中華民國第四十六屆中小學科學展覽會
作品說明書

國中組　數學科

佳作

030404

三角形與四邊形的切割與變換

學校名稱： 臺北市立弘道國民中學

作者：	指導老師：
國三 楊皓崴	王傳忠

關 鍵 詞：三角形、四邊形

壹、 摘要

本研究首先從「給定三角形，由兩頂點分別連接直線至對邊，將這三角形分割爲四塊，要怎樣分割才能使越多塊面積相等呢？」的問題開始，發現解決這問題的方法可應用於解決「任意三角形，三邊分別三等分，將三頂點對應連接其對邊的等分點，則中間形成的三角形面積爲原三角形面積的多少？」。發現這問題中間的三角形和原三角形有一種特殊關係(中間三角形的三邊固定方向延長兩倍，其端點剛好是原三角形的三頂點)，我將這種關係擴展爲本研究的主題：「給定三角形，沿著這三角形的三邊(固定方向)分別延長或縮短某倍數，形成的新三角形和原三角形有怎樣的面積關係？」、「給定四邊形，沿著這四邊形的四邊(固定方向)分別延長或縮短某倍數，形成的新四邊形和原四邊形有怎樣的面積關係？」發現三角形和四邊形推出的結果共有一些相似的性質。但一般情況下，四邊形並不能像三角形可推出一般公式。例如縮小倍數和對稱的縮小倍數，在三角形時，所得到的兩三角形面積相等；在四邊形時，只有在平行四邊形才能成立。最後研究古埃及人的任意四邊形面積公式的正確性與真正面積的關係，並推導出四邊形的面積公式與其性質。

貳、 研究動機

由於去年曾以「三角形與四邊形的命案現場」得到台北市科展佳作，激起我繼續研究這主題的興趣，希望從三角形與四邊形的切割與變換中，找尋更多有趣的問題及發現更多的數量關係。

參、 研究目的與問題

本研究目的是探討如何從三角形與四邊形的切割與變換過程中，尋找面積的變化關係及推導任意四邊形的面積公式。本研究從去年的研究結果中，繼續修改問題及擴展不同的問題，形成如下的研究問題：

[問題 1] 給定三角形，如果由兩頂點分別連接直線至對邊，將這三角形分割爲四塊。要怎樣分割，才能使這四塊的面積有越多塊相等呢？

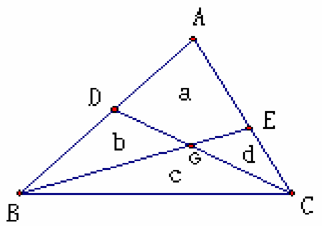
[問題 2] 給定三角形，沿著這三角形的三邊(固定方向)分別延長或縮短某倍數，形成的新三角形和原三角形有怎樣的面積關係？

[問題 3] 給定四邊形，沿著這四邊形的四邊(固定方向)分別延長或縮短某倍數，形成的新四邊形和原四邊形有怎樣的面積關係？

[問題 4] 任意四邊形有面積公式嗎？

肆、 研究過程與討論

問題 1：給定三角形，如果由兩頂點分別連接直線至對邊，將這三角形分割爲四塊。要怎樣分割，才能使這四塊的面積有越多塊相等呢？

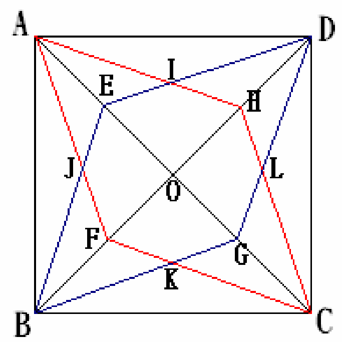


1-1 設如圖的四塊面積分別爲 a,b,c,d，是否有可能分割使這四個區域的面積都相等呢？

如果可能(即$a=b=c=d$)，則$a+b=c+d$ ，故 E 爲$\overline{AC}$的中點；同理，D 爲$\overline{AB}$的中點。
因此 G 爲重心，則$a=c=2b=2d$ 。然而這與假設矛盾。
所以，不可能分割成四個區域都相等的面積。

反過來說，我們可以得到這樣的結果：當$\overline{BE}$和$\overline{CD}$爲兩條中線時，則此二中線分割三角形爲四塊區域，其四塊面積(a,b,c,d)的關係爲$a=c=2b=2d$ 。（兩相對面積分別相等）

這個結果，我想到可以應用解決 Olympiad 1992 年的一道問題：
如圖，設□ABCD 爲正方形，E、F、G、H 分別爲 AO、BO、CO、DO 的中點，則□AHCF 和□BEDG 兩四邊形共同部分的面積是原□ABCD 面積的多少？



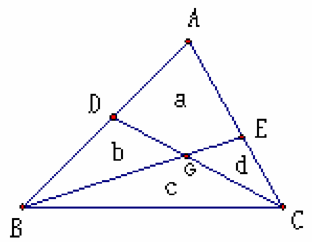
因爲如果我們先看△AOD，則可以得到
□EIHO= 1/3(△AOD)，同理
□HLGO= 1/3(△DOC)
□GKFO= 1/3(△COB)
□FJEO= 1/3(△BOA)
故八邊形 EIHLGKFJ 的面積=1/3 □ABCD。

事實上從證明過程中，我發現本問題的正方形 ABCD 改爲任意四邊形，本問題的結果仍然成立。

1-2 由於四塊不可能全部相等，是否可以分割使這四個區域中的三個面積都相等呢？
如果四個區域（a,b,c,d）中的三個區域面積相等，則可能情況如下：

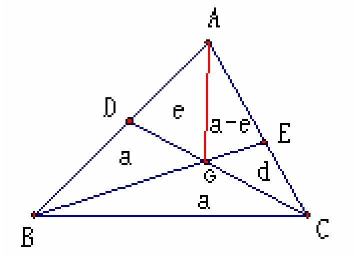
(1) b=c=d
(2) a=b=c
(3) a=d=c
(4) a=b=d

這四種情況中的(2)和(3)，由於對稱處理上，可視爲同一種。



第 1 種情況：b=c=d。
因爲 b=c 則 DG=GC；同理，因爲 c=d 則 EG=GB。
故四邊形 DBCE 爲平行四邊形，因而 BD 平行 CE，故 BD 和 CE 不會有交點 A，所以不可能有 b=c=d 的情況發生。

第 2 種情況：a=b=c(第 3 種情況 a=d=c 和它類似)。



連接 AG 線段，令△ADG 的面積爲 e，則

△AEG 的面積爲 a-e。則

$\dfrac{\Delta ABG}{\Delta AGE}=\dfrac{BG}{GE}=\dfrac{\Delta BGC}{\Delta CGE}$，則

$\dfrac{a+e}{a-e}=\dfrac{a}{d}$ ………(1)

$\dfrac{\Delta ADG}{\Delta AGC}=\dfrac{DG}{GC}=\dfrac{\Delta BGD}{\Delta BGC}$，則 $\dfrac{e}{(a-e)+d}=1$ ………(2)

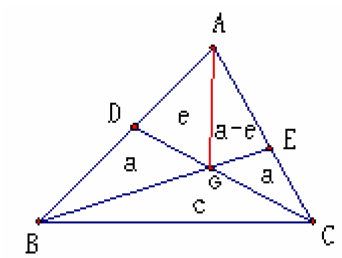
由(1),(2)可得到

$d=(\sqrt{5}-2)a$，$e=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}a$

所以，$AD:DB=e:a=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$；$AE:EC=(a-e):d=\dfrac{3-\sqrt{5}}{2(\sqrt{5}-2)}$。

依照這樣的比例，我們可以畫出 BE 和 CD 兩線段，將△ABC 分割成 a=b=c 這三塊區域的面積相等，且此四塊區域的面積比爲

$a:b:c:d=1:1:1:(\sqrt{5}-2)$。

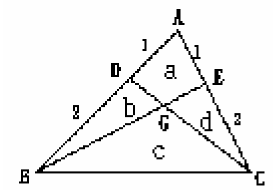


第 4 種情況：a=b=d。

連接 AG 線段，令△ADG 的面積爲 e，則

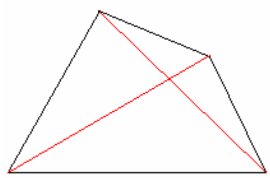
△AEG 的面積爲 a-e。則

$\begin{cases}\dfrac{a+e}{a-e}=\dfrac{c}{a}\\ \dfrac{e}{2a-e}=\dfrac{a}{c}\end{cases}$ 解出得，$e=\dfrac{a}{2}$，$c=3a$。



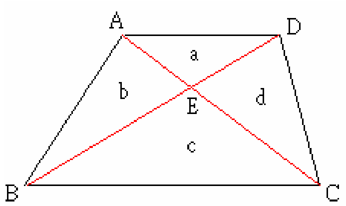
如此，AD:DB=1:2，AE:EC=1:2。(右圖)

且此四塊區域的面積比爲 $a:b:c:d=1:1:3:1$。



如果此問題改爲凸四邊形且使用兩條對角線分割呢？(如圖)，即怎樣的凸四邊形，才會使兩條對角線分割出的四塊三角形有越多塊面積相等呢？

我首先考慮梯形(如圖)，則可以得知：

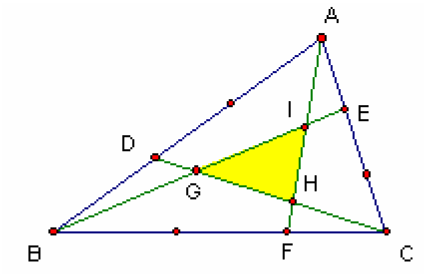


1. $b=d=\sqrt{ac}$ (因爲 $b+c=c+d \Rightarrow b=d$，又 $\dfrac{a}{b}=\dfrac{DE}{BE}=\dfrac{d}{c}$，所以 $b=\sqrt{ac}$)。
2. 若 $AD<BC$，則 $a<b=d<c$。

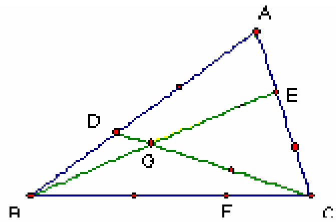
故我們可以得到，任意凸四邊形以兩條對角線分割爲四塊三角形。若這四塊三角形面積都相等 ⇔ 此四邊形爲平行四邊形。

解決上述問題 1 的方法能應用於解決去年的研究問題：

一個任意三角形，將三邊分別三等分，再將頂點對應連接其對邊的等分點（如圖），則中間形成的三角形面積爲原三角形面積的多少？



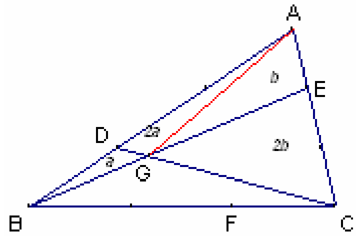
先去掉 AF 線段（如圖），就會和問題 1 的研究圖形類似。



再連接 AG 線段，以△ABC 的面積爲 1，設△BDG 的面積爲 a、△AGE 的面積爲 b，則

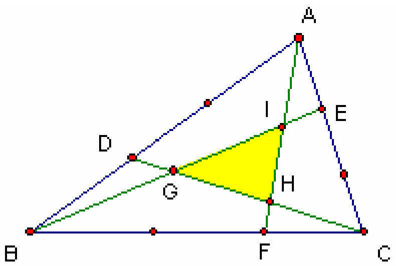
△ADG=2a，△CGE=2b。則$\begin{cases}3a+b=1/3\\2a+3b=2/3\end{cases}$

解得 a=1/21，b=4/21。

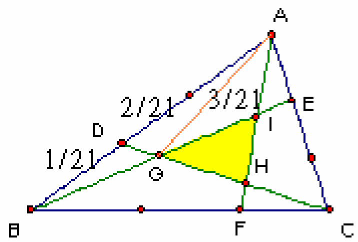


得知△BDG=1/21。同理，△AIE=1/21；△CHF=1/21。又因□ADGE=6/21，所以□ADGI=5/21；□CEIH=5/21；□BFHG=5/21。

因此，△GHI=$1-\dfrac{1\times3+5\times3}{21}=\dfrac{1}{7}$。



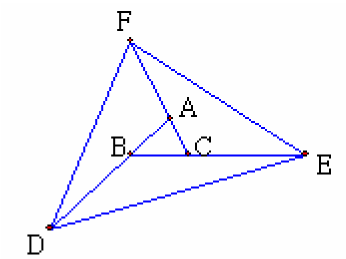
從上述的結果，可得到如下的邊長比：
BG：GI=3/21：3/21=1：1，
同理，AI：IH=1：1；CH：HG=1：1。



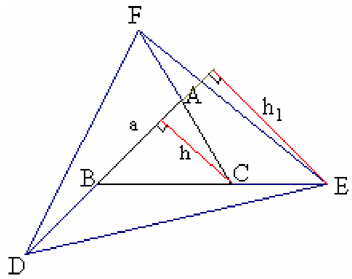
這引起我的好奇，△ABC 可以分別由△IGH 的三邊$\overrightarrow{HI},\overrightarrow{IG},\overrightarrow{GH}$ 延伸 2 倍得到。於是我形成如下的研究問題 2：

問題 2：給定三角形，沿著這三角形的三邊(固定方向)分別延長或縮短某倍數，形成的新三角形和原三角形有怎樣的面積關係？

2-1 設三角形 ABC 為一給定的三角形。如果從這三角形的三邊固定方向分別延長 k 倍
(即 AD=kAB,BE=kBC,CF=kCA)，則新三角形 DEF 的面積為原三角形面積的幾倍？



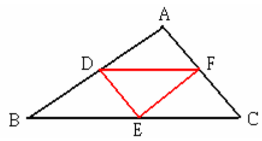
解：如圖，DB=(k-1)a，$h_1 = k \cdot h$，所以
△DEB=1/2・(k-1)a・(kh)=(k-1)k・△ABC；同理，
△EFC= (k-1)k・△ABC，△FDA= (k-1)k・△ABC 所以，
△DEF=[3(k-1)k+1]・△ABC
$= (3k^2 - 3k + 1) \cdot$△ABC。



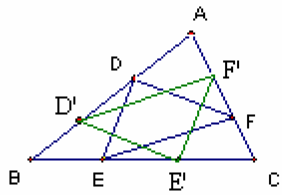
討論：

情況 1：$k \geq 1$
從圖形中我們很容易得知新三角形（△DEF）的面積比原三角形面積大，或是從 $3k^2 - 3k + 1 = 3k(k-1) + 1 \geq 1$ 也可得知。

情況 2：$0 < k < 1$
則形成的新三角形(△DEF)比原三角形(△ABC)的面積小，或是利用
$3k^2 - 3k + 1 = 3(k - \frac{1}{2})^2 + \frac{1}{4}$，得知當 $k = \frac{1}{2}$ 時，△DEF 的面積為最小值，且因 $0 < k < 1$，則 $\frac{1}{4} \leq 3(k - \frac{1}{2})^2 + \frac{1}{4} < 1$，故△DEF 的面積為原三角形面積的 1/4 倍到 1 倍之間。



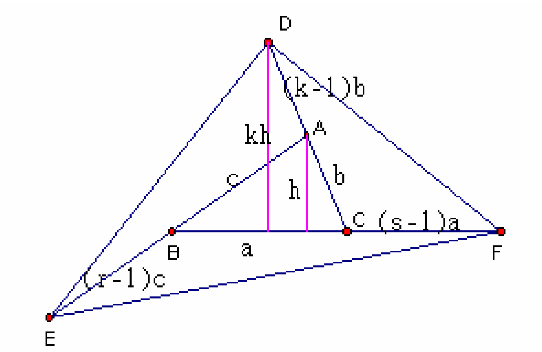
另外我發現，當 $0 < k < 1$ 時，縮小 k 倍與縮小(1-k)倍所分別形成的新三角形面積都相等(如圖)且 D', E', F' 分別和 D, E, F 相對 $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CA}$ 三邊的中點對稱。



例如，當 $k = \frac{n}{m}(n < m)$ 與 $k = \frac{m-n}{m}$ 所分別形成的三角形面積相等。

如果三邊放大或縮小的倍數不一樣呢？

2-2 給定三角形 ABC，如果從這三角形的三邊固定方向分別延長 k,r,s 倍。也就是說，CD=k AC，AE=r AB，BF=s BC。則新△DEF 的面積爲原三角形面積的幾倍？



解：△DCF=$1/2\cdot(s-1)a\cdot kh$=(s-1)k・△ABC；

同理△ADE= (k-1)r・△ABC；△BEF= (r-1)s・△ABC。

故△DEF=[(s-1)k+(k-1)r+(r-1)s+1]・△ABC。

類似，當$0<k,r,s<1$時，分別從三邊縮小k,r,s倍與分別縮小$1-k,1-r,1-s$倍所形成的新三角形面積都會相等。也就是說，如果我們從一三角形的三邊任取三點D,E,F，再取三點D',E',F'，使得D',E',F'和D,E,F分別和三邊中點對稱，則ΔDEF和$\Delta D'E'F'$的面積必相等。

(因爲△DEF$=[(s-1)k+(k-1)r+(r-1)s+1]\cdot\Delta ABC$

$=[-(1-s)k-(1-k)r-(1-r)s+1]\cdot\Delta ABC$

(令$k'=1-k, r'=1-r, s'=1-s$)

$=[-s'(1-k')-k'(1-r')-r'(1-s')+1]\cdot\Delta ABC$

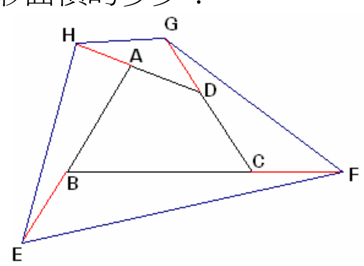
$=[(s'-1)k'+(k'-1)r'+(r'-1)s'+1]\cdot\Delta ABC=\Delta D'E'F'$)

如果把三角形改成四邊形呢？就是我的問題 3。

問題 3：設四邊形 ABCD 爲一給定的四邊形。如果從這四邊形的四邊固定方向分別延長k_1,k_2,k_3,k_4倍。

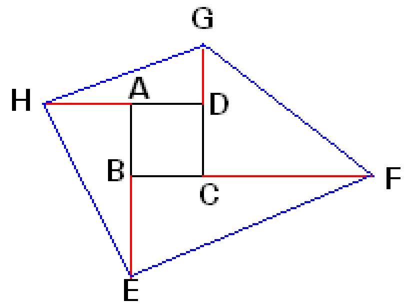
如圖$AE=k_1AB, BF=k_2BC, CG=k_3CD, DH=k_4DA$，

則四邊形 EFGH 的面積爲原四邊形面積的多少？



我先從特殊的情況開始：設四邊形 ABCD 爲一正方形，得到如下的問題。

設四邊形 ABCD 爲一給定的正方形。如果從這四邊形的四邊固定方向分別延長 k_1, k_2, k_3, k_4 倍。如圖 $AE = k_1 AB, BF = k_2 BC, CG = k_3 CD, DH = k_4 DA$，
則 EFGH 的面積爲原四邊形面積的多少？



解：設四邊形 ABCD 的面積爲 S，可知道

$$\Delta BEF = \frac{1}{2}(k_1 - 1)\overline{AB} \cdot k_2 \overline{BC} = \frac{1}{2}(k_1 - 1)k_2 S$$

$$\Delta CFG = \frac{1}{2}(k_2 - 1)\overline{BC} \cdot k_3 \overline{CD} = \frac{1}{2}(k_2 - 1)k_3 S$$

$$\Delta DGH = \frac{1}{2}(k_3 - 1)\overline{CD} \cdot k_4 \overline{DA} = \frac{1}{2}(k_3 - 1)k_4 S$$

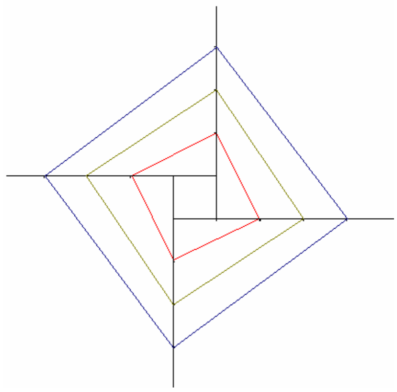
$$\Delta AHE = \frac{1}{2}(k_4 - 1)\overline{DA} \cdot k_1 \overline{AB} = \frac{1}{2}(k_4 - 1)k_1 S$$

故，□EFGH=$\frac{1}{2}[(k_1 - 1)k_2 + (k_2 - 1)k_3 + (k_3 - 1)k_4 + (k_4 - 1)k_1 + 2] \cdot S$

討論：
上述得到的這個公式，如果 $k_1 = k_2 = k_3 = k_4 = k$ 時，則四邊形 EFGH 的面積
$= (2k^2 - 2k + 1) \cdot S$。

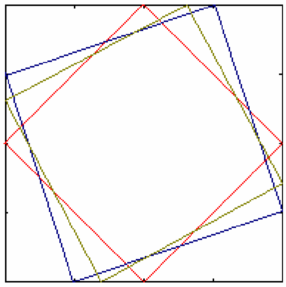
特殊情形 1，當 $k_1 = k_2 = k_3 = k_4 = k$ 且 $k > 1$ 時，得到新四邊形 EFGH 均爲正方形，且：

當邊長延伸 k 倍時	新四邊形面積爲原正方形面積的多少倍
k=2	5
k=3	13
k=4	25
…	…



特殊情形 2，當 $k_1=k_2=k_3=k_4=k$ 且 $0<k<1$ 時，得到得到新四邊形 EFGH 均爲正方形，且：

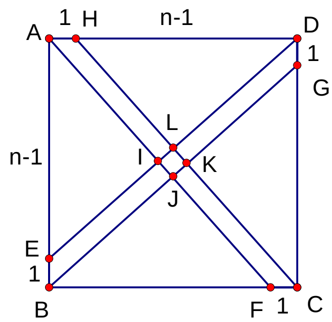
當邊長延伸 1/k 倍時	新四邊形面積爲原正方形面積的多少倍
k=1/2	1/2
k=1/3	5/9
k=1/4	5/8
…	…



因爲 $2k^2-2k+1=2(k-\frac{1}{2})^2+\frac{1}{2}$，故 k=1/2 爲最小值。

上述結果可應用於解決 1985 年 AIME(American Invitational Mathematics Examinations)中的一道問題：

□ABCD 爲一正方形且面積爲 1，分別在四邊各取 n 等分點的第 1 個等分點 E、F、G、H(如圖)，再連接 AF、BG、CH、DE，求 n 爲多少時，□IJKL 的面積爲 1/1985？



解：因爲 $\overline{HL}$ 平行 $\overline{AI}$，所以 $\frac{DI}{LI}=\frac{DA}{HA}=\frac{n}{1}$。

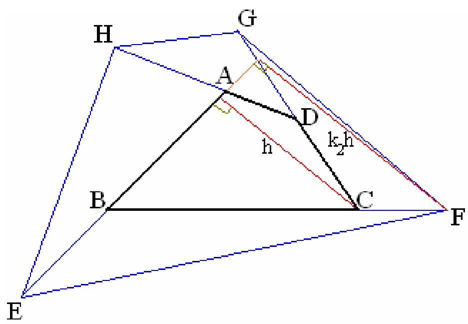
故四邊形□ABCD 爲四邊形□IJKL 邊長分別延伸 n 倍時所得。因此，□ABCD 的面積爲□IJKL 面積的 $2n^2-2n+1$ 倍。

故，$\frac{1}{2n^2-2n+1}=\frac{1}{1985}$。即 $2n^2-2n-1984=0$，

$\Rightarrow 2(n-32)(n+31)=0$，所以 n=32。

回原問題 3 的一般四邊形呢？

設給定四邊形 ABCD。如果從這四邊形的四邊固定方向分別延長 k_1,k_2,k_3,k_4 倍，即 $AE=k_1AB, BF=k_2BC, CG=k_3CD, DH=k_4DA$，則產生的新四邊形 EFGH 的面積爲原四邊形面積的多少？



解：因爲

$$\Delta BEF=\frac{1}{2}(k_1-1)\overline{AB}\cdot k_2h=(k_1-1)k_2\cdot\frac{1}{2}\overline{AB}\cdot h$$

$$=(k_1-1)k_2\cdot\Delta ABC$$

同理，$\Delta CFG=(k_2-1)k_3\cdot\Delta BCD$

$\Delta DGH=(k_3-1)k_4\cdot\Delta CDA$

$\Delta AHE=(k_4-1)k_1\cdot\Delta DAB$

所以，四邊形 EFGH 的面積
$=(k_1-1)k_2\Delta ABC+(k_2-1)k_3\Delta BCD+(k_3-1)k_4\Delta CDA+(k_4-1)k_1\Delta DAB+$□ABCD

但是，本問題想得到的是新四邊形 EFGH 的面積是原四邊形 ABCD 的多少倍？上述等式並無法表示，因此我先考慮下列的<u>特殊情況</u>（令□ABCD 的面積爲 S）：

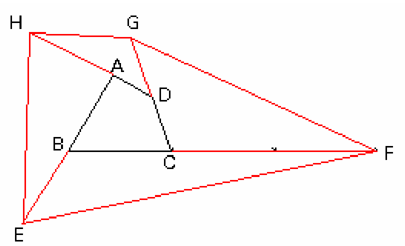
情況 1，$k_1=k_2=k_3=k_4(=k)$（即四邊都伸縮一樣的倍數）時，則
新四邊形 EFGH 的面積

$$=(k-1)k\Delta ABC+(k-1)k\Delta BCD+(k-1)k\Delta CDA+(k-1)k\Delta DAB+S$$
$$=[2(k-1)k+1]\cdot S$$
$$=(2k^2-2k+1)\cdot S$$

註：這公式與恰好與正方形的特殊情況一致。

情況 2，$k_1=k_3(=p),k_2=k_4(=q)$（即對邊分別伸縮一樣的倍數）時，
則新四邊形 EFGH 的面積
$$=(p-1)q\Delta ABC+(q-1)p\Delta BCD+(p-1)q\Delta CDA+(q-1)p\Delta DAB+S$$
$$=[(p-1)q+(q-1)p+1]\cdot S$$

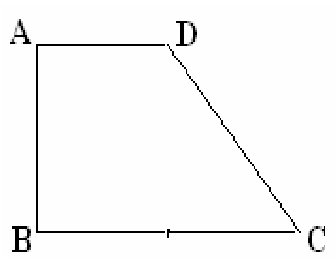
例如，當 $p=2,q=3$
四邊形 EFGH 的面積=8□ABCD 的面積。



然而，除了特殊情況 1 和 2 外，是否能如正方形情形有一般的公式呢？

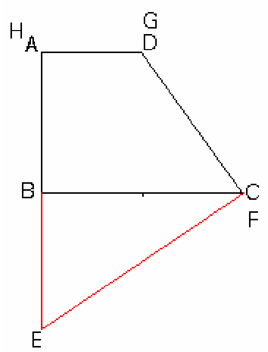
經過我研究後，得知我們<u>不可能</u>得到一般的公式。如果有一般的公式，如下的反例將會產生矛盾。

<u>反例</u>：取一梯形 ABCD，$\overline{BC}=2\overline{AD}$ 且 $\overline{AB}\perp\overline{BC}$ (如圖)。

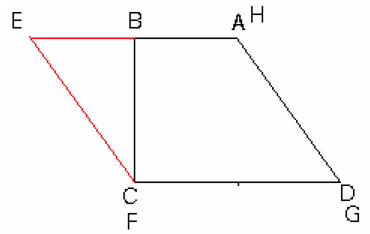


當$k_1 = 2, k_2 = k_3 = k_4 = 1$時，則

新四邊形□EFGH 的面積=$\frac{5}{3}$□ABCD 的面積。－(1)



但是當此四邊形的四個頂點從新命名，而放大倍數仍是$k_1 = 2, k_2 = k_3 = k_4 = 1$時，則□EFGH 的面積卻=$\frac{4}{3}$□ABCD 的面積。－(2)



故由(1)、(2)知，問題 3 從四邊形的四邊固定方向分別延長k_1, k_2, k_3, k_4倍，所產生新四邊形面積無法得到爲原四邊形面積多少倍的一般公式。只有當「四邊都伸縮一樣的倍數」或「對邊分別伸縮一樣的倍數」時，才能得出一般公式。

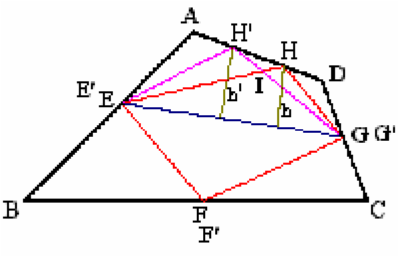
接著，我考慮$0 < k_1, k_2, k_3, k_4 < 1$時，研究怎樣的四邊形也會具有上述類似三角形的結果呢？即四邊形的問題是：

當$0 < k_1, k_2, k_3, k_4 < 1$時，怎樣的四邊形？分別從四邊縮小$k_1, k_2, k_3, k_4$倍與分別縮小$1-k_1, 1-k_2, 1-k_3, 1-k_4$倍所形成的兩個新四邊形面積都相等。也就是說，怎樣的四邊形？如果我們從此四邊形 ABCD 的四邊任取四點E, F, G, H，再取四點E', F', G', H'，使得E', F', G', H'和E, F, G, H分別和四邊的中點對稱，則四邊形$EFGH$和$E'F'G'H'$的面積必相等。經我研究後得到如下的結果：

設□ABCD 爲一凸四邊形。

若我們從四邊形 ABCD 的四邊分別縮小k_1, k_2, k_3, k_4倍($0 < k_1, k_2, k_3, k_4 < 1$)得到四邊形 EFGH 與分別縮小$1-k_1, 1-k_2, 1-k_3, 1-k_4$倍得到四邊形$E'F'G'H'$，則所形成的這兩個新四邊形面積相等$\Leftrightarrow$□ABCD 爲平行四邊形。

證明：$(\Rightarrow)$ 如圖，



取 $k_1 = 1/2, k_2 = 1/2, k_3 = 1/2, k_4 = 1/3$
從四邊形 ABCD 的四邊分別縮小 k_1, k_2, k_3, k_4 倍與分別縮小 $1-k_1, 1-k_2, 1-k_3, 1-k_4$ 倍所形成的兩個新四邊形為□EFGH 及□$E'F'G'H'$。因假設其面積相等，故 $\Delta EH'I = \Delta GHI$ 。
也就是說，$\Delta EH'G = \Delta GHE$ ，所以 $h = h'$ 。
因此 $\overline{HH'} // \overline{EG}$，即 $\overline{AD} // \overline{EG}$ 。
同理，取 $k_1 = 1/2, k_2 = 1/3, k_3 = 1/2, k_4 = 1/2$ ，我們可以推得 $\overline{BC} // \overline{EG}$ 。
所以 $\overline{AD} // \overline{BC}$ 。
同理也可以推得 $\overline{AB} // \overline{CD}$ ，即得證□ABCD 為平行四邊形。

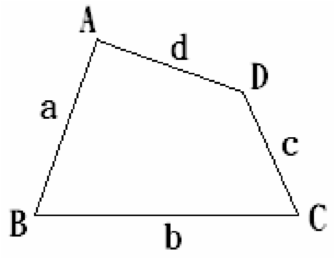
$(\Leftarrow)$ 若□ABCD 為平行四邊形（令其面積為 s），則 $\Delta ABC = \Delta BCD = \Delta CDA = \Delta DAB = \frac{1}{2}s$ 。由前述得知，
四邊形 EFGH 的面積
$= (k_1 - 1)k_2\Delta ABC + (k_2 - 1)k_3\Delta BCD + (k_3 - 1)k_4\Delta CDA + (k_4 - 1)k_1\Delta DAB +$□ABCD
$= \frac{1}{2}[(k_1 - 1)k_2 + (k_2 - 1)k_3 + (k_3 - 1)k_4 + (k_4 - 1)k_1 + 2]\cdot s$
$= \frac{1}{2}[-(1-k_1)k_2 - (1-k_2)k_3 - (1-k_3)k_4 - (1-k_4)k_1 + 2]\cdot s$
(令 $1-k_1 = k_1', 1-k_2 = k_2', 1-k_3 = k_3', 1-k_4 = k_4'$)
$= \frac{1}{2}[-k_1'(1-k_2') - k_2'(1-k_3') - k_3'(1-k_4') - k_4'(1-k_1') + 2]\cdot s$
$= \frac{1}{2}[k_1'(k_2'-1) + k_2'(k_3'-1) + k_3'(k_4'-1) + k_4'(k_1'-1) + 2]\cdot s$
$= \frac{1}{2}[(k_1'-1)k_2' + (k_2'-1)k_3' + (k_3'-1)k_4' + (k_4'-1)k_1' + 2]\cdot s$
=四邊形 $E'F'G'H'$ 的面積
得證。

也就是說，可以得到如下的結果：

設□ABCD 為一凸四邊形。
如果我們從此四邊形 ABCD 的四邊任取四點 E, F, G, H ，再取四點 E', F', G', H' ，使得 E', F', G', H' 和 E, F, G, H 分別和四邊中點對稱，則
四邊形 $EFGH$ 和 $E'F'G'H'$ 的面積相等 $\Leftrightarrow$ □ABCD 為平行四邊形。

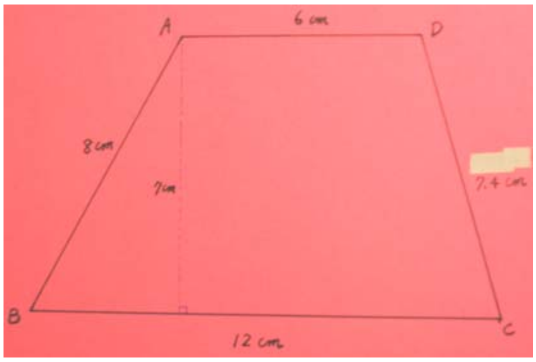
問題 4：任意四邊形有面積公式嗎？

為解決這問題，我從一本書上看到，古埃及人曾有一個計算四邊形的面積公式(記載於西元前 1650 年的來茵紙草上)。這公式如下：



四邊形面積= $\dfrac{a+c}{2}\cdot\dfrac{b+d}{2}$

如果四邊形是長方形，顯然這公式是對的。但其他四邊形也適用嗎？我就先畫一個梯形試試看，如右。這梯形的面積是 $\dfrac{1}{2}\cdot(6+12)\cdot 7=63$ 平方公分，而依照這公式算得的面積是 $\dfrac{8+7.4}{2}\cdot\dfrac{6+12}{2}=69.3$ 平方公分。



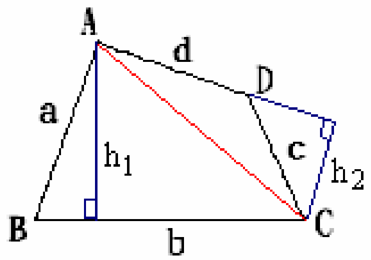
所以古埃及人所記載的四邊形面積公式是不正確。經研究後得知：這公式也只有在四邊形是長方形時才正確，且依這公式算出的面積會高估原四邊形面積，證明如下。

4-1 任意四邊形 ABCD（如圖），其面積 $\le\dfrac{a+c}{2}\cdot\dfrac{b+d}{2}$，且等號成立時□ABCD 為長方形。

證明：連接對角線 AC(如圖)，可得

四邊形 ABCD 面積= $\dfrac{1}{2}b\cdot h_1+\dfrac{1}{2}d\cdot h_2$

$$\le\frac{ab}{2}+\frac{cd}{2}$$



其中等號成立為 $h_1=a,h_2=c$，即

$\angle B=90°,\angle D=90°$。

同理，如果我們連接對角線 BD，可得

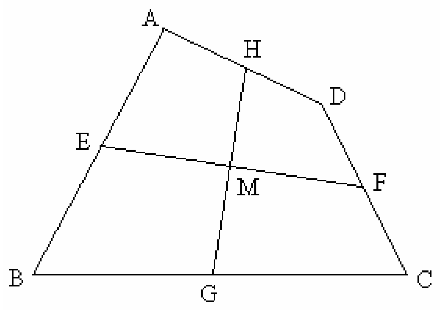
四邊形 ABCD 面積 $\le\dfrac{ad}{2}+\dfrac{bc}{2}$，其中等號成立為 $\angle A=90°,\angle C=90°$。

所以四邊形 ABCD 面積 $\le\dfrac{1}{2}(\dfrac{ab}{2}+\dfrac{cd}{2}+\dfrac{ad}{2}+\dfrac{cd}{2})=\dfrac{a+c}{2}\cdot\dfrac{b+d}{2}$

且等號成立時□ABCD 為長方形。

我又從「我的數學腦袋」書中發現，比上述古埃及人的公式更接近原四邊形面積的算法(利用兩雙對邊中點連線的乘積作爲此四邊形的面積)。以下我把古埃及人的算法和這種算法作比較得到如下的結果。

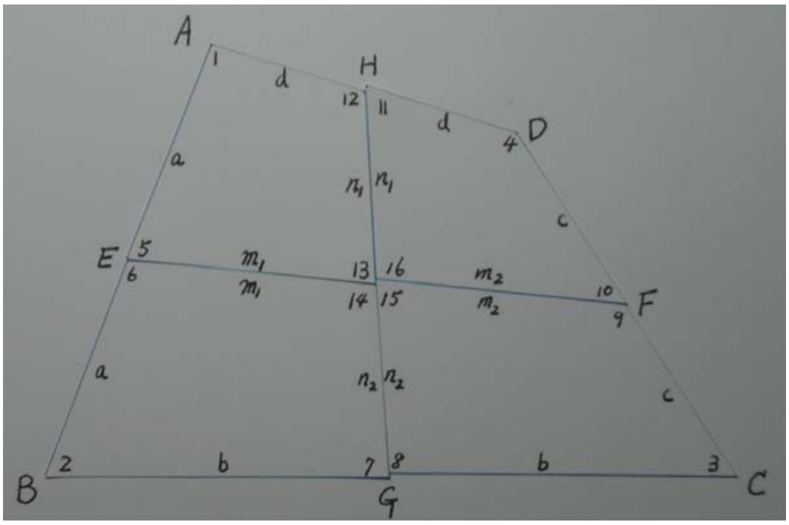
4-2 任意四邊形 ABCD（如圖），設 EF、GH 分別爲此四邊形的對邊中點連線，則四邊形 ABCD 面積$\le \overline{EF}\cdot\overline{GH}\le \dfrac{\overline{AD}+\overline{BC}}{2}\cdot\dfrac{\overline{AB}+\overline{CD}}{2}$，且$\overline{EM}=\overline{MF},\overline{HM}=\overline{MG}$。



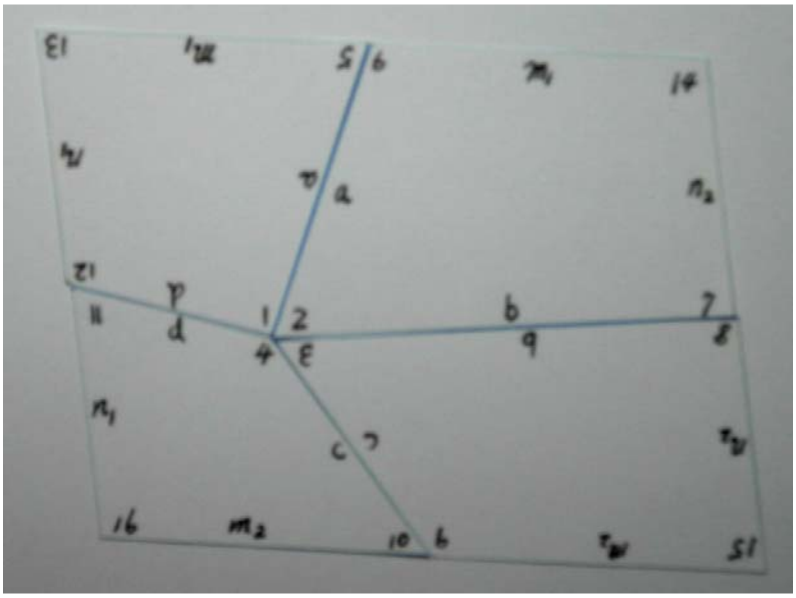
證明：我先將上圖四邊形的四塊所有邊長都相等的邊均作上相同記號，及角也作上記號如下圖。得知：

$\angle 1+\angle 2+\angle 3+\angle 4=360^\circ$，$\angle 13=\angle 15,\angle 14=\angle 16$

$\angle 5+\angle 6=180^\circ,\angle 7+\angle 8=180^\circ,\angle 9+\angle 10=180^\circ,\angle 11+\angle 12=180^\circ$



接著分別剪下四塊，再把□AEMH 及□CFMG 這兩塊四邊形分別旋轉 180°，以及將□BGME 與 HMFD 兩四邊形對調，拼排成下圖。

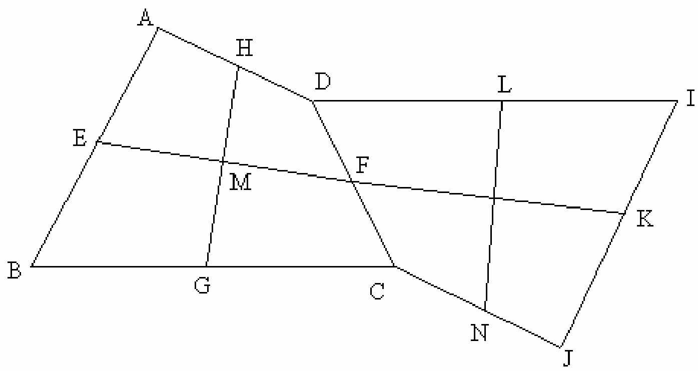


由於 $\angle 1+\angle 2+\angle 3+\angle 4=360°$，且 $\angle 5+\angle 6=180°, \angle 7+\angle 8=180°, \angle 9+\angle 10=180°, \angle 11+\angle 12=180°$，故這四塊拼出的圖形為四邊形。又 $\angle 13=\angle 15, \angle 14=\angle 16$，所以此圖形為平行四邊形。並得到 $2m_1=2m_2, 2n_1=2n_2$ (因為平行四邊形的兩雙對邊相等)，故 $m_1=m_2, n_1=n_2$ (即 $\overline{EM}=\overline{MF}, \overline{HM}=\overline{MG}$)。

因此，此平行四邊形的兩邊長分別為原四邊形的 EF 及 GH。

故，□ABCD 的面積=此平行四邊形面積 $\le \overline{EF}\cdot\overline{GH}$。

接著，我們將四邊形 ABCD 再做一個全等的四邊形，拼成如下圖。



由於 $\angle DFE+\angle DFK=180°$，所以 EFK 三點共線。

又 $\angle AEF+\angle IKF=180°$ 及 $\overline{AE}=\overline{IK}$，所以□AEKI 為平行四邊形。

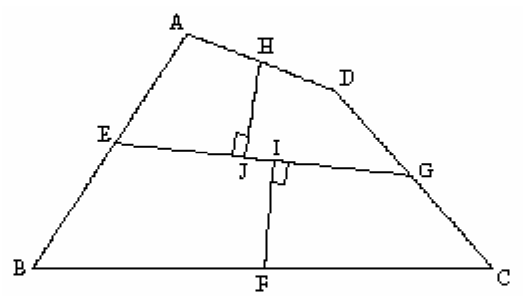
故可得 $\overline{EK}=\overline{AI}$。又因 $\overline{AD}+\overline{DI}\ge\overline{AI}$，所以，$\overline{EF}\le\dfrac{\overline{AD}+\overline{BC}}{2}$

同理，$\overline{GH} \le \dfrac{\overline{AB}+\overline{CD}}{2}$ 。

故四邊形 ABCD 的面積$\le \overline{EF}\cdot\overline{GH} \le \dfrac{\overline{AD}+\overline{BC}}{2}\cdot\dfrac{\overline{AB}+\overline{CD}}{2}$ 。得證。

上面猜測的公式（對邊中點連線長的乘積）仍然高估原四邊形面積，雖然如此，已比古埃及人的公式更接近原面積。這時，我想如果我們把四邊形的分割調整如下，再從新拼排，就可得到長方形，也因而可得出任意四邊形的面積公式。

4-3 任意四邊形 ABCD（如圖），E、F、G、H 為四邊中點，連線某一對邊中點（如$\overline{EG}$ ），再分別從兩點 F、H 作$\overline{EG}$的垂線，交於 I、J。則

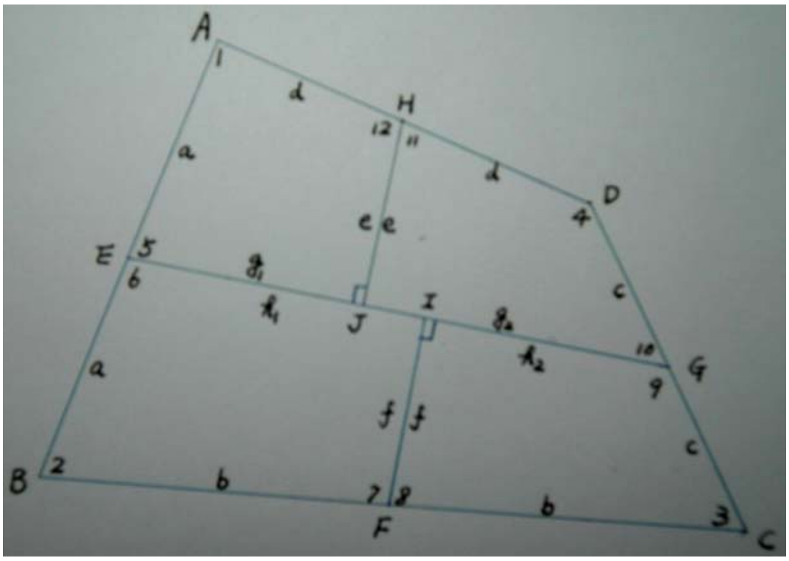


□ABCD 面積=$\overline{EG}\cdot(\overline{IF}+\overline{HJ})$ 且$\overline{IF}=\overline{HJ}$ ，

$\overline{EJ}=\overline{IG}, \overline{EI}=\overline{JG}$ 。

證明：

我先將上圖四邊形的四塊所有邊長都相等的邊均作上相同記號，及角也作上記號如圖。



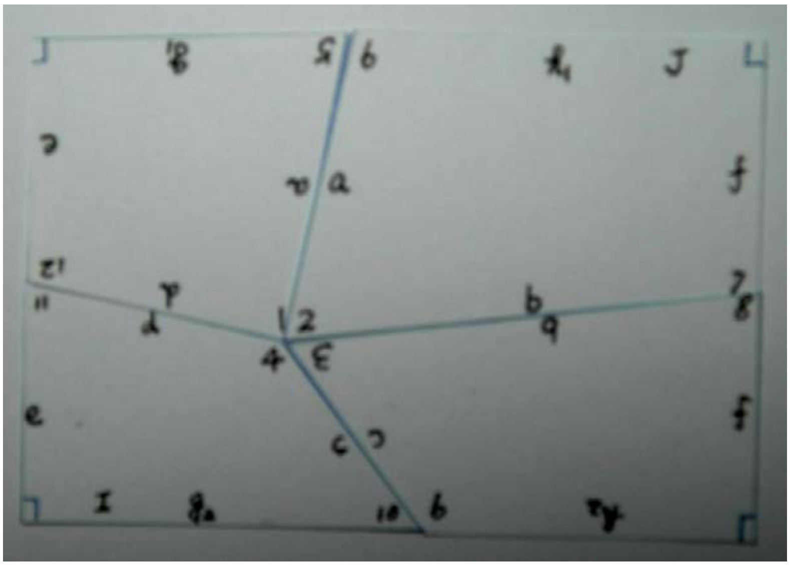
得知：

$\angle 1+\angle 2+\angle 3+\angle 4=360°$ ，$\angle 5+\angle 6=180°, \angle 7+\angle 8=180°$ ，

$\angle 9+\angle 10=180°, \angle 11+\angle 12=180°$

及$g_1+g_2=h_1+h_2$ 。

再分別剪下四塊，旋轉□AEJH 及□IFCG 180°，以及將□BEFI 與□HJGD 兩四邊形對調，即可拼出一長方形(如圖)。



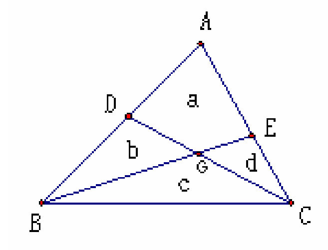
故，$2e = 2f, g_1 + h_1 = g_2 + h_2$ ，即$\overline{IF} = \overline{HJ}$ ，$\overline{EJ} = \overline{IG}, \overline{EI} = \overline{JG}$ 。

因此，□ABCD 面積=$\overline{EG} \cdot (\overline{IF} + \overline{HJ})$ 。得證。

伍、　結論與展望

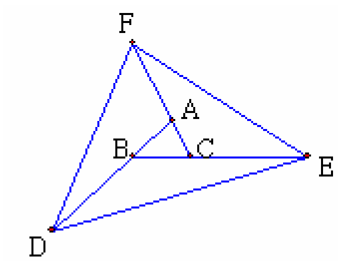
（一）研究結論

1. 給定△ABC，如果由 B、C 兩頂點連接直線至對邊，將這三角形分割爲四個區域，如圖。



我們得出最多只能有三個區塊相等的三種情況：
(1) a=b=c；(2)a=d=c；(3)a=b=d。
且四塊區域的面積比：
情況(1)爲 $a:b:c:d=1:1:1:(\sqrt{5}-2)$；
情況(2)爲 $a:b:c:d=1:(\sqrt{5}-2):1:1$；
情況(3)爲 $a:b:c:d=1:1:3:1$。

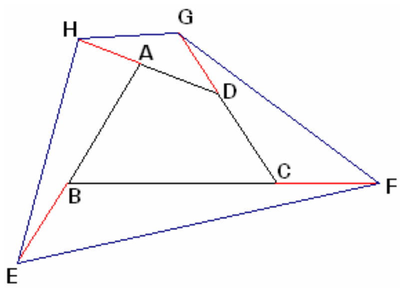
2. 給定△ABC，如果沿著這三角形的三邊固定方向分別延長或縮小 k,r,s 倍。也就是說，$\overline{AD}=k\overline{AB}$，$\overline{BE}=r\overline{BC}$，$\overline{CF}=s\overline{CA}$。
則新三角形△DEF 的面積爲原三角形面積的
$[(s-1)k+(k-1)r+(r-1)s+1]$ 倍。



特殊情形，若沿著這三角形的三邊固定方向都延長或縮小 k 倍，則新三角形
△DEF 面積爲原三角形面積的 $(3k^2-3k+1)$ 倍。

3. 給定△ABC，且 $0<k,r,s<1$。如果沿著三邊固定方向分別縮小 k,r,s 倍與分別縮小 $1-k,1-r,1-s$ 倍所形成的新三角形面積都會相等。也就是說，如果我們從一三角形的三邊任取三點 D,E,F，再取三點 D',E',F'，使得 D',E',F' 和 D,E,F 分別和三邊中點對稱，則 ΔDEF 和 $\Delta D'E'F'$ 的面積必相等。

4. 給定四邊形 ABCD，如果沿著這四邊形的四邊固定方向分別延長或縮小 k_1,k_2,k_3,k_4 倍，即
$AE=k_1AB, BF=k_2BC, CG=k_3CD, DH=k_4DA$ 則可證得：*新四邊形面積不可能得到爲原四邊形面積多少倍的一般公式*。但



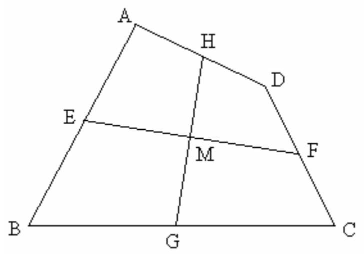
特殊情形 1，當□ABCD 爲正方形時(設其面積爲 S)，則
□EFGH 面積= $\frac{1}{2}[(k_1-1)k_2+(k_2-1)k_3+(k_3-1)k_4+(k_4-1)k_1+2]\cdot S$。

特殊情形 2，當「對邊分別伸縮一樣的倍數」時，
設 $k_1=k_3(=p),k_2=k_4(=q)$ 且四邊形 ABCD 的面積爲 S，則
□EFGH 面積 $=[(p-1)q+(q-1)p+1]\cdot S$。

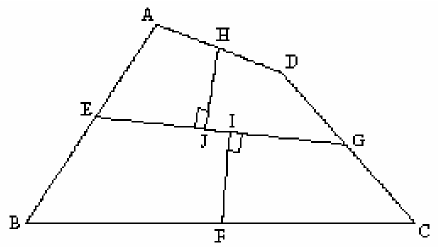
5. 設□ABCD 爲一凸四邊形，且$0<k_1,k_2,k_3,k_4<1$。
若我們沿著四邊形 ABCD 的四邊固定方向分別縮小k_1,k_2,k_3,k_4倍得到四邊形 EFGH 與分別縮小$1-k_1,1-k_2,1-k_3,1-k_4$倍得到四邊形$E'F'G'H'$，則所形成的這兩個新四邊形面積相等$\Leftrightarrow$ □ABCD 爲平行四邊形。

也就是說，如果我們從一凸四邊形 ABCD 的四邊任取四點E,F,G,H，再取四點E',F',G',H'，使得E',F',G',H'和E,F,G,H分別和四邊中點對稱，則四邊形$EFGH$和$E'F'G'H'$的面積相等$\Leftrightarrow$ □ABCD 爲平行四邊形。

6. 任意凸四邊形 ABCD，設 EF、GH 分別爲此四邊形的對邊中點連線，則四邊形 ABCD 的面積$\le \overline{EF}\cdot\overline{GH}\le\dfrac{\overline{AD}+\overline{BC}}{2}\cdot\dfrac{\overline{AB}+\overline{CD}}{2}$，且$\overline{EM}=\overline{MF},\overline{HM}=\overline{MG}$。



7. 任意四邊形 ABCD（如圖），E、F、G、H 爲四邊中點，連接$\overline{EG}$，再分別從 F、H 作 EG 的垂線，交於 I、J。則□ABCD 面積=$\overline{EG}\cdot(\overline{IF}+\overline{HJ})$且$\overline{IF}=\overline{HJ}$，$\overline{EJ}=\overline{IG},\overline{EI}=\overline{JG}$。



（二）展望

1. 本研究利用三角形的三邊（四邊形的四邊）伸縮變形，形成新三角形（新四邊形），而得到許多有趣的關係與結果，並可應用於解決其他問題。這樣的研究如何擴展至其他多邊形（如五邊形、六邊形、…），可以作爲未來繼續研究的方向。
2. 我曾想嚐試作其他不同的變換，但由於還未得到漂亮的結果而擱置，預期可以找到許多有趣的變換與關係。
3. 目前已知道三角形及四邊形的面積公式，而其他多邊形呢？

陸、 參考資料

陳永明、馬曉柏、孫國英(民 91)，我的數學腦袋。凡異出版社。

評　　語

030404 三角形與四邊形的切割與變換

考慮沿三角形或四邊形的邊做邊的縮放，所得出的新三角形或四邊形的面積與原圖形的關連性，對各種可能情形作了詳盡的分析，充份活用國中所學的知識，是蠻好的作品，如果能將結果推廣至特殊 N 邊形，將會更好。