₄	4 ₅	7 ₂	6 ₃	2 ₇	1 ₈		
11	8 ₃	5 ₆	4 ₇	10 ₁	9 ₂	3 ₈	11 ₀	7 ₄	6 ₅	2 ₉	1 ₁₀
13	13 ₀	10 ₃	9 ₄	4 ₉	3 ₁₀	8 ₅	5 ₈	12 ₁	11 ₂	7 ₆	...
15	5 ₁₀	15 ₀	14 ₁	9 ₆	8 ₇	13 ₂	10 ₅	4 ₁₁	3 ₁₂	12 ₃	...
17	10 ₇	5 ₁₂	4 ₁₃	14 ₃	13 ₄	3 ₁₄	15 ₂	9 ₈	8 ₉	17 ₀	...
19	15 ₄	10 ₉	9 ₁₀	19 ₀	18 ₁	8 ₁₁	3 ₁₆	14 ₅	13 ₆	5 ₁₄	...
21	20 ₁	15 ₆	14 ₇	5 ₁₆	4 ₁₇	13 ₈	8 ₁₃	19 ₂	18 ₃	10 ₁₁	...
23	4 ₁₉	20 ₃	19 ₄	10 ₁₃	9 ₁₄	18 ₅	13 ₁₀	3 ₂₀	23 ₀	15 ₈	...
25	9 ₁₆	25 ₀	24 ₁	15 ₁₀	14 ₁₁	23 ₂	18 ₇	8 ₁₇	5 ₂₀	20 ₅	...
27	14 ₁₃	5 ₂₂	4 ₂₃	20 ₇	19 ₈	3 ₂₄	23 ₄	13 ₁₄	10 ₁₇	25 ₂	...

▲說明：1.數字大寫表示該條件留下的數

4.塗黃色是第 1 循環節，k 為 2 倍數

2.數字小寫表示該條件 n 減掉留下數字

5.塗橘色是第 1 循環節，k 為 2 倍數+1

3.塗綠色是第 1 循環節， $c \geq k$

(二) $n=2、4、6、8、10\dots$ 等，2 的倍數「實驗情形」。

表十四、殺 2 留 1 ($c=2$)

n ▼	k ►										
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
2	2 ₀	1 ₁									
4	3 ₁	4 ₀	2 ₂	1 ₃							
6	6 ₀	3 ₃	5 ₁	4 ₂	2 ₄	1 ₅					
8	3 ₅	6 ₂	8 ₀	7 ₁	5 ₃	4 ₄	2 ₆	1 ₇			
10	6 ₄	9 ₁	3 ₇	10 ₀	8 ₂	7 ₃	5 ₅	4 ₆	2 ₈	1 ₉	
12	9 ₃	12 ₀	6 ₆	3 ₉	11 ₁	10 ₂	8 ₄	7 ₅	5 ₇	4 ₈	...
14	12 ₂	3 ₁₁	9 ₅	6 ₈	14 ₀	13 ₁	11 ₃	10 ₄	8 ₆	7 ₇	...
16	15 ₁	6 ₁₀	12 ₄	9 ₇	3 ₁₃	16 ₀	14 ₂	13 ₃	11 ₅	10 ₆	...
18	18 ₀	9 ₉	15 ₃	12 ₆	6 ₁₂	3 ₁₅	17 ₁	16 ₂	14 ₄	13 ₅	...
20	3 ₁₇	12 ₈	18 ₂	15 ₅	9 ₁₁	6 ₁₄	20 ₀	19 ₁	17 ₃	16 ₄	...
22	6 ₁₆	15 ₇	21 ₁	18 ₄	12 ₁₀	9 ₁₃	3 ₁₉	22 ₀	20 ₂	19 ₃	...
24	9 ₁₅	18 ₆	24 ₀	21 ₃	15 ₉	12 ₁₂	6 ₁₈	3 ₂₁	23 ₁	22 ₂	...
26	12 ₁₄	21 ₅	3 ₂₃	24 ₂	18 ₈	15 ₁₁	9 ₁₇	6 ₂₀	26 ₀	25 ₁	...
28	15 ₁₃	24 ₄	6 ₂₂	27 ₁	21 ₇	18 ₁₀	12 ₁₆	9 ₁₉	3 ₂₅	28 ₀	...

表十五、殺 2 留 2 ($c=2$)

n ▼	k ►										
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
2	2 ₀	1 ₁									
4	4 ₀	3 ₁	2 ₂	1 ₃							
6	4 ₂	3 ₃	6 ₀	5 ₁	2 ₄	1 ₅					
8	8 ₀	7 ₁	4 ₄	3 ₅	6 ₂	5 ₃	2 ₆	1 ₇			
10	4 ₆	3 ₇	8 ₂	7 ₃	10 ₀	9 ₁	6 ₄	5 ₅	2 ₈	1 ₉	
12	8 ₄	7 ₅	12 ₀	11 ₁	4 ₈	3 ₉	10 ₂	9 ₃	6 ₆	5 ₇	...
14	12 ₂	11 ₃	4 ₁₀	3 ₁₁	8 ₆	7 ₇	14 ₀	13 ₁	10 ₄	9 ₅	...
16	16 ₀	15 ₁	8 ₈	7 ₉	12 ₄	11 ₅	4 ₁₂	3 ₁₃	14 ₂	13 ₃	...
18	4 ₁₄	3 ₁₅	12 ₆	11 ₇	16 ₂	15 ₃	8 ₁₀	7 ₁₁	18 ₀	17 ₁	...
20	8 ₁₂	7 ₁₃	16 ₄	15 ₅	20 ₀	19 ₁	12 ₈	11 ₉	4 ₁₆	3 ₁₇	...
22	12 ₁₀	11 ₁₁	20 ₂	19 ₃	4 ₁₈	3 ₁₉	16 ₆	15 ₇	8 ₁₄	7 ₁₅	...
24	16 ₈	15 ₉	24 ₀	23 ₁	8 ₁₆	7 ₁₇	20 ₄	19 ₅	12 ₁₂	11 ₁₃	...
26	20 ₆	19 ₇	4 ₂₂	3 ₂₃	12 ₁₄	11 ₁₅	24 ₂	23 ₃	16 ₁₀	15 ₁₁	...

表十六、殺 2 留 3(c=2)

n ▼	k ►										
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
2	2 ₀	1 ₁									
4	3 ₁	4 ₀	2 ₂	1 ₃							
6	4 ₂	5 ₁	3 ₃	6 ₀	2 ₄	1 ₅					
8	3 ₅	4 ₄	8 ₀	5 ₃	7 ₁	6 ₂	2 ₆	1 ₇			
10	8 ₂	9 ₁	5 ₅	10 ₀	4 ₆	3 ₇	7 ₃	6 ₄	2 ₈	1 ₉	
12	3 ₉	4 ₈	10 ₂	5 ₇	9 ₃	8 ₄	12 ₀	11 ₁	7 ₅	6 ₆	...
14	8 ₆	9 ₅	3 ₁₁	10 ₄	14 ₀	13 ₁	5 ₉	4 ₁₀	12 ₂	11 ₃	...
16	13 ₃	14 ₂	8 ₈	15 ₁	5 ₁₁	4 ₁₂	10 ₆	9 ₇	3 ₁₃	16 ₀	...
18	18 ₀	3 ₁₅	13 ₅	4 ₁₄	10 ₈	9 ₉	15 ₃	14 ₄	8 ₁₀	5 ₁₃	...
20	5 ₁₅	8 ₁₂	18 ₂	9 ₁₁	15 ₅	14 ₆	20 ₀	19 ₁	13 ₇	10 ₁₀	...
22	10 ₁₂	13 ₉	3 ₁₉	14 ₈	20 ₂	19 ₃	5 ₁₇	4 ₁₈	18 ₄	15 ₇	...
24	15 ₉	18 ₆	8 ₁₆	19 ₅	3 ₂₁	24 ₀	10 ₁₄	9 ₁₅	23 ₁	20 ₄	...
26	20 ₆	23 ₃	13 ₁₃	24 ₂	8 ₁₈	5 ₂₁	15 ₁₁	14 ₁₂	4 ₂₂	25 ₁	...

▲說明：1.數字大寫表示該條件留下的數	4.塗黃色是第 1 循環節，k 為 2 倍數+1
2.數字小寫表示該條件 n 減掉留下數字	5.塗橘色是第 1 循環節，k 為 2 倍數
3.塗綠色是第 1 循環節，c≥k	

(三) $\alpha=2$ ， $\beta=1、2、3\dots$ 「公式表」。

表十七、殺 2 留 β 公式表

	留下數字	留下數字
殺 2 留 1	$n - (b(x+1 2,1,c,k) + 1 \frac{F(x+1 2,1,c,k) - n}{2})$	$(2+1) \frac{n - F(x 2,1,c,k)}{2} - b(x 2,1,c,k)$
	其中 $F(x+1 2,1,c,k) \geq n > F(x 2,1,c,k)$ 。	
殺 2 留 2	$n - (b(x+1 2,2,c,k) + 2 \frac{F(x+1 2,2,c,k) - n}{2})$	$(2+2) \frac{n - F(x 2,2,c,k)}{2} - b(x 2,2,c,k)$
	其中 $F(x+1 2,2,c,k) \geq n > F(x 2,2,c,k)$ 。	
殺 2 留 3	$n - (b(x+1 2,3,c,k) + 3 \frac{F(x+1 2,3,c,k) - n}{2})$	$(2+3) \frac{n - F(x 2,3,c,k)}{2} - b(x 2,3,c,k)$
	其中 $F(x+1 2,3,c,k) \geq n > F(x 2,3,c,k)$ 。	
殺 2 留 β	$n - (b(x+1 2,\beta,c,k) + \beta \frac{F(x+1 2,\beta,c,k) - n}{2})$	$(2+\beta) \frac{n - F(x 2,\beta,c,k)}{2} - b(x 2,\beta,c,k)$
	其中 $F(x+1 2,\beta,c,k) \geq n > F(x 2,\beta,c,k)$ 。	

三、 $\alpha=3$ ， $\beta=1、2、3\dots$

(一) $n=1、4、7、10、13\dots$ 等，3 的倍數+1「實驗情形」。

表十八、殺 3 留 1($c=1$)

n ▼	k ►										
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	1 ₀										
4	4 ₀	3 ₁	2 ₂	1 ₃							
7	4 ₃	7 ₀	6 ₁	5 ₂	3 ₄	2 ₅	1 ₆				
10	8 ₂	4 ₆	10 ₀	9 ₁	7 ₃	6 ₄	5 ₅	3 ₇	2 ₈	1 ₉	
13	12 ₁	8 ₅	4 ₉	13 ₀	11 ₂	10 ₃	9 ₄	7 ₆	6 ₇	5 ₈	...
16	16 ₀	12 ₄	8 ₈	4 ₁₂	15 ₁	14 ₂	13 ₃	11 ₅	10 ₆	9 ₇	...
19	4 ₁₅	16 ₃	12 ₇	8 ₁₁	19 ₀	18 ₁	17 ₂	15 ₄	14 ₅	13 ₆	...
22	8 ₁₄	20 ₂	16 ₆	12 ₁₀	4 ₁₈	22 ₀	21 ₁	19 ₃	18 ₄	17 ₅	...
25	12 ₁₃	24 ₁	20 ₅	16 ₉	8 ₁₇	4 ₂₁	25 ₀	23 ₂	22 ₃	21 ₄	...
28	16 ₁₂	28 ₀	24 ₄	20 ₈	12 ₁₆	8 ₂₀	4 ₂₄	27 ₁	26 ₂	25 ₃	...
31	20 ₁₁	4 ₂₇	28 ₃	24 ₇	16 ₁₅	12 ₁₉	8 ₂₃	31 ₀	30 ₁	29 ₂	...
34	24 ₁₀	8 ₂₆	32 ₂	28 ₆	20 ₁₄	16 ₁₈	12 ₂₂	4 ₃₀	34 ₀	33 ₁	...
37	28 ₉	12 ₂₅	36 ₁	32 ₅	24 ₁₃	20 ₁₇	16 ₂₁	8 ₂₉	4 ₃₃	37 ₀	...
40	32 ₈	16 ₂₄	40 ₀	36 ₄	28 ₁₂	24 ₁₆	20 ₂₀	12 ₂₈	8 ₃₂	4 ₃₆	...

表十九、殺 3 留 2($c=1$)

n ▼	k ►										
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	1 ₀										
4	4 ₀	3 ₁	2 ₂	1 ₃							
7	5 ₂	4 ₃	7 ₀	6 ₁	3 ₄	2 ₅	1 ₆				
10	10 ₀	9 ₁	5 ₅	4 ₆	8 ₂	7 ₃	6 ₄	3 ₇	2 ₈	1 ₉	
13	5 ₈	4 ₉	10 ₃	9 ₄	13 ₀	12 ₁	11 ₂	8 ₅	7 ₆	6 ₇	...
16	10 ₆	9 ₇	15 ₁	14 ₂	5 ₁₁	4 ₁₂	16 ₀	13 ₃	12 ₄	11 ₅	...
19	15 ₄	14 ₅	4 ₁₅	19 ₀	10 ₉	9 ₁₀	5 ₁₄	18 ₁	17 ₂	16 ₃	...
22	20 ₂	19 ₃	9 ₁₃	5 ₁₇	15 ₇	14 ₈	10 ₁₂	4 ₁₈	22 ₀	21 ₁	...
25	25 ₀	24 ₁	14 ₁₁	10 ₁₅	20 ₅	19 ₆	15 ₁₀	9 ₁₆	5 ₂₀	4 ₂₁	...
28	5 ₂₃	4 ₂₄	19 ₉	15 ₁₃	25 ₃	24 ₄	20 ₈	14 ₁₄	10 ₁₈	9 ₁₉	...
31	10 ₂₁	9 ₂₂	24 ₇	20 ₁₁	30 ₁	29 ₂	25 ₆	19 ₁₂	15 ₁₆	14 ₁₇	...
34	15 ₁₉	14 ₂₀	29 ₅	25 ₉	4 ₃₀	34 ₀	30 ₄	24 ₁₀	20 ₁₄	19 ₁₅	...
37	20 ₁₇	19 ₁₈	34 ₃	30 ₇	9 ₂₈	5 ₃₂	35 ₂	29 ₈	25 ₁₂	24 ₁₃	...
40	25 ₁₅	24 ₁₆	39 ₁	35 ₅	14 ₂₆	10 ₃₀	40 ₀	34 ₆	30 ₁₀	29 ₁₁	...

表二十、殺 3 留 3($c=1$)

n ▼	k ►										
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	1 ₀										
4	4 ₀	3 ₁	2 ₂	1 ₃							
7	6 ₁	5 ₂	4 ₃	7 ₀	3 ₄	2 ₅	1 ₆				
10	5 ₅	4 ₆	10 ₀	6 ₄	9 ₁	8 ₂	7 ₃	3 ₇	2 ₈	1 ₉	
13	11 ₂	10 ₃	6 ₇	12 ₁	5 ₈	4 ₉	13 ₀	9 ₄	8 ₅	7 ₆	...
16	4 ₁₂	16 ₀	12 ₄	5 ₁₁	11 ₅	10 ₆	6 ₁₀	15 ₁	14 ₂	13 ₃	...
19	10 ₉	6 ₁₃	18 ₁	11 ₈	17 ₂	16 ₃	12 ₇	5 ₁₄	4 ₁₅	19 ₀	...
22	16 ₆	12 ₁₀	5 ₁₇	17 ₅	4 ₁₈	22 ₀	18 ₄	11 ₁₁	10 ₁₂	6 ₁₆	...
25	22 ₃	18 ₇	11 ₁₄	23 ₂	10 ₁₅	6 ₁₉	24 ₁	17 ₈	16 ₉	12 ₁₃	...
28	28 ₀	24 ₄	17 ₁₁	4 ₂₄	16 ₁₂	12 ₁₆	5 ₂₃	23 ₅	22 ₆	18 ₁₀	...
31	6 ₂₅	30 ₁	23 ₈	10 ₂₁	22 ₉	18 ₁₃	11 ₂₀	29 ₂	28 ₃	24 ₇	...
34	12 ₂₂	5 ₂₉	29 ₅	16 ₁₈	28 ₆	24 ₁₀	17 ₁₇	4 ₃₀	34 ₀	30 ₄	...
37	18 ₁₉	11 ₂₆	35 ₂	22 ₁₅	34 ₃	30 ₇	23 ₁₄	10 ₂₇	6 ₃₁	36 ₁	...

▲說明：1.數字大寫表示該條件留下的數	4.塗黃色是第 1 循環節，k 為 3 倍數+2
2.數字小寫表示該條件 n 減掉留下數字	5.塗橘色是第 1 循環節，k 為 3 倍數
3.塗綠色是第 1 循環節， $c \geq k$	6.塗紅色是第 1 循環節，k 為 3 倍數+1

(二) $n=2、5、8、11、14、\dots$ 等，3 的倍數+2「實驗情形」。

表二十一、殺 3 留 1($c=2$)

n ▼	k ►										
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
2	2_0	1_1									
5	4_1	5_0	3_2	2_3	1_4						
8	8_0	4_4	7_1	6_2	5_3	3_5	2_6	1_7			
11	4_7	8_3	11_0	10_1	9_2	7_4	6_5	5_6	3_8	2_9	1_{10}
14	8_6	12_2	4_{10}	14_0	13_1	11_3	10_4	9_5	7_7	6_8	...
17	12_5	16_1	8_9	4_{13}	17_0	15_2	14_3	13_4	11_6	10_7	...
20	16_4	20_0	12_8	8_{12}	4_{16}	19_1	18_2	17_3	15_5	14_6	...
23	20_3	4_{19}	16_7	12_{11}	8_{15}	23_0	22_1	21_2	19_4	18_5	...
26	24_2	8_{18}	20_6	16_{10}	12_{14}	4_{22}	26_0	25_1	23_3	22_4	...
29	28_1	12_{17}	24_5	20_9	16_{13}	8_{21}	4_{25}	29_0	27_2	26_3	...
32	32_0	16_{16}	28_4	24_8	20_{12}	12_{20}	8_{24}	4_{28}	31_1	30_2	...
35	4_{31}	20_{15}	32_3	28_7	24_{11}	16_{19}	12_{23}	8_{27}	35_0	34_1	...
38	8_{30}	24_{14}	36_2	32_6	28_{10}	20_{18}	16_{22}	12_{26}	4_{34}	38_0	...
41	12_{29}	28_{13}	40_1	36_5	32_9	24_{17}	20_{21}	16_{25}	8_{33}	4_{37}	...

表二十二、殺 3 留 2($c=2$)

n ▼	k ►										
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
2	2_0	1_1									
5	5_0	4_1	3_2	2_3	1_4						
8	5_3	4_4	8_0	7_1	6_2	3_5	2_6	1_7			
11	10_1	9_2	5_6	4_7	11_0	8_3	7_4	6_5	3_8	2_9	1_{10}
14	4_{10}	14_0	10_4	9_5	5_9	13_1	12_2	11_3	8_6	7_7	...
17	9_8	5_{12}	15_2	14_3	10_7	4_{13}	17_0	16_1	13_4	12_5	...
20	14_6	10_{10}	20_0	19_1	15_5	9_{11}	5_{15}	4_{16}	18_2	17_3	...
23	19_4	15_8	5_{18}	4_{19}	20_3	14_9	10_{13}	9_{14}	23_0	22_1	...
26	24_2	20_6	10_{16}	9_{17}	25_1	19_7	15_{11}	14_{12}	5_{21}	4_{22}	...
29	29_0	25_4	15_{14}	14_{15}	4_{25}	24_5	20_9	19_{10}	10_{19}	9_{20}	...
32	5_{27}	30_2	20_{12}	19_{13}	9_{23}	29_3	25_7	24_8	15_{17}	14_{18}	...
35	10_{25}	35_0	25_{10}	24_{11}	14_{21}	34_1	30_5	29_6	20_{15}	19_{16}	...
38	15_{23}	5_{33}	30_8	29_9	19_{19}	4_{34}	35_3	34_4	25_{13}	24_{14}	...
41	20_{21}	10_{31}	35_6	34_7	24_{17}	9_{32}	40_1	39_2	30_{11}	29_{12}	...

表二十三、殺 3 留 3($c=2$)

n ▼	k ▲										
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
2	2 ₀	1 ₁									
5	4 ₁	5 ₀	3 ₂	2 ₃	1 ₄						
8	5 ₃	6 ₂	4 ₄	8 ₀	7 ₁	3 ₅	2 ₆	1 ₇			
11	11 ₀	4 ₇	10 ₁	6 ₅	5 ₆	9 ₂	8 ₃	7 ₄	3 ₈	2 ₉	1 ₁₀
14	6 ₈	10 ₄	5 ₉	12 ₂	11 ₃	4 ₁₀	14 ₀	13 ₁	9 ₅	8 ₆	...
17	12 ₅	16 ₁	11 ₆	4 ₁₃	17 ₀	10 ₇	6 ₁₁	5 ₁₂	15 ₂	14 ₃	...
20	18 ₂	5 ₁₅	17 ₃	10 ₁₀	6 ₁₄	16 ₄	12 ₈	11 ₉	4 ₁₆	20 ₀	...
23	4 ₁₉	11 ₁₂	23 ₀	16 ₇	12 ₁₁	22 ₁	18 ₅	17 ₆	10 ₁₃	6 ₁₇	...
26	10 ₁₆	17 ₉	6 ₂₀	22 ₄	18 ₈	5 ₂₁	24 ₂	23 ₃	16 ₁₀	12 ₁₄	...
29	16 ₁₃	23 ₆	12 ₁₇	28 ₁	24 ₅	11 ₁₈	4 ₂₅	29 ₀	22 ₇	18 ₁₁	...
32	22 ₁₀	29 ₃	18 ₁₄	5 ₂₇	30 ₂	17 ₁₅	10 ₂₂	6 ₂₆	28 ₄	24 ₈	...
35	28 ₇	35 ₀	24 ₁₁	11 ₂₄	4 ₃₁	23 ₁₂	16 ₁₉	12 ₂₃	34 ₁	30 ₅	...
38	34 ₄	6 ₃₂	30 ₈	17 ₂₁	10 ₂₈	29 ₉	22 ₁₆	18 ₂₀	5 ₃₃	36 ₂	...

▲說明：1.數字大寫表示該條件留下的數	4.塗黃色是第 1 循環節，k 為 3 倍數
2.數字小寫表示該條件 n 減掉留下數字	5.塗橘色是第 1 循環節，k 為 3 倍數+1
3.塗綠色是第 1 循環節， $c \geq k$	6.塗紅色是第 1 循環節，k 為 3 倍數+2

(三) $n=3、6、9、12、15、\dots$ 等，3 的倍數「實驗情形」。

表二十四、殺 3 留 1($c=3$)

n ▼	k ►										
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
3	3_0	2_1	1_2								
6	4_2	6_0	5_1	3_3	2_4	1_5					
9	8_1	4_5	9_0	7_2	6_3	5_4	3_6	2_7	1_8		
12	12_0	8_4	4_8	11_1	10_2	9_3	7_5	6_6	5_7	3_9	...
15	4_{11}	12_3	8_7	15_0	14_1	13_2	11_4	10_5	9_6	7_8	...
18	8_{10}	16_2	12_6	4_{14}	18_0	17_1	15_3	14_4	13_5	11_7	...
21	12_9	20_1	16_5	8_{13}	4_{17}	21_0	19_2	18_3	17_4	15_6	...
24	16_8	24_0	20_4	12_{12}	8_{16}	4_{20}	23_1	22_2	21_3	19_5	...
27	20_7	4_{23}	24_3	16_{11}	12_{15}	8_{19}	27_0	26_1	25_2	23_4	...
30	24_6	8_{22}	28_2	20_{10}	16_{14}	12_{18}	4_{26}	30_0	29_1	27_3	...
33	28_5	12_{21}	32_1	24_9	20_{13}	16_{17}	8_{25}	4_{29}	33_0	31_2	...
36	32_4	16_{20}	36_0	28_8	24_{12}	20_{16}	12_{24}	8_{28}	4_{32}	35_1	...
39	36_3	20_{19}	4_{35}	32_7	28_{11}	24_{15}	16_{23}	12_{27}	8_{31}	39_0	...
42	40_2	24_{18}	8_{34}	36_6	32_{10}	28_{14}	20_{22}	16_{26}	12_{30}	4_{38}	...

表二十五、殺 3 留 2($c=3$)

n ▼	k ►										
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
3	3_0	2_1	1_2								
6	5_1	4_2	6_0	3_3	2_4	1_5					
9	4_5	9_0	5_4	8_1	7_2	6_3	3_6	2_7	1_8		
12	9_3	5_7	10_2	4_8	12_0	11_1	8_4	7_5	6_6	3_9	...
15	14_1	10_5	15_0	9_6	5_{10}	4_{11}	13_2	12_3	11_4	8_7	...
18	4_{14}	15_3	5_{13}	14_4	10_8	9_9	18_0	17_1	16_2	13_5	...
21	9_{12}	20_1	10_{11}	19_2	15_6	14_7	5_{16}	4_{17}	21_0	18_3	...
24	14_{10}	4_{20}	15_9	24_0	20_4	19_5	10_{14}	9_{15}	5_{19}	23_1	...
27	19_8	9_{18}	20_7	5_{22}	25_2	24_3	15_{12}	14_{13}	10_{17}	4_{23}	...
30	24_6	14_{16}	25_5	10_{20}	30_0	29_1	20_{10}	19_{11}	15_{15}	9_{21}	...
33	29_4	19_{14}	30_3	15_{18}	5_{28}	4_{29}	25_8	24_9	20_{13}	14_{19}	...
36	34_2	24_{12}	35_1	20_{16}	10_{26}	9_{27}	30_6	29_7	25_{11}	19_{17}	...
39	39_0	29_{10}	4_{35}	25_{14}	15_{24}	14_{25}	35_4	34_5	30_9	24_{15}	...

表二十六、殺 3 留 3(c=3)

n ▼	k ►										
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
3	3 ₀	2 ₁	1 ₂								
6	6 ₀	5 ₁	4 ₂	3 ₃	2 ₄	1 ₅					
9	6 ₃	5 ₄	4 ₅	9 ₀	8 ₁	7 ₂	3 ₆	2 ₇	1 ₈		
12	12 ₀	11 ₁	10 ₂	6 ₆	5 ₇	4 ₈	9 ₃	8 ₄	7 ₅	3 ₉	...
15	6 ₉	5 ₁₀	4 ₁₁	12 ₃	11 ₄	10 ₅	15 ₀	14 ₁	13 ₂	9 ₆	...
18	12 ₆	11 ₇	10 ₈	18 ₀	17 ₁	16 ₂	6 ₁₂	5 ₁₃	4 ₁₄	15 ₃	...
21	18 ₃	17 ₄	16 ₅	6 ₁₅	5 ₁₆	4 ₁₇	12 ₉	11 ₁₀	10 ₁₁	21 ₀	...
24	24 ₀	23 ₁	22 ₂	12 ₁₂	11 ₁₃	10 ₁₄	18 ₆	17 ₇	16 ₈	6 ₁₈	...
27	6 ₂₁	5 ₂₂	4 ₂₃	18 ₉	17 ₁₀	16 ₁₁	24 ₃	23 ₄	22 ₅	12 ₁₅	...
30	12 ₁₈	11 ₁₉	10 ₂₀	24 ₆	23 ₇	22 ₈	30 ₀	29 ₁	28 ₂	18 ₁₂	...
33	18 ₁₅	17 ₁₆	16 ₁₇	30 ₃	29 ₄	28 ₅	6 ₂₇	5 ₂₈	4 ₂₉	24 ₉	...
36	24 ₁₂	23 ₁₃	22 ₁₄	36 ₀	35 ₁	34 ₂	12 ₂₄	11 ₂₅	10 ₂₆	30 ₆	...
39	30 ₉	29 ₁₀	28 ₁₁	6 ₃₃	5 ₃₄	4 ₃₅	18 ₂₁	17 ₂₂	16 ₂₃	36 ₃	...

▲ 其中：1. 數字大寫表示該條件留下的數	4. 塗黃色是第 1 循環節，k 為 3 倍數+1
2. 數字小寫表示該條件 n 減掉留下數字	5. 塗橘色是第 1 循環節，k 為 3 倍數+2
3. 塗綠色是第 1 循環節，c ≥ k	6. 塗紅色是第 1 循環節，k 為 3 倍數

(四) $\alpha=3$ ， $\beta=1、2、3...$

表二十七、殺 3 留 β 公式表

	留下數字	留下數字
殺 3 留 1	$n - (b(x+1 3,1,c,k) + 1 \frac{F(x+1 3,1,c,k) - n}{3})$	$(3+1) \frac{n - F(x 3,1,c,k)}{3} - b(x 3,1,c,k)$
	其中 $F(x+1 3,1,c,k) \geq n > F(x 3,1,c,k)$ 。	
殺 3 留 2	$n - (b(x+1 3,2,c,k) + 2 \frac{F(x+1 3,2,c,k) - n}{3})$	$(3+2) \frac{n - F(x 3,2,c,k)}{3} - b(x 3,2,c,k)$
	其中 $F(x+1 3,2,c,k) \geq n > F(x 3,2,c,k)$ 。	
殺 3 留 3	$n - (b(x+1 3,3,c,k) + 3 \frac{F(x+1 3,3,c,k) - n}{3})$	$(3+3) \frac{n - F(x 3,3,c,k)}{3} - b(x 3,3,c,k)$
	其中 $F(x+1 3,3,c,k) \geq n > F(x 3,3,c,k)$ 。	
殺 3 留 β	$n - (b(x+1 3,\beta,c,k) + \beta \frac{F(x+1 3,\beta,c,k) - n}{3})$	$(3+\beta) \frac{n - F(x 3,\beta,c,k)}{3} - b(x 3,\beta,c,k)$
	其中 $F(x+1 3,\beta,c,k) \geq n > F(x 3,\beta,c,k)$ 。	

四、 $\alpha=1、2、3\dots$ ， $\beta=1、2、3\dots$

表二十八、殺 α 留 β 公式表

	留下數字	留下數字
殺 α 留1	$n - (b(x+1 \alpha,1,c,k) + 1 \frac{F(x+1 \alpha,1,c,k) - n}{\alpha})$	$(\alpha+1) \frac{n - F(x \alpha,1,c,k)}{\alpha} - b(x \alpha,1,c,k)$
	其中 $F(x+1 \alpha,1,c,k) \geq n > F(x \alpha,1,c,k)$ 。	
殺 α 留2	$n - (b(x+1 \alpha,2,c,k) + 2 \frac{F(x+1 \alpha,2,c,k) - n}{\alpha})$	$(\alpha+2) \frac{n - F(x \alpha,2,c,k)}{\alpha} - b(x \alpha,2,c,k)$
	其中 $F(x+1 \alpha,2,c,k) \geq n > F(x \alpha,2,c,k)$ 。	
殺 α 留3	$n - (b(x+1 \alpha,3,c,k) + 3 \frac{F(x+1 \alpha,3,c,k) - n}{\alpha})$	$(\alpha+3) \frac{n - F(x \alpha,3,c,k)}{\alpha} - b(x \alpha,3,c,k)$
	其中 $F(x+1 \alpha,3,c,k) \geq n > F(x \alpha,3,c,k)$ 。	
殺 α 留 β	$n - (b(x+1 \alpha,\beta,c,k) + \beta \frac{F(x+1 \alpha,\beta,c,k) - n}{\alpha})$	$(\alpha+\beta) \frac{n - F(x \alpha,\beta,c,k)}{\alpha} - b(x \alpha,\beta,c,k)$
	其中 $F(x+1 \alpha,\beta,c,k) \geq n > F(x \alpha,\beta,c,k)$ 。	

柒、研究討論

一、 n 不為循環節尾數

若 n 不為循環節的尾數

1.1.當殺 1 留 1: n 與 $n+1$ 兩數之間，留下數字之間差 $1+1$ ， n 減掉留下數字之間差 -1 。

1.2.當殺 1 留 2: n 與 $n+1$ 兩數之間，留下數字之間差 $1+2$ ， n 減掉留下數字之間差 -2 。

1.3.當殺 1 留 3: n 與 $n+1$ 兩數之間，留下數字之間差 $1+3$ ， n 減掉留下數字之間差 -3 。

⇒1.4.當殺 1 留 β : n 與 $n+1$ 兩數之間，留下數字之間差 $1+\beta$ ， n 減掉留下數字之間差 $-\beta$ 。

1.5.當殺 2 留 1: n 與 $n+2$ 兩數之間，留下數字之間差 $2+1$ ， n 減掉留下數字之間差 -1 。

1.6.當殺 2 留 2: n 與 $n+2$ 兩數之間，留下數字之間差 $2+2$ ， n 減掉留下數字之間差 -2 。

1.7.當殺 2 留 3: n 與 $n+2$ 兩數之間，留下數字之間差 $2+3$ ， n 減掉留下數字之間差 -3 。

⇒1.8.當殺 2 留 β : n 與 $n+2$ 兩數之間，留下數字之間差 $2+\beta$ ， n 減掉留下數字之間差 $-\beta$ 。

1.9.當殺 3 留 1: n 與 $n+3$ 兩數之間，留下數字之間差 $3+1$ ， n 減掉留下數字之間差 -1 。

1.10.當殺 3 留 2: n 與 $n+3$ 兩數之間，留下數字之間差 $3+2$ ， n 減掉留下數字之間差 -2 。

1.11.當殺 3 留 3: n 與 $n+3$ 兩數之間，留下數字之間差 $3+3$ ， n 減掉留下數字之間差 -3 。

⇒1.12.當殺 3 留 β : n 與 $n+3$ 兩數之間，留下數字之間差 $3+\beta$ ， n 減掉留下數字之間差 $-\beta$ 。

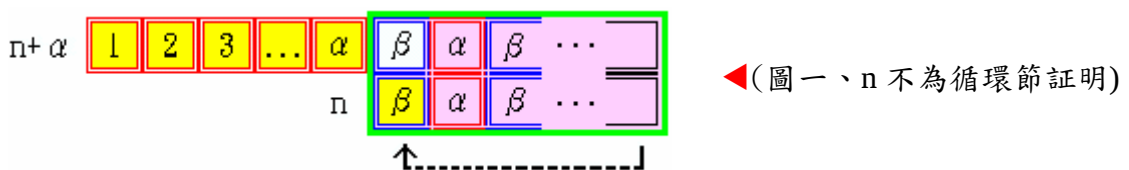
⇒1.13.當殺 α 留 1: n 與 $n+\alpha$ 兩數之間，留下數字之間差 $\alpha+1$ ， n 減掉留下數字之間差 -1 。

⇒1.14.當殺 α 留 2: n 與 $n+\alpha$ 兩數之間，留下數字之間差 $\alpha+2$ ， n 減掉留下數字之間差 -2 。

⇒1.15.當殺 α 留 3: n 與 $n+\alpha$ 兩數之間，留下數字之間差 $\alpha+3$ ， n 減掉留下數字之間差 -3 。

⇒1.16.當殺 α 留 β : n 與 $n+\alpha$ 兩數之間，留下數字之間差 $\alpha+\beta$ ， n 減掉留下數字之間差 $-\beta$ 。

證明：



提出 n 與 $n+\alpha$ 兩數來做比較。當 $n+\alpha$ 數先殺掉 α 後，兩數就都剩下 n 個數，如圖一綠色框部份；在將 n 數從後面搬 β 個數往前補，並規定 n 數的遊戲規則改為留下 β (個數) 殺掉 α (個數) 循環，如此一來 $n+\alpha$ 數與 n 數的殺 α 和留 β 的順序相同。

若 n 不為循環節的結束，留下數字則落在圖一粉紅色區塊。如此一來 n 數與 $n+\alpha$ 數兩數本身就差 α ，再加上 n 數從後面搬 β 個數往前補又多差 β ，因此 n 與 $n+\alpha$ 兩數留下數字差 $\alpha+\beta$ 。(如圖一黃色區塊) $n+\alpha$ 減掉留下數字與 n 減掉留下數字之間相差 $\alpha-(\alpha+\beta)=-\beta$ 。

實例:

表二十九、n 不為循環節尾數實例(ex:殺 1 留 1，c=1)

n	k ▶														
▼	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1	1 ₀														
2	2 ₀	1 ₁													
3	2 ₁	3 ₀	1 ₂												
4	4 ₀	2 ₂	3 ₁	1 ₃											
5	2 ₃	4 ₁	5 ₀	3 ₂	1 ₄										
6	4 ₂	6 ₀	2 ₄	5 ₁	3 ₃	1 ₅									
7	6 ₁	2 ₅	4 ₃	7 ₀	5 ₂	3 ₄	1 ₆								
8	8 ₀	4 ₄	6 ₂	2 ₆	7 ₁	5 ₃	3 ₅	1 ₇							
9	2 ₇	6 ₃	8 ₁	4 ₅	9 ₀	7 ₂	5 ₄	3 ₆	1 ₈						
10	4 ₆	8 ₂	10 ₀	6 ₄	2 ₈	9 ₁	7 ₃	5 ₅	3 ₇	1 ₉					
11	6 ₅	10 ₁	2 ₉	8 ₃	4 ₇	11 ₀	9 ₂	7 ₄	5 ₆	3 ₈	1 ₁₀				
12	8 ₄	12 ₀	4 ₈	10 ₂	6 ₆	2 ₁₀	11 ₁	9 ₃	7 ₅	5 ₇	3 ₉	1 ₁₁			
13	10 ₃	2 ₁₁	6 ₇	12 ₁	8 ₅	4 ₉	13 ₀	11 ₂	9 ₄	7 ₆	5 ₈	3 ₁₀	1 ₁₂		
14	12 ₂	4 ₁₀	8 ₆	14 ₀	10 ₄	6 ₈	2 ₁₂	13 ₁	11 ₃	9 ₅	7 ₇	5 ₉	3 ₁₁	1 ₁₃	
15	14 ₁	6 ₉	10 ₅	2 ₁₃	12 ₃	8 ₇	4 ₁₁	15 ₀	13 ₂	11 ₄	9 ₆	7 ₈	5 ₁₀	3 ₁₂	1 ₁₄

表三十、n 不為循環節尾數實例(ex:殺 2 留 1，c=1)

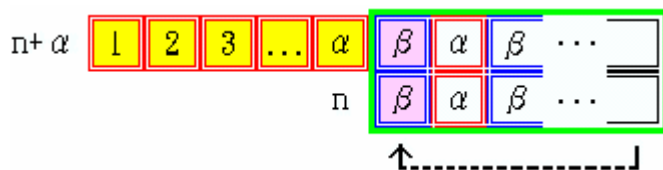
n	k ▶										
▼	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	1 ₀										
3	3 ₀	2 ₁	1 ₂								
5	3 ₂	5 ₀	4 ₁	2 ₃	1 ₄						
7	6 ₁	3 ₄	7 ₀	5 ₂	4 ₃	2 ₅	1 ₆				
9	9 ₀	6 ₃	3 ₆	8 ₁	7 ₂	5 ₄	4 ₅	2 ₇	1 ₈		
11	3 ₈	9 ₂	6 ₅	11 ₀	10 ₁	8 ₃	7 ₄	5 ₆	4 ₇	2 ₉	1 ₁₀
13	6 ₇	12 ₁	9 ₄	3 ₁₀	13 ₀	11 ₂	10 ₃	8 ₅	7 ₆	5 ₈	...
15	9 ₆	15 ₀	12 ₃	6 ₉	3 ₁₂	14 ₁	13 ₂	11 ₄	10 ₅	8 ₇	...
17	12 ₅	3 ₁₄	15 ₂	9 ₈	6 ₁₁	17 ₀	16 ₁	14 ₃	13 ₄	11 ₆	...
19	15 ₄	6 ₁₃	18 ₁	12 ₇	9 ₁₀	3 ₁₆	19 ₀	17 ₂	16 ₃	14 ₅	...
21	18 ₃	9 ₁₂	21 ₀	15 ₆	12 ₉	6 ₁₅	3 ₁₈	20 ₁	19 ₂	17 ₄	...
23	21 ₂	12 ₁₁	3 ₂₀	18 ₅	15 ₈	9 ₁₄	6 ₁₇	23 ₀	22 ₁	20 ₃	...
25	24 ₁	15 ₁₀	6 ₁₉	21 ₄	18 ₇	12 ₁₃	9 ₁₆	3 ₂₂	25 ₀	23 ₂	...
27	27 ₀	18 ₉	9 ₁₈	24 ₃	21 ₆	15 ₁₂	12 ₁₅	6 ₂₁	3 ₂₄	26 ₁	...

二、n 為循環節尾數

若 n 為循環節的尾數

- 2.1. 當殺 1 留 1，若 n 個數中倒第 k 個留下數字為 n，該數 n 為該循環節的結束，同時也為 $F(1,1,1,k)$ 值。∴ $F(x|1,1,1,k)$ 為第 x 循環節的結束。
- 2.2. 當殺 1 留 2，若 n 個數中倒第 k 個留下數字為 n 或 n-1，該數 n 為該循環節的結束，同時也為 $F(1,2,1,k)$ 值。∴ $F(x|1,2,1,k)$ 為第 x 循環節的結束。
- 2.3. 當殺 1 留 3，若 n 個數中倒第 k 個留下數字為 n、n-1 或 n-2，該數 n 為該循環節的結束，同時也為 $F(1,3,1,k)$ 值。∴ $F(x|1,3,1,k)$ 為第 x 循環節的結束。
- ⇒2.4. 當殺 1 留 β ，若 n 個數中倒第 k 個留下數字為 n、n-1、n-2... 或 $n-(\beta-1)$ ，該數 n 為該循環節的結束，同時也為 $F(1,\beta,1,k)$ 值。∴ $F(x|1,\beta,1,k)$ 為第 x 循環節結束。
- 2.5. 當殺 2 留 1，若 n 個數中倒第 k 個留下數字為 n，該數 n 為該循環節的結束，同時也為 $F(2,1,1,k)$ 值。∴ $F(x|2,1,1,k)$ 為第 x 循環節的結束。
- 2.6. 當殺 2 留 2，若 n 個數中倒第 k 個留下數字為 n 或 n-1，該數 n 為該循環節的結束，同時也為 $F(2,2,1,k)$ 值。∴ $F(x|2,2,1,k)$ 為第 x 循環節的結束。
- 2.7. 當殺 2 留 3，若 n 個數中倒第 k 個留下數字為 n、n-1 或 n-2，該數 n 為該循環節的結束，同時也為 $F(2,3,1,k)$ 值。∴ $F(x|2,3,1,k)$ 為第 x 循環節的結束。
- ⇒2.8. 當殺 2 留 β ，若 n 個數中倒第 k 個留下數字為 n、n-1、n-2... 或 $n-(\beta-1)$ ，該數 n 為該循環節的結束，同時也為 $F(2,\beta,1,k)$ 值。∴ $F(x|2,\beta,1,k)$ 為第 x 循環節結束。
- 2.9. 當殺 3 留 1，若 n 個數中倒第 k 個留下數字為 n，該數 n 為該循環節的結束，同時也為 $F(3,1,1,k)$ 值。∴ $F(x|3,1,1,k)$ 為第 x 循環節的結束。
- 2.10. 當殺 3 留 2，若 n 個數中倒第 k 個留下數字為 n 或 n-1，該數 n 為該循環節的結束，同時也為 $F(3,2,1,k)$ 值。∴ $F(x|3,2,1,k)$ 為第 x 循環節的結束。
- 2.11. 當殺 3 留 3，若 n 個數中倒第 k 個留下數字為 n、n-1 或 n-2，該數 n 為該循環節的結束，同時也為 $F(3,3,1,k)$ 值。∴ $F(x|3,3,1,k)$ 為第 x 循環節的結束。
- ⇒2.12. 當殺 3 留 β ，若 n 個數中倒第 k 個留下數字為 n、n-1、n-2... 或 $n-(\beta-1)$ ，該數 n 為該循環節的結束，同時也為 $F(3,\beta,1,k)$ 值。∴ $F(x|3,\beta,1,k)$ 為第 x 循環節結束。
- ⇒2.13. 當殺 α 留 1，若 n 個數中倒第 k 個留下數字為 n，該數 n 為該循環節的結束，同時也為 $F(\alpha,1,c,k)$ 值。∴ $F(x|\alpha,1,c,k)$ 為第 x 循環節的結束。
- ⇒2.14. 當殺 α 留 2，若 n 個數中倒第 k 個留下數字為 n 或 n-1，該數 n 為該循環節的結束，同時也為 $F(\alpha,2,c,k)$ 值。∴ $F(x|\alpha,2,c,k)$ 為第 x 循環節的結束。
- ⇒2.15. 當殺 α 留 3，若 n 個數中倒第 k 個留下數字為 n、n-1 或 n-2，該數 n 為該循環節的結束，同時也為 $F(\alpha,3,c,k)$ 值。∴ $F(x|\alpha,3,c,k)$ 為第 x 循環節的結束。
- ⇒2.16. 當殺 α 留 β ，若 n 個數中倒第 k 個留下數字為 n、n-1、n-2... 或 $n-(\beta-1)$ ，該數 n 為該循環節的結束，同時也為 $F(\alpha,\beta,c,k)$ 值。∴ $F(x|\alpha,\beta,c,k)$ 為第 x 循環節結束。

證明:



◀ (圖二、n 為循環節證明)

作法和性質 1 的證明相同，但是若 n 為循環節的結束，留下數字則會落在圖二粉紅色區塊。如此一來 n 數中留下數字是將 n 數從後面搬 β 個數往前補的其中之一，也就是數字 n、n-1、n-2... 或 $n-(\beta-1)$ 。而且 n 減掉留下數字 $< \beta$ 。

實例：

表三十一、n 為循環節尾數實例(ex:殺 1 留 1，c=1)

n	k ▶															
▼	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
1	1 ₀															
2	2 ₀	1 ₁														
3	2 ₁	3 ₀	1 ₂													
4	4 ₀	2 ₂	3 ₁	1 ₃												
5	2 ₃	4 ₁	5 ₀	3 ₂	1 ₄											
6	4 ₂	6 ₀	2 ₄	5 ₁	3 ₃	1 ₅										
7	6 ₁	2 ₅	4 ₃	7 ₀	5 ₂	3 ₄	1 ₆									
8	8 ₀	4 ₄	6 ₂	2 ₆	7 ₁	5 ₃	3 ₅	1 ₇								
9	2 ₇	6 ₃	8 ₁	4 ₅	9 ₀	7 ₂	5 ₄	3 ₆	1 ₈							
10	4 ₆	8 ₂	10 ₀	6 ₄	2 ₈	9 ₁	7 ₃	5 ₅	3 ₇	1 ₉						
11	6 ₅	10 ₁	2 ₉	8 ₃	4 ₇	11 ₀	9 ₂	7 ₄	5 ₆	3 ₈	1 ₁₀					
12	8 ₄	12 ₀	4 ₈	10 ₂	6 ₆	2 ₁₀	11 ₁	9 ₃	7 ₅	5 ₇	3 ₉	1 ₁₁				
13	10 ₃	2 ₁₁	6 ₇	12 ₁	8 ₅	4 ₉	13 ₀	11 ₂	9 ₄	7 ₆	5 ₈	3 ₁₀	1 ₁₂			
14	12 ₂	4 ₁₀	8 ₆	14 ₀	10 ₄	6 ₈	2 ₁₂	13 ₁	11 ₃	9 ₅	7 ₇	5 ₉	3 ₁₁	1 ₁₃		
15	14 ₁	6 ₉	10 ₅	2 ₁₃	12 ₃	8 ₇	4 ₁₁	15 ₀	13 ₂	11 ₄	9 ₆	7 ₈	5 ₁₀	3 ₁₂	1 ₁₄	
16	16 ₀	8 ₈	12 ₄	4 ₁₂	14 ₂	10 ₆	8 ₁₀	2 ₁₄	15 ₁	13 ₃	11 ₅	9 ₇	7 ₉	5 ₁₁	3 ₁₃	1 ₁₅

表三十二、n 為循環節尾數實例(ex:殺 2 留 1，c=1)

n	k ▶										
▼	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	1 ₀										
3	3 ₀	2 ₁	1 ₂								
5	3 ₂	5 ₀	4 ₁	2 ₃	1 ₄						
7	6 ₁	3 ₄	7 ₀	5 ₂	4 ₃	2 ₅	1 ₆				
9	9 ₀	6 ₃	3 ₆	8 ₁	7 ₂	5 ₄	4 ₅	2 ₇	1 ₈		
11	3 ₈	9 ₂	6 ₅	11 ₀	10 ₁	8 ₃	7 ₄	5 ₆	4 ₇	2 ₉	1 ₁₀
13	6 ₇	12 ₁	9 ₄	3 ₁₀	13 ₀	11 ₂	10 ₃	8 ₅	7 ₆	5 ₈	...
15	9 ₆	15 ₀	12 ₃	6 ₉	3 ₁₂	14 ₁	13 ₂	11 ₄	10 ₅	8 ₇	...
17	12 ₅	3 ₁₄	15 ₂	9 ₈	6 ₁₁	17 ₀	16 ₁	14 ₃	13 ₄	11 ₆	...
19	15 ₄	6 ₁₃	18 ₁	12 ₇	9 ₁₀	3 ₁₆	19 ₀	17 ₂	16 ₃	14 ₅	...
21	18 ₃	9 ₁₂	21 ₀	15 ₆	12 ₉	6 ₁₅	3 ₁₈	20 ₁	19 ₂	17 ₄	...
23	21 ₂	12 ₁₁	3 ₂₀	18 ₅	15 ₈	9 ₁₄	6 ₁₇	23 ₀	22 ₁	20 ₃	...
25	24 ₁	15 ₁₀	6 ₁₉	21 ₄	18 ₇	12 ₁₃	9 ₁₆	3 ₂₂	25 ₀	23 ₂	...
27	27 ₀	18 ₉	9 ₁₈	24 ₃	21 ₆	15 ₁₂	12 ₁₅	6 ₂₁	3 ₂₄	26 ₁	...

三、循環節開頭留下數字之循環

⇒3.1.(1)當殺 1 留 β ， $c=1$ ， $k=1$ 時，第 1 循環節的開頭留下數字=1；

當 $k>1$ 時，則以數字 1 循環。

⇒3.2.(1)當殺 2 留 β ， $c=1$ ， $k=1$ 時，第 1 循環節的開頭留下數字=1；

當 $k>1$ 時，則以數字 2、1 循環。

(2)當殺 2 留 β ， $c=2$ ， $k=1、2$ 時，第 1 循環節的開頭留下數字=2、1；

當 $k>2$ 時，則以數字 2、1 循環。

⇒3.3.(1)當殺 3 留 β ， $c=1$ ， $k=1$ 時，第 1 循環節的開頭留下數字=1；

當 $k>1$ 時，則以數字 3、2、1 循環。

(2)當殺 3 留 β ， $c=2$ ， $k=1、2$ 時，第 1 循環節的開頭留下數字=2、1；

當 $k>2$ 時，則以數字 3、2、1 循環。

(3)當殺 3 留 β ， $c=3$ ， $k=1、2、3$ 時，第 1 循環節的開頭留下數字=3、2、1；

當 $k>3$ 時，則以數字 3、2、1 循環。

⇒3.4.當殺 α 留 β ， $k=1、2、3\dots c$ 時，第 1 循環節開頭留下數字= $c、c-1、c-2\dots 1$ ；

當 $k>c$ ，以數字 $\alpha、\alpha-1、\alpha-2\dots 1$ 循環。

証明：

1. 當 $n\leq c$ 時，第 1 循環節開頭是在 $n=c$ 的時候，由於 $c\leq \alpha \therefore n=c\leq \alpha$ ，因此當殺到 $c-1$ 號時，遊戲就終止了。

∴(1). 當 $k=1$ 時，留下數為 c 。

(2). 當 $k=2$ 時，留下數為 $c-1$ 。

(3). 當 $k=3$ 時，留下數為 $c-2$ 。

(4). 當 $k=c$ 時，留下數為 1。

2. 當 $n>c$ 時，由於數字 n 與 $n+\alpha$ 之間差 α ，

∴(1). 當 $k=n-(\alpha-1)$ 時，留下數字會是該循環節的開頭，倒數第 $n-(\alpha-1)$ 個留下的數也就是代表是第 α 個被淘汰的數，也就是數字 α 。

(2). 當 $k=n-(\alpha-2)$ 時，留下數字會是該循環節的開頭，倒數第 $n-(\alpha-2)$ 個留下的數也就是代表是第 $\alpha-1$ 淘汰的數，也就是數字 $\alpha-1$ 。

(3). 當 $k=n$ 時，留下數字會是該循環節的開頭，倒數第 n 個留下的數也就是代表是第 1 個被淘汰的數，也就是數字 1。

實例：

表三十三、循環節開頭留下數字之循環實例(ex:殺 2 留 3，c=1)

n	k ►										
▼	1(c)	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	1 ₀										
3	3 ₀	2 ₁	1 ₂								
5	5 ₀	4 ₁	3 ₂	2 ₃	1 ₄						
7	5 ₂	4 ₃	3 ₄	7 ₀	6 ₁	2 ₅	1 ₆				
9	3 ₆	9 ₀	8 ₁	5 ₄	4 ₅	7 ₂	6 ₃	2 ₇	1 ₈		
11	8 ₃	5 ₆	4 ₇	10 ₁	9 ₂	3 ₈	11 ₀	7 ₄	6 ₅	2 ₉	1 ₁₀
13	13 ₀	10 ₃	9 ₄	4 ₉	3 ₁₀	8 ₅	5 ₈	12 ₁	11 ₂	7 ₆	...
15	5 ₁₀	15 ₀	14 ₁	9 ₆	8 ₇	13 ₂	10 ₅	4 ₁₁	3 ₁₂	12 ₃	...
17	10 ₇	5 ₁₂	4 ₁₃	14 ₃	13 ₄	3 ₁₄	15 ₂	9 ₈	8 ₉	17 ₀	...
19	15 ₄	10 ₉	9 ₁₀	19 ₀	18 ₁	8 ₁₁	3 ₁₆	14 ₅	13 ₆	5 ₁₄	...
21	20 ₁	15 ₆	14 ₇	5 ₁₆	4 ₁₇	13 ₈	8 ₁₃	19 ₂	18 ₃	10 ₁₁	...
23	4 ₁₉	20 ₃	19 ₄	10 ₁₃	9 ₁₄	18 ₅	13 ₁₀	3 ₂₀	23 ₀	15 ₈	...
25	9 ₁₆	25 ₀	24 ₁	15 ₁₀	14 ₁₁	23 ₂	18 ₇	8 ₁₇	5 ₂₀	20 ₅	...
27	14 ₁₃	5 ₂₂	4 ₂₃	20 ₇	19 ₈	3 ₂₄	23 ₄	13 ₁₄	10 ₁₇	25 ₂	...

表三十四、循環節開頭留下數字之循環實例(ex:殺 3 留 1，c=2)

n	k ►										
▼	1	2(c)	3	4	5	6	7	8	9	10	11
2	2 ₀	1 ₁									
5	4 ₁	5 ₀	3 ₂	2 ₃	1 ₄						
8	8 ₀	4 ₄	7 ₁	6 ₂	5 ₃	3 ₅	2 ₆	1 ₇			
11	4 ₇	8 ₃	11 ₀	10 ₁	9 ₂	7 ₄	6 ₅	5 ₆	3 ₈	2 ₉	1 ₁₀
14	8 ₆	12 ₂	4 ₁₀	14 ₀	13 ₁	11 ₃	10 ₄	9 ₅	7 ₇	6 ₈	...
17	12 ₅	16 ₁	8 ₉	4 ₁₃	17 ₀	15 ₂	14 ₃	13 ₄	11 ₆	10 ₇	...
20	16 ₄	20 ₀	12 ₈	8 ₁₂	4 ₁₆	19 ₁	18 ₂	17 ₃	15 ₅	14 ₆	...
23	20 ₃	4 ₁₉	16 ₇	12 ₁₁	8 ₁₅	23 ₀	22 ₁	21 ₂	19 ₄	18 ₅	...
26	24 ₂	8 ₁₈	20 ₆	16 ₁₀	12 ₁₄	4 ₂₂	26 ₀	25 ₁	23 ₃	22 ₄	...
29	28 ₁	12 ₁₇	24 ₅	20 ₉	16 ₁₃	8 ₂₁	4 ₂₅	29 ₀	27 ₂	26 ₃	...
32	32 ₀	16 ₁₆	28 ₄	24 ₈	20 ₁₂	12 ₂₀	8 ₂₄	4 ₂₈	31 ₁	30 ₂	...
35	4 ₃₁	20 ₁₅	32 ₃	28 ₇	24 ₁₁	16 ₁₉	12 ₂₃	8 ₂₇	35 ₀	34 ₁	...
38	8 ₃₀	24 ₁₄	36 ₂	32 ₆	28 ₁₀	20 ₁₈	16 ₂₂	12 ₂₆	4 ₃₄	38 ₀	...
41	12 ₂₉	28 ₁₃	40 ₁	36 ₅	32 ₉	24 ₁₇	20 ₂₁	16 ₂₅	8 ₃₃	4 ₃₇	...

四、n 減掉循環節開頭留下數字

⇨4.1.當殺 α 留 β ，條件k，若n為第1循環節的開頭，則n減掉留下數字=k-1。

証明：

- (1). 當 $k=n$ 時，留下的數字是 1，因此 n 減掉留下數字= $n-1$ ，又 $k=n$ ，所以 n 減掉留下數字= $n-1=k-1$ 。
- (2). 當 $k=n-1$ 時，留下的數字是 2，因此 n-留下來的數字= $n-2$ ，又 $k=n-1 \Leftrightarrow k+1=n$ ，所以 n 減掉留下數字= $n-2=k+1-2=k-1$ 。
- (3). 當 $k=n-2$ 時，留下的數字是 3，因此 n 減掉留下數字= $n-3$ ，又 $k=n-2 \Leftrightarrow k+2=n$ ，所以 n 減掉留下數字= $n-3=k+2-3=k-1$ 。
- (4). 當 $k=n-(\alpha-1)$ 時，留下的數字是 α ，因此 n 減掉留下數字= $n-\alpha$ ，又 $k=n-(\alpha-1) \Leftrightarrow k+(\alpha-1)=n$ ，所以 n 減掉留下數字= $n-\alpha=k+(\alpha-1)-\alpha=k-1$ ；

實例：

表三十五、n 減掉循環節開頭留下數字實例(ex:殺 1 留 1，c=1)

n	k ▶															
▼	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
1	1 ₀															
2	2 ₀	1 ₁														
3	2 ₁	3 ₀	1 ₂													
4	4 ₀	2 ₂	3 ₁	1 ₃												
5	2 ₃	4 ₁	5 ₀	3 ₂	1 ₄											
6	4 ₂	6 ₀	2 ₄	5 ₁	3 ₃	1 ₅										
7	6 ₁	2 ₅	4 ₃	7 ₀	5 ₂	3 ₄	1 ₆									
8	8 ₀	4 ₄	6 ₂	2 ₆	7 ₁	5 ₃	3 ₅	1 ₇								
9	2 ₇	6 ₃	8 ₁	4 ₅	9 ₀	7 ₂	5 ₄	3 ₆	1 ₈							
10	4 ₆	8 ₂	10 ₀	6 ₄	2 ₈	9 ₁	7 ₃	5 ₅	3 ₇	1 ₉						
11	6 ₅	10 ₁	2 ₉	8 ₃	4 ₇	11 ₀	9 ₂	7 ₄	5 ₆	3 ₈	1 ₁₀					
12	8 ₄	12 ₀	4 ₈	10 ₂	6 ₆	2 ₁₀	11 ₁	9 ₃	7 ₅	5 ₇	3 ₉	1 ₁₁				
13	10 ₃	2 ₁₁	6 ₇	12 ₁	8 ₅	4 ₉	13 ₀	11 ₂	9 ₄	7 ₆	5 ₈	3 ₁₀	1 ₁₂			
14	12 ₂	4 ₁₀	8 ₆	14 ₀	10 ₄	6 ₈	2 ₁₂	13 ₁	11 ₃	9 ₅	7 ₇	5 ₉	3 ₁₁	1 ₁₃		
15	14 ₁	6 ₉	10 ₅	2 ₁₃	12 ₃	8 ₇	4 ₁₁	15 ₀	13 ₂	11 ₄	9 ₆	7 ₈	5 ₁₀	3 ₁₂	1 ₁₄	
16	16 ₀	8 ₈	12 ₄	4 ₁₂	14 ₂	10 ₆	8 ₁₀	2 ₁₄	15 ₁	13 ₃	11 ₅	9 ₇	7 ₉	5 ₁₁	3 ₁₃	1 ₁₅

五、n 減掉循環節尾數留下數字之循環

⇨5.1. 當殺 α 留 β ，條件 k ，若 n 為第 1 循環節的結束，則 n 減掉留下數字從 $k=1$ 開始，以數字 $0、1... \beta-1$ 循環。

證明：

由性質 1.16 得知 n 與 $n+\alpha$ 兩數之間， n 減掉留下數字之間差 $-\beta$ ；又由性質 4.1 得知，若 n 為第 1 循環節的開頭，則 n 減掉留下數字 $=k-1$ 。所以第 1 循環節的結束 n 留下數字為 $(k-1) \bmod \beta$ ，當 $k=1$ ， $(k-1) \bmod \beta \equiv 0$ ；當 $k=2$ ， $(k-1) \bmod \beta \equiv 1$ ；當 $k=\beta$ ， $(k-1) \bmod \beta \equiv \beta-1$ ；當 $k=\beta+1$ 時又回到 0 開始循環。

實例：

表三十六、n 減掉循環節尾數留下數字之循環實例(ex:殺 1 留 3， $c=1$)

n	k ▶											
▼	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	1 ₀											
2	2 ₀	1 ₁										
3	2 ₁	3 ₀	1 ₂									
4	3 ₁	4 ₀	2 ₂	1 ₃								
5	3 ₂	4 ₁	2 ₃	5 ₀	1 ₄							
6	2 ₄	3 ₃	6 ₀	4 ₂	5 ₁	1 ₅						
7	6 ₁	7 ₀	4 ₃	2 ₅	3 ₄	5 ₂	1 ₆					
8	3 ₅	4 ₄	8 ₀	6 ₂	7 ₁	2 ₆	5 ₃	1 ₇				
9	7 ₂	8 ₁	4 ₅	2 ₇	3 ₆	6 ₃	9 ₀	5 ₄	1 ₈			
10	2 ₈	3 ₇	8 ₂	6 ₄	7 ₃	10 ₀	4 ₆	9 ₁	5 ₅	1 ₉		
11	6 ₅	7 ₄	2 ₉	10 ₁	11 ₀	4 ₇	8 ₃	3 ₈	9 ₂	5 ₆	1 ₁₀	
12	10 ₂	11 ₁	6 ₆	3 ₉	4 ₈	8 ₄	12 ₀	7 ₅	2 ₁₀	9 ₃	5 ₇	1 ₁₁

六、F 函數與 b 函數之性質

$$6.1. \text{ 若 } F(x|\alpha, \beta, c, k) = \beta m - b(x|\alpha, \beta, c, k) + b(x+1|\alpha, \beta, c, k)$$

$$\text{則 } F(x+1|\alpha, \beta, c, k) \text{ 則 } = F(x|\alpha, \beta, c, k) + \alpha m$$

証明：

$$\text{設 } F(x+1|\alpha, \beta, c, k) = F(x|\alpha, \beta, c, k) + \alpha m$$

$$F(x|\alpha, \beta, c, k) + \alpha m - b(x+1|\alpha, \beta, c, k) = (\alpha + \beta)m - b(x|\alpha, \beta, c, k)$$

$$F(x|\alpha, \beta, c, k) = (\alpha + \beta)m - b(x|\alpha, \beta, c, k) - \alpha m + b(x+1|\alpha, \beta, c, k)$$

$$\Leftrightarrow F(x|\alpha, \beta, c, k) = \beta m - b(x|\alpha, \beta, c, k) + b(x+1|\alpha, \beta, c, k)$$

$$\Leftrightarrow F(x+1|\alpha, \beta, c, k) \text{ 則 } = F(x|\alpha, \beta, c, k) + \alpha m$$

實例

F 函數和 b 函數係筆者所獨創分析工具，用來計算各循環節的尾數，如表三十七。藍色的數字是前一循環節的尾數，紅色的數字是本循環節的尾數。

表三十七、F 函數值與 b 函數值實例(ex:殺 3 留 2，c=1，k=1)

第 1 循環節	第 2 循環節	第 3 循環節
4=2*2-0+0 5*2-0+0=10	10=2*5-0+0 5*5-0+0=25	25=2*12-0+1 5*12-0+1=61
第 4 循環節	第 5 循環節	第 6 循環節
61=2*31-1+0 5*31-1+0=154	154=2*77-0+0 5*77-0+0=385	385=2*192-0+1 5*192-0+1=961
第 7 循環節	第 8 循環節	第 9 循環節
961=2*481-1+0 5*481-1+0=2404	2404=2*1202-0+0 5*1202-0+0=6010	6010=2*3005-0+0 5*3005-0+0=15025

七、電腦模擬

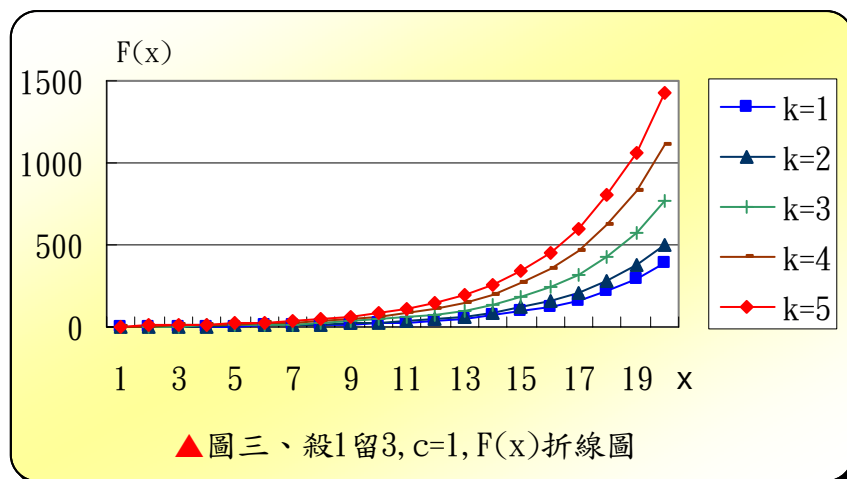
筆者業已利用 F 函數、b 函數 及 Excele 電腦模擬，求出殺 α 留 β ，倒數第 k 個留下數。(如表三十八所示)

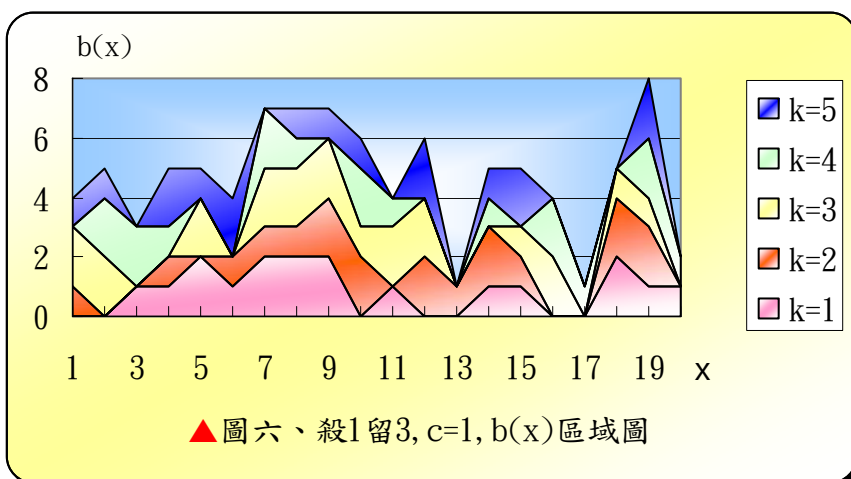
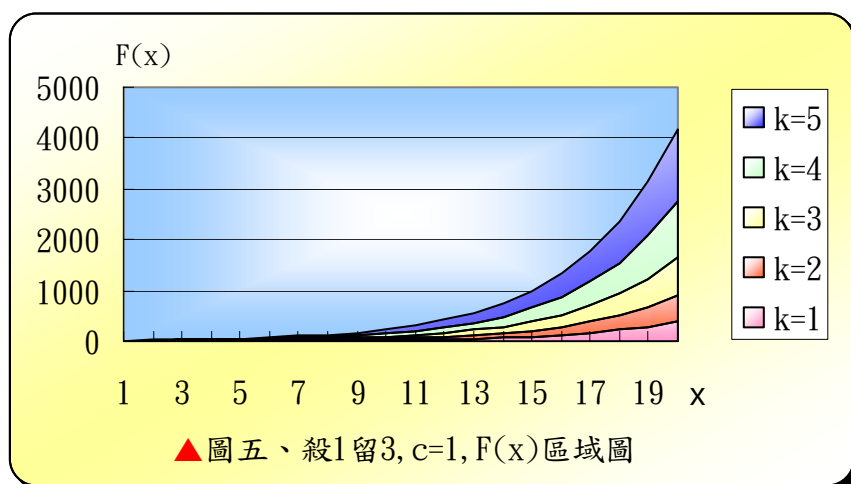
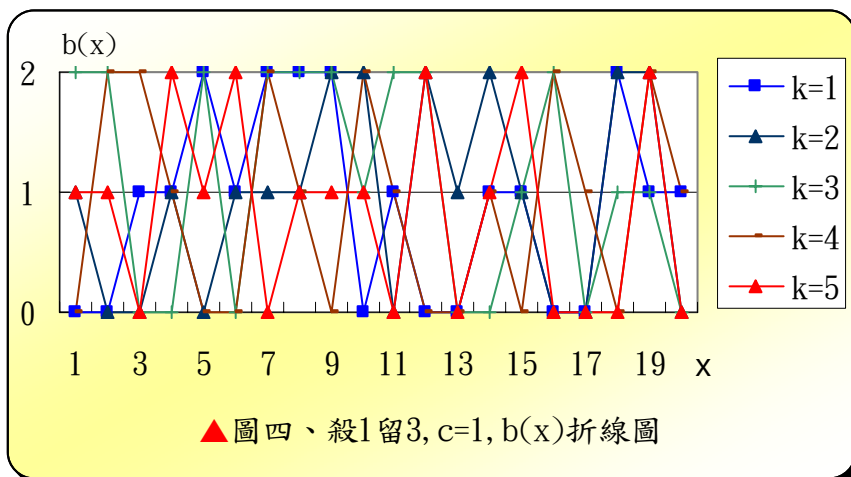
表三十八、電腦模擬

選項	公式
α	自訂
β	自訂
n	自訂
k	自訂
c	$((n-1) \bmod \alpha)+1$
$F(1 \alpha, \beta, c, k)$	$\alpha[\frac{(k-c)+(\alpha-1)}{\alpha}] + c + \alpha[\frac{k-1}{\beta}]$
$b(1 \alpha, \beta, c, k)$	$(k-1) \bmod \beta$
$F(2 \alpha, \beta, c, k)$	$F(1 \alpha, \beta, c, k) + \alpha[\frac{F(1 \alpha, \beta, c, k) + b(1 \alpha, \beta, c, k)}{\beta}]$
$b(2 \alpha, \beta, c, k)$	$(F(1 \alpha, \beta, c, k) + b(1 \alpha, \beta, c, k)) \bmod \beta$
$F(3 \alpha, \beta, c, k)$	$F(2 \alpha, \beta, c, k) + \alpha[\frac{F(2 \alpha, \beta, c, k) + b(2 \alpha, \beta, c, k)}{\beta}]$
$b(3 \alpha, \beta, c, k)$	$(F(2 \alpha, \beta, c, k) + b(2 \alpha, \beta, c, k)) \bmod \beta$
$F(4 \alpha, \beta, c, k)$	$F(3 \alpha, \beta, c, k) + \alpha[\frac{F(3 \alpha, \beta, c, k) + b(3 \alpha, \beta, c, k)}{\beta}]$
$b(4 \alpha, \beta, c, k)$	$(F(3 \alpha, \beta, c, k) + b(3 \alpha, \beta, c, k)) \bmod \beta$
...	...

八、F 函數、b 函數圖表分析

筆者以圖三~圖六說明電腦模擬後殺 1 留 3 的 F 函數、b 函數圖表分析。

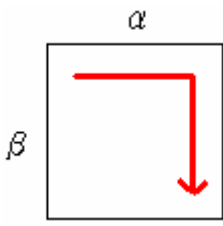
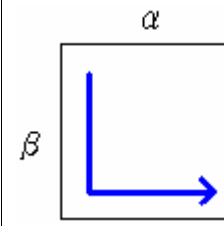




九、「約瑟夫數列」與「約瑟夫數列的最後一章」研究演變之分析

筆者對於「約瑟夫數列」與「約瑟夫數列的最後一章」研究演變之分析如表三十九。

表三十九、「約瑟夫數列」與「約瑟夫數列的最後一章」研究演變之分析

作品名稱	約瑟夫數列	約瑟夫數列的最後一章
作者	筆者本人	筆者本人
完稿日期	2006 年 2 月	2006 年 5 月
參加比賽	2006 年台灣國際科學展覽	第 46 屆全國中小學科學展覽
研究方法	 先分析 $\beta=1$, $\alpha=1、2、3\dots$	 先分析 $\alpha=1$, $\beta=1、2、3\dots$
n 不為循環節的尾數	未證明	殺 α 留 β : n 與 $n+\alpha$ 兩數之間, 留下數字之間差 $\alpha+\beta$, n 減掉留下數字之間差 $-\beta$ 。
n 為循環節的尾數	未證明	當殺 α 留 β , 若 n 個數中倒第 k 個留下數字為 $n、n-1、n-2\dots$ 或 $n-(\beta-1)$, 該數 n 為該循環節的結束, 同時也為 $F(\alpha, \beta, c, k)$ 值。 $\therefore F(x \alpha, \beta, c, k)$ 為第 x 循環節結束。
循環節開頭留下數字之循環	未發現	當殺 α 留 β , $k=1、2、3\dots c$ 時, 第 1 循環節開頭留下數字 $=c、c-1、c-2\dots 1$; 當 $k>c$, 以數字 $\alpha、\alpha-1、\alpha-2\dots 1$ 循環。
n 減掉循環節開頭留下數字	未發現	當殺 α 留 β , 條件 k , 若 n 為第 1 循環節的開頭, 則 n 減掉留下數字 $=k-1$ 。
n 減掉循環節尾數留下數字之循環	未發現	當殺 α 留 β , 條件 k , 若 n 為第 1 循環節的結束, 則 n 減掉留下數字從 $k=1$ 開始, 以數字 $0、1\dots \beta-1$ 循環。
F 函數	$F(x+1 \alpha, \beta, c, k)$ $=(\alpha+\beta)m-b(x \alpha, \beta, c, k)+b(x+1 \alpha, \beta, c, k)$	$F(x+1 \alpha, \beta, c, k)$ $=F(x \alpha, \beta, c, k)+\alpha m$

捌、結論

表四十、殺 α 留 β 公式

留下數字	留下數字
$n - (b(x+1 \alpha, \beta, c, k) + \beta \frac{F(x+1 \alpha, \beta, c, k) - n}{\alpha})$	$(\alpha + \beta) \frac{n - F(x \alpha, \beta, c, k)}{\alpha} - b(x \alpha, \beta, c, k)$
其中 $F(x+1 \alpha, \beta, c, k) \geq n > F(x \alpha, \beta, c, k)$ 。	

玖、參考文獻

一、中文部分

1. 楊皓綜、翁郁婷（第 39 屆）。**公主如何救王子**。載於國立科學教育館，全國中小學科學展覽第 39 屆國小組數學科。
2. 簡民惠（第 40 屆）。**天生贏家的奧秘——『傳遞問題』之研究與探討**。載於國立科學教育館，全國中小學科學展覽第 40 屆國中組數學科。
3. 林豐正、詹朱聰、林裕翔、簡子為（第 43 屆）。**九死一生**。載於國立科學教育館，全國中小學科學展覽第 43 屆高中組數學科。
4. 林千雅、陳珉儒、邱晨熙、梁育榮（第 44 屆）。**公主的抉擇**。載於國立科學教育館，全國中小學科學展覽第 44 屆高中組數學科。
5. 戴于琹（第 44 屆）。**我要活下去**。載於國立科學教育館，全國中小學科學展覽第 44 屆高中組數學科。
6. 段凱文、梁廷宇、羅子端、黃蛟晟（第 44 屆）。**王位繼承人**。載於國立科學教育館，全國中小學科學展覽第 44 屆高中組數學科。
7. 林奕丞、洪嘉蔓、陳廷、徐東華。**探索俄羅斯遊戲法則之奧妙**。載於國立科學教育館，全國中小學科學展覽第 45 屆國小組數學科。
8. 葉佩雯。**老師無法解決的難題**。載於國立科學教育館，全國中小學科學展覽第 45 屆國小組數學科。
9. 葉佩雯。**約瑟夫數列**。2006 年台灣國際科學展覽數學科。
10. DONALD E. KNUTH 編譯者：陳衍文（民 80 年七月）。**具體數學 CONCRETE MATHEMATICS**（9-20 頁）。格致圖書公司。

二、英文部分

1. DONALD E. KNUTH（民 86）。**The Art of Computer Programming VOLUME1**（162，184 頁）。Addison Wesley。
2. DONALD E. KNUTH（民 86）。**The Art of Computer Programming VOLUME3**（17-18 頁）。Addison Wesley。

評 語

030417 約瑟夫數列的最後一章

約瑟夫數列是一個很古老的問題

1. 作者將它逐步推廣到一般化的情形並找出一些規律，實屬不易，可見作者對研究的專注與執著。
2. 作者思路清皙，潛力無窮，若有專家指導，相信必能有很大的突破。