

中華民國第四十六屆中小學科學展覽會
作品說明書

國中組 數學科

最佳(鄉土)教材獎

030408

截彎取直

學校名稱：桃園縣縣立幸福國民中學

作者：	指導老師：
國一 莊育甄	陳錦儒
國一 黃柏璋	陳新文
國一 譚郁錚	
國一 洪一中	

關鍵詞：平行線、同底等高、折線

壹、摘要

運用平行線之概念，作出同底等高之梯形圖形，並結合了面積相等減法等量公理，導引出梯形兩對角線與兩腰所夾之面積相等，進而運用到實際生活中—土地分隔線重劃之問題解決；並進而運用相關原理去探討面積等分問題、四邊形轉換成等積三角形與多折直線還原成一條直線之研究。。

貳、研究動機

父親是一位土地代書。有天傍晚他回家後，因為工作上的不順利，而煩惱不已！原來是有兩位地主的土地劃分有問題，正鬧的不可開交，於是我便拿出父親的土地測量的平面圖來看，原因出在原本劃分的界線是條直線，卻因為地震後，土地限界位移而變成曲折的直線，因而造成土地面積劃分不均的爭議！因此找上父親要求土地重劃成原來的一條直線，而且重劃後，雙方土地面積是相等的。但是父親不知該如何劃分，所以十分困擾！而我剛好想到小學曾經學過平行線的相關圖形，但我還是不太了解該怎麼劃分，於是我便將平面圖帶到學校請教老師並和同學討論，想要進一步了解幾何作圖的奧秘，而且希望能協助父親解決問題。

參、研究目的

- 一、增加對幾何圖形題目的分析與解題的能力。
- 二、強化國小幾何概念，並運用國中所學基本原理，去尋找解題的方法。
- 三、增進對平行線的了解與梯形面積運用的觀念。
- 四、了解三角形面積相等的意義(同底等高)。
- 五、將所學原理應用在實際生活中以解決問題。

肆、研究設備與器材

紙、筆、直尺、圓規、電腦、動態幾何繪圖軟體 GSP。

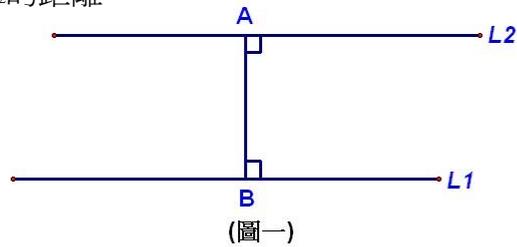
伍、研究過程與方法

從前國小的作圖方法就只是使用直尺與圓規畫圖，畫出來的圖形又無法精算其面積值，因此只能找特例或刻意的數值去作圖。但是自從老師教導我們使用動態幾何繪圖軟體 GSP 後，讓我們大開眼界！因為使用電腦作圖不但快速明確，而且可以計算面積單位絲毫不差，真是非常好用的工具。

一、平行線

【定義】在平面上垂直於同一條直線的兩條直線稱為平行線。【如圖一】

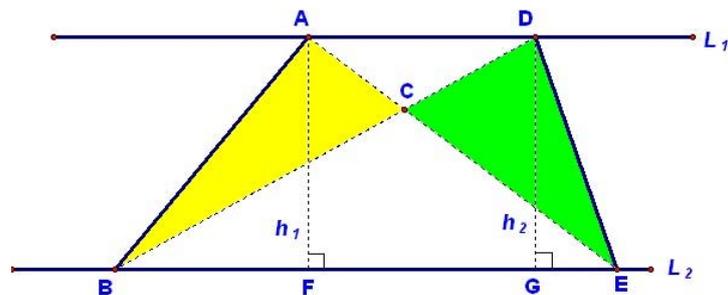
L_1 與 L_2 互相平行(或稱 L_1 與 L_2 是平行線)，並記作： $L_1//L_2$ ，
且 \overline{AB} 的長度就是 L_1 與 L_2 的距離。



二、三角形面積相等(同底等高)－證明 $\triangle ABE$ 面積= $\triangle BDE$ 面積

(一)、作法：(如圖二)

- 1、連接 \overline{AE} ， \overline{BD} 交於C點
- 2、作 $\triangle ABE$ 的高 h_1 及 $\triangle BDE$ 的高 h_2
- 3、證明 $\triangle ABE$ 面積= $\triangle BDE$ 面積



(二)、【證明】

1、 $\because h_1$ 及 h_2 為兩平行線 L_1 、 L_2 的距離 $\therefore h_1 = h_2$

2、 $\because \triangle ABE$ 面積 = $\frac{1}{2} \times h_1 \times \overline{BE}$

$$\triangle BDE \text{ 面積} = \frac{1}{2} \times h_2 \times \overline{BE}$$

$\therefore \triangle ABE$ 面積 = $\triangle BDE$ 面積($\because h_1 = h_2$)得證。(如圖二)

三、梯形面積運用的觀念－證明 $\triangle ABC$ 面積 = $\triangle CDE$ 面積

【證明】

$\because \triangle ABC$ 面積 = $\triangle ABE$ 面積 - $\triangle BCE$ 面積

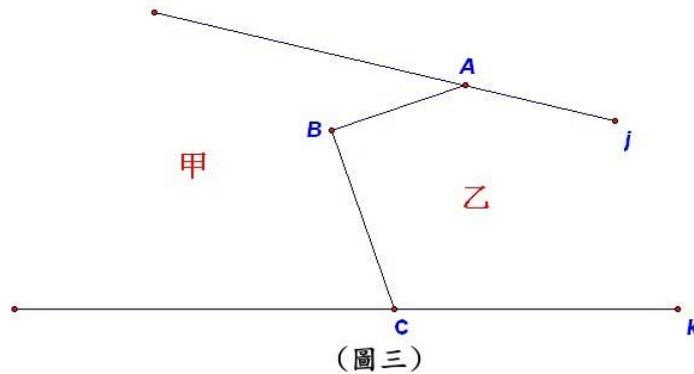
$\triangle CDE$ 面積 = $\triangle BDE$ 面積 - $\triangle BCE$ 面積

$\therefore \triangle ABC$ 面積 = $\triangle CDE$ 面積($\because \triangle ABE$ 面積 = $\triangle BDE$ 面積)得證。(如圖二)

無論任何梯形中，其兩條對角線與兩腰所圍出來的面積，皆可利用同底等高原則，以說明面積相等。

四、如何將折線畫成直線（一個轉折點）

(一)、問題：假設甲、乙兩人的土地以折線 \overline{AB} 與 \overline{BC} 為界線，問如何過 A 點作一線段，重劃土地，使得兩方都不吃虧。(如圖三)

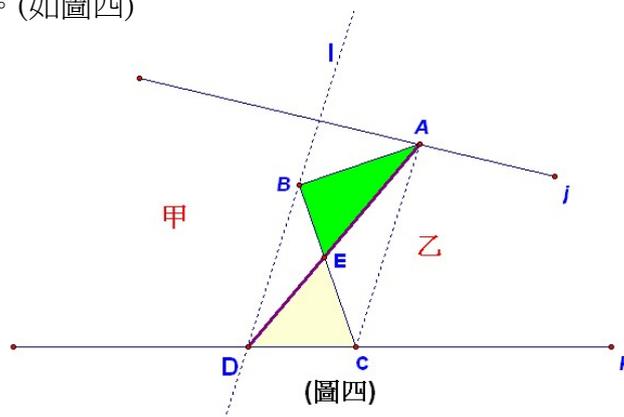


(二)、作法：

- 1、連接 \overline{AC} 。
- 2、過 B 點作直線 l 平行 \overline{AC} ，交直線 k 於 D 點。
- 3、連接 \overline{AD} ，則 \overline{AD} 即為所求。(如圖四)

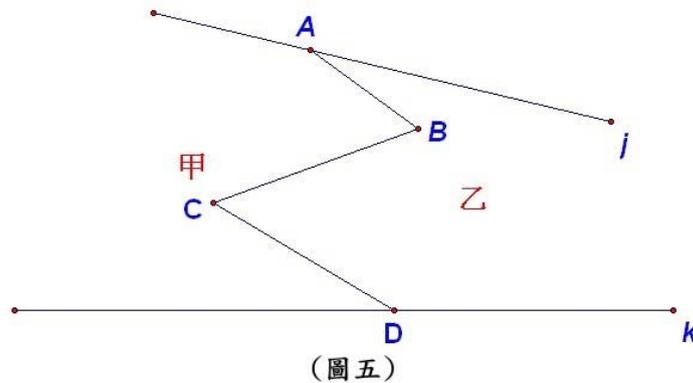
(三)、證明：

- 1、 \because 直線 l 平行 \overline{AC}
 $\therefore \Delta ABC$ 面積 = ΔACD 面積(同底等高)
- 2、 $\because \Delta ABE$ 面積 = ΔABC 面積 - ΔACE 面積
 ΔCDE 面積 = ΔACD 面積 - ΔACE 面積
 $\therefore \Delta ABE$ 面積 = ΔCDE 面積($\because \Delta ABC$ 面積 = ΔACD 面積)
- 3、把原本屬於乙的 ΔABE 面積給甲，再把屬於甲的 ΔCDE 面積給乙，
因為 ΔABE 面積 = ΔCDE 面積，所以交換土地後面積還是沒變，
即 \overline{AD} 的左邊土地屬於甲，且 \overline{AD} 的右邊土地屬於乙。
- 4、將折線 \overline{AB} 與 \overline{BC} 經由上述作法重新規劃後得到 \overline{AD} ，使得兩方都不吃虧，
故得證。(如圖四)



五、如何將兩折線畫成一條直線（二個轉折點）

(一)、問題：假設甲、乙兩人的土地以折線 \overline{AB} 、 \overline{BC} 及 \overline{CD} 為界線，問如何過 A 點作一線段，重劃土地，使得兩方都不吃虧。(如圖五)

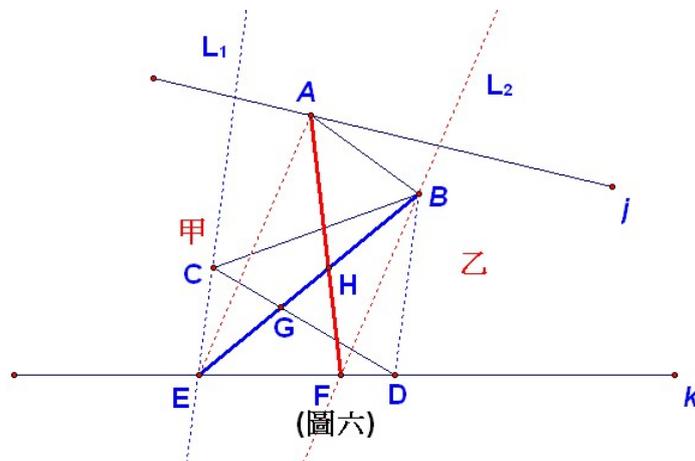


(二)、作法：

- 1、連接 \overline{BD}
- 2、過 C 點作直線 L_1 平行 \overline{BD} ，交直線 k 於 E 點
- 3、連接 \overline{BE} ， \overline{AE}
- 4、過 B 點作直線 L_2 平行 \overline{AE} ，交直線 k 於 F 點
- 5、連接 \overline{AF} ，則 \overline{AF} 即為所求。(如圖六)

(三)、證明：

- 1、 $\because L_1$ 平行 \overline{BD} ，由上述討論知 $\triangle DEG$ 面積 = $\triangle BCG$ 面積
 \therefore 可以將折線 \overline{CD} 與 \overline{BC} 換成 \overline{BE} ，甲和乙的面積不變
- 2、 $\because L_2$ 平行 \overline{AE} ，由上述討論知 $\triangle ABH$ 面積 = $\triangle EFH$ 面積
 \therefore 可以將折線 \overline{AB} 與 \overline{BE} 換成 \overline{AF} ，甲和乙的面積不變
- 3、將折線 \overline{BC} 與 \overline{CD} 經由上述作法重新規劃後得到 \overline{BE} ，再將折線 \overline{AB} 與 \overline{BE} 重新規劃後得到 \overline{AF} ，使得兩方都不吃虧，故得證。(如圖六)



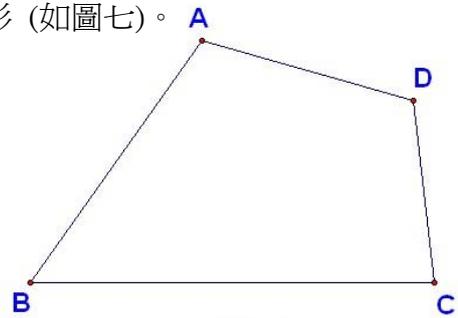
陸、研究結果

- 一、在平行線上任取兩三角形，底邊長度一樣，兩三角形面積一定相等(同底等高原則)。
- 二、利用面積相等原理，作替換，可以將任意多的折線，置換成一直線。
- 三、利用面積相等原理作替換，可以將任意四邊形換成等面積的三角形。
- 四、可以在三角形一邊上的一個點過點作一直線將三角形的面積等分。

柒、討論

經過我們熱烈討論後，我們不禁想問如果梯形面積的轉化如此有趣，是否簡單的幾何圖形如任意三角形或四邊形也可以互為轉化呢？抑或是任意三角形可否被任意直線所劃分成兩塊相等的面積呢（除了中線之外）？另外轉折點更多時是否也可以比照所研究的方法而作出來呢？於是我們又開始進一步作討論了：

一、問題：如何將一個四邊形化成等面積的三角形 (如圖七)。



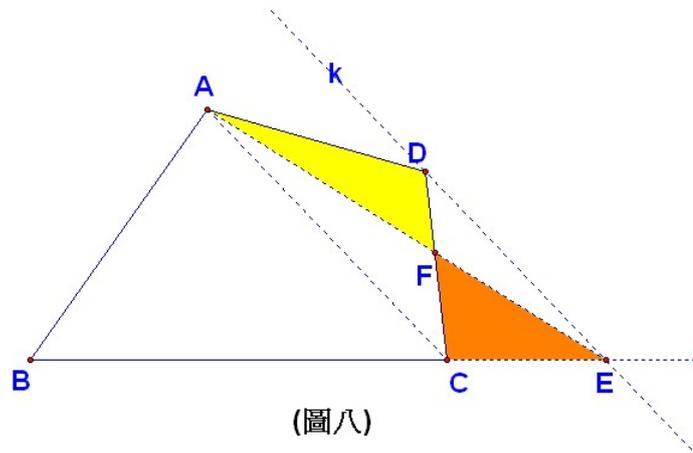
(圖七)

(一)、作法：

- 1、連接 \overline{AB} 。
- 2、過 D 點作直線 k 平行 \overline{AB} ，交直線 \overline{BC} 於 E 點。
- 3、連接 \overline{AE} ，則 $\triangle ABE$ 即為所求。(如圖八)

(二)、證明：

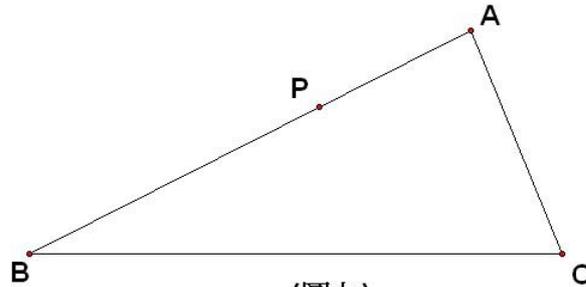
- 1、 $\because \overline{AC}$ 平行直線 k
 $\therefore \triangle ADF$ 面積 = $\triangle CEF$ 面積
- 2、 \because 四邊形 ABCD 面積 = 四邊形 ABCF 面積 + $\triangle ADF$ 面積
 $\triangle ABE$ 面積 = 四邊形 ABCF 面積 + $\triangle CEF$ 面積
 \therefore 四邊形 ABCD 面積 = $\triangle ABE$ 面積 ($\because \triangle ADF$ 面積 = $\triangle CEF$ 面積) (如圖八)



(圖八)

二、問題：設 P 為 $\triangle ABC$ 一邊上的一個點，試過 P 點作一直線將 $\triangle ABC$ 的面積等分。

(如圖九)



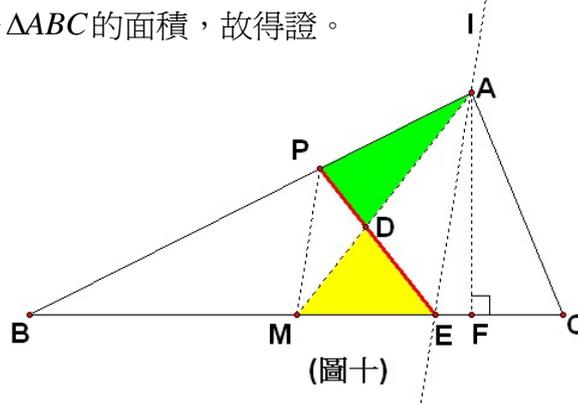
(圖九)

(一)、作法：

- 1、取 \overline{BC} 的中點 M ，連接 \overline{PM}
- 2、過 A 作直線 l 平行 \overline{PM} ，交 \overline{BC} 於 E 點
- 3、連接 \overline{PE} ， \overline{PE} 即為所求。(如圖十)

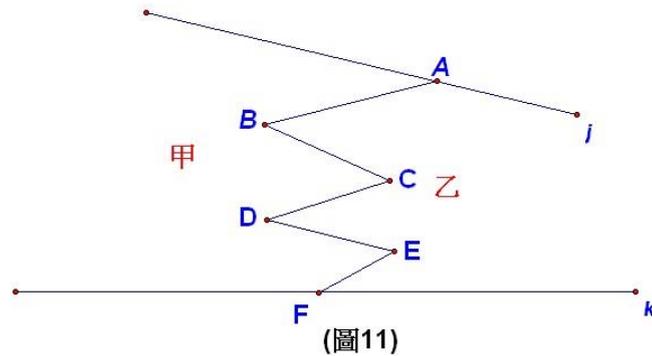
(二)、證明：(如圖十)

- 1、 $\because M$ 為 \overline{BC} 的中點 $\therefore \overline{BM} = \overline{CM}$
- 2、 $\because \triangle ABM$ 面積 $= \frac{1}{2} \times \overline{BM} \times \overline{AF}$ $\triangle ACM$ 面積 $= \frac{1}{2} \times \overline{CM} \times \overline{AF}$
 $\therefore \triangle ABM$ 面積 $= \triangle ACM$ 面積 ($\because \overline{BM} = \overline{CM}$)
- 3、 \because 直線 l 平行 \overline{PM}
 $\therefore \triangle AEP$ 面積 $= \triangle AEM$ 面積 (同底等高)
 且 $\triangle ADP$ 面積 $= \triangle DEM$ 面積 (同時減去 $\triangle ADE$ 面積)
- 4、 $\triangle BPE$ 面積 $=$ 四邊形 $BMDP$ 面積 $+ \triangle DEM$ 面積
 $=$ 四邊形 $BMDP$ 面積 $+ \triangle ADP$ 面積
 $(\because \triangle ADP$ 面積 $= \triangle DEM$ 面積)
 $= \triangle ABM$ 面積
- 又四邊形 $ACEP$ 面積 $=$ 四邊形 $ACED$ 面積 $+ \triangle ADP$ 面積
 $=$ 四邊形 $ACED$ 面積 $+ \triangle DEM$ 面積
 $(\because \triangle ADP$ 面積 $= \triangle DEM$ 面積)
 $= \triangle ACM$ 面積
- 5、 $\triangle BPE$ 面積 $= \triangle ABM$ 面積 $= \triangle ACM$ 面積 $=$ 四邊形 $ACEP$ 面積
 則 \overline{PE} 平分 $\triangle ABC$ 的面積，故得證。



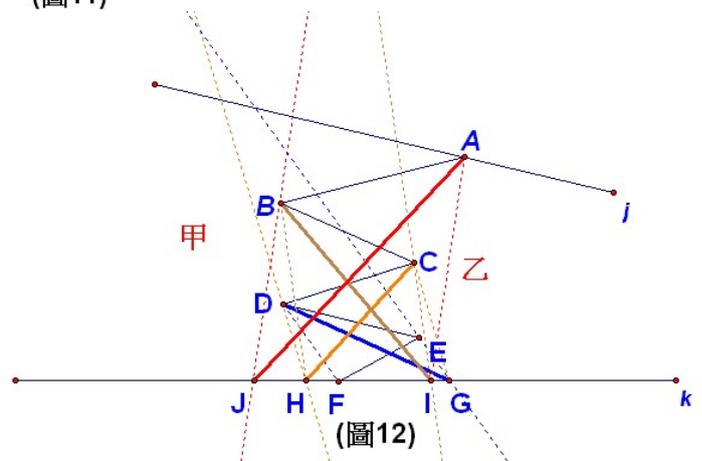
(圖十)

三、問題：多折問題—假設甲、乙兩人的土地以折線 \overline{AB} 、 \overline{BC} 、 \overline{CD} 、 \overline{DE} 和 \overline{EF} 為界線，試問如何過 A 點作一直線段，重劃土地後，使得雙方都不吃虧。



(一)、作法：(如圖 12)

- 1、將折線 \overline{DE} 、 \overline{EF} 換成 \overline{DG} 。
- 2、將折線 \overline{CD} 、 \overline{DG} 換成 \overline{CH} 。
- 3、將折線 \overline{BC} 、 \overline{CH} 換成 \overline{BI} 。
- 4、將折線 \overline{AB} 、 \overline{BI} 換成 \overline{AJ} 。
- 5、 \overline{AJ} 即為所求。



捌、結論

利用國小已有簡單幾何圖形的先備知識，作進一步的幾何原理（平行線性質）與原則（同底等高）之推導。當面對實際生活中的問題時，能根據所學去作深入的分析與應用。就如同研究中所討論，可將平面上任意折線圖形作成直線圖形的轉換，這是一個十分有用又有趣的數學應用。

玖、參考資料

- 一、蔡聰明；數學的發現趣談；初版；台北；三民書局；P.31；2000
- 二、藍紀正、朱恩寬譯；歐幾里德—幾何原本；一版；台北；九張出版社；1999

評語

030408 截彎取直

從生活中取材，應用數學知識解決實際生活問題，立意頗佳。適合作為與鄉土聯結的數學教材。