

中華民國第四十六屆中小學科學展覽會
作品說明書

國中組 數學科

030413

神機妙算

學校名稱： 南投縣立旭光高級中學

作者：	指導老師：
國一 王筱筑	王新春
國一 廖佳盈	林岑貞
國一 李譯暄	

關鍵詞：因數與倍數、同餘(mod)、高斯符號

參、研究目的

- 一、由 2006 年最初的「規則」來觀察其規律。
- 二、推導致 2006 年以外其他年份的公式。
- 三、歸納是否有萬年曆的法則。
 - 1、延伸是否有不同的指法。
 - 2、發展容易記憶的公式。
- 四、由「萬年曆」中可以找出哪些已經學過的數學特性。

肆、研究方法

- 一、由最根本的方式開始分析「2006 年」特性。
- 二、以實際操作方式，觀察發現「萬年曆」的特性。
- 三、蒐集相關文獻並提出疑問。
- 四、藉由已知數學概念驗證研究目的。
- 五、整理研究結果，對「萬年曆」加以分析並驗證。

伍、研究過程

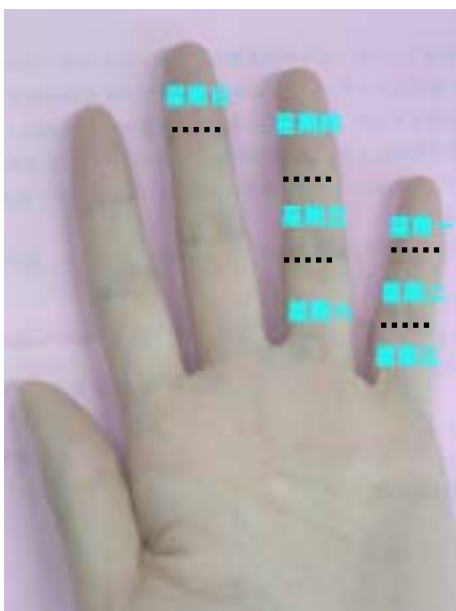
指法規則

一、指法分佈：

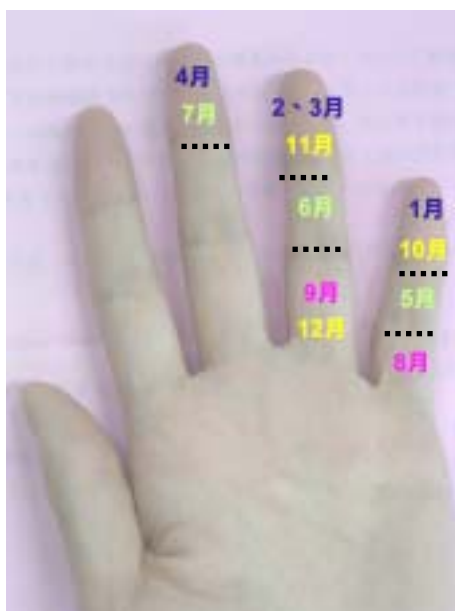
(一) 只使用左手小指三個指間、無名指三個指間、中指第一個指間共 7 個指間，由小指指間由上而下依序代表星期一、星期二及星期三，無名指指間由上而下依序為星期四、星期五、星期六，中指第一個指間代表星期日（如圖一）。

(二) 這 7 個指間也各分別代表 1~12 月，如（圖二）分佈，其優點為第一列依次為 1、2、3、4 月，第二列為 5、6 月，7 月較特殊，第三列為 8、9 月；再一次回到第一行代表 10、11 月，12 月較特殊。

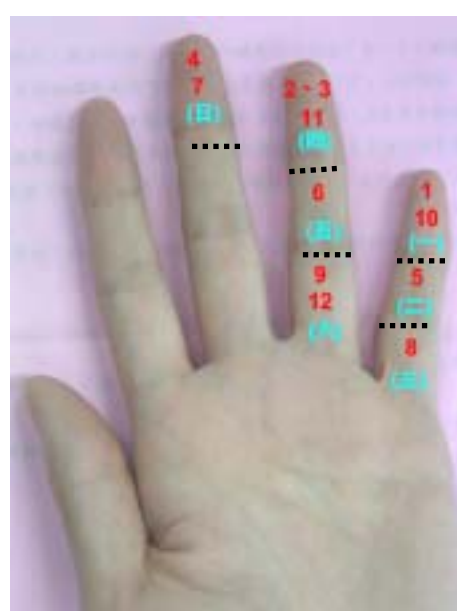
(三) 綜合以上星期及月份分佈只需 7 個指間就能代表（圖三）。



圖一



圖二



圖三

二、指法說明：

以 2006 年任何一天為例

- 1、先確認月份在哪一指間。
- 2、算出 5 加上日期除以 7 的餘數之和；若和大於或等於 7 則需再除以 7 求出餘數。
- 3、由月份代表的指間往下數所得的餘數，所數到的指間代表之星期即為所求。

實例說明

例 1：2006 年 1 月 31 日

- 1、1 月在小指第 1 指間。
- 2、 $31 \div 7 = 4 \cdots 3$ ，2006 年需加 5
 $5 + 3 = 8$ ， $8 \div 7 = 1 \cdots 1$
- 3、由小指第 1 指間往下數 1 格，到達小指第 2 指間代表星期二，
則 2006 年 1 月 31 日為星期二。

例 2：2006 年 11 月 25 日

- 1、11 月在無名指第 1 指間。
- 2、 $25 \div 7 = 3 \cdots 4$ ，2006 年需加 5
 $5 + 4 = 9$ ， $9 \div 7 = 1 \cdots 2$
- 3、由無名指第 1 指間往下數 2 格，到達無名指第 3 指間代表星期六，
則 2006 年 11 月 25 日為星期六

研究並觀察：

一、研究為何月份要如此分佈：(先以平年為研究樣本)

若我們定義某年的 1 月 1 日為星期一

則 2 月 1 日為星期四 (需加上 1 月份 31 天除以 7 的餘數 3)

則 3 月 1 日為星期四 (需加上 2 月份 28 天除以 7 的餘數 0)

則 4 月 1 日為星期日 (需加上 3 月份 31 天除以 7 的餘數 3)

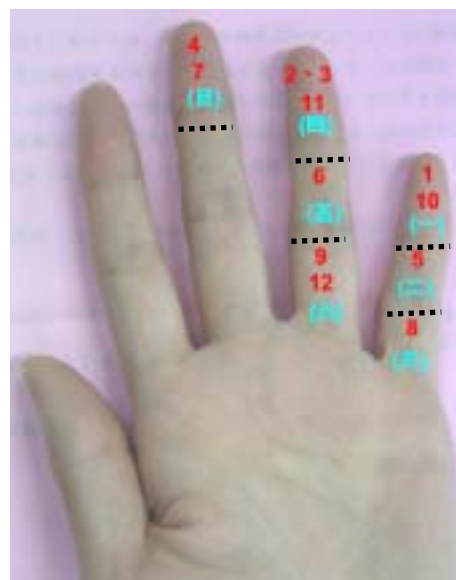
其他月份如表一所示

表一

月份	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
日數	31	28	31	30	31	30	31	31	30	31	30	31
除以 7 的餘數	3	0	3	2	3	2	3	3	2	3	2	3
	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	
日期	1/1	2/1	3/1	4/1	5/1	6/1	7/1	8/1	9/1	10/1	11/1	12/1
星期	一	四	四	日	二	五	日	三	六	一	四	六
指間	小 1	無 1	無 1	中 1	小 2	無 2	中 1	小 3	無 3	小 1	無 1	無 3

註： 小：小指； 無：無名指； 中：中指

配合 (圖四) 可清楚知道為何月份的分佈原因



6 圖四

二、研究為何 2006 年要加 5：

平年 365 天（52 周又 1 天），閏年 366 天（52 周又 2 天），所以每年的某月某日之星期幾跟前一年相同日期之比較，均需要加 1 天，即需往後推一天；但遇到閏年 2 月之後（即 3 月開始）則需加 2 天，因為閏年 2 月 c 再多 1 天；而 2006 年剛好需加 5，2007 年需加 6，2008 年需加 7（即 0）但 2 月之後（即 3 月開始）需加 1。

三、影響星期因素歸納：

（一）**年的因素**：2006 年+5，2007 年+6，2008 年+7（即+0）但 2 月之後（即 3 月開始）+1，2009 年+2，2010 年+3，……，依這樣規則往下推。

（二）**月的因素**：已由月份分佈抵銷。

（三）**日的因素**：因為我們先確定該月 1 日的位置，再利用“日除以 7 所得的餘數”，往下所數。

因此，我們可以成功推導 2006 年的任何一天。

四、結論：因此由上面的分析我們知道指法分佈的原因，也可以了解指法運用的原理。

延伸到其他年

我們可以確定 2006 年+5，2007 年+6，2008 年+7（即+0）但 2 月之後（即 3 月開始）+1，但年份非靠近 2006 年，而是 1982 年、2023 年或更遠離 2006 年，年份的影響需加多少，需很慢且花很多時間才能推導出，但我們希望可以找出更快的方法或於其中找出規則。

表二

年	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007
所加數	+4 +5	+6	+0	+1	+2 +3	+4	+5	+6
年	2008	2009	2010	2011	2012	2013	2014	2015
所加數	+0 +1	+2	+3	+4	+5 +6	+0	+1	+2
年	2016	2017	2018	2019	2020	2021	2022	2023
所加數	+3 +4	+5	+6	+0	+1 +2	+3	+4	+5
年	2024	2025	2026	2027	2028	2029	2030	2031
所加數	+6 +0	+1	+2	+3	+4 +5	+6	+0	+1
年	2032	2033	2034	2035	2036	2037	2038	2039
所加數	+2 +3	+4	+5	+6	+0 +1	+2	+3	+4

一、如上表二，我們知道每年每天的星期受到年份之影響，跟前一年比較，平年+1，閏年2月後（即3月開始）+2。

二、因為逐年都+1，但遠離2006年如2032年受年影響應加多少。

三、推導1：

2000年以後的年份

（一）我們決定以最好「記憶」及「運算」的2000年為基準。

（二）逐年都+1，遇到閏年又要再多+1，所以我們以 $(20xx - 2000)$ 的差，再除

以7得餘數，這是因為以7為一個循環；又4年一閏需再多+1， $(20xx - 2000)$

$\div 4$ 取商不理餘數，前者的餘數加上後者的商得到一個和。

(三) 簡化：

1、 $\{ (20xx - 2000) \div 7 \text{ 取餘數} + (20xx - 2000) \div 4 \text{ 取商} \} \div 7 \text{ 取餘數}$ 。

2、化簡：

由圖書館的資料知道同餘 (mod)；高斯符號的意義 $\sim [k]$ 為不大於 k 的最大整數，

將上列敘述化簡：

$$\{ (20xx - 2000) \equiv x_1 \pmod{7} + \left[\frac{20xx - 2000}{4} \right] \} \equiv x_2 \pmod{7}$$

x_1, x_2 ：除以 7 的餘數； $[]$ 為高斯符號

(四) 歸納：

1、因為以 2000 年為基準，需由 2000 年年影響加 5 再加上上列敘述的餘數。

2、最後得：

$$5 + \{ (20xx - 2000) \equiv x_1 \pmod{7} + \left[\frac{20xx - 2000}{4} \right] \} \equiv x_2 \pmod{7}$$

3、若上列所得之數若再大於或等於 7，需再 mod 7 一次，最後所得之數即為 2000 年之後，年影響所加之數。

(五) 實例：

1、非閏年：

(1) 2025 年查表二需 +1

先計算

$$\{ (2025 - 2000) \equiv 4 \pmod{7} + \left[\frac{2025 - 2000}{4} \right] \} \equiv x_2 \pmod{7}$$

$$\{ (2025 - 2000) \equiv 4 \pmod{7} + 6 \} \equiv 10 \equiv 3 \pmod{7}$$

再得 $5 + 3 = 8$ ， $8 \equiv 1 \pmod{7}$ ，+1 即為所求。

(2) 2033 年查表二需 +4

先計算

$$\{ (2033 - 2000) \equiv 5 \pmod{7} + \left\lfloor \frac{2033-2000}{4} \right\rfloor \} \equiv x_2 \pmod{7}$$

$$\{ (2033 - 2000) \equiv 5 \pmod{7} + 8 \} \equiv 13 \equiv 6 \pmod{7}$$

再得 $5+6=11$ ， $11 \equiv 4 \pmod{7}$ ， +4 即為所求。

(3) 2038 年查表二需 +3

先計算

$$\{ (2038 - 2000) \equiv 3 \pmod{7} + \left\lfloor \frac{2038-2000}{4} \right\rfloor \} \equiv x_2 \pmod{7}$$

$$\{ (2038 - 2000) \equiv 3 \pmod{7} + 9 \} \equiv 12 \equiv 5 \pmod{7}$$

再得 $3+5=8$ ， $8 \equiv 1 \pmod{7}$ ， +3 即為所求。

2、 閏年：

(1) 2020 年查表二為 +1 +2

$$\{ (2020 - 2000) \equiv 6 \pmod{7} + \left\lfloor \frac{2020-2000}{4} \right\rfloor \} \equiv x_2 \pmod{7}$$

$$\{ (2020 - 2000) \equiv 6 \pmod{7} + 5 \} \equiv 11 \equiv 4 \pmod{7}$$

$6+5=11$ ， $11 \equiv 4 \pmod{7}$ ， +2 即為所求 (只求出 2 月後之年的影響)。

(2) 2028 年查表二需 +4 +5

$$\{ (2028 - 2000) \equiv 0 \pmod{7} + \left\lfloor \frac{2028-2000}{4} \right\rfloor \} \equiv x_2 \pmod{7}$$

$$\{ (2028 - 2000) \equiv 0 \pmod{7} + 7 \} \equiv 7 \equiv 0 \pmod{7}$$

$0+7=7$ ， $7 \equiv 0 \pmod{7}$ ， +5 即為所求 (只求出 2 月後之年的影響)。

(3) 2032 年查表二需 +2 +3

$$\{ (2032 - 2000) \equiv 4 \pmod{7} + \left[\frac{2032 - 2000}{4} \right] \} \equiv x_2 \pmod{7}$$

$$\{ (2032 - 2000) \equiv 4 \pmod{7} + 8 \} \equiv 12 \equiv 5 \pmod{7}$$

$5 + 5 = 10$ ， $10 \equiv 3 \pmod{7}$ ， **+3 即為所求 (只求出 2 月後之年的影響)。**

四、推導 2： 2000 年以前的年份

表 三

年	1961	1962	1963	1964	1965	1966	1967	1968
所加數	+5	+6	+0	+1 +2	+3	+4	+5	+6 +0
年	1969	1970	1971	1972	1973	1974	1975	1976
所加數	+1	+2	+3	+4 +5	+6	+0	+1	+2 +3
年	1977	1978	1979	1980	1981	1982	1983	1984
所加數	+4	+5	+6	+0 +1	+2	+3	+4	+5 +6
年	1985	1986	1987	1988	1989	1990	1991	1992
所加數	+0	+1	+2	+3 +4	+5	+6	+0	+1 +2
年	1993	1994	1995	1996	1997	1998	1999	2000
所加數	+3	+4	+5	+6 +0	+1	+2	+3	+4 +5

(一) 我們決定以一樣最好「記憶」及「運算」的 2000 年為基準。

(二) 依同樣的模式推得

公式：

$$\{ (2000 - 19xx) \equiv x_1 \pmod{7} + \left[\frac{2000 - 19xx}{4} \right] \} \equiv x_2 \pmod{7}$$

x_1, x_2 ：除以 7 的餘數； [] 為高斯符號

(三) 歸納：

1、 因為以 2000 年為基準，需由 2000 年年影響加 4 往前面推上上列敘述的餘數，

即 $4 - (\text{上列敘述的餘數})$ 得的差為該年所受年影響所加數。

2、 最後得：

$$4 - \left\{ (2000 - 19xx) \equiv x_1 \pmod{7} + \left\lceil \frac{2000 - 19xx}{4} \right\rceil \right\} \equiv x_2 \pmod{7}$$

3、 若上列所得之數若小於 0，需再 mod 7 一次，最後所得之數即為 2000 年之前，

年影響所加之數。

(四) 實例：

1、 非閏年：

(1) 1991 年查表三需 +0

先計算

$$\left\{ (2000 - 1991) \equiv 9 \pmod{7} + \left\lceil \frac{2000 - 1991}{4} \right\rceil \right\} \equiv x_2 \pmod{7}$$

$$\left\{ (2000 - 1991) \equiv 2 \pmod{7} + 2 \right\} \equiv 4 \pmod{7}$$

再得 $4 - 4 = 0$ ， +0 即為所求。

(2) 1983 年查表三需 +4

$$\left\{ (2000 - 1983) \equiv 17 \pmod{7} + \left\lceil \frac{2000 - 1983}{4} \right\rceil \right\} \equiv x_2 \pmod{7}$$

$$\left\{ (2000 - 1983) \equiv 3 \pmod{7} + 4 \right\} \equiv 7 \equiv 0 \pmod{7}$$

再得 $4 - 0 = 4$ ， +4 即為所求。

(3) 1973 年查表三需 +6

$$\left\{ (2000 - 1973) \equiv 27 \pmod{7} + \left\lceil \frac{2000 - 1973}{4} \right\rceil \right\} \equiv x_2 \pmod{7}$$

$$\{ (2000 - 1973) \equiv 6 \pmod{7} + 7 \} \equiv 13 \equiv 5 \pmod{7}$$

$$4 - 5 = -1, \quad -1 \equiv 6 \pmod{7}, \quad +6 \text{ 即爲所求。}$$

2、閏年：

(1) 1988 年查表三爲 +3 +4

$$\{ (2000 - 1988) \equiv 12 \pmod{7} + \left\lfloor \frac{2000-1988}{4} \right\rfloor \} \equiv x_2 \pmod{7}$$

$$\{ (2000 - 1988) \equiv 5 \pmod{7} + 3 \} \equiv 8 \equiv 1 \pmod{7}$$

$$4 - 1 = 3, \quad +3 \text{ 即爲所求 (只求出 2 月前之年的影響)。$$

(2) 1980 年查表三需 +0 +1

$$\{ (2000 - 1980) \equiv 20 \pmod{7} + \left\lfloor \frac{2000-1980}{4} \right\rfloor \} \equiv x_2 \pmod{7}$$

$$\{ (2000 - 1980) \equiv 6 \pmod{7} + 5 \} \equiv 11 \equiv 4 \pmod{7}$$

$$4 - 4 = 0, \quad +0 \text{ 即爲所求 (只求出 2 月前之年的影響)。$$

(3) 1968 年查表三需 +6 +0

$$\{ (2000 - 1968) \equiv 32 \pmod{7} + \left\lfloor \frac{2000-1968}{4} \right\rfloor \} \equiv x_2 \pmod{7}$$

$$\{ (2000 - 1968) \equiv 4 \pmod{7} + 8 \} \equiv 12 \equiv 5 \pmod{7}$$

$$4 - 5 = -1, \quad -1 \equiv 6 \pmod{7}, \quad +6 \text{ 即爲所求 (只求出 2 月前之年的影響)。$$

五、總歸納：

(一) 2000 年以前

$$4 - \left\{ (2000 - 19xx) \equiv x_1 \pmod{7} + \left\lfloor \frac{2000-19xx}{4} \right\rfloor \right\} \equiv x_2 \pmod{7}$$

若上列所得之數若小於 0，需再 mod 7 一次，最後所得之數即爲 2000 年之前，年影響所加之數。

(二) 2000 年以後

$$5 + \{ (20xx - 2000) \equiv x_1 \pmod{7} + \left\lfloor \frac{20xx - 2000}{4} \right\rfloor \} \equiv x_2 \pmod{7}$$

若上列所得之數若再大於或等於 7，需再 mod 7 一次，最後所得之數即為 2000 年之後，年影響所加之數。

陸、研究結果

(一) 2000 年以前

$$4 - \{ (2000 - 19xx) \equiv x_1 \pmod{7} + \left\lfloor \frac{2000 - 19xx}{4} \right\rfloor \} \equiv x_2 \pmod{7}$$

(二) 2000 年以後

$$5 + \{ (20xx - 2000) \equiv x_1 \pmod{7} + \left\lfloor \frac{20xx - 2000}{4} \right\rfloor \} \equiv x_2 \pmod{7}$$

這公式簡單易懂，又可配合指法輕易地算出某年某月是星期幾。

柒、討論

一、此公式最大的優勢是因為它推導容易，因此到達 3000 年時我們可以再推導一次，並且以 3000 年為基準，一樣可以達到容易計算容易記憶的特性，而且指法不變，因此這是我們歸納最好的結論。

二、以後其他有循環的現象，相信我們可以以同樣的模式推導出一個易懂易計算的公式

捌、參考資料及其他

非唯一性

尋找許多資料知道萬年曆的公式並非唯一，每一個都有自己的特色，但經由我們自行歸納的公式較容易記憶，且經手指頭動一動即可一下子算出星期幾。

其他公式

1、 HotPower 公式 2004.6.2

萬年某日星期演算法

公式：某日星期幾=(百年%4*5 天+年+年/4+月星期表+日+2 天)%7

2、 $S=(X-1)+[(X-1)/4]-[(X-1)/100]+[(X-1)/400]+Y$

註：這裏的[S]是高斯函數,S 是它的變數,可以是整型，也可以是實型,[S]意為取不大於 S 的最大整數

3、 Zeller's 公式

給任何一個格勒哥里曆的日期(1583 年 10 月 15 日以後)，可以算出當日是星期幾。方程式如下：

$$W=\{C/4 - 2*C + Y+ Y/4 + [(13*M - 1)/5]+D\} \text{ Mod } 7$$

註解：

i) 除數時只取整數，捨棄點數。

ii) D = 日

iii) M = 月號 (3 月=1, 4 月=2 12 月=10, 1 月=11, 2 月=12)

iv) C = 年份數字中代表世紀的頭兩個位數，例如 2005 年的 20。

v) Y = 年份數字後兩個位數，如果是 1 或 2 月，M=11 或 12 而 Y 則要減 1。上述法則可以用以下公式表達

$a = (14 - \text{月份})/12$ (月份：1 月等於 1，2 月等於 1，
3 月等於 3 · · · · 11 月等於 11，12 月等
於 12)

$Y = Y - a$

$M = \text{月份} + 12a - 2$

vi) Mod 7 是將總和除以 7，取餘數。

vii) 餘數 $W = 0$ 代表星期日，1 代表星期一，2 代表星期
二，· · · · ·。

其他

以下為我們好奇西元幾年幾月幾號定為星期一，因為尋找的許多資料都未得到結果，因此，
寫信詢問中央氣象局尋找解答，如下：

來源: 中央氣象局 <webqry@cwb.gov.tw>

收信: newspring@mail.skjhs.ntct.edu.tw

日期: Tue, 7 Mar 2006 16:31:54 +0800

標題: Fw: 謝謝

[加入通訊錄] [加入排外名單] [顯示詳細資料] [按右鍵-另存郵件]

親愛的網友，您好：

目前所用之星期是依以前的順序持續沿用，經多方蒐尋相關資料，很抱歉，由於年代久遠，

我們無法查到幾月幾日為星期起始的基準日。 中央氣象局 敬覆>>> ----- Original Message

-----> From: "newspring" <newspring@mail.skjhs.ntct.edu.tw>> To: <webqry@cwb.gov.tw>> Sent:

Monday, March 06, 2006 5:43 PM> Subject: 謝謝>>>> 謝謝您的答覆>> 但可能是我敘述不德體

>> 我並非要詢問星期的由來>> 我所想問的是到底是西元幾年幾月幾號定為星期一>> 因為

現在的年月日都按一定的規則下去>> 但我相信一定有將某年的幾月幾號星期幾作一個基準

>> 而日子才按一定的規則下去>> 謝謝>>>>

參考書目

南一書局第一冊第 2 章因數與倍數

趣味數論 單墀

近世代數 康明昌

韓信點兵 莫宗堅,蔡聰明

疊合原理 賴東昇

評 語

030413 神機妙算

給出一個簡單推算某年某月某日是星期幾的方法，簡單易學且有趣。但利用到的數學概念並不難，以此做為科展作品稍嫌不足。