

中華民國第四十六屆中小學科學展覽會
作品說明書

國小組 數學科

最佳創意獎

080418

天旋地轉—旋轉盤好好玩

學校名稱： 高雄市三民區陽明國民小學

作者：	指導老師：
小五 謝易軒	陳玉蟬
小五 洪子軒	康雅玲
小五 呂愷	
小五 廖培桐	
小五 蔡宗倍	
小五 梁庭翰	

關 鍵 詞：線對稱、點對稱、旋轉盤

天旋地轉 ---- 旋轉盤好好玩

摘要

旋轉盤是一種操作簡單又好玩的益智遊戲。利用對稱與旋轉的原理，測驗一個人的空間位置轉換概念。

本研究藉著一步步推理，希望找出它的規律性，首先定義角度、方向、不同玩法模式，以利分析歸納。我們先從簡單的模式開始尋求規律，發現角度和及位置和有固定的數值，進一步研究較複雜的模式，尋求它們的相關性。發現不管左右轉、上下轉，甚至斜著轉，其實答案都相同。

再以單一模式的轉動，對答案的變化來分析，發現答案受兩種因素的影響，一個因素是線對稱〈鏡射對稱〉 $Y = -X$ 。另一個因素是起始點的角度差。最後我們歸納出答案的公式： $Y = -X + (Y_0 - X_0)$ 。這個公式符合所有模式。

在實際操作上，經由公式分析，發現一個快速的解題方法：以角度夾角中線為對稱軸，找反向的對稱圖案方向即可。

最後，我們將發現的規律，找同年級同學做測驗，發現同學答對率有明顯提高。為了增加趣味性及合成各種模式，我們也設計一些相關的玩具。

壹、研究動機

上數學課旋轉與對稱單元時，老師拿了一個正八角形的厚紙板，正向及反向畫有不同方向的箭頭，老師拿的八角形，正向箭頭向下，再轉反向箭頭向左，旋轉一下，讓我們猜反向轉過來後箭頭的方向。結果看似簡單的動作，我們卻有時猜對，有時猜錯，而且猜錯的機率很高，這引起我們的好奇。老師告訴我們，他是在讓我們玩一種操作簡單、答題容易、答對卻很難的遊戲，它和我們這學期數學課程的線對稱圖形有關。因此，我們決定開始畫表格做進一步研究，想試著找出是否有數學的公式？或者有一看便能知道答案的規律或方法。

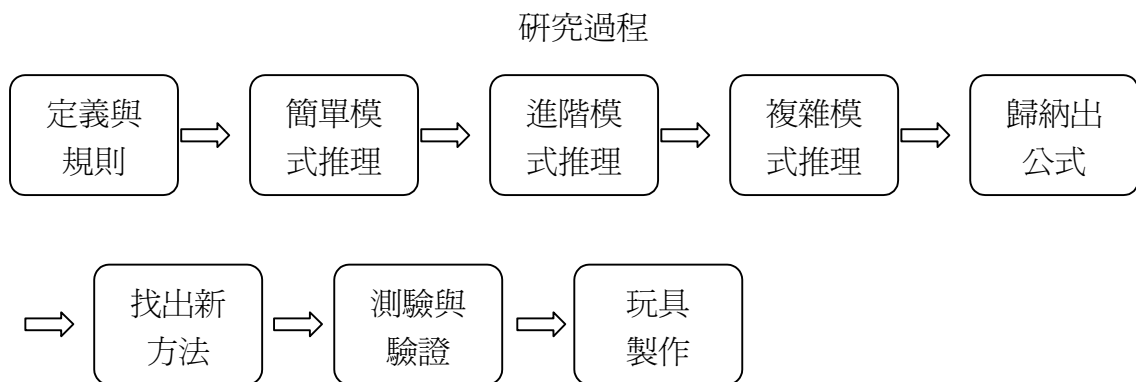
貳、研究目的

- 一、定義旋轉盤遊戲的規則、角度、方向、操作模式。
- 二、選最簡單的模式一、二，找出規律及相關性？
- 三、擴展模式三到八，找出共同規律及相關性？
- 四、擴展模式九到十六，正反起始點方向相同，左右轉和上下轉有差別嗎？
- 五、旋轉盤旋轉的時候，答案有沒有一定的規律？
- 六、將公式對比圖形，尋找有沒有快速的解題方法？
- 七、牛刀小試——將發現的規則性做驗證。

參、研究器材

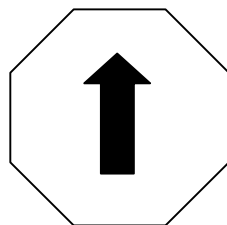
卡紙、亮光紙、剪刀、色筆、雙面膠、筆記本、紀錄紙。

肆、研究過程與發現

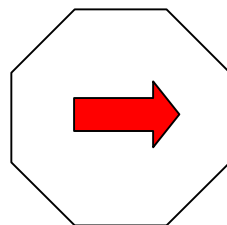


一、研究一：定義旋轉盤遊戲的規則、角度、方向、操作模式。

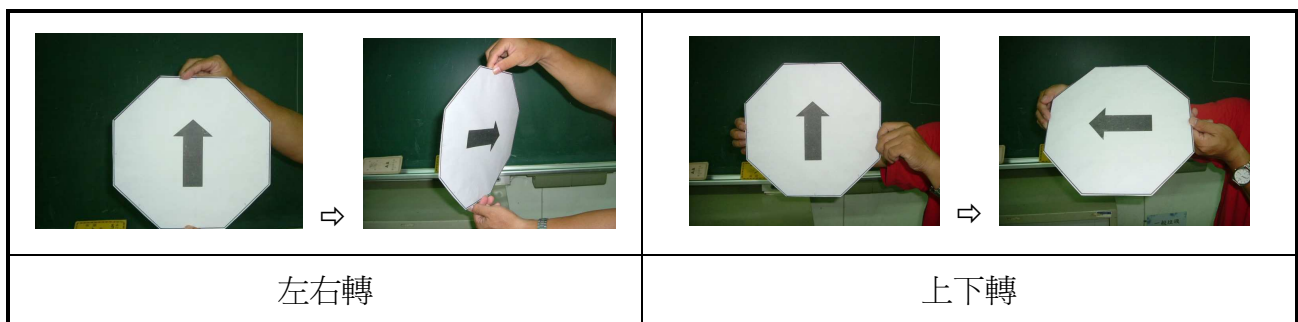
(一) 定義一：遊戲規則



正向



反向



遊戲步驟：

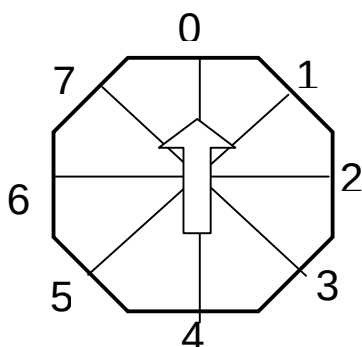
- 1.將上圖的旋轉盤，正向給大家看，箭頭朝上。
- 2.再右轉反向給大家看，箭頭朝右。
- 3.左轉回正向，旋轉一個角度，請大家猜轉回來後，反向箭頭應該指向哪個方向？
- 4.旋轉別的角度，再給大家猜看看！

(二) 定義二：對旋轉盤角度、方向的定義？

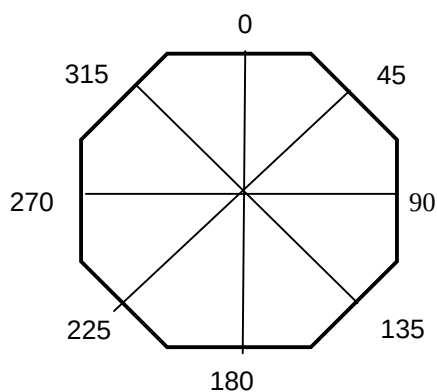
爲了研究，我們先定義，角度、方向、及方向代號。如下圖：

圖一：方向及方向代號

定義：0 號為正向起始點

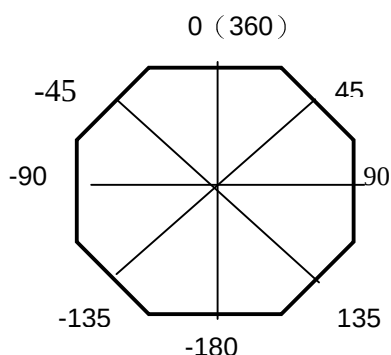


圖二：角度



圖三：負角度

（超過 180 度以負角度表示）



說明：

1. 方向代號：正上方規定為 0，順時鐘每增加 45 度增加 1。
2. 角度：我們以正上方為 0 度，順時鐘方向每轉 45 度，即增加 45 度。
3. 若以逆時針方向來看 0 度 = 360 度
315 度 = 負 45 度，以此類推。
4. 正向的度數為 X，反向的度數為 Y。正向起始為 X_0 ，反向的起始為 Y_0 。

（表一）將上面的定義列成下表作為研究的標準

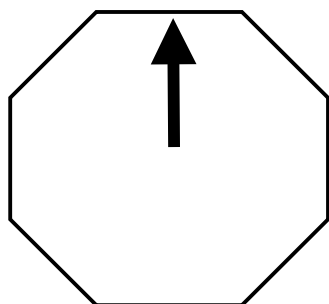
角度	0	45	90	135	180	225	270	315
負角度					-180	-135	-90	-45
方向	↑	↗	→	↘	↓	↙	←	↖
位置代號	0	1	2	3	4	5	6	7
負代號					-4	-3	-2	-1

（三）定義三：操作模式的定義？

1. 為了尋求規律，我們把每個模式的正向起始點設在 0 號位置，反向分 8 個方向，定義 8 個模式。
2. 我們再以左右轉及上下轉分成二組，如此共有 16 種模式。
3. 左右轉為奇數模式組，上下轉為偶數模式組。
4. 為了從簡單的開始，我們把相差角度 0 度、180 度、90 度的號碼編排在前面，相差 45 度的號碼編排在後面。如下表：

(表二) 左右轉模式 ⇄

模式	1	3	5	7	9	11	13	15
正向	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑
反向	↑	↓	→	←	↗	↘	↙	↖
相差	0	180	90	-90	45	135	-135	-45

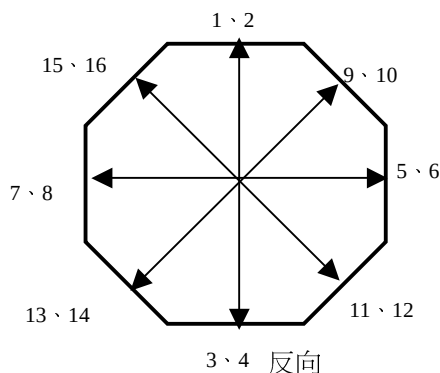


正向

模式圖

(表三) 上下轉模式 ↕

模式	2	4	6	8	10	12	14	16
正向	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑
反向	↑	↓	→	←	↗	↘	↙	↖
相差	0	180	90	-90	45	135	-135	-45



3、4 反向

二、研究二：選最簡單的模式 1、2，找出規律及相關性？

(一) 研究方法：我們從最簡單的開始，以模式 1、2，依照順時針方向操作，並將結果記錄如下表。〔X=正向、Y=反面〕

模式 1：正↑ 反↑ 轉 ⇄

角度 X	起始	45	90	135	180	225	270	315
正向 X	↑	↗	→	↘	↓	↙	←	↖
位置 X	0	1	2	3	4	5	6	7
比較 XY	↑↑	↗↖	→←	↘↙	↓↓	↙↘	←→	↖↗
反向 Y	↑	↖	←	↙	↓	↘	→	↗
位置 Y	0	7	6	5	4	3	2	1
角度 Y	0	315	270	225	180	135	90	45

(二) 發現：

1. 以角度來看：正反面角度和 $X+Y=360$ 度 (0 度)。
2. 以位置來看：除了位置 0 以外， $X+Y=8$ ，但是若將位置 0 相當於位置 8 來計算，也符合 $X+Y=8$ 。
3. 以比較 XY 來看，正反面的圖形，為對稱軸垂直的線對稱圖形，對稱軸為：| (180 度)。

(三) 我們再以模式 2 來操作，得到結果如下：

模式 2：正↑ 反↑ 轉 ↕

角度 X	起始	45	90	135	180	225	270	315
正向 X	↑	↗	→	↘	↓	↙	←	↖
位置 X	0	1	2	3	4	5	6	7
比較 XY	↑↑	↗↖	→←	↘↙	↓↓	↙↘	←→	↖↗
反向 Y	↑	↖	←	↙	↓	↘	→	↗
位置 Y	0	7	6	5	4	3	2	1
角度 Y	360 (0)	315	270	225	180	135	90	45

(四) 發現：

1. 以角度來看：正反面角度和 $X+Y=360$ 度〔角度〕。
2. 以位置來看：除了位置 0 以外， $X+Y=8$ ，但是若將位置 0 相當於位置 8 來計算，也符合 $X+Y=8$ 。
3. 以比較 XY 來看，正反面的圖形，為對稱軸垂直的線對稱圖形，對稱軸為：| (180 度)。

(五) 討論：與模式 1 比較，結果相同，不論左右轉，上下轉，對稱軸為垂直線，對稱軸為：|（180 度）。

三、研究三：擴展模式 3 到 8，找出共同規律及相關性？

(一) 研究方法：我們從模式 3 到 8，依照順時針方向操作並將結果記錄如表。

模式 3：正↑ 反↓ 轉↔

角度 X	起始	45	90	135	180	225	270	315
正向 X	↑	↗	→	↘	↓	↙	←	↖
位置 X	0	1	2	3	4	5	6	7
比較 XY	↑↓	↗↘	→←	↘↗	↓↑	↙↖	←↗	↖↙
反向 Y	↓	↘	→	↗	↑	↖	←	↙
位置 Y	4	3	2	1	0	-1	-2	-3
角度 Y	180	135	90	45	0	-45	-90	-135

(二) 發現：

- 1.以角度來看：不論正負角度，X+Y 都等於 180 度。
- 2.以位置來看：不論正負位置，X+Y 都等於 4。
- 3.以比較 XY 來看，正反向的圖形，對稱軸為水平線：—（90 度）。

模式 4：正↑ 反↓ 轉↕

角度 X	起始	45	90	135	180	225	270	315
正向 X	↑	↗	→	↘	↓	↙	←	↖
位置 X	0	1	2	3	4	5	6	7
比較 XY	↑↓	↗↘	→←	↘↗	↓↑	↙↖	←↗	↖↙
反向 Y	↓	↘	→	↗	↑	↖	←	↙
位置 Y	4	3	2	1	0	-1	-2	-3
角度 Y	180	135	90	45	0	315	270	225

(三) 發現：

- 1.以角度來看：不論正負角度，X+Y 都等於 180 度。
- 2.以位置來看：不論正負位置，X+Y 都等於 4。
- 3.以比較 XY 來看，正反向的圖形，對稱軸為水平線：—（90 度）。

模式 5：正↑ 反→ 轉↔

角度 X	起始	45	90	135	180	225	270	315
正向 X	↑	↗	→	↘	↓	↙	←	↖
位置 X	0	1	2	3	4	5	6	7
比較 XY	↑→	↗↗	→↗	↘↖	↓↖	↙↖	←↖	↖↘
反向 Y	→	↗	↑	↖	←	↙	↓	↘
位置 Y	2	1	0	-1	-2	-3	-4	-5
角度 Y	90	45	0	-45	-90	-135	-180	-225

(四) 發現：

- 1.以角度來看：不論正負角度，X+Y 都等於 90 度。
- 2.以位置來看：不論正負位置，X+Y 都等於 2。
- 3.以比較 XY 來看：正反向的圖形，對稱軸為：／（45 度）。

模式 6：正↑ 反→ 轉↕

角度 X	起始	45	90	135	180	225	270	315
正向 X	↑	↗	→	↘	↓	↙	←	↖
位置 X	0	1	2	3	4	5	6	7
比較 XY	↑→	↗↗	→↗	↘↖	↓↖	↙↖	←↖	↖↘
反向 Y	→	↗	↑	↖	←	↙	↓	↘
位置 Y	2	1	0	-1	-2	-3	-4	-5
角度 Y	90	45	0	315	270	225	180	135

(五) 發現：

- 1.以角度來看：不論正負角度，X+Y 都等於 90 度。
- 2.以位置來看：不論正負位置，X+Y 都等於 2。
- 3.以比較 XY 來看：正反向的圖形，對稱軸為：／（45 度）。

模式 7：正↑ 反← 轉↺

角度 X	起始	45	90	135	180	225	270	315
正向 X	↑	↗	→	↘	↓	↙	←	↖
位置 X	0	1	2	3	4	5	6	7
比較 XY	↑↖	↗↙	→↘	↘↙	↓↗	↙↗	←↖	↖↙
反向 Y	←	↙	↓	↘	→	↗	↑	↖
位置 Y	6	5	4	3	2	1	0	-1
角度 Y	-90	-135	-180	135	90	45	0	-45

(六) 發現：

- 1.以角度來看：不論正負角度， $X+Y$ 都等於負 90。
- 2.以位置來看：不論正負位置， $X+Y$ 都等於 6。
- 3.以比較 XY 來看：正反面的圖形，對稱軸為：↖（-45 度）。

模式 8：正↑ 反← 轉↻

角度 X	起始	45	90	135	180	225	270	315
正向 X	↑	↗	→	↘	↓	↙	←	↖
位置 X	0	1	2	3	4	5	6	7
比較 XY	↑↖	↗↙	→↘	↘↙	↓↗	↙↗	←↖	↖↙
反向 Y	←	↙	↓	↘	→	↗	↑	↖
位置 Y	6	5	4	3	2	1	0	-1
角度 Y	-90	-135	-180	135	90	45	0	-45

(七) 發現：

- 1.以角度來看：不論正負角度， $X+Y$ 都等於負 90。
- 2.以位置來看：不論正負位置， $X+Y$ 都等於 6。
- 3.以比較 XY 來看：正反面的圖形，對稱軸為：↖（-45 度）。

(八) 討論：我們將模式 1 到 8 發現的規律，整理成下表比較：

模式	1	2	3	4	5	6	7	8
角度和	360	360	180	180	90	90	-90	-90
位置和	8	8	4	4	2	2	6	6
Y-X 比較 XY	0 ↑↑	0 ↑↑	180 ↑↓	180 ↑↓	90 ↑→	90 ↑→	-90 ↑←	-90 ↑←
對稱軸	對稱	對稱	對稱 —	對稱 —	對稱 /	對稱 /	對稱 \	對稱 \

- 1.每個模式都有的共同點是：角度和、位置和一定。
- 2.比較正反面，每個模式都有角度不同的對稱軸。
- 3.模式結果有相關性，模式 1、2 相同，模式 3、4 相同，模式 5、6 相同，模式 7、8 相同，以此類推，所以，不論左右轉或上下轉，只要開始正向和反向的方向相同，結果都是一樣的。
- 4.因為開始點相同，以後旋轉一個角度，正向和反面都跟著旋轉相同角度，可見用任何角度翻轉，都會有同樣的結果。
- 5.我們做了不同角度〈斜角轉〉的旋轉，發現答案也都一樣。

四、研究四：擴展模式 9 到 16，正反起始點方向相同，左右轉和上下轉有差別嗎？

(一) 推論：我們知道模式 1 到模式 8 中，上下轉和左右轉是一樣的，是否可以同樣適用到模式 9 到 16？

模式 1 到模式 16 的起始點如下表：

左右轉	1	3	5	7	9	11	13	15
比較 XY	↑↑	↑↓	↑→	↑←	↑↗	↑↘	↑↙	↑↖
上下轉	2	4	6	8	10	12	13	16
比較 XY	↑↑	↑↓	↑→	↑←	↑↗	↑↘	↑↙	↑↖

(二) 驗證：操作模式 9 到 12，驗證看看是否符合我們的假設。

模式 9：正↑ 反↗ 轉↻

角度	起始	45	90	135	180	225	270	315
正向	↑	↗	→	↘	↓	↙	←	↖
位置	0	1	2	3	4	5	6	7
比較	↑↗	↗↑	→↘	↘←	↓↙	↙↖	←↖	↖→
反向	↗	↑	↘	←	↙	↓	↖	→
位置	1	0	-1	-2	-3	-4	-5	-6
角度	45	0	315	270	225	180	135	90

$X+Y=45$ $Y_0-X_0=45$ 對稱軸 22.5 度

模式 10：正↑ 反↗ 轉↻

角度	起始	45	90	135	180	225	270	315
正向	↑	↗	→	↘	↓	↙	←	↖
位置	0	1	2	3	4	5	6	7
比較	↑↗	↗↑	→↘	↘←	↓↙	↙↖	←↖	↖→
反向	↗	↑	↘	←	↙	↓	↖	→
位置	1	0	-1	-2	-3	-4	-5	-6
角度	45	0	315	270	225	180	135	90

$X+Y=45$ $Y_0-X_0=45$ 對稱軸 22.5 度

模式 11：正↑ 反↘ 轉↻

角度	起始	45	90	135	180	225	270	315
正向	↑	↗	→	↘	↓	↙	←	↖
位置	0	1	2	3	4	5	6	7
比較	↑↘	↘→	→↖	↖↑	↓↙	↙←	←↙	↙↓
反向	↘	→	↖	↑	↙	←	↘	↓
位置	3	2	1	0	-1	-2	-3	-4
角度	135	90	45	0	315	270	225	180

$X+Y=135$ $Y_0-X_0=135$ 對稱軸 67.5 度

模式 12：正↑ 反↘ 轉↻

角度	起始	45	90	135	180	225	270	315
正向	↑	↗	→	↘	↓	↙	←	↖
位置	0	1	2	3	4	5	6	7
比較	↑↘	↘→	→↖	↖↑	↓↙	↙←	←↙	↙↓
反向	↘	→	↖	↑	↙	←	↘	↓
位置	3	2	1	0	-1	-2	-3	-4
角度	135	90	45	0	315	270	225	180

$X+Y=135$ $Y_0-X_0=135$ 對稱軸 67.5 度

模式 13：正↑ 反↙ 轉↻

角度	起始	45	90	135	180	225	270	315
正向	↑	↗	→	↘	↓	↙	←	↖
位置	0	1	2	3	4	5	6	7
比較	←↙	↙↓	↓↘	↘↗	↗↖	↖↑	↑↗	↗←
反向	↙	↓	↘	→	↗	↑	↖	←
位置	5	4	3	2	1	0	-1	-2
角度	225	180	135	90	45	0	315	270

$X+Y=225$ $Y_0-X_0=225$ 對稱軸-67.5 度

模式 14：正↑ 反↙ 轉↻

角度	起始	45	90	135	180	225	270	315
正向	↑	↗	→	↘	↓	↙	←	↖
位置	0	1	2	3	4	5	6	7
比較	←↙	↙↓	↓↘	↘↗	↗↖	↖↑	↑↗	↗←
反向	↙	↓	↘	→	↗	↑	↖	←
位置	5	4	3	2	1	0	-1	-2
角度	225	180	135	90	45	0	315	270

$X+Y=225$ $Y_0-X_0=225$ 對稱軸-67.5 度

模式 15：正↑ 反↖ 轉↻

角度	起始	45	90	135	180	225	270	315
正向	↑	↗	→	↘	↓	↙	←	↖
位置	0	1	2	3	4	5	6	7
比較	↓↖	↙←	←↙	↖↓	↑↘	↗→	→↗	↘↑
反向	↖	←	↙	↓	↘	→	↗	↑
位置	7	6	5	4	3	2	1	0
角度	315	270	225	180	135	90	45	0

$X+Y=315$ $Y_0-X_0=315$ 對稱軸-22.5 度

模式 16：正↑ 反↖ 轉↻

角度	起始	45	90	135	180	225	270	315
正向	↑	↗	→	↘	↓	↙	←	↖
位置	0	1	2	3	4	5	6	7
比較	↓↖	↙←	←↙	↖↓	↑↘	↗→	→↗	↘↑
反向	↖	←	↙	↓	↘	→	↗	↑
位置	7	6	5	4	3	2	1	0
角度	315	270	225	180	135	90	45	0

$X+Y=315$ $Y_0-X_0=315$ 對稱軸-22.5 度

(三) 發現：

- 果然符合推論，不同的模式，只用左右轉就可以了，所以，16 個模式，只有 8 種不同的形式。
- 對稱軸為起始點夾角的平分線，隨這不同模式而有不同的對稱軸。

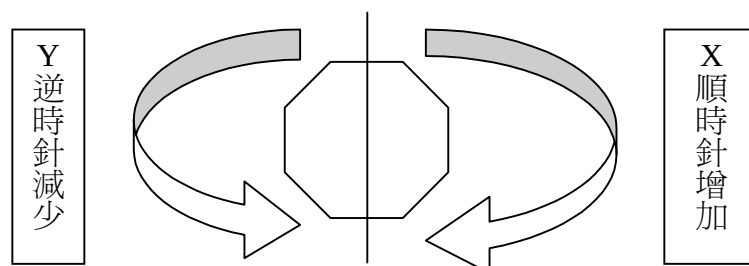
五、研究五：旋轉盤旋轉的時候，答案有沒有一定的規律？

(一) 研究方法：我們比對模式 1 到 16 的 $X+Y$ 及 Y_0-X_0 ，整理分析。

模式	1.2	3.4.	5.6	7.8	9.10	11.12	13.14	15.16
正反向角度和	$X+Y=0$	$X+Y=180$	$X+Y=90$	$X+Y=270$	$X+Y=45$	$X+Y=135$	$X+Y=225$	$X+Y=315$
起始點角度差	$Y_0-X_0=0$	$Y_0-X_0=180$	$Y_0-X_0=90$	$Y_0-X_0=270$	$Y_0-X_0=45$	$Y_0-X_0=135$	$Y_0-X_0=225$	$Y_0-X_0=315$
發現	$X+Y = Y_0-X_0$							

(二) 發現：

- 正反向角度和等於起始點角度差：
 $X+Y=Y_0-X_0$
- 整理公式
 $Y=(Y_0-X_0)-X=-X+(Y_0-X_0)$ ，
題目角度+□=角度差
→□=角度差-題目角度
→□=-題目角度+角度差
解答為：起點的角度差減去正向的角度。
- 驗證一：模式 1， $Y_0-X_0=0$ ，若 X 轉了 45 度時， $X=45$ 度，則 $Y=-45$ 度。
若 $X=90$ 度，則 $Y=-90$ 度，所以 $Y=-X$ ，解答為負正向角度
- 驗證二：模式 5， $Y_0-X_0=90$ ，若 X 轉了 45 度時， $X=45$ 度，則 $Y=90-45=45$
- 以此類推，此公式符合各種情況。



我們再用模式 5 各角度來驗證：

模式 5：正↑ 反→ 轉↻ 角度差 $Y_0-X_0=90$ 位置差 $Y_0-X_0=3-1=2$

角度 X	起始 X_0	45	90	135	180	225	270	315
正向 X	↑	↗	→	↘	↓	↙	←	↖
位置 X	0	1	2	3	4	5	6	7
比較 XY	↑→	↗↗	→↑	↘↖	↓←	↙↙	←↓	↖↘
反向 Y	→	↗	↑	↖	←	↙	↓	↘
位置 Y	2	1	0	-1	-2	-3	-4	-5
角度 Y	90	45	0	-45	-90	-135	-180	-225
角度驗證	Y_0-X_0	90-45	90-90	90-135	90-180	90-225	90-270	90-315
角度差-X	=90	=45	=0	=-45	=-90	=-135	=-180	=-225
位置驗證	$Y_0-X_0=2$	2-1=1	2-2=0	2-3=-1	2-4=-2	2-5=-3	2-6=-4	2-7=-5

(三) 發現：

- 1.影響反向答案的因素是線對稱〈線對稱因翻轉而產生〉以及起始點的角度差。
- 2.由於模式五和模式一，起始點相差 90 度，所以，反向答案也應該相差 90 度，
所以 $Y = -X + (Y_0 - X_0) = (Y_0 - X_0) - X$
- 3.模式五，起始點 $(Y_0 - X_0) = 90$ ，所以 $Y = 90 - X$
- 4.根據這個公式，用角度及位置驗證，都完全符合。
- 5.我們再驗證所有模式，發現這個公式也成立。

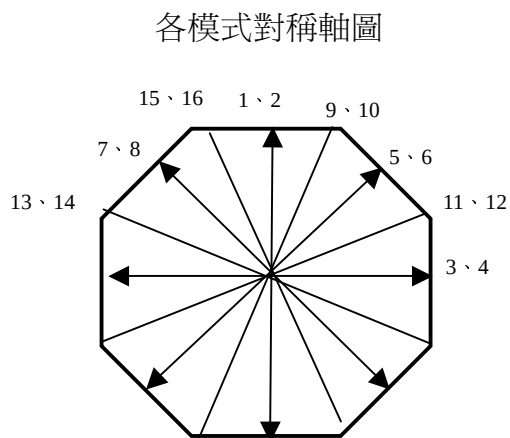
即： $Y = -X + (Y_0 - X_0)$ Y_0 = 反向起始點 X_0 = 正向起始點
 Y = 旋轉後的反向角度 X = 旋轉後的正向角度

六、研究六：將公式比對圖形，尋找有沒有快速的解題方法？

(一) 研究方法：

- 1.以操作過程來分析，影響答案的兩個因素是旋轉角度及翻轉正反面。
- 2.在實際操作時，當正向順時針轉時，反向也跟著順時針轉，當將反向翻轉過來時，答案卻是逆時針轉，形成線對稱關係。根據研究二、三、四我們將各模式所發現的對稱軸整理如下表：

模式	1	3	5	7	9	11	13	15
Y-X	0	180	90	-90	45	135	-135	-45
比較 XY	↑↑	↑↓	↑→	↑←	↑↖	↑	↑	↑
對稱軸 角度	0	90	-45	-45	22.5	67.5	-67.5	-22.5



再以模式 5 為例，來分析 X 轉動時，Y 如何對應。

以模式 5 為例			
說 明	X_0 Y_0 起始角度 X_0 、 Y_0	對稱軸 ， 位於 X_0 、 Y_0 的分角線	X Y Y 為 X 的線對稱

※ 發現：

- 1.由研究三對對稱軸的討論若以正反向起始點的夾角分角線為線對稱軸，將旋轉後的正向圖形做對稱圖，即可求得解答。
- 2.我們驗證各種模式，各種角度都適用。
- 3.因此操作時，先找出 X_0 Y_0 的分角線當對稱軸，再將旋轉後的 X 做線對稱，就是答案 Y 。
- 4.利用這種方法，不經過公式計算，就能快速的得到答案。

※ 討論：

- 1.以前面的研究的公式 $Y = -X + (Y_0 - X_0)$ 來看，影響答案的兩個因素，一個是線對稱，另一個是角度差。
- 2.對稱軸將 $(Y_0 - X_0)$ 平分，正向轉 X 度，反向跟著轉 $-Y$ 度，也就是以對稱軸為界，向左右各旋轉同樣角度。所以 Y 的解答為 X 方向的線對稱方向。
3. $Y = (Y_0 - X_0) / 2 + (Y_0 - X_0) / 2 - X = (Y_0 - X_0) - X$ ，快速法其實是公式法的幾何圖形推論；但這種方法更快速。
- 4.快速法在模式 9 以後，較不好用因為對稱軸在八角型的夾角上，不易定位。

七、研究七：牛刀小試——將發現的規則性做驗證。

（一）研究方法：我們將前面發現的規律，拿到五年級班上測試，看看其他同學答對的情形。

（二）測驗方式：

- 1.以模式 5 當作題目，找 95 名同學受測，分三階段測驗。
- 2.第一階段：猜一猜。以每題 15 秒為限，不告知方法，也不立即對答案，對 95 名同學做測驗。
- 3.第二階段：想一想。出題前，將第一階段的題目與答案一一告知，讓同學想一想，做為這一階段解答的參考，然後，再以每題 15 秒為限，對 95 名同學測驗。
- 4.第三階段：原來如此。先由參與本研究的同學，告訴受測同學答題技巧後，再以每題 15 秒為限，對 95 名同學測驗。

（三）結果：參加人數 95 人，而答對人數如下表。

六、我們將研究流程及結果列表如下：

流 程	內 容	說 明 及 發 現
定義與規則	◆ 定義遊戲規則。 ◆ 角度以北方為 0 度，順時針增加。 ◆ 位置以北方為 0，每 45 度增加 1。 ◆ 分上下轉、左右轉定義 16 種模式	◆ 以八角形旋轉盤，為最容易研究、操作的工具。
簡單模式推理	◆ 以模式一、二為例，尋找規律。	◆ 正反向角度和一定。 ◆ 正反向位置和一定。 ◆ $Y = -X$，對稱軸為垂直線。
進階模式推理	◆ 模式三到模式八	◆ 與前一個研究推理結果吻合。 ◆ 上下轉與左右轉有相同結果。
複雜模式推理	◆ 擴展模式九到模式十六	◆ 與前一個研究推理結果吻合。 ◆ 上下轉與左右轉有相同結果。 ◆ 找出不同模式的對稱軸。
歸納出公式	◆ $Y = -X + (Y_0 - X_0)$ ◆ $Y = (Y_0 - X_0) - X$	◆ 答案與角度差及旋轉角度相關。 ◆ 正向順時鐘增加，則反向逆時鐘減少。
找出新方法 (對稱軸法)	◆ 找出起始點的對稱軸。 ◆ 將 X 做線對稱，則得到 Y。	◆ 這方法快速且正確
測驗與驗證	◆ 將發現的方法分三階度測驗學生	◆ 告知方法後，答對率明顯提高。 ◆ 角度在垂直集水平時，答對率最高。
玩具製作	◆ 創作模式十六合一的玩具。	◆ 增加趣味與創意。

陸、討論

- 一、爲了方便研究，我們用正八角形做研究分析，操作容易，對答案也比較明確，其實，也可以用其他多角形或圓形，答題的原理都會一樣。
- 二、遊戲時，可以先用比較好答的模式，旋轉角度以垂直、水平最容易答對，其他角度，常常會有令人意想不到的答案，更增加遊戲的趣味性，可見其難度也較高。
- 三、共十六種模式，每種用一個圖卡，不太方便，所以，我們就設計一些能將各種模式合而爲一的旋轉盤玩具，既方便又實用。
- 四、對同學施測時，角度 180 度的答對率，卻因解釋答題技巧後反而降低，我們還不知道是什麼原因？
- 五、我們試過不同角的旋轉盤如三角形、五邊形、六邊形、圓形.....等，來做旋轉盤，都

可以得到相同原理的答案，可見我們的公式具有一般性，但是以八角型最好操作，因為操作的人，用兩指就可以做出題目角度，而被測的同學也可以很明確指出答案方向，而其他角度的旋轉盤方向較不明確。

六、未來，我們希望能進一步研究立體的遊戲，以增加趣味性和挑戰性。

七、如果將各種模式，結合電腦動畫來模擬，將更能提供自我練習的機會，而且當作數學科的推廣教材。

柒、結論

一、旋轉盤遊戲，經過我們測試結果，大家都認為很好玩，因為簡單的一張卡片，經過旋轉與翻轉，竟然會很不容易答對，所以同學們常要求「再一次」的玩下去。

二、旋轉盤遊戲是應用到數學的兩個領域：點對稱與線對稱，正好配合我們這學期的數學課程，可以將數學生活化、趣味化。

三、同學百思不得其解的時候，我們的研究團隊，也花了好多時間，用了許多方法，終於解開它的秘密，這樣的過程讓我們很有成就感。

四、推論出旋轉盤的數學公式是： $\mathbf{Y} = -\mathbf{X} + (\mathbf{Y}_0 - \mathbf{X}_0)$ 。

五、推論出公式後，仍然感覺計算不易，幸好，洪同學發現用幾何圖解方式，以 $\mathbf{Y}_0$ 和 $\mathbf{X}_0$ 的夾角平分線為對稱軸，將 $\mathbf{X}$ 做線對稱圖形，即可判斷答案 $\mathbf{Y}$ ，既快速又易正確。

捌、參考資料

國小數學第十冊（民 93） 第四單元：線對稱圖形 康軒版

評語

080418 天旋地轉-旋轉盤好好玩

利用一個簡單的遊戲，來測驗一個人的空間位置轉換的概念。作者利用對稱與旋轉的原理，推導出一個有用的公式。可惜的是雖然有公式，但仍需要一番計算，無法馬上判斷出結果。此可由作者對五年級生所作測試結果得知。但是，本作品提供學生學習對稱與旋轉之教材，極富創意。