中華民國第四十六屆中小學科學展覽會
作品說明書

國中組　數學科

030406

漩渦鳴人－n 次方和黑洞的探討

學校名稱： 臺中市立安和國民中學

作者：	指導老師：
國一 張書裴	李國賢
國一 廖思虹	陳鑫達

關 鍵 詞：n 次方和、黑洞

漩渦鳴人－n 次方和黑洞探討

摘要

本研究主要是研究將任意一個數字的每個位數數字分別求一次方和、二次方和、三次方和、……，觀察其是否具有特殊的性質。我們得出以下的結論：

一、任意一個數字經過數次求一次方和（即數字和）的動作後，一定會得到「1」、「2」、「3」、…、「9」等 9 個數的其中一個數。

二、任意一個數字經過數次求二次方和的動作後，一定會得到「1」或者落到「16→37→58→89→145→42→20→4→16」的循環中。

三、任意一個數字經過數次求三次方和的動作後，一定會得到「1」、「153」、「370」、「371」、「407」或落到「136→244→136」、「1459→991→1459」、「217→352→160→217」、「133→55→250→133」的循環中。

四、四次方和至十二次方和的上界

1.任意數字經過數次求四次方和的上界為 22605。

2.任意數字經過數次求五次方和的上界為 295246。

3.任意數字經過數次求六次方和的上界為 3188710。

4.任意數字經過數次求七次方和的上界為 33480911。

5.任意數字經過數次求八次方和的上界為 344374024。

6.任意數字經過數次求九次方和的上界為 3486784913。

7.任意數字經過數次求十次方和的上界為 34867845034。

8.任意數字經過數次求十一次方和的上界為 345191657747。

9.任意數字經過數次求十二次方和的上界為 3389154441868。

五、m 次方和的上界：任意數字的 m 次方和的上界為 $m\times 9^{m}+b^{m}$，其中 b 為介於 1 至 9 的整數

壹、研究動機

有一天我和同學很無聊，就把 16 的兩個位數數字分別二次方後相加，得到 37，重複求二次方和的動作，接著依序得 37、58、89、145、42、20、4、16。我們發現最後又回到 16，亦即將一個數求位數數字二次方和，好像會形成一個循環，對於這個現象我們覺得很神奇，於是我們去請教老師，老師鼓勵我們可以試著研究其中的規律。

貳、研究目標

一、重複「將一個數字每個位數數字一次方之後相加」的動作，最後會有什麼結果？
二、重複「將一個數字每個位數數字二次方之後相加」的動作，最後會有什麼結果？
三、重複「將一個數字每個位數數字三次方之後相加」的動作，最後會有什麼結果？
四、重複「將一個數字每個位數數字 m 次方之後相加」的動作，最後所得的結果的上界爲何？

參、研究過程

一、重複「將一個數字每個位數數字一次方之後相加」的動作的探討

定義 1

$\underline{a_1a_2...a_n}$ 爲表示一個有 n 位數的數字，其中，a_n 爲個位數數字、a_{n-1} 爲十位數數字、依此類推，其中，a_1 爲 1~9 的整數，$a_2,...,a_n$ 爲 0~9 的整數。

引理 1

若 $\underline{a_1a_2...a_n}$ 與 $\underline{b_1b_2...b_n}$ 的組成數字相同，但組成順序不一樣，將此兩個數字的每個位數數字 m 次方之後相加，則和會相等。

證明：

設 $S_a = a_1^m + a_2^m + ... + a_n^m$ ， $S_b = b_1^m + b_2^m + ... + b_n^m$

因爲 $\underline{a_1a_2...a_n}$ 與 $\underline{b_1b_2...b_n}$ 的組成數字相同

所以 $S_a = S_b$

亦即，$\underline{a_1a_2...a_n}$ 與 $\underline{b_1b_2...b_n}$ 的每個位數數字 m 次方之後相加，和會相等。 ■

引理 2
若 $\underline{a_1a_2...a_n}$ 爲一任意正整數，則
$a_1\times10^{n-1}+a_2\times10^{n-2}+...+a_{n-1}\times10+a_n\times1\equiv a_1+a_2+...+a_{n-1}+a_n\pmod 9$。

證明：

設任意一個數字爲 $\underline{a_1a_2...a_n}$，則 $\underline{a_1a_2...a_n}=a_1\times10^{n-1}+a_2\times10^{n-2}+...+a_{n-1}\times10+a_n\times1$

因爲 1、10、10^2、⋯、10^{n-1} 除以 9 之後，所得的餘數均爲 1。

根據同餘的性質，可得

$a_1\times10^{n-1}\equiv a_1\pmod 9$

$a_2\times10^{n-2}\equiv a_2\pmod 9$

$\cdots$

$a_{n-1}\times10\equiv a_{n-1}\pmod 9$

$a_n\times1\equiv a_n\pmod 9$

則 $a_1\times10^{n-1}+a_2\times10^{n-2}+...+a_{n-1}\times10+a_n\times1\equiv a_1+a_2+...+a_{n-1}+a_n\pmod 9$ ■

定理 1
任意一個數字經過數次求一次方和（即數字和）的動作後，一定會得到「1」、「2」、「3」、⋯、「9」等 9 個數的其中一個數。

證明：

設任意一個數字爲 $\underline{a_1a_2...a_n}$，根據引理 2 可得

$a_1\times10^{n-1}+a_2\times10^{n-2}+...+a_{n-1}\times10+a_n\times1\equiv a_1+a_2+...+a_{n-1}+a_n\pmod 9$

若 $a_1+a_2+...+a_{n-1}+a_n$ 不爲「1」、「2」、「3」、⋯、「9」等 9 個數的其中一個數，則重複引理 2 相同的步驟，直到所得的結果爲「1」、「2」、「3」、⋯、「9」等 9 個數的其中一個數。

因此，任意一個數字經過數次求一次方和（即數字和）的動作後，一定會得到「1」、「2」、「3」、⋯、「9」等 9 個數的其中一個數。 ■

二、重複「將一個數字每個位數數字二次方之後相加」的動作的探討

我們先求出 1~100 的位數二次方和會有什麼結果，利用引理 1 的結果，我們發現不需要求 1~100 中的每一個數，只要求表 1 中的 54 個的數即可。

表 1

2 個位數數字不一樣的情況：（「1」要視爲是十位數是 0，個位數是 1。）共有 45 個。
1，2，3，4，5，6，7，8，9，12，13，14，15，16，17，18，19，23，24，25，26，27，28，29，34，35，36，37，38，39，45，46，47，48，49，56，57，58，59，67，68，69，78，79，89
2 個位數數字都一樣的情況：共有 9 個。
11，22，33，44，55，66，77，88，99

我們先各別將以上 54 個數的每個位數數字二次方和求出它的結果，例如：

2 的結果如下：

2→4→16→37→58→89→145→42→20→4→16→…→42→20→4→…

7 的結果如下：

7→49→97→130→10→1→1→…→1

將每一個數都做出來後，我們再將它們連接起來，發現以下的結果，如圖 1-1 和圖 1-2。數字有圓圈的部份，即是表 1 的 54 個數字。

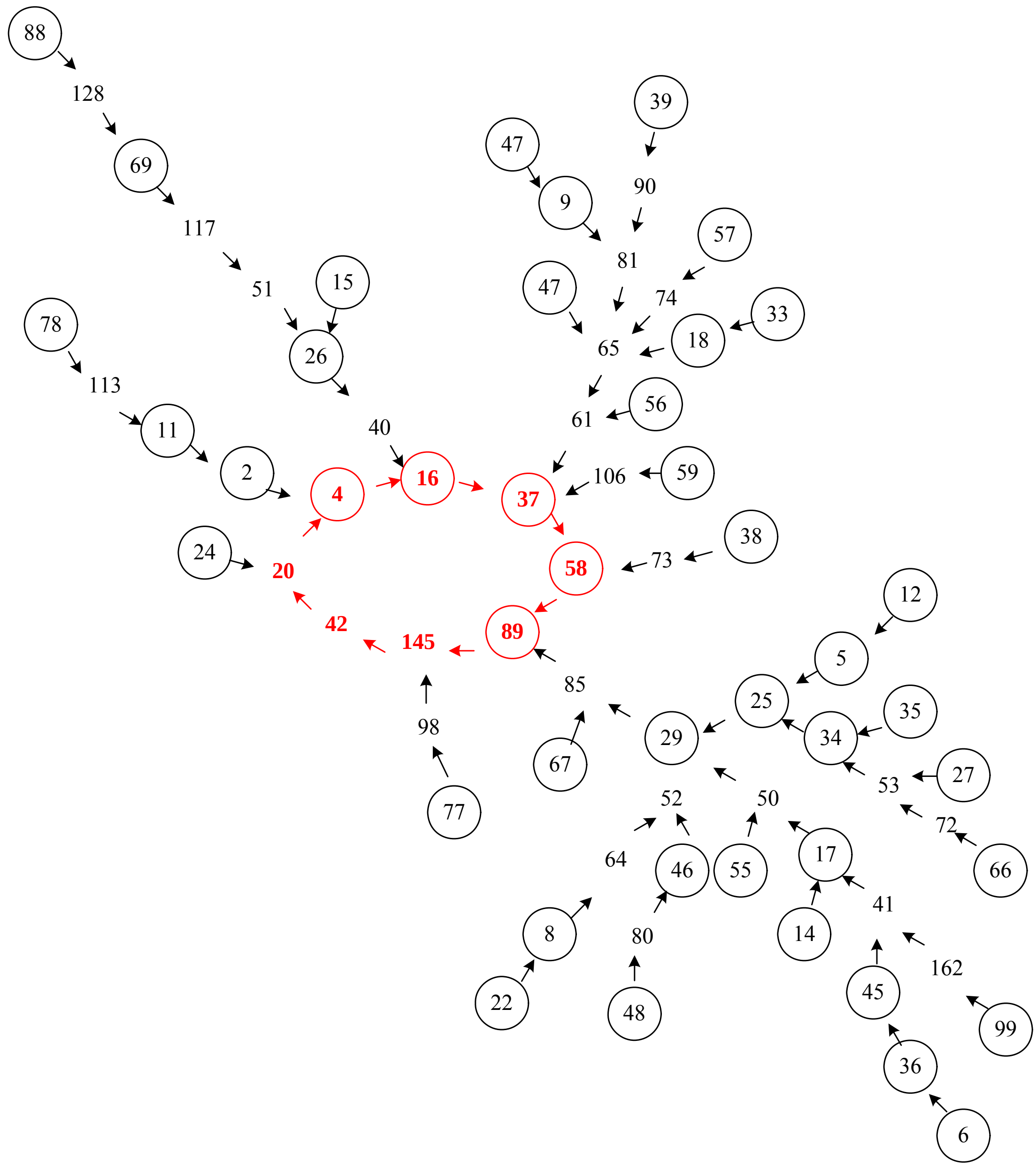


圖 1-1

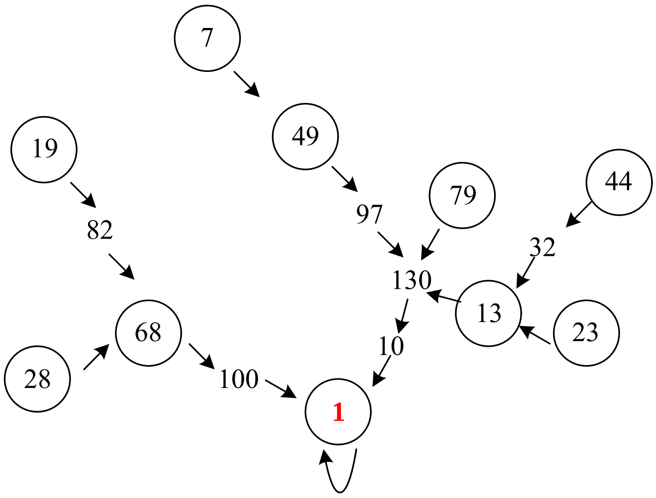


圖 1-2

圖 1-1 會形成一個像漩渦的圖形，漩渦的中心是由 16、37、58、89、145、42、20、4 構成，如圖 2 所示。圖 1-2 中所有的數最後都會歸結到 1。

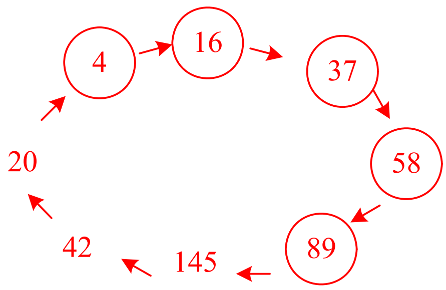


圖 2

接著我們想到，圖 1-1 和圖 1-2 我們要把它擴展到多大的數才行？

我們先觀察 3 位數的部份。

設 $\underline{a_1a_2a_3}$ 爲一個任意的 3 位數

1. $\underline{a_1a_2a_3}$ 的每個位數數字的二次方和要最大，是當 $\underline{a_1a_2a_3}$=999 時，即

$$a_1{}^2+a_2{}^2+a_3{}^2=9^2+9^2+9^2=243$$

亦即，所有 3 位數的每個位數數字二次方和都不大於 243。

2.所有不大於 243 的數中，每個位數數字二次方和要最大，是當 $\underline{a_1a_2a_3}$=199 時，即

$$a_1^2+a_2^2+a_3^2=1^1+9^2+9^2=163$$

亦即，所有不大於 243 的數，其每個位數數字二次方和都不大於 163。

3.所有不大於 163 的數中，每個位數數字二次方和要最大，是當 $\underline{a_1a_2a_3}$=99，即：

$$a_1^2+a_2^2+a_3^2=0^2+9^2+9^2=162$$ 。

亦即，所有不大於 163 的數，其每個位數數字二次方和都不大於 162。

因此，我們就試著求出 100~162 每個位數數字二次方和的結果，發現除 159 外，其餘的數只要求一次每個位數數字二次方和便會小於 100，而 159 也只要求 2 次，就會小於 100（159→107→50）。

對於任意位數的數字，我們得到以下結果：

引理 3 任何位數的數字經過數次求二次方和的動作後，都會落到 1~99 之間。

證明：

1.由前面的討論可知一個 3 位數的數字，經過數次求二次方和的動作後，一定都會落到 1~99 之間。

2. $\underline{a_1a_2...a_n}$ 的每個位數數字的二次方和要最大，是當 $\underline{a_1a_2...a_n}$=99…9 時，即

$$a_1{}^2+a_2{}^2+...+a_n{}^2=9^2+9^2+...+9^2=81n$$

亦即，所有的 n 位數的每個位數數字二次方和都不大於 81n。

因此，若 n 不大於 12，則 $81n<1000$，亦即 81n 會是一個 3 位數或 2 位數。

也就是說，對於 2 位數至 12 位數，求二次方和數次後，一定會落到 1~99 之間。

3.若 $n<12345679012$，則 $81n<1000000000000$，亦即 81n 會是一個小於 1000000000000 的數字，也就是最大爲 12 位數的數字。

因此，對於 13 位數至 12345679012 位數的數字而言，求二次方和一次後，一定會落到 12 位數以下，再根據第 1 點，最後必落到 1~99 之間。

4.重複相同的步驟，即可推至對於「任何位數的數字經過數次求二次方和的動作後，都會落到 1~99 之間。」 ■

定理 2 任意一個數字經過數次求二次方和的動作後，一定會得到「1」或者落到「16→37→58→89→145→42→20→4→16」的循環中。

證明：

根據引理 1 和引理 2，以及圖 1-1 和圖 1-2 的結果，這是很明顯的結論。 ■

二、重複「將一個數字每個位數數字三次方之後相加」的動作的探討

有了求二次方和的經驗後，在探討位數數字三次方和的時候，我們先猜測所有的數字經過數字求三次方和的動作後，一定會落至 1~999 之間，所以先討論以下的內容：

設 $\overline{a_1a_2a_3a_4}$ 爲一個任意的 4 位數

1. $\overline{a_1a_2a_3a_4}$ 的每個位數數字的三次方和要最大，是當 $\overline{a_1a_2a_3a_4}$=9999 時，即

$a_1^3+a_2^3+a_3^3+a_4^3=9^3+9^3+9^3+9^3=2916$

亦即，所有 4 位數的每個位數數字三次方和都不大於 2916。

2.所有不大於 2916 的數中，每個位數數字三次方和要最大，是當 $\overline{a_1a_2a_3a_4}$=1999 時，即

$a_1^3+a_2^3+a_3^3+a_4^3=1^3+9^3+9^3+9^3=2188$

亦即，所有不大於 2916 的數，其每個位數數字三次方和都不大於 2188。

3.所有不大於 2188 的數中，每個位數數字三次方和要最大，是當 $\overline{a_1a_2a_3a_4}$=1999 時，即

$a_1^3+a_2^3+a_3^3+a_4^3=1^3+9^3+9^3+9^3=2188$。

因此，我們就試著求出 1000~2188 中，每個位數數字三次方和的結果，發現除了表 2 這些數之外，其餘的數只要求一次每個位數數字三次方和便會小於 1000。

表 2

1079，1088，1089，1099，1179，1188，1189，1199，1279，1288，1289，1299，1379，1388，1389，1399，1479，1488，1489，1499，1579，1588，1589，1599，1669，1679，1688，1689，1699，1777，1778，1779，1788，1789，1799，1879，1889，1899，1999，2079，2088，2089，2099，2179，2188

我們將表 2 的數都求出它們每個位數數字三次方和的結果，如下表 3：

表 3

1079→1073→371	1399→1468→793	1777→1030→28
1088→1025→134	1479→1137→372	1778→1199→1460→281
1089→1242→81	1488→1089→1242→81	1779→1416→282
1099→1459→919	1489→1306→244	1788→1368→756
1179→1074→408	1499→1523→161	1789→1585→763
1188→1026→225	1579→1198→1243→100	1799→1802→521
1189→1243→100	1588→1150→127	1889→1754→533
1199→1460→281	1589→1367→587	1899→1971→1074→408
1279→1081→514	1599→1584→702	1999→2188→1033→55
1288→1033→55	1669→1162→226	2079→1080→513
1289→1250→135	1678→1072→352	2088→1032→36
1299→1467→624	1679→1289→1250→134	2089→1249→802
1379→1100→2	1688→1241→74	2099→1466→497
1388→1052→134	1689→1458→702	2179→1081→514
1389→1269→954	1699→1675→685	2188→1033→55

從表 3 可知，表 2 的所有數只要經過數次求三次方和的動作後，一定都會出現小於 1000 的數。也就是說，任意一個 4 位數，只要經過數次求三次方和的動作後，一定都會出現小於 1000 的數。

因此，我們可以獲得引理 3 的結論。

引理 4

任何位數的數字經過數次求三次方和的動作後，都會落到 1~999 之間。

證明：

1.由前面的討論可知一個 4 位數的數字，經過數次求三次方和的動作後，一定都會落到 1~999 之間。

2. $\underline{a_1a_2...a_n}$ 的每個位數數字的三次方和要最大，是當 $\underline{a_1a_2...a_n}$=99…9 時，即

$$a_1^{\ 3}+a_2^{\ 3}+...+a_n^{\ 3}=9^3+9^3+...+9^3=729n$$

亦即，所有的 n 位數的每個位數數字三次方和都不大於 729n。

因此，若 n 不大於 13，則 $729n<10000$ ，亦即 729n 會是一個 4 位數以下的數。

也就是說，對於 5 位數至 13 位數，求三次方和數次後，一定會落到 1~999 之間。

3.若 $n<13717421124$ ，則 $729n<10000000000000$ ，亦即 729n 會是一個小於 10000000000000 的數字，也就是最大爲 13 位數的數字。

因此，對於 14 位數至 13717421124 位數的數字而言，求三次方和一次後，一定會落到 13 位數以下，再根據第 1 點和第 2 點，最後必落到 1~999 之間。

4.重複相同的步驟，即可推至對於「任何位數的數字經過數次求三次方和的動作後，都會落到 1~999 之間。」 ■

定理 3

任意一個數字經過數次求三次方和的動作後，一定會得到「1」、「153」、「370」、「371」、「407」或落到「136→244→136」、「1459→991→1459」、「217→352→160→217」、「133→55→250→133」的循環中。

證明：

1.利用引理 1 和引理 3 的結果，在 1~999 中，找出所有要求三次方和的代表數，如表 4 的數，它們的三次方和結果，再把它們連接起來即可。

表 4

3 個位數數字不一樣的情況：（「12」要視爲是百位數是 0，十位數是 1，個位數是 2）共有 120 個。

12，13，14，15，16，17，18，19，23，24，25，26，27，28，29，34，35，36，37，38，39，45，46，47，48，49，56，57，58，59，67，68，69，78，79，89，123，124，125，126，127，128，129，134，135，136，137，138，139，145，146，147，148，149，156，157，158，159，167，168，169，178，179，189，234，235，236，237，238，239，245，246，247，248，249，256，257，258，259，267，268，269，278，279，289，345，346，347，348，349，356，357，358，359，367，368，369，378，379，389，456，457，458，459，467，468，469，478，479，489，567，568，569，578，579，589，678，679，689，789

2 個位數數字一樣，另一個不一樣的情況：（「1」要視爲是百位數和十位數都是 0，個位數是 1；「11」要視爲是百位數是 0，十位數和個位數都是 1）共有 90 個。

1，2，3，4，5，6，7，8，9，11，22，33，44，55，66，77，88，99，112，113，114，115，116，117，118，119，122，133，144，155，166，177，188，199，223，224，225，226，227，228，229，233，244，255，266，277，288，299，334，335，336，337，338，339，344，355，366，377，388，399，445，446，447，448，449，455，466，477，488，499，556，557，558，559，566，577，588，599，667，668，669，677，688，699，778，779，788，799，889，899

3 個位數數字都一樣的情況：共有 9 個。

111，222，333，444，555，666，777，888，999

2.我們先各別將以上 219 個數的每個位數數字三次方和求出它們的結果，例如：
59 的結果如下：

59→846→792→1080→513→153

66 的結果如下：

66? 432? 99? 1442? 137? 371? 371

3.接著，再將它們連接起來，發現以下的結果，如圖 3-1 至圖 3-9。數字有圓圈的部份，即是表 4 的 218 個數字。

778 → 1198 → 1243 → 100 → 1 ← 10 ← 112

圖 3-1

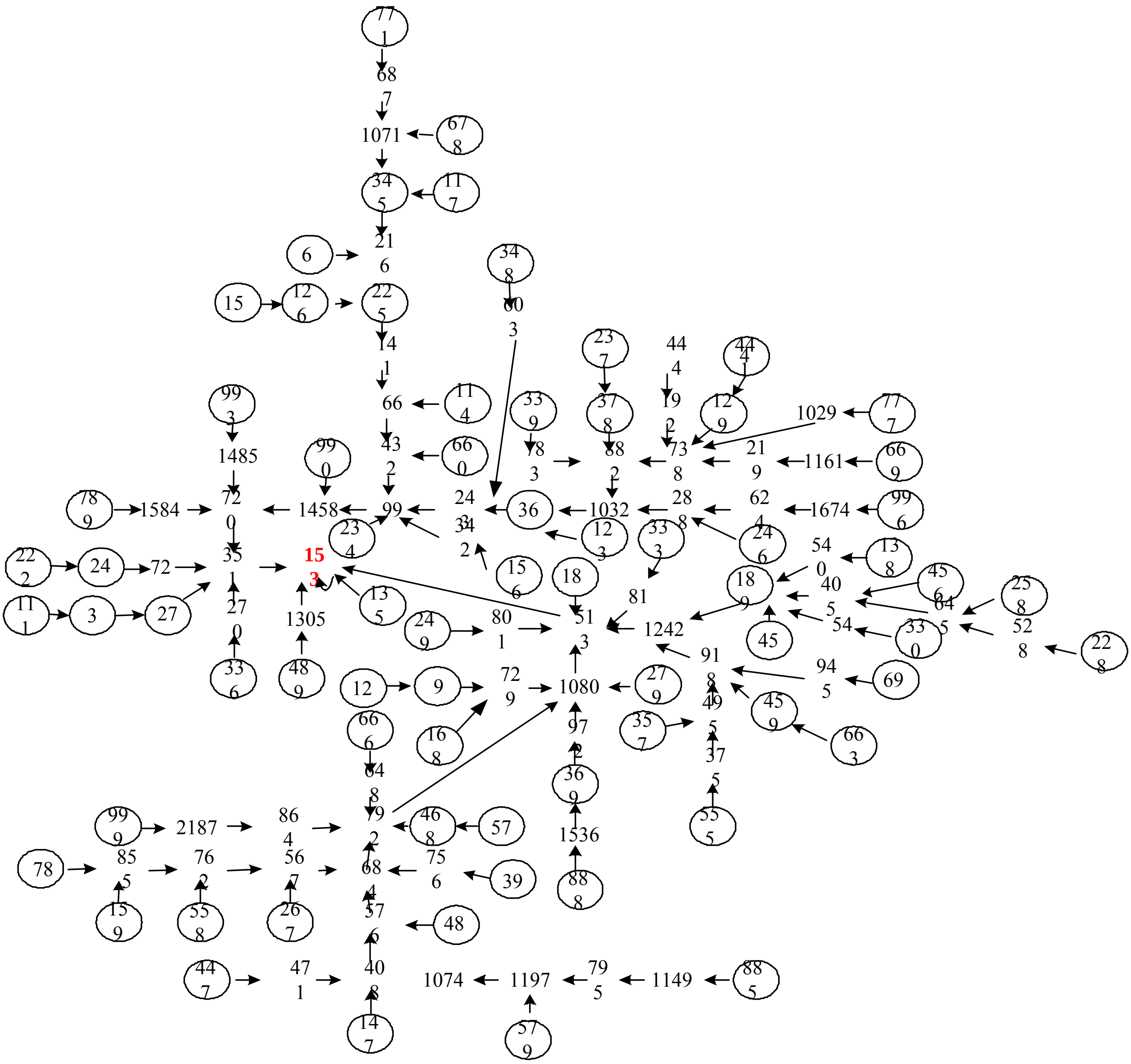


圖 3-2

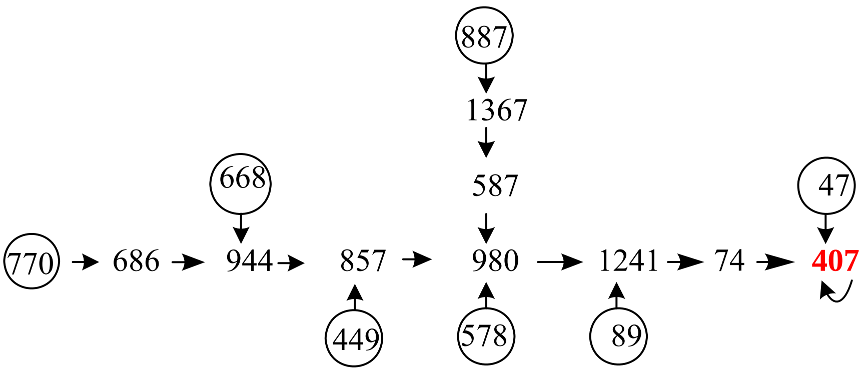


圖 3-3

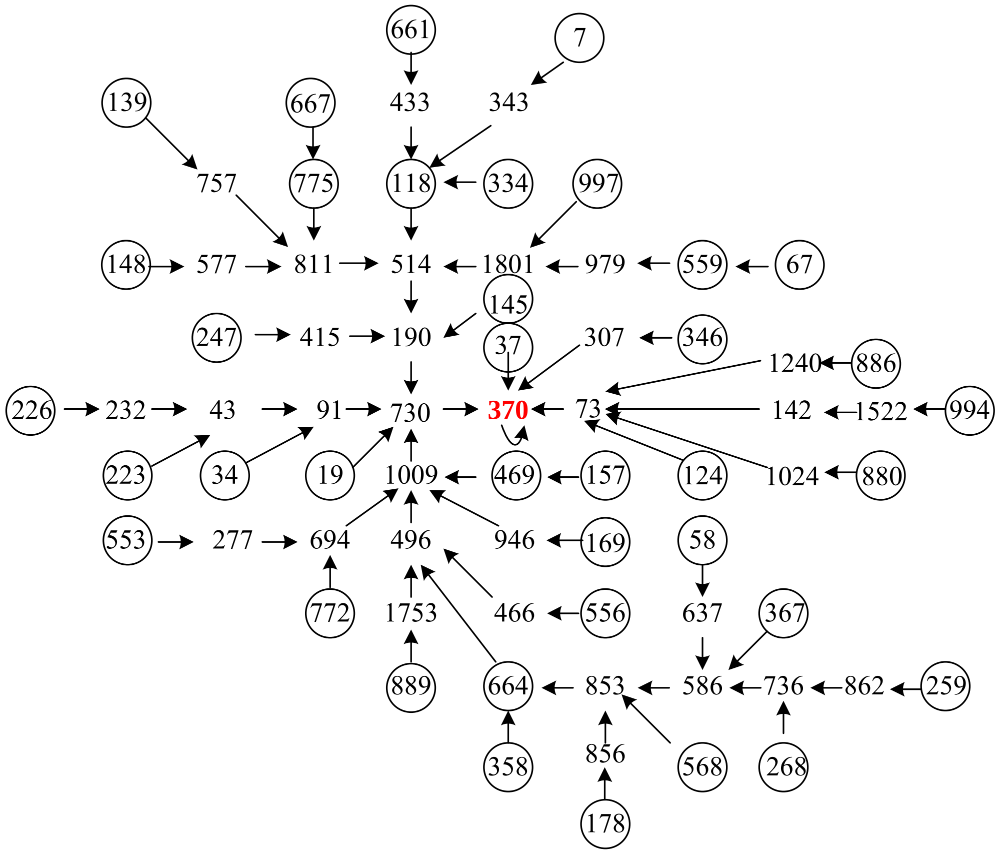

661
7
139
667
433
343
757
775
118
334
997
148
577
811
514
1801
979
559
67
145
247
415
190
307
346
37
1240
886
226
232
43
91
730
370
73
142
1522
994
223
34
19
1009
469
157
124
1024
880
553
277
694
496
946
169
58
772
1753
466
556
637
367
889
664
853
586
736
862
259
358
856
568
268
178

圖 3-4

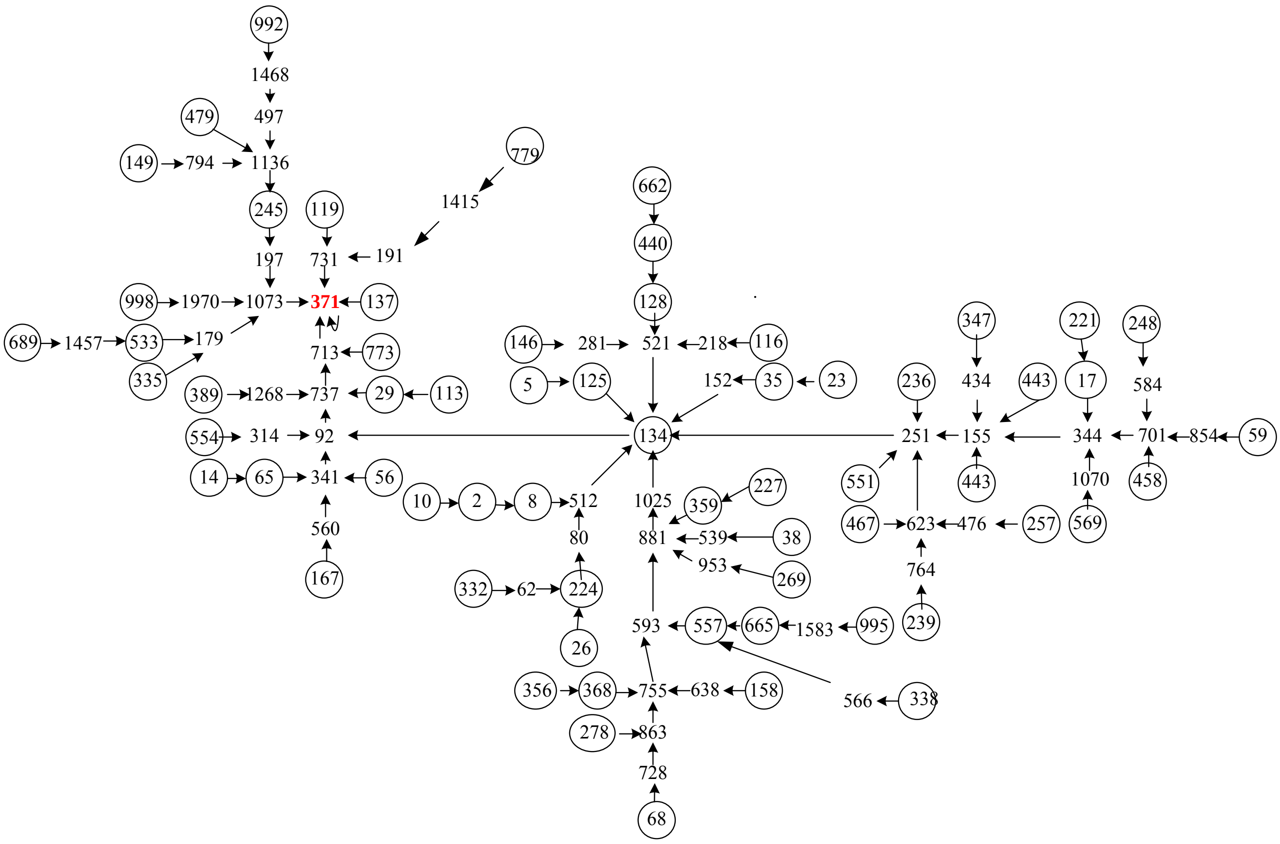
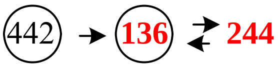
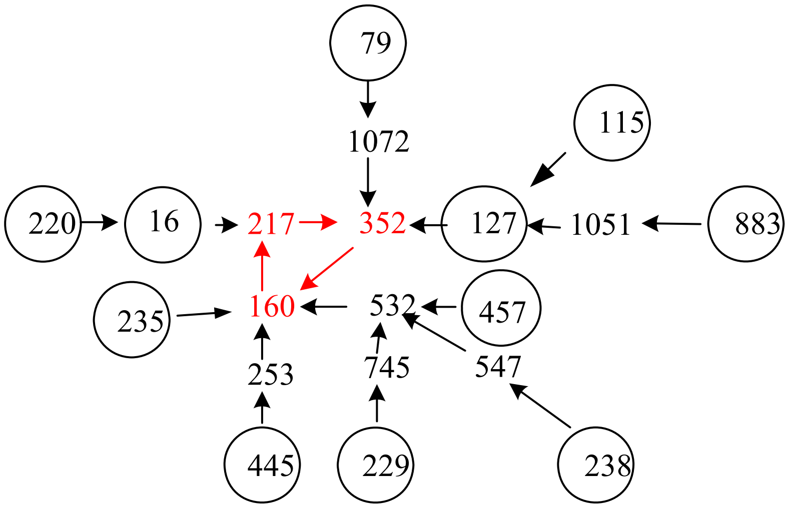
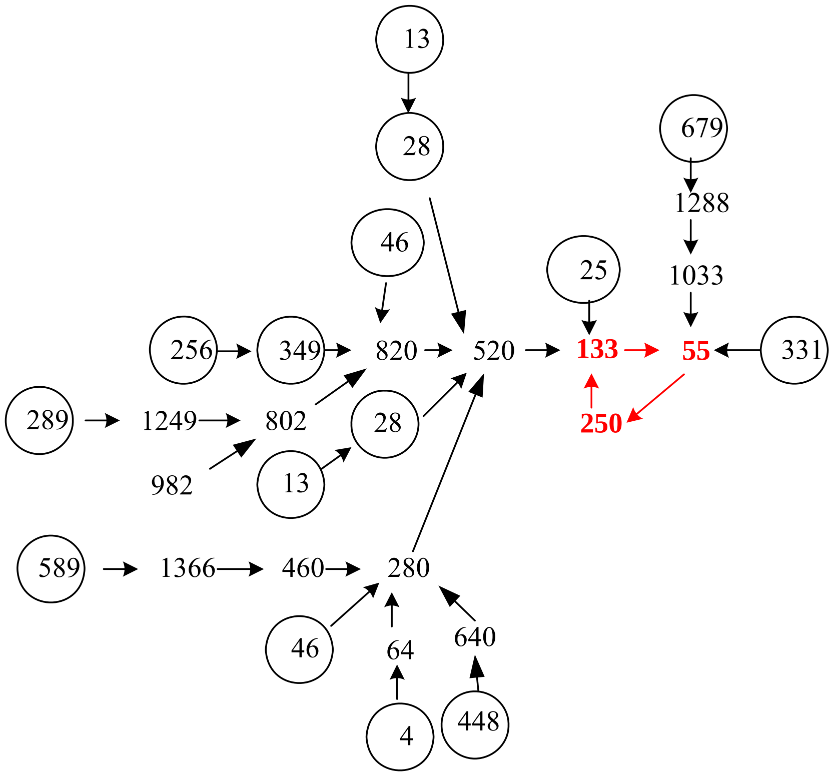

992
1468
479
497
149
794
1136
779
1415
245
119
662
197
731
191
440
998
1970
1073
371
137
128
689
1457
533
179
146
281
521
218
116
347
221
248
335
713
773
5
125
152
35
23
236
434
443
17
584
389
1268
737
29
113
554
314
92
134
251
155
344
701
854
59
14
65
341
56
551
443
1070
458
10
2
8
512
1025
359
227
467
623
476
257
569
560
80
881
539
38
953
269
764
167
332
62
224
593
557
665
1583
995
239
26
356
368
755
638
158
566
338
278
863
728
68

圖 3-5


442
136
244
圖 3-6


79
1072
115
220
16
217
352
127
1051
883
235
160
532
457
547
253
745
445
229
238
圖 3-7


13
28
679
1288
46
25
1033
256
349
820
520
133
55
331
289
1249
802
28
250
982
13
589
1366
460
280
46
64
640
4
448
圖 3-8

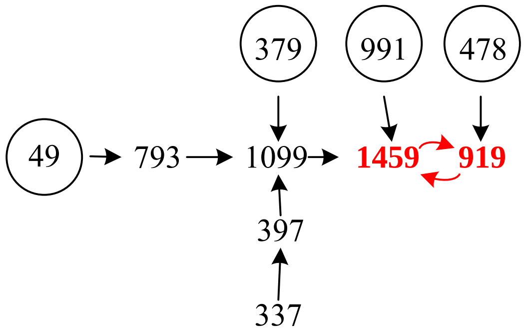


圖 3-9

四、重複「將一個數字每個位數數字 m 次方之後相加」的上界探討

1.四次方的情況

我們分別求出 n 位數，當 n=1 至 7 時，四次方和的最大值及其位數。如下表 5：

表 5

n	1	2	3	4	5	6	7
四次方和的最大值(註)	5651	11302	16953	22604	28255	33906	39557
最大值的位數	4	5	5	5	5	5	5

註：n 位數要產生四次方和的最大值，必定是當每個位數數字均為 9 時。

由表 5 可觀察出，當數字的位數大於 5 時，其四次方和的最大值均小於該數字，由此我們可以導出任意數字經過數次求四次方和的上界為何？

定理 4

任意數字經過數次求四次方和的上界為 22605。

證明：

（1）設 $\underline{a_1a_2a_3a_4a_5}$ 為一個任意的 5 位數

a. $\underline{a_1a_2a_3a_4a_5}$ 的每個位數數字的四次方和要最大，是當 $\underline{a_1a_2a_3a_4a_5}$=99999 時，即

$$a_1^{\ 4}+a_2^{\ 4}+a_3^{\ 4}+a_4^{\ 4}+a_5^{\ 4}=9^4+9^4+9^4+9^4+9^4=28255$$

亦即，所有 5 位數的每個位數數字四次方和都不大於 28255。

b.所有不大於 28255 的數中，每個位數數字四次方和要最大，是當 $\underline{a_1a_2a_3a_4a_5}$=19999 時，即 $a_1^{\ 4}+a_2^{\ 4}+a_3^{\ 4}+a_4^{\ 4}+a_5^{\ 4}=1^4+9^4+9^4+9^4+9^4=22605$

亦即，所有不大於 28255 的數，其每個位數數字四次方和都不大於 22605。

c.所有 5 位數經過數次求四次方和的動作後，一定都會小於 22605。

（2）$\underline{a_1a_2...a_n}$的每個位數數字的四次方和要最大，是當$\underline{a_1a_2...a_n}$=99…9 時，亦即，所有的

n 位數的每個位數數字四次方和都不大於 5651n。
因此，若 n 不大於 17，則$5651n<100000$，亦即 5651n 會是一個 5 位數以下的數。
也就是說，對於 6 位數至 17 位數，求四次方和數次後，一定會小於 22605。

（3）重複相同的步驟，即可推至對於「任何位數的數字經過數次求四次方和的動作後，都會小於 22605。」亦即，任意數字經過數次求四次方和的上界為 22605。 ■

2.五次方的情況

我們分別求出 n 位數，當 n=1 至 8 時，五次方和的最大值及其位數。如下表 6：

表 6

n	1	2	3	4	5	6	7	8
五次方和的最大值	59049	118098	177147	236196	295245	354294	413343	472392
最大值的位數	5	6	6	6	6	6	6	6

由表 6 可觀察出，當數字的位數大於 6 時，其五次方和的最大值均小於該數字，由此我們可以導出任意數字經過數次求五次方和的上界為何？

定理 5

任意數字經過數次求五次方和的上界為 295246。

證明：

（1）設$\underline{a_1a_2a_3a_4a_5a_6}$為一個任意的 6 位數

a. $\underline{a_1a_2a_3a_4a_5a_6}$的每個位數數字的五次方和要最大，是當$\underline{a_1a_2a_3a_4a_5a_6}$=999999 時，即

$$a_1^5+a_2^5+a_3^5+a_4^5+a_5^5+a_6^5=9^5+9^5+9^5+9^5+9^5+9^5=354294$$

亦即，所有 6 位數的每個位數數字五次方和都不大於 354294。

b.所有不大於 354294 的數中，每個位數數字五次方和要最大，是當

$\underline{a_1a_2a_3a_4a_5a_6}$=299999 時，即

$$a_1^5+a_2^5+a_3^5+a_4^5+a_5^5+a_6^5=2^5+9^5+9^5+9^5+9^5+9^5=295277$$

亦即，所有不大於 354294 的數，其每個位數數字五次方和都不大於 295277。

c.所有不大於 295277 的數中，每個位數數字五次方和要最大，是當

$\underline{a_1a_2a_3a_4a_5a_6}$=199999 時，即

$a_1^{\ 5}+a_2^{\ 5}+a_3^{\ 5}+a_4^{\ 5}+a_5^{\ 5}+a_6^{\ 5}=1^5+9^5+9^5+9^5+9^5+9^5=295246$

亦即，所有不大於 295277 的數，其每個位數數字五次方和都不大於 295246。

d.所有 6 位數經過數次求五次方和的動作後，一定都會小於 295246。

（2）$\underline{a_1a_2...a_n}$ 的每個位數數字的五次方和要最大，是當 $\underline{a_1a_2...a_n}$=99…9 時，亦即，所有的 n 位數的每個位數數字五次方和都不大於 59049n。

因此，若 n 不大於 16，則 $59049n<1000000$，亦即 59049n 會是一個 6 位數以下的數。

也就是說，對於 7 位數至 16 位數，求五次方和數次後，一定會小於 295246。

（3）重複相同的步驟，即可推至對於「任何位數的數字經過數次求五次方和的動作後，都會小於 295246。」亦即，任意數字經過數次求五次方和的上界為 295246。 ■

3.六次方的情況

我們分別求出 n 位數，當 n=1 至 9 時，六次方和的最大值及其位數。如下表 7：

表 7

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9
六次方和的最大值	531441	1062882	1594323	2125764	2657205	3188646	3720087	4251528	4782969
最大值的位數	6	7	7	7	7	7	7	7	7

由表 1 可觀察出，當數字的位數大於 7 時，其六次方和的最大值均小於該數字，由此我們可以導出任意數字經過數次求六次方和的上界為何？

定理 6

任意數字經過數次求六次方和的上界為 3188710。

證明：

（1）設 $\underline{a_1a_2a_3a_4a_5a_6a_7}$ 為一個任意的 7 位數

a. $\underline{a_1a_2a_3a_4a_5a_6a_7}$ 的每個位數數字的六次方和要最大，是當 $\underline{a_1a_2a_3a_4a_5a_6a_7}$=9999999 時，即 $a_1^{\ 6}+a_2^{\ 6}+a_3^{\ 6}+a_4^{\ 6}+a_5^{\ 6}+a_6^{\ 6}+a_7^{\ 6}=9^6+9^6+9^6+9^6+9^6+9^6+9^6=3720087$

亦即，所有 7 位數的每個位數數字六次方和都不大於 3720087。

b.所有不大於 3720087 的數中，每個位數數字六次方和要最大，是當

$\underline{a_1a_2a_3a_4a_5a_6a_7}$=2999999 時，即

$$a_1^{\ 6}+a_2^{\ 6}+a_3^{\ 6}+a_4^{\ 6}+a_5^{\ 6}+a_6^{\ 6}+a_7^{\ 6}=2^6+9^6+9^6+9^6+9^6+9^6+9^6=3188710$$

亦即，所有不大於 3720087 的數，其每個位數數字六次方和都不大於 3188710。

c.所有不大於 3187710 的數中，每個位數數字六次方和要最大，是當

$\underline{a_1a_2a_3a_4a_5a_6a_7}$=2999999 時，即

$$a_1^{\ 6}+a_2^{\ 6}+a_3^{\ 6}+a_4^{\ 6}+a_5^{\ 6}+a_6^{\ 6}+a_7^{\ 6}=2^6+9^6+9^6+9^6+9^6+9^6+9^6=3188710$$

亦即，所有不大於 3187710 的數，其每個位數數字六次方和都不大於 3187710。

d.所有 7 位數經過數次求六次方和的動作後，一定都會小於 3187710。

（2）$\underline{a_1a_2...a_n}$的每個位數數字的六次方和要最大，是當$\underline{a_1a_2...a_n}$=99…9 時，亦即，所有的 n 位數的每個位數數字六次方和都不大於 531441n。

因此，若 n 不大於 18，則$531441n<10000000$，亦即 59049n 會是一個 6 位數以下的數。

也就是說，對於 8 位數至 18 位數，求六次方和數次後，一定會小於 3187710。

（3）重複相同的步驟，即可推至對於「任何位數的數字經過數次求六次方和的動作後，都會小於 3187710。」亦即，任意數字經過數次求六次方和的上界爲 3187710。 ■

4.七次方的情況

我們分別求出 n 位數，當 n=1 至 10 時，七次方和的最大值及其位數。如下表 8：

表 8

n	1	2	3	4	5	6
七次方和的最大值	4782969	9565938	14348907	19131876	23914845	28697814
最大值的位數	7	7	8	8	8	8
n	7	8	9	10		
七次方和的最大值	33480783	38263752	43046721	47829690		
最大值的位數	8	8	8	8		

由表 8 可觀察出，當數字的位數大於 8 時，其七次方和的最大值均小於該數字，由此我們可以導出任意數字經過數次求七次方和的上界爲何？

定理 7

任意數字經過數次求七次方和的上界爲 33480911。

證明：

1.設$\underline{a_1a_2a_3a_4a_5a_6a_7a_8}$爲一個任意的 8 位數

（1）$\underline{a_1a_2a_3a_4a_5a_6a_7a_8}$的每個位數數字的七次方和要最大，是當$\underline{a_1a_2a_3a_4a_5a_6a_7a_8}$=99999999

時，即

$$a_1^{\ 7}+a_2^{\ 7}+a_3^{\ 7}+a_4^{\ 7}+a_5^{\ 7}+a_6^{\ 7}+a_7^{\ 7}+a_8^{\ 7}=9^7+9^7+9^7+9^7+9^7+9^7+9^7+9^7=38263752$$

亦即，所有 8 位數的每個位數數字七次方和都不大於 38263752。

（2）所有不大於 38263752 的數中，每個位數數字七次方和要最大，是當

$\underline{a_1a_2a_3a_4a_5a_6a_7a_8}$=29999999 時，即

$$a_1^{\ 7}+a_2^{\ 7}+a_3^{\ 7}+a_4^{\ 7}+a_5^{\ 7}+a_6^{\ 7}+a_7^{\ 7}+a_8^{\ 7}=2^7+9^7+9^7+9^7+9^7+9^7+9^7+9^7=33480911$$

亦即，所有不大於 38263752 的數，其每個位數數字七次方和都不大於 33480911。

（3）所有不大於 33480911 的數中，每個位數數字七次方和要最大，是當

$\underline{a_1a_2a_3a_4a_5a_6}$=29999999 時，即

$$a_1^{\ 7}+a_2^{\ 7}+a_3^{\ 7}+a_4^{\ 7}+a_5^{\ 7}+a_6^{\ 7}+a_7^{\ 7}+a_8^{\ 7}=2^7+9^7+9^7+9^7+9^7+9^7+9^7+9^7=33480911$$

亦即，所有不大於 33480911 的數，其每個位數數字七次方和都不大於 33480911。

（4）所有 8 位數經過數次求七次方和的動作後，一定都會小於 33480911。

2. $\underline{a_1a_2...a_n}$的每個位數數字的七次方和要最大，是當$\underline{a_1a_2...a_n}$=99…9 時，亦即，所有的 n 位數的每個位數數字六次方和都不大於 531441n。

因此，若 n 不大於 20，則$4782969n<100000000$，亦即 4782969n 會是一個 8 位數以下的數。

也就是說，對於 9 位數至 20 位數，求七次方和數次後，一定會小於 3187710。

3.重複相同的步驟，即可推至對於「任何位數的數字經過數次求七次方和的動作後，都會小於 3187710。」亦即，任意數字經過數次求七次方和的上界爲 3187710。 ■

5.八次方的情況

我們分別求出 n 位數，當 n=1 至 11 時，八次方和的最大值及其位數。如下表 9：

表 9

n	1	2	3	4	5	6
八次方和的最大值	43046721	86093442	129140163	172186884	215233605	258280326
最大値的位數	8	8	9	9	9	9

n	7	8	9	10	11	
八次方和的最大值	301327047	344373768	387420489	43046721	473513931	
最大値的位數	9	9	9	9	9	

由表 9 可觀察出，當數字的位數大於 9 時，其八次方和的最大值均小於該數字，由此我們可以導出任意數字經過數次求八次方和的上界爲何？

> 定理 8
>
> 任意數字經過數次求八次方和的上界爲 344374024。

證明：

1.設 $\underline{a_1a_2a_3a_4a_5a_6a_7a_8a_9}$ 爲一個任意的 9 位數

（1）$\underline{a_1a_2a_3a_4a_5a_6a_7a_8a_9}$ 的每個位數數字的八次方和要最大，是當

$\underline{a_1a_2a_3a_4a_5a_6a_7a_8a_9}$=999999999 時，即

$9^8+9^8+9^8+9^8+9^8+9^8+9^8+9^8+9^8=387420489$

亦即，所有 7 位數的每個位數數字八次方和都不大於 387420489。

（2）所有不大於 387420489 的數中，每個位數數字八次方和要最大，是當

$\underline{a_1a_2a_3a_4a_5a_6a_7a_8a_9}$=299999999 時，即

$2^8+9^8+9^8+9^8+9^8+9^8+9^8+9^8+9^8=344374024$

亦即，所有不大於 387420489 的數，其每個位數數字八次方和都不大於 344374024。

（3）所有 9 位數經過數次求八次方和的動作後，一定都會小於 387420489。

2.$\underline{a_1a_2...a_n}$ 的每個位數數字的八次方和要最大，是當 $\underline{a_1a_2...a_n}$=99…9 時，亦即，所有的 n 位數的每個位數數字八次方和都不大於 43046721n。

因此，若 n 不大於 23，則 $43046721n<1000000000$，亦即 43046721n 會是一個 9 位數以下的數。

也就是說，對於 10 位數至 23 位數，求八次方和數次後，一定會小於 387420489。

3.重複相同的步驟，即可推至對於「任何位數的數字經過數次求八次方和的動作後，都會小於 387420489。」亦即，任意數字經過數次求八次方和的上界爲 387420489。 ■

4.九次方至十二次方的情況

仿照上述 1 和 2 的做法，我們分別求出九次方至十二次方的情況：（詳細證明參見附錄）

（1）任意數字經過數次求九次方和的上界爲

$$2^9+9^9+9^9+9^9+9^9+9^9+9^9+9^9+9^9+9^9=3486784913$$

（2）任意數字經過數次求十次方和的上界爲

$$2^{10}+9^{10}+9^{10}+9^{10}+9^{10}+9^{10}+9^{10}+9^{10}+9^{10}+9^{10}+9^{10}=34867845034$$

（3）任意數字經過數次求十一次方和的上界爲

$$2^{11}+9^{11}+9^{11}+9^{11}+9^{11}+9^{11}+9^{11}+9^{11}+9^{11}+9^{11}+9^{11}+9^{11}=345191657747$$

（4）任意數字經過數次求十二次方和的上界爲

$$2^{12}+9^{12}+9^{12}+9^{12}+9^{12}+9^{12}+9^{12}+9^{12}+9^{12}+9^{12}+9^{12}+9^{12}+9^{12}=3389154441868$$

定理 9 任意數字的 m 次方和的上界爲 $m\times 9^m+b^m$ ，其中 b 爲介於 1 至 9 的整數。

證明：

1.設 $\underline{a_1a_2\cdots a_ma_{m+1}}$ 爲一個任意的（m+1）位數

（1）$\underline{a_1a_2\cdots a_ma_{m+1}}$ 的每個位數數字的 m 次方和要最大，是當 $\underline{a_1a_2\cdots a_ma_{m+1}}$=999…999 時，

即 $a_1^{\ m}+a_2^{\ m}+\cdots+a_m^m+a_{m+1}^m=9^m+9^m\cdots+9^m=(m+1)\times 9^m$

亦即，所有（m+1）位數的每個位數數字 m 次方和都不大於 $(m+1)\times 9^m$ 。

（2）所有不大於 $(m+1)\times 9^m$ 的數中，每個位數數字 m 次方和要最大，是當

$\underline{a_1a_2\cdots a_ma_{m+1}}=\underline{b_1999\cdots999}<(m+1)\times 9^m$（$b_1999\cdots999$ 爲最高位數字爲 b，後面有 m 個 9 的數）時，即 $a_1^{\ m}+a_2^{\ m}+\cdots+a_m^m+a_{m+1}^m=b_1^m+9^m+9^m\cdots+9^m=b_1^m+m\times 9^m$

亦即，所有不大於 $(m+1)\times 9^m$ 的數，其每個位數數字 m 次方和都不大於 $b_1^m+m\times 9^m$。

（3）所有（m+1）位數經過 2 次求 m 次方和的動作後，一定都會小於 $m\times 9^m+b^m$ 。

2. $\underline{a_1a_2...a_n}$ 的每個位數數字的 m 次方和要最大，是當 $\underline{a_1a_2...a_n}$=99…9 時，亦即，所有的 n 位數的每個位數數字四次方和都不大於 $9^m\times n$ 。

因此，若 n 不大於 $\left[\dfrac{10^{m+1}}{9^m}\right]$（[ ]爲高斯符號），則 $9^m\times n<10^{m+1}$ ，亦即 $9^m\times n$ 會是一個（m+1）位數以下的數。

也就是說，對於（m+2）位數至 $\left[\dfrac{10^{m+1}}{9^m}\right]$ 位數，求 m 次方和數次後，一定會小於 $m\times 9^m+b^m$ 。

3.重複相同的步驟，即可推至對於「任何位數的數字經過數次求 m 次方和的動作後，都會小於 $m\times 9^m+b^m$ 。」亦即，任意數字的 m 次方和的上界爲 $m\times 9^m+b^m$ 。 ■

肆、研究結果

一、任意一個數字經過數次求一次方和（即數字和）的動作後，一定會得到「1」、「2」、

「3」、⋯、「9」等 9 個數的其中一個數。

二、任意一個數字經過數次求二次方和的動作後，一定會得到「1」或者落到「16→37→58→89→145→42→20→4→16」的循環中。

三、任意一個數字經過數次求三次方和的動作後，一定會得到「1」、「153」、「370」、「371」、「407」或落到「136→244→136」、「1459→991→1459」、「217→352→160→217」、「133→55→250→133」的循環中。

四、四次方和至十二次方和的上界

1.任意數字經過數次求四次方和的上界爲 22605。
2.任意數字經過數次求五次方和的上界爲 295246。
3.任意數字經過數次求六次方和的上界爲 3188710。
4.任意數字經過數次求七次方和的上界爲 33480911。
5.任意數字經過數次求八次方和的上界爲 344374024。
6.任意數字經過數次求九次方和的上界爲 3486784913。
7.任意數字經過數次求十次方和的上界爲 34867845034。
8.任意數字經過數次求十一次方和的上界爲 345191657747。
9.任意數字經過數次求十二次方和的上界爲 3389154441868。

五、m 次方和的上界：任意數字的 m 次方和的上界爲 $m\times 9^m+b^m$，其中 b 爲介於 1 至 9 的整數。

伍、研究討論

1.在定理 9 中，得到「任意數字的 m 次方和的上界爲 $m\times 9^m+b^m$，其中 b 爲介於 1 至 9 的整數。」其中，b 的值我們無法確定，於是請教老師，老師告訴我們可能需要用到「對數」，這是屬於高中數學的範圍，對我們而言太過艱深。

2.我們藉由定理 1 至 3，得到一個猜想，對於任意數經過 m 次方和後，一定後落到一個定數或是一個循環中，而且這些定數或循環的數一定都會介於 1 至 999…999（共有 m 個 9）之中。所以如果是四次方和的部份，我們尚須確認 10000 至 22605 中的數經過四次方和數次是否一定都會落至 1 至 9999 之中。其餘以此類推。

陸、參考文獻

樂在其中的數學（2005），談祥柏，頁 282~286，北京市：科學出版社。

評　　語

030406 漩渦鳴人-N 次方和黑洞的探討

利用簡單的遞降概念得出結論，找出隱藏在字數中的巧妙關連，是蠻有趣的作品，美中不足的是，好像只是純粹的數字遊戲。如能進一步對 N 次黑洞作分析，討論循環節長度為 1 的數字是否存在，應會更為有趣。