

中華民國第四十六屆中小學科學展覽會
作品說明書

國小組 數學科

080416

正方形寶寶面積長大新方法

學校名稱： 新竹市東區新竹國民小學

作者：	指導老師：
小六 林筠倩	林弘謀
小六 馮啟皓	許鳳淑
小六 杜品蓉	
小六 梁譽騰	
小六 葉梓民	

關 鍵 詞：正方形、正方形的面積、創新正方形面積求法

正方形寶寶面積長大新方法

摘要:

正方形，自古以來除了給予人們正正方方的感覺之外，就是那一個再迷人不過的正方形面積了。在這個研究裡，我們也同樣的為正方形的面積而着迷，因此，我們自行觀察並探討新的方法，針對沒有乘法基礎訓練的人們提供一項新的契機來學習並認識正方形面積的奧妙之處。我們由無到有，換句話說就是由 0 到無限大的正方形面積，皆由一個簡易觀念的轉化，將正方形面積由傳統的邊長×邊長加以拯救成簡單的面積加法運算。即是：

$$\begin{aligned} \text{下層正方形的面積數字} &= \text{上層正方形面積數字} + \\ &\quad \text{上層邊長數字}(n) + \\ &\quad \text{下層邊長數字}(n+1) \end{aligned}$$

而它的物理意義則是：

$$\begin{aligned} \text{下層正方形的面積} &= \text{上層正方形面積}(n \times n) + \\ &\quad \text{上層其中一邊向外延伸一個單位面積}(n \times 1) + \\ &\quad \text{上層另一新邊長}(n+1) \text{向外延伸一個單位面積}((n+1) \times 1) \end{aligned}$$

期望這個研究的結果可以提供科學界藉由此正方形面積由無到有的新求法中去思考、探求異次元世界的另類觀點，同時，利用這一個原則，或許可應用在追尋各種古代偉大遺跡早已失落的建築方法，使人類在未來的生活中，可以應用此基本原理來創造出更宏偉的建築或不可思議的太空飛行器(Space craft)。

壹、研究動機：

在家時，我很喜歡看 DISCOVERY(發現頻道)、National Geography(國家地理雜誌)和(Animal Planet)動物星球等知識性的頻道，在印象中曾播過一集關於古埃及法老王的專輯，介紹了許許多多埃及法老王的死後居所---金字塔，由於像卡夫拉金字塔這樣的偉大建築物令我著迷，因此激發了我對金字塔建築的好奇心，我便想把金字塔拆開來瞧瞧，從它的圖形上，看出金字塔的體積是由許多層的正方巨石所構成的石層，於是我想了解這個偉大金字塔的每一層表面是由多少個正方巨石所形成的呢?因此，我迫不及待請教老師，想由科學之母---數學中尋求解答，老師則建議我們不妨從古埃及人最原始的思考模式推廣後，尋找一個永恆的方法，從無到有---來找尋所有正方形的面積計算方式。

貳、研究目的：

- 一、 探討「正方形」的構成因素及「正方形」面積的傳統做法。
- 二、 探討「正方形」面積由無到有的創新方法。

參、研究器材：

尺、筆、紙板、膠帶、金字塔參考圖形。

肆、研究過程：

一、方法一：

步驟一：以實際操作的方法，**繪製**一個任意的正方形。(如圖)

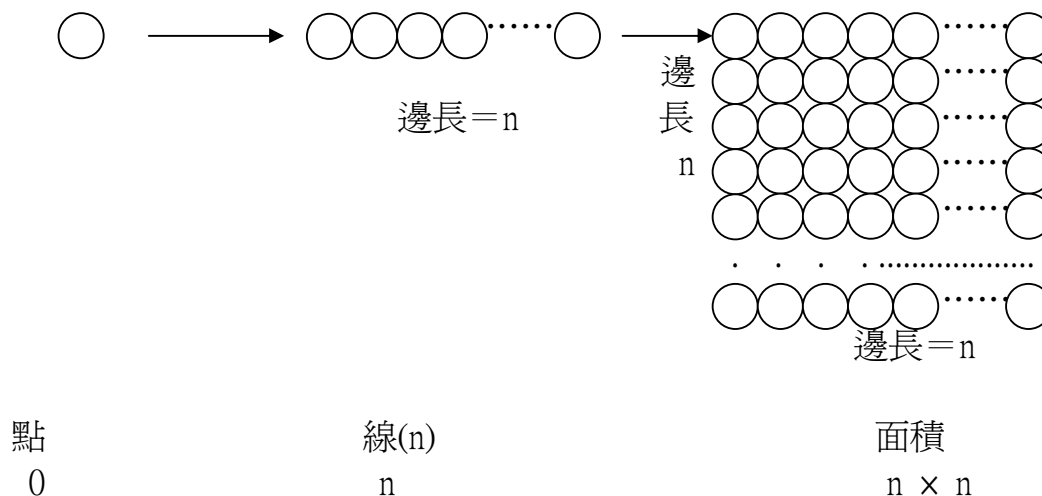


步驟二：以實際操作的方法，用紙板**製作**一個任意的正方形。

步驟三：由步驟一、二的過程中觀察正方形的形成要素。

二、觀察結果

(一)由實作繪製中，我們發現一個正方形面積是由點畫至線，再由線累積而成面。(如圖)



(二)由結果中也可以觀察到正方形可視為由一個中心的零點均勻向水平、垂直方向所擴展相接 90 度角而成的。(如圖)

因此產生了傳統正方形的面積求法：

例如：一正方形邊長為 n ，

則：

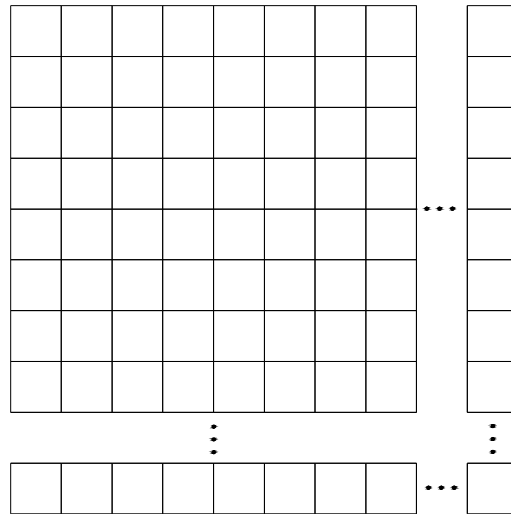
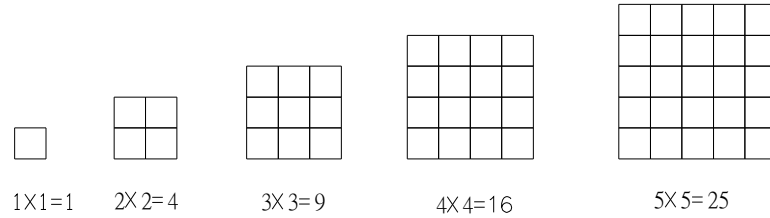
傳統正方形的面積求法 = 邊長 $\times$ 邊長

= $n \times n$ (如下表)

正方形面積傳統求法：

邊長	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
面積	0	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100
面積	0×0	1×1	2×2	3×3	4×4	5×5	6×6	7×7	8×8	9×9	10×10

邊長	$n-1$	n	$n+1$
面積	$(n-1) \times (n-1)$	$(n) \times (n)$	$(n+1) \times (n+1)$
面積	$n \times n - 2 \times n + 1$	$n \times n$	$n \times n + 2 \times n + 1$



傳統正方形面積求法 = $n \times n$

一、方法二：

步驟一：以實際操作的方法，將紙板製成一個個尺寸可不盡相同的金字塔。(如圖)

步驟二：由俯視圖觀察金字塔上下相鄰兩層之間的微妙幾何關係。

步驟三：將上層的正方形任意移向下層正方形的任意一角。

步驟四：再一次由俯視圖觀察金字塔上下相鄰兩層之間的微妙幾何關係。(如圖)

步驟五：將下層的正方形加以分解，著以不同的顏色，以作識別用。(如圖)

步驟六：重複步驟一至步驟五。

二、觀察結果

在步驟一、二中，我們觀察到，由金字塔上層至緊鄰的下層，正方形的俯視圖面積漂亮的平均往外生長。

假設上層正方形的一邊邊長為 n

則下層正方形的一邊邊長為 $n+1$

依照傳統正方形的面積求法

下層正方形的面積比上層正方形面積生長了

= 下層正方形的面積 - 上層正方形面積

$= (n+1) \times (n+1) - n \times n$

$= (n \times n + 2 \times n + 1) - n \times n$

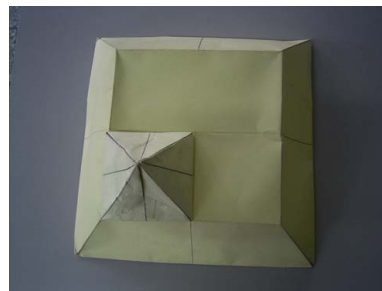
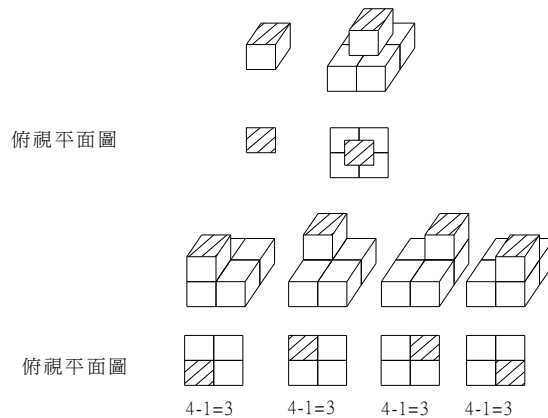
$= 2 \times n + 1$

$= n + (n+1) = \text{上層邊長}(n) + \text{下層邊長}(n+1)$

再經過步驟三、四、五，藉由任意移動上層的正方形至下層的四個角，我們發現到：

(一) 金字塔上層與緊鄰的下層，兩個正方形的面積差，是完整的單位正方形面積的整數倍。

(二) 藉由任意移動上層的正方形至下層的四個角，我們可以得到上下兩層的面積差，不因移動至四個角中的任意角而有所變動。(如圖)



(三) 移動上層正方形至下層的四角後，可藉由比照上層正方形的圖形獲致下層正方形的面積的**數字**恰好等於上層正方形面積**數字**加上上層正方形一邊邊長的數字及再加上下層正方形一邊邊長的數字。(如圖表)

以下列式子來表示，即：

下層正方形的面積**數字** = 上層正方形面積**數字** +
 上層邊長**數字**(n) +
 下層邊長**數字**($n+1$)

正方形面積新求法：

邊長	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
面積	0	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100
面積	0	0+0 +1	1+1 +2	4+2 +3	9+3 +4	16+4 +5	25+5 +6	36+6 +7	49+7 +8	64+8 +9	81+9 +10

邊長	n-1	n	n+1
面積	$(n-1) \times (n-1)$	$(n) \times (n)$	$(n+1) \times (n+1)$
面積	$n \times n - 2 \times n + 1$	$(n \times n - 2 \times n + 1) +$ $(n-1) +$ (n)	$n \times n + n + (n+1)$

我們先以舉例的方法證明我們的新發現是可行的！

(1) 正方形由無到有時：

上層正方形邊長=0

下層正方形邊長=1

應用我們的新發現

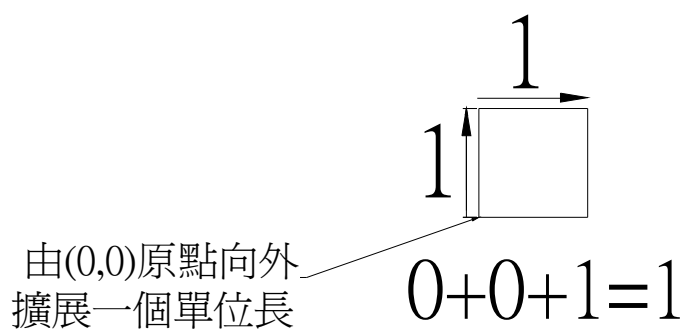
下層正方形的面積**數字** = 上層正方形面積**數字** +
上層邊長**數字**(n) +
下層邊長**數字**(n+1)

可得：

$$1 = 0 + 0 + 1$$

$$= 1$$

與正方形面積傳統求法，邊長為1時，其正方形面積=邊長×邊長=1×1=1 相同



(2) 上層正方形邊長=1

下層正方形邊長=2

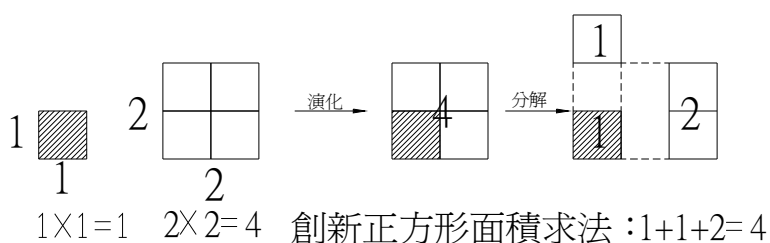
應用我們的新發現

下層正方形的面積**數字** = 上層正方形面積**數字** +
上層邊長**數字**(n) +
下層邊長**數字**(n+1)

可得:

$$\begin{aligned} 4 &= 1 + 1 + 2 \\ &= 4 \end{aligned}$$

與正方形面積傳統求法，邊長為 2 時，其正方形面積=邊長x邊長=2x2=4 相同



(3) 上層正方形邊長=2

下層正方形邊長=3

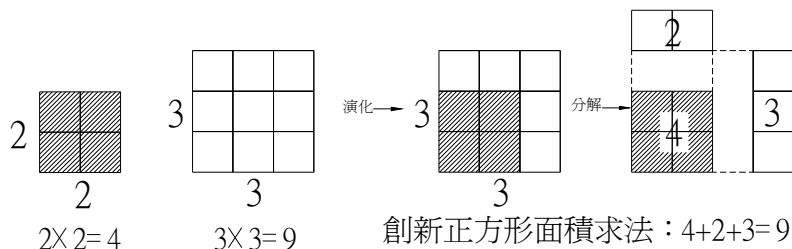
應用我們的新發現

下層正方形的面積**數字** = 上層正方形面積**數字** +
上層邊長**數字**(n) +
下層邊長**數字**(n+1)

可得:

$$\begin{aligned} 9 &= 4 + 2 + 3 \\ &= 9 \end{aligned}$$

與正方形面積傳統求法，邊長為 3 時，其正方形面積=邊長x邊長=3x3=9 相同



(4) 上層正方形邊長=3

下層正方形邊長=4

應用我們的新發現

$$\begin{aligned}\text{下層正方形的面積數字} &= \text{上層正方形面積數字} + \\ &\quad \text{上層邊長數字}(n) + \\ &\quad \text{下層邊長數字}(n+1)\end{aligned}$$

可得:

$$\begin{aligned}16 &= 9 + 3 + 4 \\ &= 16\end{aligned}$$

與正方形面積傳統求法，邊長為 4 時，正方形面積=邊長×邊長=4×4=16 相同

(5) 上層正方形邊長=4

下層正方形邊長=5

應用我們的新發現

$$\begin{aligned}\text{下層正方形的面積數字} &= \text{上層正方形面積數字} + \\ &\quad \text{上層邊長數字}(n) + \\ &\quad \text{下層邊長數字}(n+1)\end{aligned}$$

可得:

$$\begin{aligned}25 &= 16 + 4 + 5 \\ &= 25\end{aligned}$$

與正方形面積傳統求法，邊長為 5 時，正方形面積=邊長×邊長=5×5=25 相同!

(6) 上層正方形邊長=9

下層正方形邊長=10

應用我們的新發現

$$\begin{aligned}\text{下層正方形的面積數字} &= \text{上層正方形面積數字} + \\ &\quad \text{上層邊長數字}(n) + \text{下層邊長數字}(n+1)\end{aligned}$$

可得:

$$\begin{aligned}100 &= 81 + 9 + 10 \\ &= 100\end{aligned}$$

與正方形面積傳統求法，邊長為 10 時，正方形面積=邊長×邊長=10×10=100 相同!

(7) 我們以跳躍式的數字來做佐證：

上層正方形邊長=99

下層正方形邊長=100

應用我們的新發現

$$\begin{aligned}\text{下層正方形的面積數字} &= \text{上層正方形面積數字} + \\ &\quad \text{上層邊長數字}(n) + \\ &\quad \text{下層邊長數字}(n+1)\end{aligned}$$

可得: (若已推得邊長 99 的正方形面積=9801)

$$\begin{aligned} 10000 &= 9801 + 99 + 100 \\ &= 10000 \end{aligned}$$

與正方形面積傳統求法，邊長為 100 時，正方形面積=邊長×邊長=100×100=10000 相同!

由以上應用我們的新發現，果然證明合理可用!

接下來，我們以數學歸納法來加以驗證：

在證明中，我們以 L 代表正方形一邊邊長， A 代表正方形的面積
證明：

$$(1) \quad L_0 = 0 \rightarrow A_0 = 0 \text{ 成立}$$

$$(2) \quad L_1 = 1 \rightarrow A_1 = A_0 + L_0 + L_1 = 0 + 0 + 1 = 1 \times 1 = 1 \quad \text{成立}$$

$$(3) \quad L_2 = 2 \rightarrow A_2 = A_1 + L_1 + L_2 = 1 + 1 + 2 = 2 \times 2 = 4 \quad \text{成立}$$

$$\text{設 } L_n = n \text{ 即 } A_n = A_{n-1} + (n-1) + (n) = n \times n \quad \text{成立}$$

$$\begin{aligned} \text{則當 } L_{n+1} = n+1 \text{ 時 } \quad A_{n+1} &= (n+1) \times (n+1) \\ &= n \times n + 2 \times n + 1 \end{aligned}$$

$$\text{又已知 } A_n = A_{n-1} + (n-1) + (n) = n \times n \text{ 爲真}$$

$$\text{所以 } A_{n+1} = A_n + 2 \times n + 1$$

$$= A_n + n + (n+1) \quad \text{得證}$$

因此，由數學歸納法中，我們得到金字塔由無到有的過程中有以下的奧秘!
金字塔下層的面積數字=上層的面積數字+上層的邊長數字+下層的邊長數字

伍、研究結果

藉由以上的研究，我們發現正方形的面積也可以有其它變形的求法，也就是：

$$\begin{aligned} \text{下層正方形的面積數字} &= \text{上層正方形面積數字} + \\ &\quad \text{上層邊長數字}(n) + \\ &\quad \text{下層邊長數字}(n+1) \end{aligned}$$

陸、討論

我們由研究結果已知：

$$\begin{aligned} \text{下層正方形的面積} &= \text{上層正方形面積} + \\ &\quad \text{上層邊長} \times n + \\ &\quad \text{下層邊長} \times (n+1) \end{aligned}$$

但就物理義意而言，上式的物理表示方式為

$$\begin{aligned} \text{下層正方形的面積} &= \text{上層正方形面積}(n \times n) + \\ &\quad \text{上層其中一邊向外延伸一個單位面積}(n \times 1) + \\ &\quad \text{上層另一新邊長}(n+1) \text{向外延伸一個單位面積}((n+1) \times 1) \end{aligned}$$

我們所研究出的新方法，就是將傳統正方形以乘法形式所運算出面積的方法加以不同的觀點來轉變為簡單加法的基本運算。就算一個人從不會乘法，也可以用此簡易的觀念和原則算出正方形的面積。

另外，在這個研究中，我們從無到有的將正方面積一個一個的延伸出來，並可以進一步的將其結果擴展至無限大。

柒、結論

希望這個研究的結果可以提供科學界藉由此正方形面積由無到有的新求法中去思考、探求異次元世界的另類觀點，同時，利用這一個原則，或許可應用在追尋各種古代偉大遺跡早已失落的建築方法，使人類在未來的生活中，可以應用此基本原理來創造出更宏偉的建築，或不可思議的太空飛行器(Space craft)。

捌、參考資料

- 一、Neil's 小站 <http://student.jhjh.tpc.edu.tw/~hs210046/triangle/>
- 二、康軒出版社 康軒數學六上第八單元 比、比值與正比



一個 $3 \times 3 = 9$ 的正方形基底



延伸出一個 $3 \times 1 = 3$ 的面積



再延伸一個 $4 \times 1 = 4$ 的面積($9+3+4=16$)



三個一層的將正方形面積堆積起來



再往上堆砌一層正方形



再使用新方法延伸一塊新面積



來！來！來！
完成了一層邊長為 2 的正方形
($1+1+2=4$)！



動動腦！
用新方法創造出一個兼具微分積分概念的
金字塔！



嗯！同心協力一起堆疊研究用金字塔！



聚精會神的關注伙伴們的思考模式



同學的用心金字塔，你看得見！



逐漸看出面積是由無到有的神奇。



底層是由上層面積由小而大的延伸



嗯！萬丈高樓平地起！（最大基層面積）



將金塔倒過來，尋找層次間的關係。



分層觀察出面積和數字運算的對應！



叮咚！讓顏色輔助我們研究吧！



每一個正方形為三小塊面積的加成！



藍色塊顯示水平與垂直方向的延伸面積



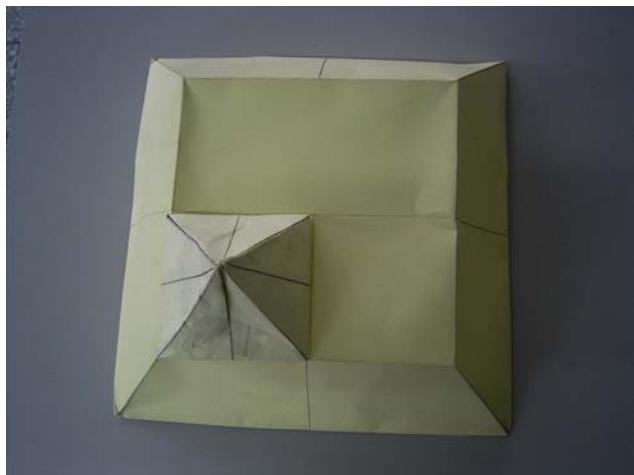
另一位伙伴的思考模式



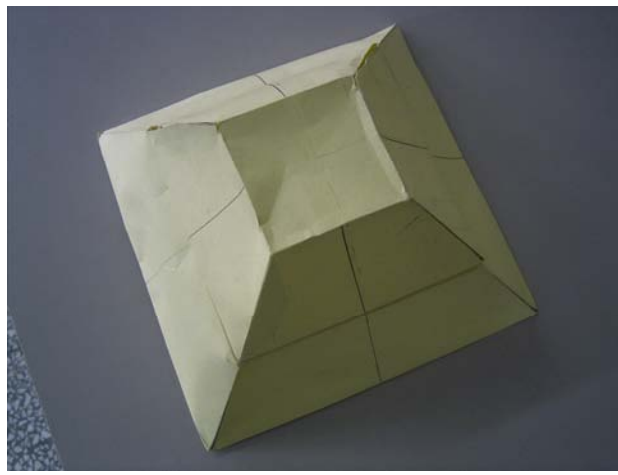
一、二，一、二小心堆疊金字塔



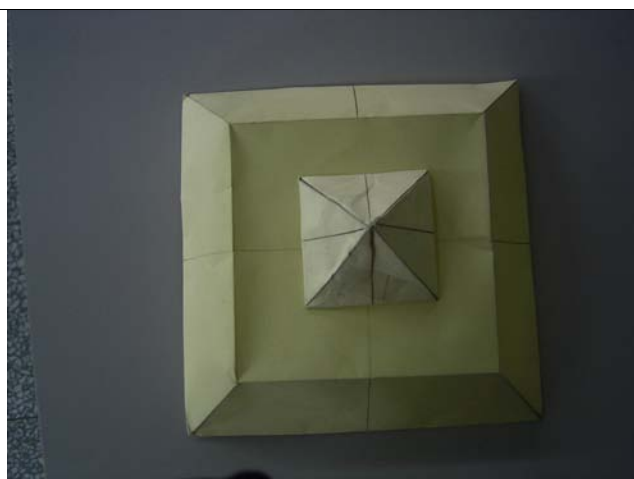
多加體會分層的共同結構意義。



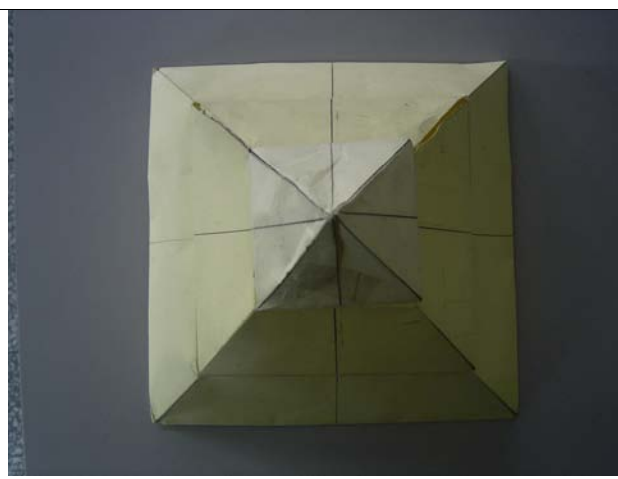
小正方形在基座上的位置透露著玄機



看出這個金字塔的截面是正方形了嗎？



隔層放置的觀察，(別有新意)。



完整的另一個金字塔



遇到難題時的認真思考模樣。



在小金字塔上予以清楚標示。



游移色塊，看出剩餘面積的恆存一致性



站在椅子上，由上而下，觀看金字塔的俯視圖。



同學們一起演算，尋求解決之道。



細細窺伺金字塔中，正方形面積的奧秘



以數學歸納法驗證新方法的可行性。



同學自己出題目驗證自己發現的新方法



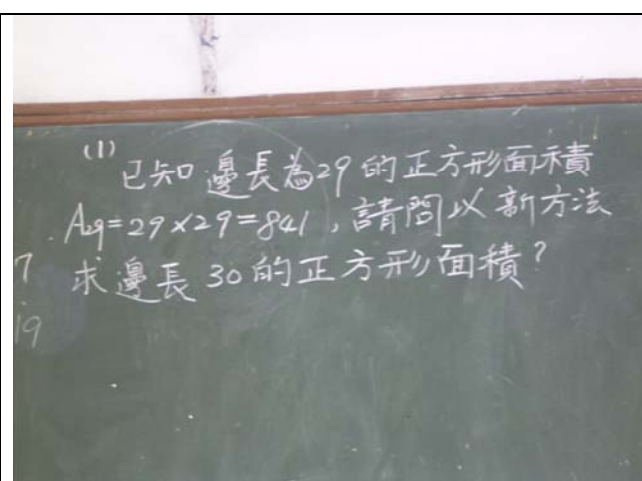
以較大數演算來檢驗新正方形面積求法。



演算黑板上的題目，多方檢驗新方法



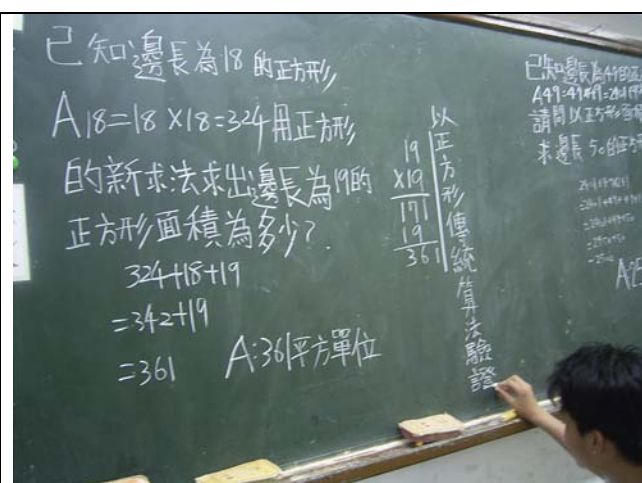
以新方法求出邊長 50 的正方形面積



由已知的正方形面積求得下一個正方形的面積



在數學練習簿上演算新方法。



在新方法面求出正方形面積後，以傳統方法(邊長 x 邊長)求出以驗證其正確性。

評語

080416 正方形寶寶面積長大新方法

1. 此主題是針對無乘法基礎的人提供一項新的方法來學習並認識正方形面積，立意良好。但對新發現的公式而言，純粹為簡單加法的基本運算，若就物理意義，又回歸到乘法了，新公式所能展現的意義較為不足。
2. 在結論中，此研究結果的啟示可探求異次元世界的另類觀點或不可思議的太空飛行器久缺具體說明，無法令人了解本研究的學術性或實用性價值。