中華民國第四十六屆中小學科學展覽會
作品說明書

國中組　數學科

最佳團隊合作獎

030409

碎形的~相似圖形的規律探討

學校名稱： 彰化縣立陽明國民中學

作者：	指導老師：
國二 張祐瀚	謝麗芳
國二 薛祐文	蘇淑貞
國二 王志軒	
國二 李琦文	

關 鍵 詞：無限規律、相似、碎形

壹、 摘要

我們一開始從雪花繁複又有規律的圖形得到靈感，並尋找了一些水結晶成冰、霜的圖片，發現其形狀雖然複雜，但皆同時具有「相似」及「無限規律」的特性。因此便以這兩者爲方向，找尋符合此特色的圖形進行討論及研究。其中我們將它們分爲兩個單元：（一）不斷向外/內延伸的內切/外接圖形；（二）相似形重覆以規則方式相疊的碎形。我們的研究方式是先以較簡單的內切/外接圖形爲基礎，再針對一些參考資料上較常見的基本碎形圖案（如三角形相疊成爲星形...等）進行演算。有了上述的經驗後，便可以開始對碎形的形狀等特性進行變化，進而製造出我們有特色的碎形，並探討其圖形間奇妙的關聯性。

貳、 研究動機

哇！好漂亮的雪花！雪花的形狀爲什麼是那麼的有規律、那麼的美麗而複雜？簡直百看不厭呢！應該是他本身的形狀關係吧！生活中還有許多圖形具有無限的規律及相似的特性，我們便朝著此二單元做深入研究：（一）內外縮放的內切/外接圖形、（二）重複相疊的碎形。於是我們先研究基本知識，接著在老師的帶領下，以創意的鑰匙開啓碎形的大門！

參、 研究目的

一、 把內切/外接圖形做推廣，研究基礎圖形。

二、 認識碎形，並以相關規律延伸，找出比例關係。

三、 對碎形作變化，創造自我的圖形，展現創意及風格。

肆、 研究方法及步驟

一、 找尋有關於碎形之知識，並利用網際網路與各種圖書資料，了解碎形的「面積範圍不超過外圍點與點的連線」、「圖形中任何一部分皆相似於主體圖形」、「面積持續延伸的公式發現成等比級數」......等等特性。

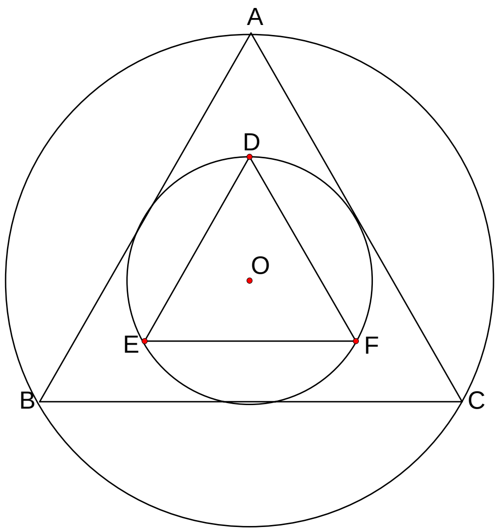
二、 先以內切外接圖形的知識爲基礎，研究書本、參考資料上的現成碎形，作爲我們進一步創新改進的前提。

三、 再來將已有的碎形，加以改良、自製、創造，衍生出只屬於我們獨特的創新碎形！

伍、　研究過程

一、　內切/外接圖形

（一）、正三角形內切/外接圖形



(令小圓半徑爲X)

面積

ΔDEF爲$\frac{\sqrt{3}}{2}X \bullet \frac{X}{2} \bullet \frac{1}{2} \bullet 6$

$=\frac{3\sqrt{3}}{4}X^2$

小圓爲 $X^2\pi$

ΔABC$=\sqrt{3}X \bullet X \bullet \frac{1}{2} \bullet 6$

$=3\sqrt{3}X^2$

大圓$=(2X)^2\pi$

$=4X^2\pi$

周長

ΔDEF爲$3\sqrt{3}$ X

小圓爲 $2X\pi$

ΔABC爲$6\sqrt{3}X$

大圓爲 $4X\pi$

小正三角形:內切圓:正三角形:外接圓

周長比$=3\sqrt{3} : 2\pi : 6\sqrt{3} : 4\pi$

面積比$=\frac{3\sqrt{3}}{4} : \pi : 3\sqrt{3} : 4\pi$

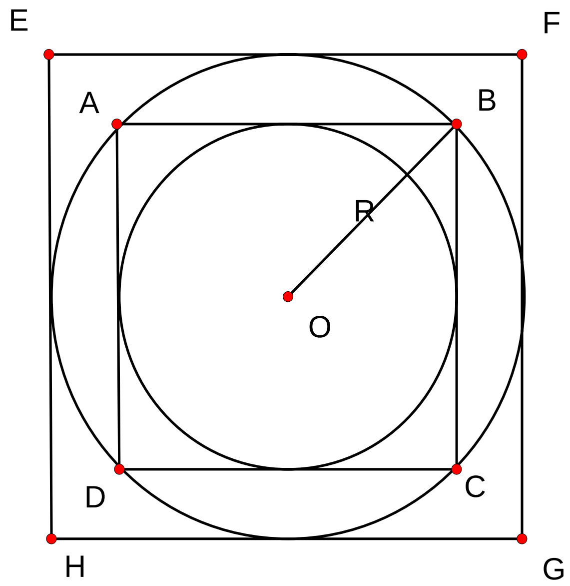
結論

當正三角形和圓形多層內切外接時

外層正三角形和內層正三角形周長比爲 2：1　面積比爲 4：1

外層圓形和內層圓形周長比爲 2：1 面積比爲 4：1

（二）、正方形內切/外接圓形



(設大圓半徑為R)

周長

小正方形= $\sqrt{2}R \bullet 4$

$= 4\sqrt{2}R$

大圓=2π R

小圓= $\sqrt{2}R \bullet \pi$

$= \sqrt{2}\pi R$

大正方形=8R

面積

小正方形= $(\sqrt{2}R)^2$

$= 2R^2$

大圓= πR^2

小圓= $\pi \bullet \left(\frac{\sqrt{2}}{2}R\right)^2$

$= \frac{1}{2}\pi R^2$

大正方形=4 R^2

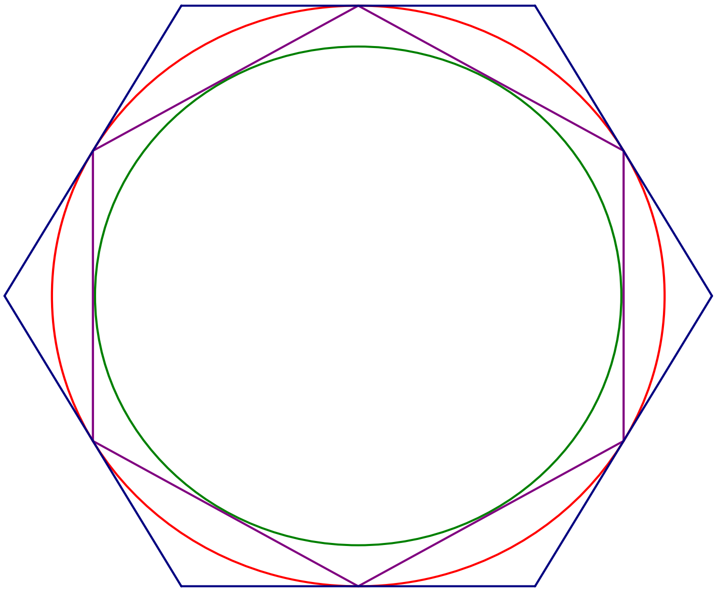
結論

當正方形和圓形多層內切外接時

外層正方形和內層正方形周長比為 2 : $\sqrt{2}$ 面積比為 2：1

外層圓形和內層圓形周長比為 2：$\sqrt{2}$ 面積比為 2：1

（三）、正六邊形內切/外接圓形



(令大圓半徑爲R)

周長

小正六邊形 (紫)=6R

大圓 (紅)=$2\pi R$

小圓 (綠)=$\frac{\sqrt{3}}{2}R \bullet 2 \bullet \pi$

$=\sqrt{3}\pi R$

大正六邊形(藍)=$\frac{12R}{\sqrt{3}}$

$=4\sqrt{3}R$

面積

小正六邊形=$\frac{3\sqrt{3}}{2}R^2$

大圓=$R^2\pi$

小圓=$\frac{3}{4}\pi R^2$

大正六邊形= $\frac{6\sqrt{3}}{3}R^2=2\sqrt{3}R^2$

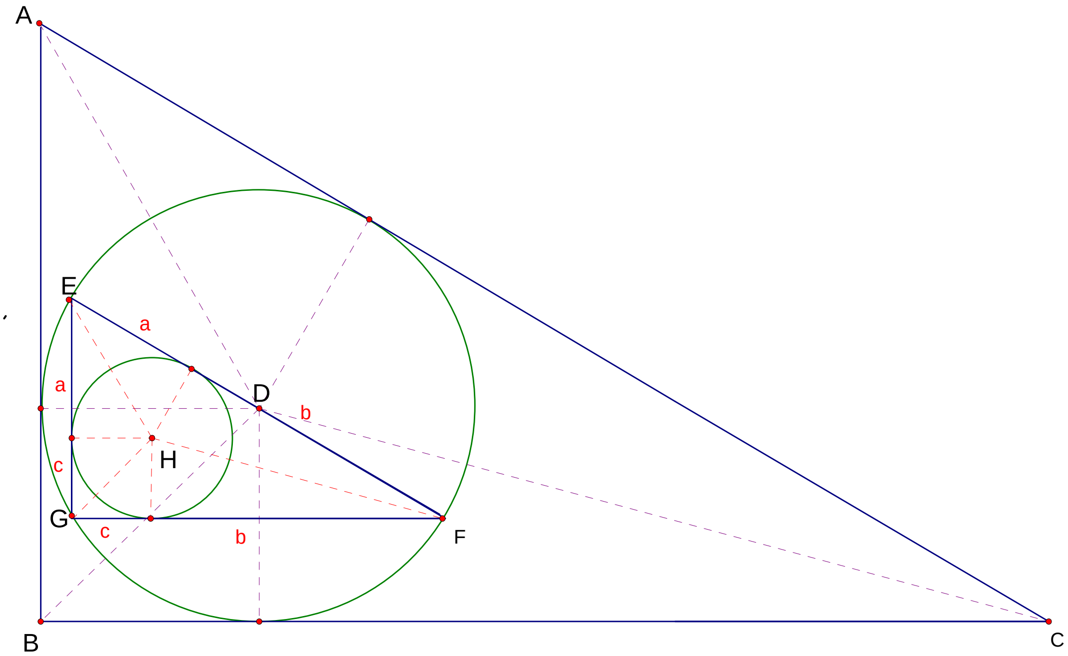
結論

當正六邊形和圓形多層內切外接時

外層正六邊形和內層正六邊形周長比爲 2：$\sqrt{3}$ 面積比爲 4：3

外層圓形和內層圓形周長比爲 2：$\sqrt{3}$面積比爲 4：3

（四）、自製特殊角三角形內切/外接圓形



設圓D半徑爲X

$\overline{AK}=\sqrt{3}X$

$\overline{KB}=X$

$\overline{AB}=(\sqrt{3}+1)X$

$\overline{EF}=2X$

$\overline{EG}=X$

$\overline{GF}=\sqrt{3}X$

<三角形>

$\overline{AB}$：$\overline{EG}$=周長比=$(\sqrt{3}+1)$：1

面積比=$(\sqrt{3}+1)^2$：1=$(4+2\sqrt{3})$：1

<圓形>

$2a+2b+2c=2X+X+\sqrt{3}X$

$a+b+c=\dfrac{3+\sqrt{3}}{2}X$

$c=\dfrac{3+\sqrt{3}}{2}X-2X=\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}X\rightarrow$圓H半徑

$$\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right)^2=\frac{2-\sqrt{3}}{2}$$

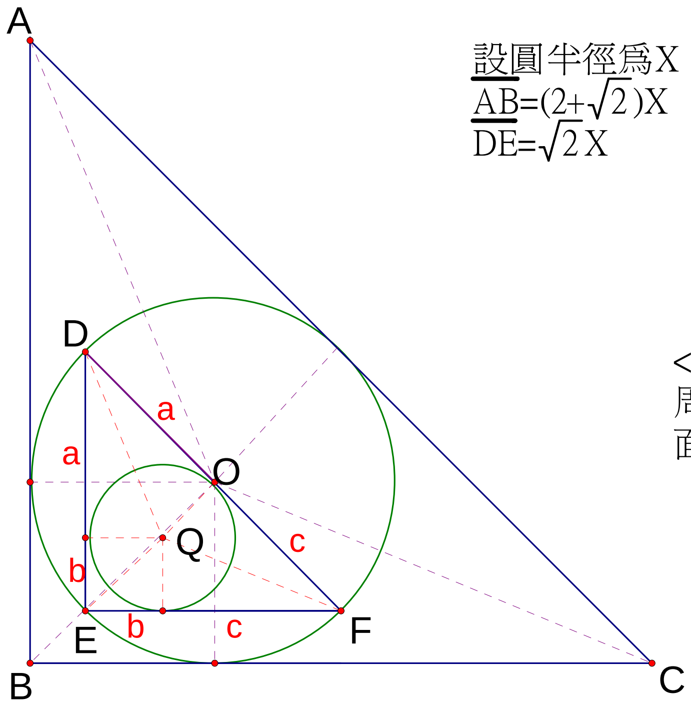
結論

當三角形和圓形多層內切外接時

外層三角形和內層三角形周長比爲 $\sqrt{3}+1$ ：1 面積比爲 $4+2\sqrt{3}$：1

外層圓形和內層圓形周長比爲 1：$\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}$ 面積比爲 4：$\dfrac{2-\sqrt{3}}{2}$

（五）、自製等腰直角三角形內切/外接圓形



設圓半徑爲X

$\overline{AB}=(2+\sqrt{2})X$

$\overline{DE}=\sqrt{2}X$

<圓形>

$2a+2b+2c=2X+2\sqrt{2}X$

$a+b+c=(\sqrt{2}+1)X$

$c=(\sqrt{2}-1)X$

圓O：圓Q

周長比=1：$(\sqrt{2}-1)$

面積比=$1^2：(\sqrt{2}-1)^2=1：(3-2\sqrt{2})$

<三角形>

周長比=$\overline{AB}：\overline{DE}=(2+\sqrt{2})：\sqrt{2}$

面積比=$(2+\sqrt{2})^2：(\sqrt{2})^2=(3+2\sqrt{2})：1$

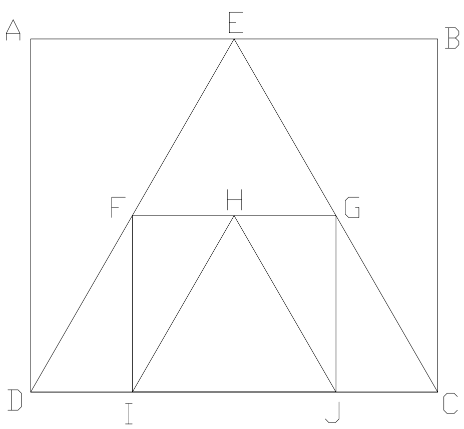
結論

當三角形和圓形多層內切外接時

外層三角形和內層三角形周長比爲 $2+\sqrt{2}:2$　面積比爲 $3+2\sqrt{2}:1$

外層圓形和內層圓形周長比爲 L:$\sqrt{2}$-1　面積比爲 1 : 3-2$\sqrt{2}$

（六）、矩形疊合/縮放三角形



$\because \triangle HIJ \cong \triangle EDC$

$\therefore \overline{HI}=\frac{1}{2}\overline{EC}$　小長方形與大長方形的長與寬成等比例

結論

當任意三角形和矩形多層疊和/縮放時

外層任意三角形和內層任意三角形

周長比爲 2：1　面積比爲 4：1

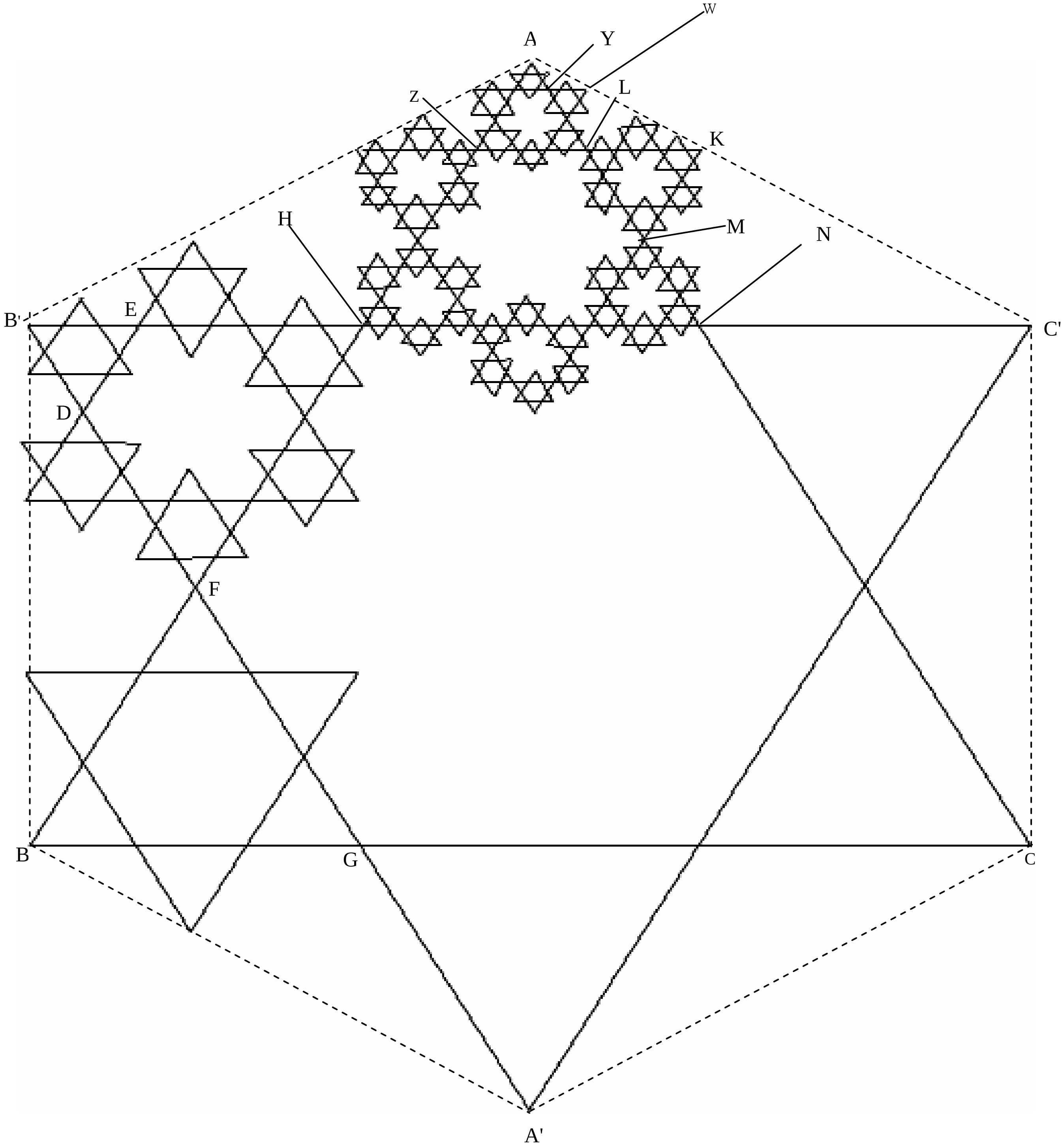
外層矩形和內層矩形

周長比爲 2：1 面積比爲 4：1

二、 碎形

（一）、六邊形碎形

作法：作ΔABC，再作全等於ΔABC的ΔA'B'C'，將兩三角型以上下顛倒的方式相疊做成一星形(一正六邊形+六正三角形)，將所得的新三角形再以同方式做後面依此類推。



面積

$\overline{FB}=\frac{1}{3}\overline{AB}$　　$\Delta FBG=\frac{1}{9}\Delta ABC$其他五個亦是如此

$\overline{B'E}=\frac{1}{3}\overline{B'H}$　　$\Delta B'ED=\frac{1}{9}\Delta B'FH=\frac{1}{9}\bullet\frac{1}{9}\Delta ABC$其他亦是如此

$$\Delta ABC+\frac{1}{9}\Delta ABC\bullet 3+\frac{1}{9}\bullet\frac{1}{9}\Delta ABC\bullet 2\bullet 6+\frac{1}{9}\bullet\frac{1}{9}\bullet\frac{1}{9}\bullet(2\bullet 3+1\bullet 2)\bullet 6\Delta ABC$$
$$+\frac{1}{9}\bullet\frac{1}{9}\bullet\frac{1}{9}\bullet\frac{1}{9}\Delta ABC\bullet\left[(2\bullet 3+1\bullet 2)\bullet 3+\frac{2\bullet 3+1\bullet 2}{2}\bullet 2\right]\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$=\Delta ABC+\frac{1}{9}\Delta ABC\bullet 3+\left(\frac{1}{9}\right)^2\Delta ABC\bullet 12+\left(\frac{1}{9}\right)^3\Delta ABC\bullet 48+\left(\frac{1}{9}\right)^4\Delta ABC\bullet 192$$
$$=\Delta ABC+\frac{1}{9}\Delta ABC\bullet 3\bullet 4^0+\left(\frac{1}{9}\right)^2\Delta ABC\bullet 3\bullet 4^1+\left(\frac{1}{9}\right)^3\Delta ABC\bullet 3\bullet 4^2+\left(\frac{1}{9}\right)^4\Delta ABC\bullet 3\bullet 4^3\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$=\Delta ABC+\frac{1}{3}\Delta ABC+\frac{4}{9}\bullet\frac{1}{3}\Delta ABC+\left(\frac{4}{9}\right)^2\bullet\frac{1}{3}\Delta ABC+\left(\frac{4}{9}\right)^3\Delta ABC\bullet\frac{1}{3}+\ldots\ldots\ldots\ldots$$

周長

每當增加1個自己$\frac{1}{9}$倍的三角形時，會多出2個$\frac{1}{9}$倍本來三角形的周長，但又因原三角形的1個$\frac{1}{9}$倍周長被消掉，故只增加1個原三角形$\frac{1}{9}$倍的周長。

$$\Delta ABC周長+\frac{1}{9}\Delta ABC.周長\bullet 3+\frac{1}{9}\bullet\frac{1}{9}\bullet 2\bullet 6\Delta ABC+\frac{1}{9}\bullet\frac{1}{9}\bullet\frac{1}{9}\Delta ABC(2\bullet 3+1\bullet 2)\bullet 6$$
$$+\frac{1}{9}\bullet\frac{1}{9}\bullet\frac{1}{9}\bullet\frac{1}{9}\Delta ABC\left[(2\bullet 3+1\bullet 2)\bullet 3+\frac{2\bullet 3+1\bullet 2}{2}\bullet 2\right]\ldots\ldots算法如求面積$$

此圖形面積範圍必不可能超過六邊形AB'BA'CC'，$\Delta KML\cong\Delta ALZ$

$\overline{AL}=\overline{LK}$且$\angle L=\angle N=120°$　　$3\overline{AK}=\overline{AC'}$　　$3\overline{KL}=\overline{C'N}$

$\because\Delta ALK\sim\Delta ANC'$　$\Delta ALK=\frac{1}{9}\Delta ANC'$　$\Delta AEW=\left(\frac{1}{9}\right)^2\Delta ANC'$

ΔLKA和ΔNCA的最長邊都會在$\overline{AC}$上，其他亦是如此。

無限延伸周長與面積之相同近似值皆為

$$\Delta ABC+\frac{\frac{1}{3}\Delta ABC}{\frac{5}{9}}\doteqdot\frac{8}{5}\Delta ABC$$

結論

當作出上述之碎形時，第 n 層

面積增加:

$$\left(\frac{4}{9}\right)^n\bullet\frac{1}{3}\bullet\Delta ABC$$

周長增加:

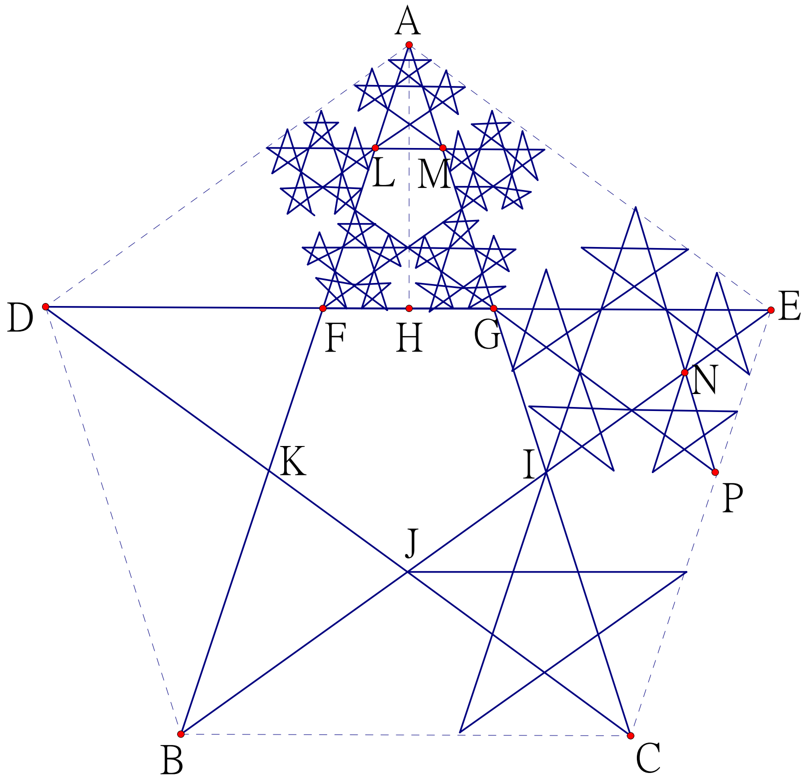
$$\left(\frac{4}{9}\right)^n\bullet\frac{1}{3}\bullet\Delta ABC$$

六邊形碎形面積和周長$\doteqdot\frac{8}{5}\Delta ABC$

（二）、五邊形碎形

即使作出六邊形面積與周長規律及其特性和特徵，但無法證明其他碎形亦是如此，我們就模仿六邊形碎形，畫出了五邊形碎形。求出其面積與周長，來證明六邊形碎形特徵是否可適用於其他碎形。

設 $\overline{BC}$ 爲 x　$\overline{FG}$ 爲 y，$\overline{AH}$ 垂直 $\overline{DE}$,



邊長

$$\sqrt{(x-y)^2-\left(\frac{y}{2}\right)^2}^{\,2}+\left(x-\frac{y}{2}\right)^2=x^2$$

$$x^2+y^2-2xy-\frac{y^2}{4}+x^2+\frac{y^2}{4}-xy=x^2$$

$$x^2-3xy+y^2=0$$

$$1-3\frac{y}{x}+\left(\frac{y}{x}\right)^2=0 \quad y<x$$

$$\frac{y}{x}=\frac{3\pm\sqrt{9-4}}{2}=\frac{3+\sqrt{5}}{2}\text{or}\frac{3-\sqrt{5}}{2}$$

$$y：x=(3-\sqrt{5})：2$$

$$\overline{AG}：\overline{AC}=\overline{AF}：\overline{AB}=\overline{FG}：\overline{BC}=(3-\sqrt{5})：2$$

$$\blacktriangle AFG：\blacktriangle ABC=(3-\sqrt{5})^2：4=8-\sqrt{30}：4$$

$$\blacktriangle AFG=\frac{7-3\sqrt{5}}{2}\blacktriangle ABC$$

$$\blacktriangle ALM=\left(\frac{7-3\sqrt{5}}{2}\right)^2\blacktriangle ABC$$ 其他亦如此

面積

$$FGIJK+\frac{7-3\sqrt{5}}{2}\Delta ABC\bullet 5+\left(\frac{7-3\sqrt{5}}{2}\right)^2\Delta ABC\bullet 2\bullet 5+\left(\frac{7-3\sqrt{5}}{2}\right)^3\Delta ABC\bullet(2\bullet 3+1\bullet 2)\bullet 5$$

$$+\left(\frac{7-3\sqrt{5}}{2}\right)^4\Delta ABC\left[(2\bullet 3+1\bullet 2)\bullet 3+\frac{2\bullet 3+1\bullet 2}{2}\bullet 2\right]\bullet 5$$

$$=FGIJK+\frac{7-3\sqrt{5}}{2}\Delta ABC\bullet 5+\left(\frac{7-3\sqrt{5}}{2}\right)^2\Delta ABC\bullet 10+\left(\frac{7-3\sqrt{5}}{2}\right)^3\Delta ABC\bullet 40+\left(\frac{7-3\sqrt{5}}{2}\right)^4\Delta ABC\bullet 160\ldots$$

$$=FGIJK+\frac{7-3\sqrt{5}}{2}\Delta ABC\bullet 5+\left(\frac{7-3\sqrt{5}}{2}\right)^2\Delta ABC\bullet 10+\left(\frac{7-3\sqrt{5}}{2}\right)^3\Delta ABC\bullet 10\bullet 4+\left(\frac{7-3\sqrt{5}}{2}\right)^4\Delta ABC\bullet 10\bullet 4^2\ldots$$

$$=FGIJK+\frac{7-3\sqrt{5}}{2}\Delta ABC\bullet 5+\left(235-105\sqrt{5}\right)\Delta ABC+\left(235-105\sqrt{5}\right)\left(14-6\sqrt{5}\right)\Delta ABC$$

$$+\left(235-105\sqrt{5}\right)\left(14-5\sqrt{5}\right)^2\Delta ABC\ldots$$

周長

$$\frac{z}{x}=\frac{2-\left(3-\sqrt{5}\right)}{2}=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\qquad z=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\overline{BC}\qquad y=\frac{3-\sqrt{5}}{2}\overline{BC}$$

$$\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\overline{BC}\bullet 2-\frac{3-\sqrt{5}}{2}\overline{BC}\right)\bullet 5+\left[\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)^2\overline{BC}\bullet 2-\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^2\overline{BC}\right]\bullet 2\bullet 5$$

$$+\left[\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)^3\overline{BC}\bullet 2-\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^3\overline{BC}\right]\bullet(2\bullet 3+1\bullet 2)\bullet 5+$$

$$\left[\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)^4\overline{BC}\bullet 2-\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^4\overline{BC}\right]\bullet\left[\frac{2\bullet 3+1\bullet 2}{2}\bullet 2+(2\bullet 3+1\bullet 2)\bullet 3\right]\bullet 5\ldots\ldots$$

$$=\overline{BC}\left[2\bullet\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)-\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)\right]\bullet 5+\overline{BC}\left[2\bullet\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^2-\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^2\right]\bullet 2\bullet 5+$$

$$\overline{BC}\left[2\bullet\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^3-\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^3\right]\bullet 4\bullet 5+\overline{BC}\left[2\bullet\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^3-\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^3\right]\bullet 4^2\bullet 5+\ldots\ldots$$

面積範圍不會超過ADBCE

因爲$\overline{EN}=\overline{NP}$且等長 $\overline{PN}//\overline{CI}$ $\overline{PE}$與$\overline{EC}$重疊 $\therefore\Delta ENP\sim\Delta EIC$

$\therefore$C P E 共線 其他亦是如此

面積

$$FGIJK+\frac{35-15\sqrt{5}}{2}\Delta ABC+\frac{\left(235-105\sqrt{5}\right)\Delta ABC}{6\sqrt{5}-13}$$

$$=FGIJK+\frac{35-15\sqrt{5}}{2}\Delta ABC+\frac{\left(235-105\sqrt{5}\right)\left(6\sqrt{5}+13\right)}{11}\Delta ABC$$

$$=FGIJK+\frac{7-3\sqrt{5}}{2}\bullet 5\Delta ABC+\frac{6\sqrt{5}+13}{11}\left(\frac{7-3\sqrt{5}}{2}\right)^2\bullet 10\Delta ABC$$

$$=FGIJK+5\left(\frac{7-3\sqrt{5}}{2}\right)\left(1+\frac{6\sqrt{5}+13}{11}\bullet\frac{7-3\sqrt{5}}{4}\bullet 5\right)\Delta ABC$$

$$=FGIJK+5\left(\frac{7-3\sqrt{5}}{2}\right)\left(\frac{16+15\sqrt{5}}{11}\right)\Delta ABC$$

$$=FGIJK+\frac{285\sqrt{5}-565}{22}\Delta ABC$$

結論

當作出上述之碎形時，第 n 層

面積增加:

$$(235-105\sqrt{5})(14-5\sqrt{5})^n \Delta ABC$$

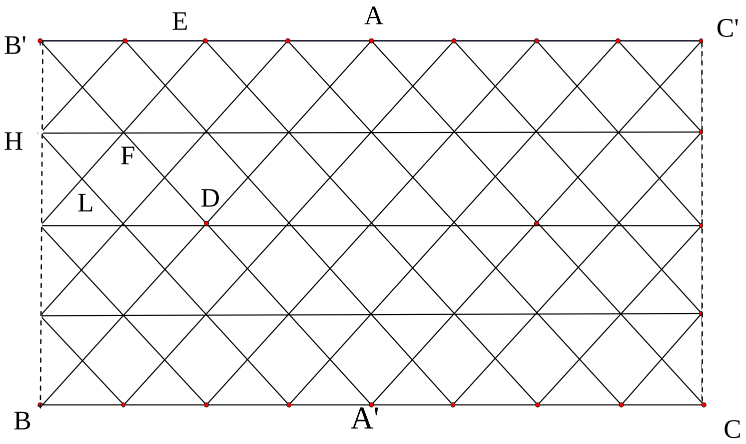
周長增加:

$$\overline{BC}\left[2\bullet\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^{n+1}-\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right]\bullet 4^{n-1}\bullet 5$$

五邊形碎形面積=FGIJK + $\dfrac{285\sqrt{5}-565}{22}\Delta ABC$

（三）自製三角碎形

作法：依照五邊形及六邊形碎形的特徵及特性，而畫出來新的碎形，並求出其面積與周長來檢驗它是碎形；並比較它與五邊形及六邊形碎形有何不同(適用於等腰三角形)



作ΔABC和$\Delta A'B'C'$ ($\Delta ABC\cong\Delta A'B'C'$)以上下顛倒相疊，會多出2個與$\Delta ABC$相似的三角形，如$\Delta A'BD$，
再以相同方法使新出現的小三角型相疊，其他依此類推

每當增加一個$\frac{1}{4}$倍的三角形時，會多出2邊，其中1邊與遮住的1邊互消，故只會多出較短的一邊，其他依此類推。

$$\overline{BC}+\frac{1}{4}\overline{BC}\bullet 2+\frac{1}{8}\overline{BC}\bullet 2\bullet 2+\frac{1}{16}\overline{BC}\bullet 2\bullet 2\bullet 2\ldots=\overline{BC}+\frac{1}{2}\overline{BC}+\frac{1}{2}\overline{BC}+\frac{1}{2}\overline{BC}\ldots\ldots$$

面積

$$\Delta A'BD=\frac{1}{4}\Delta ABC$$

$\Delta B'EF=\left(\frac{1}{4}\right)^2\Delta ABC$ 其他依此類推

$$\Delta LFK=\left(\frac{1}{4}\right)^3\Delta ABC$$

$$\Delta ABC+\frac{1}{4}\Delta ABC\bullet 2+\left(\frac{1}{4}\right)^2\Delta ABC\bullet 2\bullet 2+\left(\frac{1}{4}\right)^3\Delta ABC\bullet 2\bullet 4\ldots\ldots$$

$$=\Delta ABC+\frac{1}{4}\Delta ABC\bullet 2+\left(\frac{1}{4}\right)^2\Delta ABC\bullet 2\bullet 2+\left(\frac{1}{4}\right)^3\Delta ABC\bullet 2\bullet 2\bullet 2\ldots\ldots$$

$$=\Delta ABC+\frac{1}{2}\Delta ABC+\left(\frac{1}{2}\right)^2\Delta ABC+\left(\frac{1}{2}\right)^3\Delta ABC\ldots\ldots$$

面積：$\dfrac{\Delta ABC}{1-\frac{1}{2}}=2\Delta ABC$

面積範圍不超過B'BCC'因以全等三角形上下顛倒平行，例如：$\overline{BA'}$// $\overline{HF}$且$\overline{BA'}\perp\overline{HB}$，
因此分出來的新三角形不會超過$\overline{BB'}$，分下去後亦是如此。

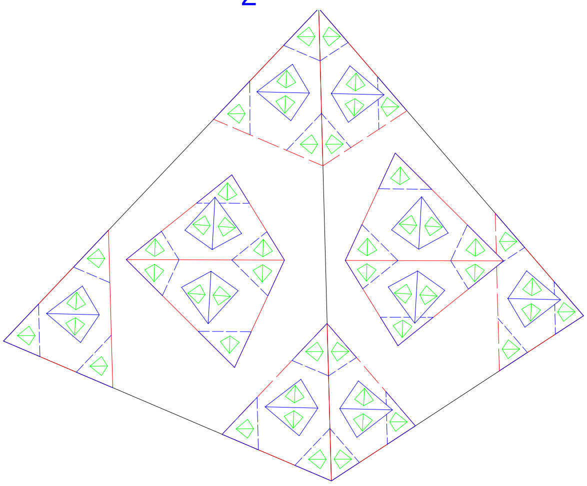
結論

當作出上述之碎形時，第 n 層

面積增加: $\left(\frac{1}{2}\right)^n \Delta ABC$

周長增加: $\frac{1}{2}\overline{BC}$

自製碎形面積≒$2\Delta ABC$



平面碎形是那麼的有趣和有規律，但是，不知道立體碎形又是怎樣呢？
於是，我們依照六邊形碎形平面來求證三角錐的碎形體積與表面積

將兩個正三角錐，以相反方向相疊，使其出現8個全等的小正三角錐。會發現小正三角錐邊長爲大正三角錐的$\frac{1}{3}$，體積變爲$\frac{1}{27}$ 。

將最大的三角錐設爲a_1　邊長爲a_1的$\frac{1}{3}$倍的三角錐爲a_2

⇒邊長爲a_1的$\frac{1}{3^n}$倍的三角錐即爲a_{n+1}

$$a_1+a_2\bullet 4+a_3\bullet 8+a_4\bullet(3\bullet 4+2\bullet 3)\bullet 8+\ldots\ldots$$
$$=a_1+\frac{1}{27}a_1\bullet 4+\left(\frac{1}{27}\right)^2 a_1\bullet 24+\left(\frac{1}{27}\right)^3 a_1\bullet 144+\ldots\ldots$$
$$=a_1+\frac{1}{27}a_1\bullet 4+\left(\frac{1}{27}\right)^2 a_1\bullet 4\bullet 6+\left(\frac{1}{27}\right)^3 a_1\bullet 4\bullet 6^2+\ldots\ldots$$

小正方形表面積是大正方形表面積的$\frac{1}{9}$

$$a_1+a_2\bullet 2\bullet 4+a_3\bullet 2\bullet 3\bullet 8+a_4\bullet 2(3\bullet 4+2\bullet 3)\bullet 8+\ldots$$
$$=a_1+\frac{1}{9}a_1\bullet 8+\left(\frac{1}{9}\right)^2 a_1\bullet 48+\left(\frac{1}{9}\right)^3 a_1\bullet 288+\ldots$$
$$=a_1+\frac{1}{9}a_1\bullet 8+\left(\frac{1}{9}\right)^2 a_1\bullet 8\bullet 6+\left(\frac{1}{9}\right)^3 a_1\bullet 8\bullet 6^2+$$
$$=a_1+\frac{8}{9}a_1+\frac{8}{9}\bullet\frac{2}{3}a_1+\frac{8}{9}\bullet\left(\frac{2}{3}\right)^2 a_1\ldots$$

周 長約等於

$$a_1+\frac{\frac{8}{9}a_1}{1-\frac{2}{3}}=\frac{11}{3}a_1$$

面 積約等於

$$a_1+\frac{\frac{4}{27}a_1}{1-\frac{2}{9}}=\frac{25}{21}a_1$$

立體碎形面積≒$\frac{25}{21}a_1$　立體碎形周長≒$\frac{11}{3}a_1$

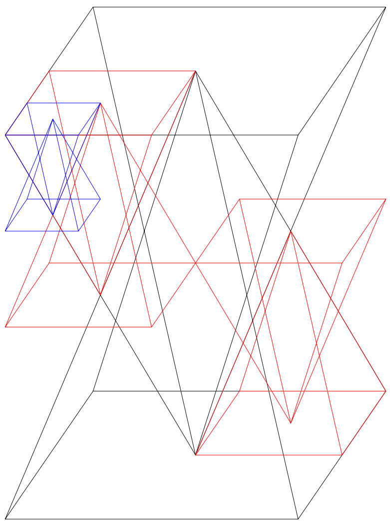
結論

當作出上述之碎形時，第 n 層

體積增加: $\left(\frac{1}{27}\right)^n a_1\bullet 4\bullet 6^{n-1}$

表面積增加: $\frac{8}{9}\bullet\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}a_1$

(五)自製「達文西」四角錐碎形



體積

a_1 爲下層最大四角錐之體積

$$a_1+4\bullet\frac{1}{8}a_1+4\bullet\frac{1}{16}a_1+\frac{3}{16}\bullet\frac{1}{8}a_1+\frac{3}{16}\bullet\left(\frac{1}{8}\right)^2a_1\ \cdots$$

$$=a_1+\frac{1}{2}a_1+\frac{1}{4}a_1+\frac{13}{128}a_1+\frac{13}{128}\bullet\frac{1}{8}a_1\cdots\cdots+\frac{13}{128}\bullet\left(\frac{1}{8}\right)^n$$

$$\frac{7}{4}a_1+\frac{\frac{13}{128}}{\frac{7}{8}}a_1=\frac{75}{28}a_1$$ $\Rightarrow$ 此圖無限延伸後體積近似值

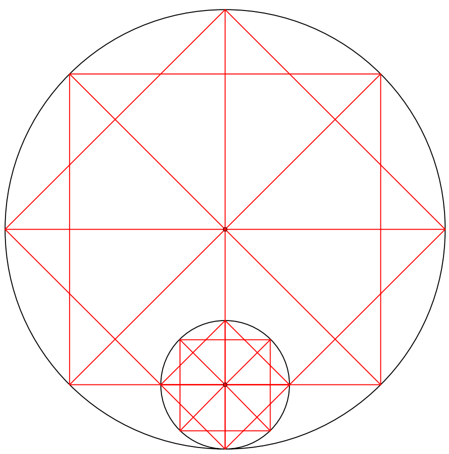
結論

當作出上述之碎形時，第 n 層體積增加:

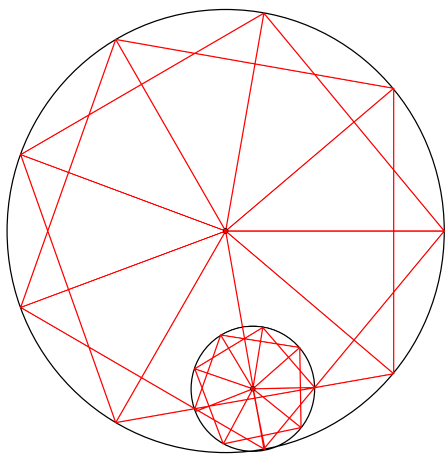
$$\frac{13}{128}\bullet\left(\frac{1}{8}\right)^{n-3}$$

（六）、其他正多邊形碎形補充（製法範例）

1、八邊形碎形



2、九邊形碎形



作法: 1.畫一圓，作正多邊形頂點，隔一頂點相連，做出星形。

2.以突出的三角形做外接圓，重複步驟一。

3.其它依此類推。

陸、 討論

一、 一開始我們先做內切及外接圖形。本來想用基本的三角形，以正多邊形加以研究。以特殊角之三角形（30 度 - 60 度 - 90 度）（45 度 - 45 度 - 90 度）和三角形內切/外接矩形當作比較，如此便能求出關聯性。發現三角形疊和/縮放矩形時周長比必成 1:2，面積比必成 1:4（但鈍角三角形之最長邊須與長方形其中一邊相等疊和！），這是我們的意外收獲。

二、 繪圖計算中，我們採用精準的紙上方格紙繪圖；在電腦則用專業的繪圖軟體（GSP 4.03 中文版），來減少繪圖上的不精準問題。

三、 由於三角形內切外接等圓形有應用到往後才教的「畢氏定理」，我們便先請教數學老師，並一起討論面積的問題，老師也順便借我們幾本有關水結晶成雪花知識的書籍，幫助研究進行。

四、 研究碎形時，我們發現小的多邊形都是接在固定的三分之一邊上，雖然曾經嘗試接在二分之一或者另外的地方，但都無法找出比較好的圖形。所以只能依照雪花結晶比較有規律性。

五、 第三個碎形雖然也屬於碎形此類，但是較爲特殊。製作此一圖形的靈感源自於煎餅的紋路，似乎也是碎形，接連不絕，綿延不斷。沒想到真的可以進行研究，也是一樣有規律。

六、 討論後發現：我們研究的圖形都可以從圓形衍生出來，十分特別。

柒、 結論

一、 依內切外接圖形的研究結果，我們得到內切與外接圖形皆有一定的周長與面積比例關係可循。（由各圖形之下方藍色結論部份分述！）

二、 依碎形的研究結果，我們發現都是由最大的圖形縮減一定比例的排在固定的邊上而成。並且周長與面積也是等比例增加，且面積範圍不會超過點與點之間的連線，十分的有規律性。

捌、 參考資料及其他

一、 嚴夢輝 譯。「函數與圖形探趣」。台北市。徐氏文教出版社（民 82）。

二、 沈文選 著。「初中卷 7 四邊形-從分解到組合」。台北市。九章出版社（民 95）。

三、 沈文選 著。「初中卷 6 三角形-從全等到相似」。台北市。九章出版社（民 95）。

四、 邢維禮 著。「國中幾何動動動(四) 」。台北市。聯經出版社（民 94）。

五、 江本 勝 著。長安靜美 譯。「生命的答案，水知道」。台北市。如何出版社（民 91）。

評　　　語

030409 碎形的「無限世界」~相似圖形之規律探討

利用幾何的概念探討碎形是學習及了解無窮等比級數的好方法。同學們的團隊努力值得鼓勵。