中華民國第四十六屆中小學科學展覽會
作品說明書

國小組　數學科

080414

錢幣變臉秀

學校名稱： 臺南縣鹽水鎮鹽水國民小學

作者：	指導老師：
小六 林峻銚	何鳳珠
小六 翁翊禎	李璧伶
小五 沈宗郁	
小五 翁煜傑	
小五 蘇佩甄	

關 鍵 詞：排列組合、規律探索、直覺式與非直覺式

摘要

看看我們現在使用的錢幣愈來愈精美，不難想像鑄造這些硬幣的成本，現在我國發行的硬幣有 5 種（1 元、5 元、10 元、20 元、50 元），大家也都用得很習慣，但是可曾想過，若改換這些錢幣的幣值，能否讓我們在付任何金額時，所需的硬幣數量減少，如此一來不但可以讓我們民眾的錢包減重，也能讓國家節省鑄造的成本，若可以改換錢幣幣值的話。這是一個突發奇想的構念，也是一個另類的思考與想像，在老師的帶領下，我們投入其研究。

本研究的前提是在不找錢的情況下探討幣值組合與付款的情形，同時也尋求各方協助依據我們的需求設計幣值程式，以節省大量計算的繁雜及麻煩。從湊數問題衍生到幣值的組合問題，從中也發現了直覺式組合與非直覺式組合的規律，由大小幣值間的關係，我們可以預測出此組幣值組合的模式爲何，抽絲剥繭中也找出了比我們現在使用的幣值更有效益的幣值組合，而且可以有相當多種的選擇呢！其中質數幣值亦是居於一個重要的角色。在分析了國內幣值外，我們也嘗試分析國外各種幣值的使用情形，並提出可能之建議。

關鍵字詞：排列組合、規律探索、直覺式與非直覺式

錢幣變臉秀

壹、研究動機

上街購物每次總是掏出大鈔讓商家找錢，久而久之會發現錢包裡塞滿的盡是硬幣，若要以不找錢的付款方式來付款當然也是沒問題，但是～要如何付款才能讓硬幣數量最少呢？這就得思考一下了。似乎未曾有人懷疑過，我們現在使用的幣值是否是最佳的面額（即付款的平均幣數最少），也或許我們都太習慣也太熟悉十進數及 5 的倍數，所以都習以爲常，但是，是可曾想過：若改變這些幣值，會有什麼樣的影響呢？能否找到一種最佳的幣值組合，讓百姓購物付帳時所需付的錢幣數減到最少，減輕荷包的重量，同時也能爲國家省下不少鑄造硬幣的成本，這是一個有趣的研究，想不想知道結果呢？請跟我們一起來探討吧～

貳、研究目的

一、任意三種幣值（a、b、1）要湊成 N 元，各有幾種付款方式？

二、探究任意兩種幣值付款的最少幣數之組合。

三、探究任意三種幣值付款的最少幣數中，直覺式組合與非直覺式組合出現的規律。

四、付款範圍在百元以下，哪一種組合爲最佳幣值組合？

五、特殊幣值組合之探究。

六、分析比較各國的幣制系統，並提出建議之較佳幣值組合。

參、實驗研究器材

電算器、電腦(Excel 及幣值組合程式)、數位相機

肆、名詞定義

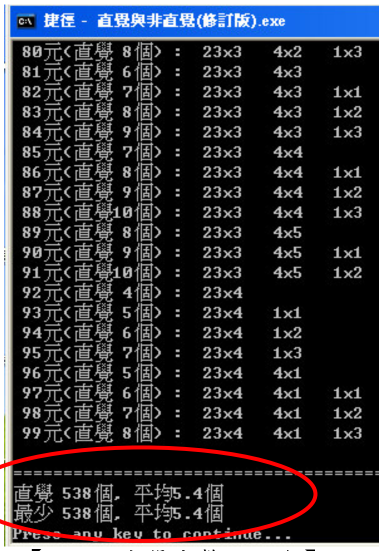
1. 最少幣數：付款所需的最少硬幣數量
2. 總幣數：付款 1 元到 N 元所需的所有硬幣數量總和
3. 最佳組合：所需總幣數最少的幣值組合
4. 直覺式組合：若求出的最少幣數是先利用最大幣值來付款，剩餘的再用第二大幣值付款，以此類推所得出的，則此付款方式即爲直覺式組合。

   例：用 20 元、10 元、1 元來湊成 30 元，若先用 20 元來付，其餘的再用 10 元來付，共要 2 個硬幣，運用此法所需的硬幣數量最少，則此為直覺式組合。
5. 非直覺式組合：若求出的最少幣數不是用上述方式所得到，則此付款方式即爲非覺式組合。

例：用 25 元、10 元、1 元來湊成 30 元，若先用 25 元來付，其餘的再用 1 元付，共要 6 個硬幣，但若直接用 10 元來付，而不直接經過最大幣值，則只要 3 個硬幣就夠了，則此為非直覺式組合。

6. 直覺式幣值組合：某組幣值在付款範圍 100 以內，每一種金額最少幣數的付款方式皆爲直覺式組合，則此組幣值稱爲直覺式幣值組合。＜在程式中跑出來的結果，直覺的個數會和最少的個數相同，如圖 a＞

7. 非直覺式幣值組合：某組幣值在付款範圍 100 以內，每一種金額最少幣數的付款方式有些是直覺式組合，有些是非直覺式組合，則此組幣值稱爲非直覺式幣值組合。＜在程式中跑出來的結果，直覺的個數會和最少的個數不相同，且利用非直覺式跑出來的幣數會更少，如圖 b＞



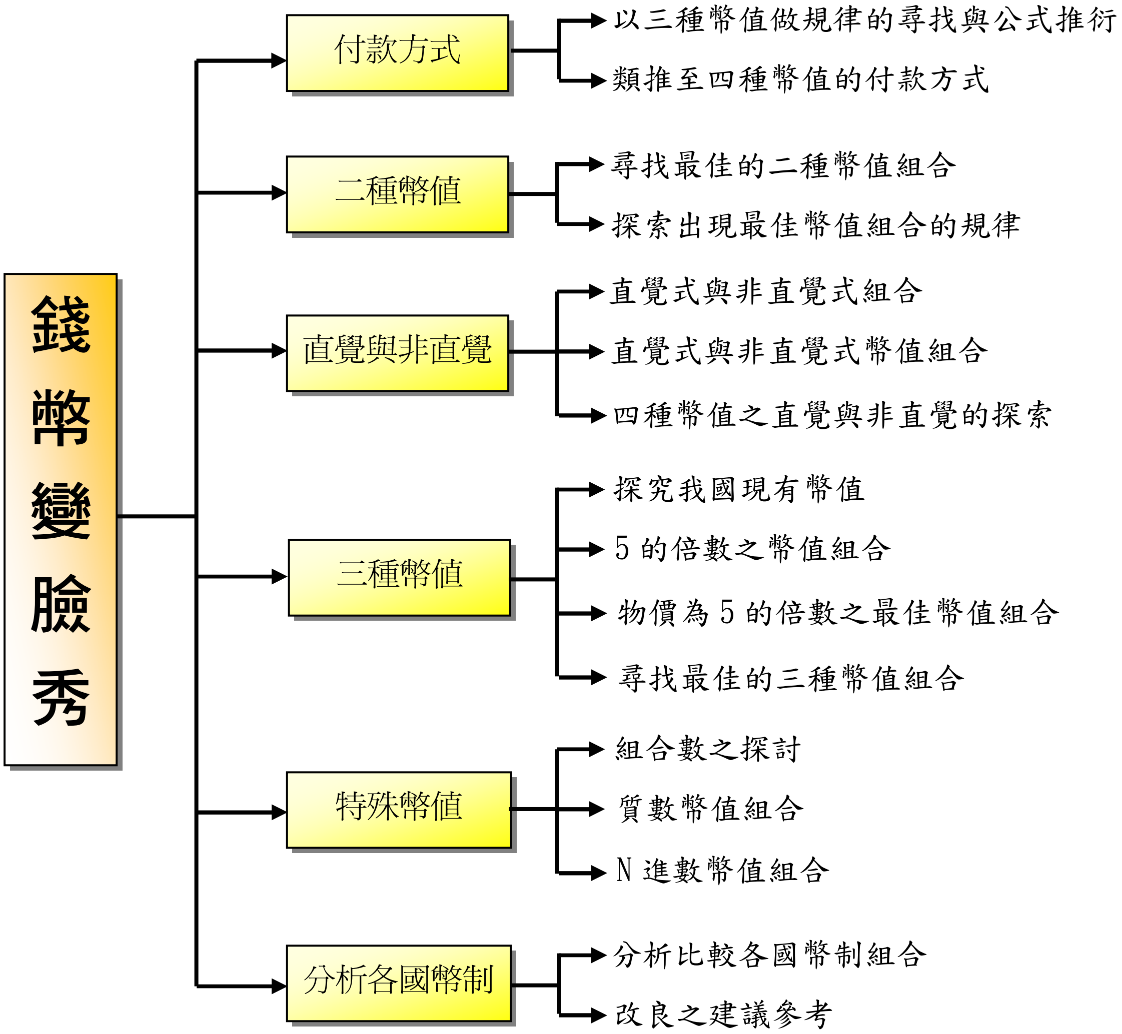
【圖 a～直覺式幣值組合】

【圖 b～非直覺式幣值組合】






伍、研究架構



陸、研究方法與結果：

活動一：任意三種幣值(a、b、1)要湊成 N 元，有幾種付款方式？

【方法】

1.以 N＝10 及 N＝20 爲例，探索其運算規律，並檢驗之。

2.能否推廣到四種幣值的付款方式？

【實驗結果】

(一) 在幣值組合爲(a、b、1)，10≧a＞b 時，共有 8×9÷2＝36 種組合；當 20≧a＞b 的情況下，共有 18×19÷2＝171 種組合。探討任一組合湊成 10 或 20 共有幾種湊法，我們先以列表方式來求得，如表 1-1 及表 1-2，再依表格中的規律歸納出除式算則。

【表 1-1】

金額	20	20	20	20
15	1	0	0	0
8	0	2	1	0
1	5	4	12	20
總幣數	6	6	13	20

【表 1-2】

金額	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10
3	3	2	2	2	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0
2	0	2	1	0	3	2	1	0	5	4	3	2	1	0
1	1	0	2	4	1	3	5	7	0	2	4	6	8	10
總幣數	4	4	5	6	5	6	7	8	5	6	7	8	9	10

20÷15=1…5　　5÷8=0…5　→使用 1 個 15 元，可以有 1 種湊法
　　=0...20　20÷8=2…4　→使用 0 個 15 元，可以有 3 種湊法

10÷3=3…..1　　1÷2=0…1　→使用 3 個 3 元，可以有 1 種湊法
　　=2…..4　　4÷2=2….0　→使用 2 個 3 元，可以有 3 種湊法
　　=1…..7　　7÷2=3…1　→使用 1 個 3 元，可以有 4 種湊法
　　=0…..10　10÷2=5…0　→使用 0 個 3 元，可以有 6 種湊法

歸納 1-1：當 a＋b＞N 時，則湊成 N 的方法有〔N÷a〕＋〔N÷b〕＋1 種【〔N÷a〕即表示使用 a 幣值的最大數量；〔N÷b〕即使用 b 幣值的最大數量】，因爲 a 與 b 無法同時使用。註：我們定義“〔N÷a〕”表示 N÷a 其結果的整數值。

例：15、8、1 湊成 20 元共有〔20÷15〕＋〔20÷8〕＋1＝1＋2＋1＝4 種

歸納 1-2：當 a＋b≦N 時，則湊成 N 的方法爲**第二階所有算式的商數+1 之總合**。

●進一步思考～以歸納 1-2 的方式，第二階的商數並沒有固定的規則性，因此需要將所有算式一一列出才能找到答案，有什麼方法可以更快找到呢？

想法：第一階的餘數（即第二階的被除數）是等差數列，若第二階餘數也有規律的話，我們就能簡單算出第二階的商數之和了。

發現：a.第一階的餘數是差數爲 a 的等差數列。

b.餘數的規律與 a 及 b 有關，每次餘數皆增加 a÷b 的餘數值。

c.當 a 爲 b 的倍數時，則所有式子的第二階餘數皆與第一層餘數相同。

用(3、2、1)湊成 10 元
10÷3=3….1　　1÷2=0….1
10÷3=2….4　　4÷2=2….0
10÷3=1….7　　7÷2=3….1
10÷3=0….10　10÷2=5….0

此 1 為 3÷2 之餘數

+1
+1
+1

若超過除數 2 則再-2

用(6、3、1)湊成 20 元
20÷6=3…2　　2÷3=0….2
20÷6=2…8　　8÷3=2….2
20÷6=1..14　14÷3=4….2
20÷6=0..20　20÷3=6….2

由上述的發現，我們歸納出可以求出幾種湊法的更快算則～

歸納 1-3：

列出第一層算式：$N÷a=q_1\cdots r_1$　　$r_1÷b=q_2\cdots\cdots r_2$

總湊法：$\left\lfloor \dfrac{\text{第一階餘數總和}}{b} \right\rfloor + \lfloor \text{第一階的商數}+1 \rfloor - \left\lfloor \dfrac{\text{第二階餘數總和}}{b} \right\rfloor$

檢驗 1：以幣值爲 9、6、1 元湊成 30 元→30÷9=3…3　　3÷6=0…3

$$\left\lfloor \frac{(3+30)*4/2}{6} \right\rfloor + \lfloor 3+1 \rfloor - \left\lfloor \frac{3+0+3+0}{6} \right\rfloor = 14(\text{種})$$

檢驗 2：以幣值爲 10、3、1 元湊成 46 元→46÷10=4…6　6÷3=2…0

$$\left\lfloor \frac{(6+46)*5/2}{3} \right\rfloor + \lfloor 4+1 \rfloor - \left\lfloor \frac{0+1+2+0+1}{3} \right\rfloor = 47(\text{種})$$

(二) 分析四種幣值的付款方式，發現其階層是挺複雜的，無法直接套用**歸納 1-3**的算則，但可以利用**歸納 1-2**來求出總湊法。以 25、17、12、1 元湊成 70 元為例說明之：

註：本研究為了要減少計算上的繁瑣，我們亦四處向資訊專家請教，希望能依照我們的需求寫出可以適用且取代手工計算的程式，除了方便接下來的研究，同時也可以做為檢驗我們的推理之用。

70÷25=2……20	20÷17=1……3	3÷12=0……3
	20÷17=0……20	20÷12=1……8
70÷25=1……45	45÷17=2……11	11÷12=0……11
	45÷17=1……28	28÷12=2……4
	45÷17=0……45	45÷12=3……9
70÷25=0……70	70÷17=4……2	2÷12=0……2
	70÷17=3……19	19÷12=1……7
	70÷17=2……36	36÷12=3……0
	70÷17=1……53	53÷12=4……5
	70÷17=0……70	70÷12=5……10

第三階所有商數+1 之總合即為總付款方式。
1+2+1+3+4+1+2+4+5+6=29
共有 29 種付款方式

活動二：探究任意兩種幣值付款的最少幣數之組合。

【方　法】

1. 找出各種付款錢數範圍所需幣數最少的二種幣值組合。
2. 探索二種幣值組合付款總幣數之規律，並歸納出預測法則。

【實驗結果】

(一) 兩種幣值組(至少含有 1 元)共有 98 種組合，而付款金額範圍在 1～99，因此共有 98 ×99＝9702 筆數據資料，部分列表如下：

註 1：表中的數據為累積的總幣數，最上列為幣值組合，最左列為付款金額範圍(如：7 表示 1～7 元)。
註 2：灰色區塊為某個付款範圍的較佳幣值組合
註 3：空白區塊表示其總幣數已超過最少幣數，不可能成為較佳組合，因此不羅列。

【表 2-1】

	2,1	3,1	4,1	5,1	6,1	7,1	8,1	9,1	10,1	11,1		2,1	3,1	4,1	5,1	6,1	7,1	8,1	9,1	10,1	11,1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	51						318	318	326		
2	2	3	3	3	3	3	3	3	3	3	52						328	328	338		
3	4	4	6	6	6	6	6	6	6	6	53						339	339	351		
4	6	6	7	10	10						54						351	351	357		
5	9	9	9	11							55						364	364	364		
6	12	11	12	13							56						372	371	372		
7	16	14	16	16							57						381	379	381		
8	20	18	18	20							58						391	388	391		
9	25	21	21	25							59						402	398	402		
10	30	25	25	27							60						414	409	414		
11		30	30	30	36						61						427	421	427		
12		34	33	34	38						62						441	434	441		
13		39	37	39	41						63							448	448		
14			42	45	45						64							456	456		
15			48	48	50						65							465	465		
16			52	52	56						66							475	475	483	
17			57	57	63						67							486	486	496	

18			63	63	66						68							498	498	510	
19			70	70	70						69							511	511	525	
20			75	74	75						70							525	525	532	
21				79	81	87					71							540	540	540	
22				85	88	91					72							549	548	549	
23				92	96	96					73							559	557	559	
24				100	100	102					74							570	567	570	
25				105	105	109					75							582	578	582	
26				111	111	117					76							595	590	595	
27				118	118	126					77							609	603	609	
28				126	126	130					78							624	617	624	
29				135	135	135					79								632	640	
30				141	140	141					80								648	648	
31				148	146	148					81								657	657	661
32				156	153	156					82								667	667	673
33				165	161	165					83								678	678	686
34				175	170	175					84								690	690	700
35				182	180	180					85								703	703	715
36					186	186					86								717	717	731
37					193	193					87								732	732	748
38					201	201					88								748	748	756
39					210	210	220				89								765	765	765
40					220	220	225				90								775	774	775
41					231	231	231				91								786	784	786
42					238	237	238				92								798	795	798
43					246	244	246				93								811	807	811
44					255	252	255				94								825	820	825
45					265	261	265				95								840	834	840
46						271	276				96									849	856
47						282	288				97									865	873
48						294	294				98									882	891
49						301	301				99									900	900
50						309	390														

由上表 2-1，可以看出付款範圍在 99 元以內，(10,1)或(11,1)爲較佳的幣值組合，若付款範圍在 75 元以內，則(9,1)爲較佳的幣值組合，付款範圍在 50 元以內，則(7,1)或(8,1)爲較佳的幣值組合。因此得到結論：***哪一種是最佳的二種幣值組合要視付款範圍而定。***

（二）仔細觀察【表 2-1】的灰色區塊是呈現有規律的狀況，我們深入探究歸納出以下幾點：

歸納 2-1：幣值組(a、1)在付款金額爲 a×(a-3)+1 或 a×(a-2)～a×(a+1)-1 範圍<此範圍剛好有 3a 個>時是最佳組合，此推論到其它更大的付款金額亦符合。

例：幣值組(7、1)在付款金額範圍在 29 元以內(7×4+1)，及 35 元以內(7×5)～55 元以內(7×8-1)時，是為最佳幣值組合。

例：幣值組(20、1)在付款金額範圍在 341 元以內(20×17+1)，及 360 元以內(20×18)～419 元以內(20×21-1)時，是為最佳幣值組合。……….利用電腦檢驗之皆符合其推測

歸納 2-2：由歸納 2-1，我們也可以反推付款金額 N 以內，哪一種幣值組合最好。

判斷 1：若 N=a×(a-3)+1 時，則最佳幣值組為(a、1)、(a-1、1)、(a-2、1)

判斷 2：若 N=a×(a+1)-1 時，則最佳幣值組為(a、1)、(a+1、1)、(a+2、1)

判斷 3：將 N 拆為乘積最接近 N 的兩個差 2 的整數即可找出最佳幣值組<1 組及 2 組皆有可能>

例：付款金額在 50 元以內，哪一種幣值組合最佳？

想法→不符合判斷 1 或判斷 2，所以利用判斷 3 來解題，50≒8×6，因此推得最佳幣值組為(8、1)，再思考前一組(7、1)，其 50 落在 35～55 之間，所以另一組最佳幣值為(7、1)

活動三：探究任意三種幣值付款的最少幣數中，直覺式組合與非直覺式組合出現的規律

【方　法】

1.N 為單一數值時，找出最少幣數出現在直覺式組合或非直覺式組合的規律。

2.N 為一個範圍時，找出最少總幣數出現非直覺式組合的規律。

3.直覺式組合與非直覺式組合能否推衍至四種幣值？

【實驗結果】

(一) 以湊 20 為例（N=20），列表找出各種幣值組合所使用的最少幣數（見實驗記錄），發現多數是直覺式組合（見名詞釋義），只有少數是屬於非直覺式組合（見名詞釋義），如下表：

【表 3-1】～直覺式組合與非直覺式組合之範例

錢數	20			20		
幣值組合	4、3、1			17、3、1		
最大數量	5	6	20	1	6	20
最少幣數	5			2		
直覺式	5	0	0	1	1	0
非直覺式						

錢數	20			20		
幣值組合	6、4、1			13、8、1		
最大數量	3	5	20	1	2	20
最少幣數	4			6		
直覺式	3	0	2	1	0	7
非直覺式	2	2	0	0	2	4

在整個科展實驗中，我們希望能找到最佳幣值組合，讓付款的幣數能減量，實驗進行中發現～非直覺式組合所需的幣數大多會比直覺式組合少，因此我們首要目標是將能產生非直覺式的幣值組合找出來，以下就我們的實驗記錄中歸納出幾點判斷原則，並舉例證用電腦檢驗之：

【表 3-2】

	出現非直覺式組合的條件	判斷其原因	當 N＝20 時	驗證判斷原則是否合理
原則1	當 $b=\frac{1}{2}N$ 時(但 a+1＜N)	因為 2 個 b 就可以湊成 N，當然就不需要去考慮 a 幣值了	(16、10、1) (12、10、1)	N=42，(38、21、1)……○ N=58，(49、29、1)……○ N=76，(42、38、1)……○
原則2	當 a＋b＞N，且 N÷a 的商＋餘數＞N÷b 的商＋餘數	因為 a＋b＞N，所以 a 幣值與 b 幣值不能同時存在。	(12、9、1) (16、9、1)	N=38，(23、17、1)……○ N=65，(48、25、1)……○ N=80，(53、37、1)……○

【表 3-3】

	出現直覺式組合的條件	判斷其原因	當 N＝20 時	驗證判斷原則是否合理
原則1	當 a 為 b 的倍數時 <N 為任意數>	1 個 a 元就可以抵上至少 2 個以上的 b 元了	(12、4、1) (14、7、1)	N=30，(18、9、1)……○ N=37，(8、4、1)……○ N=89，(70、35、1)……○
原則2	當 a＋1 為 b 的倍數時 <N 為任意數>	a+1(代表 2 個幣數)至少會是 2 個以上的 b	(19、4、1) (13、7、1)	N=78，(49、5、1)……○ N=58，(20、7、1)……○ N=41，(15、8、1)……○
原則3	當 b＝2 時 <N 為任意數>	其原因包含了上述(2)(3)的其中之一	(15、2、1) (18、2、1)	N=31，(29、2、1)……○ N=99，(9、2、1)……○ N=79，(43、2、1)……○

原則4	當 b＝3 時（但 a＝4 除外）<N 爲任意數>	由列表中看出，目前無法推測出其原因<後來於實驗三(p11)中發現其原因>	(10、3、1) (19、3、1)	N=89，(7、3、1)……○ N=44，(13、3、1)……○ N=31，(19、3、1)……○
原則5	當 a＋1＝N 時	直接用最大幣值再加上 1 元就可以達到 N 元，就不需要第二幣值	(19、4、1) (19、7、1)	N=35，(34、27、1)……○ N=50，(49、8、1)……○ N=77，(76、17、1)……○
原則6	當 N 爲 a 的倍數時	因爲這樣用 a 幣值就比用 b 幣值快一步	(5、4、1) (10、6、1)	N=78，(39、17、1)……○ N=45，(9、4、1)……○ N=30，(6、4、1)……○
原則7	當 a＋b＝N 時	因爲 N 剛好就只要 2 個幣數就行了，若用 2 個 b 就還無法湊到 N	(12、8、1) (16、4、1)	N=39，(27、12、1)……○ N=32，(17、15、1)……○ N=52，(30、22、1)……○
原則8	當 a、b 皆大於 $\frac{1}{2}$N 時	因爲 a 或 b 頂多只能用 1 個，其餘的都要用 1 元來湊	(13、11、1) (15、12、1)	N=68，(48、35、1)……○ N=48，(32、29、1)……○ N=40，(22、21、1)……○
原則9	當 a＋b＞N，且 N÷a 的商＋餘數≦N÷b 的商＋餘數(適用 a 過半，b 不過半)	因爲 a＋b＞N，所以 a 幣值與 b 幣值不能同時存在。	(17、7、1) (14、3、1)	N=62，(55、21、1)……○ N=39，(29、4、1)……○ N=48，(41、20、1)……○

(二) 當 N 設爲一個範圍時，我們利用電腦程式將所需幣數爲**非直覺式的幣值組合**一一列出，並觀察其規律（即程式跑出的結果，直覺之個數與最少之個數不相同）。

說明：N＝1~58 時，幣值爲 36,8,1，其總幣數直覺爲 304，最少爲 304→則(36,8,1)爲直覺式幣值組合

N＝1~58 時，幣值爲 17,8,1，其總幣數直覺爲 301，最少爲 266→則(17,8,1)爲非直覺式幣值組合

【表 3-4】

b=4	b=5	b=6	b=7	b=8	b=9	b=10	b=11	b=12
5,4,1	6,5,1	7,6,1	8,7,1	9,8,1	10,9,1	11,10,1	12,11,1	13,12,1
6,4,1	7,5,1	8,6,1	9,7,1	10,8,1	11,9,1	12,10,1	13,11,1	14,12,1
9,4,1	8,5,1	9,6,1	10,7,1	11,8,1	12,9,1	13,10,1	14,11,1	15,12,1
	11,5,1	10,6,1	11,7,1	12,8,1	13,9,1	14,10,1	15,11,1	16,12,1
	12,5,1	13,6,1	12,7,1	13,8,1	14,9,1	15,10,1	16,11,1	17,12,1
	16,5,1	14,6,1	15,7,1	14,8,1	15,9,1	16,10,1	17,11,1	18,12,1
		15,6,1	16,7,1	17,8,1	16,9,1	17,10,1	18,11,1	19,12,1
		19,6,1	17,7,1	18,8,1	19,9,1	18,10,1	19,11,1	20,12,1
		20,6,1	18,7,1	19,8,1	20,9,1	21,10,1	20,11,1	21,12,1
		25,6,1	22,7,1	20,8,1	21,9,1	22,10,1	23,11,1	22,12,1
			23,7,1	21,8,1	22,9,1	23,10,1	24,11,1	25,12,1
			24,7,1	25,8,1	23,9,1	24,10,1	25,11,1	26,12,1
			29,7,1	26,8,1	24,9,1	25,10,1	26,11,1	27,12,1
			30,7,1	27,8,1	28,9,1	26,10,1	27,11,1	28,12,1
			36,7,1	28,8,1	29,9,1	27,10,1	28,11,1	29,12,1
				33,8,1	30,9,1	31,10,1	29,11,1	30,12,1
				34,8,1	31,9,1	32,10,1	30,11,1	31,12,1
				35,8,1	32,9,1	33,10,1	34,11,1	32,12,1
				41,8,1	37,9,1	34,10,1	35,11,1	33,12,1
				42,8,1	38,9,1	35,10,1	36,11,1	37,12,1
				49,8,1	39,9,1	36,10,1	37,11,1	38,12,1
					40,9,1	41,10,1	38,11,1	39,12,1
					46,9,1	42,10,1	39,11,1	40,12,1
					47,9,1	43,10,1	40,11,1	41,12,1
					48,9,1	44,10,1	45,11,1	42,12,1
					~~55,9,1~~	45,10,1	46,11,1	43,12,1
					~~56,9,1~~	~~51,10,1~~	47,11,1	44,12,1

b=8	
9,8,1	….8×1+1
10,8,1	….8×1+2
11,8,1	….8×1+3
12,8,1	….8×1+4
13,8,1	….8×1+5
14,8,1	….8×1+6
17,8,1	….8×2+1
18,8,1	….8×2+2
19,8,1	….8×2+3
20,8,1	….8×2+4
21,8,1	….8×2+5
25,8,1	….8×3+1
26,8,1	….8×3+2
27,8,1	….8×3+3
28,8,1	….8×3+4
33,8,1	….8×4+1
34,8,1	….8×4+2
35,8,1	….8×4+3
41,8,1	….8×5+1
42,8,1	….8×5+2
49,8,1	….8×6+1

※上表為 N 值設定為 58，b 值在 4 ~ 12 的非直覺幣值組合

由表 3-4 中我們發現非直覺式幣值組合好像都符合**<u>當 a=b×q+r，且 q+r＜b</u>** 的原則，但最後卻有出現與規律不符之處(如黃色區塊)，因此再繼續深入找出幾個非直覺的代表組合來湊成 1～99 各數時，會出現非直覺性的頻率及規律，並將其列表～

註：下表灰色區塊表示最少幣數為非直覺的組合，左列表示金額範圍，如：7 表示 1～7 元　【表 3-5】

	10,9,1	11,9,1	16,9,1	19,9,1	20,9,1	28,9,1	29,9,1	16,15,1	49,15,1	9,4,1	13,6,1	22,18,1	37,18,1	15,11,1
1														
2														
3														
4														
5														
6														
7														
8														
9														
10														
11														
12														
13														
14														
15														
16														
17														
18														
19														
20														
21														
22														
23														
24														
25														
26														
27														
28														
29														
30														
31														
32														
33														
34														
35														
36														
37														
38														
39														
40														
41														
42														
43														
44														
45														
46														
47														
48														
49														
50														
51														
52														
53														
54														
55														
56														
57														
58														
59														
60														
61														

62														
63														
64														
65														
66														
67														
68														
69														
70														
71														
72														
73														
74														
75														
76														
77														
78														
79														
80														
81														
82														
83														
84														
85														
86														
87														
88														
89														
90														
91														
92														
93														
94														
95														
96														
97														
98														
99														
100														

歸納 3-1：在非直覺幣值組合（a、b、1）中，且 a÷b=q….r 時

(1) b×(q+1)爲第一次出現非直覺組合的金額。

(2) r(餘數)爲最先連續出現非直覺組合的次數。

(3) b-r(不足數)即爲接下來出現直覺組合的連續次數。

舉例說明之：

【表 3-6】

非直覺式幣值組合	a÷b=q…r	第一次出現最少幣數是非直覺組合的錢數 b×(q+1)	連續出現非直覺組合的次數 r 值	接著連續出現直覺組合的次數 b-r 值
20,9,1 (20=9×2+2)	20÷9＝2(倍)……2	27……(9×3) <如表 3-5 的橘色區塊>	連續 2 個 (27、28)	連續 7 個 (29、30、31、32、33、34、35)
49,15,1 (49=15×3+4)	49÷15＝3(倍)……4	60……(15×4) <如表 3-5 的橘色區塊>	連續 4 個 (60、61、62、63)	連續 11 個 (64、65、66、67、68、69、70、71、72、73、74)

因此，回到【表 3-4】可以看到當 N 設定在 1～58 且 b=9 時，預測(55,9,1)這個幣值組合應爲非直覺式幣值組合，但是跑出的資料其直覺的幣數與最少的幣數竟是相

同的，看似好像就不屬於是非直覺式幣值組合了，但是我們仔細探究原來是我們的 N 值設定範圍只到 58，而此組幣值(55,9,1)會出現第一個非直覺式組合的錢數是 63(9×7)，所以在錢數 58 之前當然都是直覺的組合啊～能找到這個關鍵原因，我們都很高興。因此，我們綜合表 3-4 及表 3-5，歸納出以下幾點：

歸納 3-2：當“q+r＜b”則為非直覺式幣值組合；“q+r≧b”則為直覺式幣值組合。

<前提要在 a 不為 b 的倍數原則下，若 a 為 b 的倍數，則為直覺式幣值組合>

例：(36、11、1)→36÷11=$\boxed{3\cdots3}$→其和＜11，則此組為非直覺式幣值組合

例：(13、4、1)→13÷4=$\boxed{3\cdots1}$→其和＝4，則此組為直覺式幣值組合

例：(4、3、1)→4÷3=$\boxed{1\cdots1}$→其和＜3，則此組為非直覺式幣值組合

※檢驗至此，我們突然在【表 3-3】的原則 4~＜當 b＝3 時，為什麼 a＝4 的情況下就不會是直覺式組合＞無法解釋的情況，現在已經迎刃而解了。

歸納 3-3：若 a 大於 b×(b-2)+1，則必為直覺式組合。

例：(a、9、1)，若 a＞9×7+1，即 a 為 65 以上，則必為直覺式幣值組合，且當 b＝9 時，最後一組非直覺式幣值組合是(64、9、1)。

(三) 當我們找出三個幣值組合的規律後，我們試著再延伸至四個幣值，探討其直覺與非直覺組合，但因為多一種幣值，其組合數就有上千種，很難一一羅列去找規律，因此就只探討原是直覺式幣值組合（或非直覺式幣值組合），再加一枚更大的幣值後，會變成哪一種組合？分析結果如下：

◎最小的三個幣值組合為直覺式幣值組合的情況◎

發現(1)：最小的三個幣值組合若為直覺式幣值組合，再加一枚更大的幣值，則出現直覺式幣值組合及非直覺式幣值組合的情形**皆有可能**。

例 1：(27,6,1)再加一枚幣值變成(35,27,6,1)則為非直覺式幣值組合

例 2：(19,4,1)再加一枚幣值變成(49,19,4,1)則仍為直覺式幣值組合

發現(2)：幣值組合(a、b、c、1)，當 b 為 c 的倍數時，a 又為 c 的倍數(即 c 為 a、b 的公因數)，則為直覺式幣值組合。

例：(18,9,1)再加一枚幣值變成(27,18,9,1)則仍為直覺式幣值組合

發現(3)：幣值組合(a、b、c、1)，當 b+1 為 c 的倍數時，a 若為 b 的倍數，則為直覺式幣值組合。

例：(19,4,1)再加一枚幣值變成(38,19,4,1)則仍為直覺式幣值組合

◎最小的三個幣值組合為非直覺式幣值組合的情況◎

發現(1)：最小的三個幣值組合若為非直覺式幣值組合，再加一枚更大的幣值，則依舊會出現非直覺式幣值組合，不會出現直覺式幣值組合。

例 1：(15,9,1)再加一枚幣值變成(33,15,9,1)則仍為非直覺式幣值組合

例 2：(20,6,1)再加一枚幣值變成(42,20,6,1)則仍為非直覺式幣值組合

活動四：付款範圍在百元以下，哪一種組合為最佳幣值組合？

【方　法】

1.探討我國 1 元、5 元、10 元、20 元、50 元五種幣值，可以有多少種組合方式（最少需使用三種幣值以上），總幣數最少的是哪一種組合？

2.探討不同的 5 的倍數之幣值組合，其所需總幣數是否與現有的幣值組合有差異。

3.若物價皆以 5 的倍數來標價，能否找到較佳的幣值組合。

4.能否找出付款範圍在百元以下，使用哪三種幣值所需要的總幣數會最少？

【實驗結果】

(一)我國目前使用的幣值有 1 元、5 元、10 元、20 元、50 元，分析至少 3 種幣值以上的組合，哪種組合在付款範圍 100 元以下所需的總幣數最少(即最佳組合)，結果如下：

註：灰色區塊表示較佳的組合。

【表 4-1】

三種幣值組合	總幣數	四種幣值組合	總幣數	五種幣值組合	總幣數
50,20,1	820(8.2)	50,20,10,1	620(6.3)	50,20,10,5,1	420(4.2)
50,10,,1	700(7.1)	**50,20,5,1**	**460(4.6)**		
50,5,1	700(7.1)	50,10,5,1	500(5.1)		
20,10,1	700(7.1)	20,10,5,1	500(5.1)		
20,5,1	**550(5.6)**				
10,5,1	700(7.1)				

由上表我們可以看出其實使用 20 元硬幣比使用 10 元硬幣效果較佳，但可能是人們習慣十進數，覺得 10 元較方便，感覺 20 元的使用價值較低，亦或是兩種幣值太相近了，所以使用一陣子後就較少再有 20 元硬幣在市面流通了*，但若以現在市面上流通的主要幣值(50,10,5,1)來付款，其平均幣數為 5.1，顯然不是較好的幣值組合*。

(二)若用其它 5 的倍數來做幣值組合（如：25 元、15 元），是否會比目前我們使用的幣值更好呢？分析結果如下：

【三種幣值組合(a、b、1)】

說明：要湊成 100 以內的數，我們比照現有幣值的模式（最大金額不超過 50 元，第二大金額不超過 25 元）來探究，所以以下活動皆設限在 a≦50 及 b≦25 的前提之下。

◎可使用幣值共有 10 個，三種幣值組合共有：$\frac{9*10}{2}-\frac{5*4}{2}=35$ 種

【表 4-2】

幣值組合	總幣數	幣值組合	總幣數	幣值組合	總幣數	幣值組合	總幣數
10.5.1	700	15.10.1	570	**25.15.1**	**540**	40.20.1	1070
15.5.1	580	20.10.1	700	30.15.1	840	45.20.1	820
＊20.5.1	**550**	25.10.1	540	35.15.1	630	50.20.1	820
25.5.1	550	30.10.1	660	40.15.1	660	30.25.1	850
30.5.1	550	35.10.1	580	45.15.1	830	35.25.1	800
35.5.1	580	40.10.1	660	50.15.1	715	40.25.1	840
40.5.1	590	45.10.1	625	25.20.1	650	45.25.1	970
45.5.1	630	50.10.1	700	30.20.1	720	50.25.1	1300
50.5.1	700	20.15.1	560	35.20.1	740		

使用幣值組(25,10,1)及幣值組(25,15,1)所需的幣數比目前我們使用的最佳三種幣值組(20,5,1)所需幣數還少，是可建議使用的較佳幣值組合。

【四種幣值組合(a、b、c、1)】......選用條件以 a≦50 及 b≦25 爲主，因爲組數較多（共有 110 組），所以在此不予羅列。

列出總幣數爲 460<目前所使用的最佳四種幣值 50,20,5,1>以下之組合

【表 4-3】

(40,15,5,1)，總幣數 440 個	(25,20,5,1)，總幣數 450 個	(40,10,5,1)，總幣數 460 個
(30,20,5,1)，總幣數 440 個	(30,25,5,1)，總幣數 450 個	(30,15,5,1)，總幣數 460 個
(45,20,5,1)，總幣數 440 個	(35,15,10,1)，總幣數 450 個	(50,15,5,1)，總幣數 460 個
(35,25,5,1)，總幣數 440 個	(40,30,5,1)，總幣數 450 個	(35,20,5,1)，總幣數 460 個
(40,25,5,1)，總幣數 440 個	(45,30,5,1)，總幣數 450 個	***(50,20,5,1)，總幣數 460 個**
(40,15,10,1)，總幣數 445 個	(30,25,10,1)，總幣數 455 個	(45,15,10,1)，總幣數 460 個
(35,15,5,1)，總幣數 450 個	(30,10,5,1)，總幣數 460 個	(50,15,10,1)，總幣數 460 個
(45,15,5,1)，總幣數 450 個	(35,10,5,1)，總幣數 460 個	(45,25,10,1)，總幣數 460 個

1. 有 14 種組合都優於市面常用的最佳四種幣值組合，有 10 種組合效果與之相同。
2. c 幣值以 5 元最佳，10 元次之。
3. 50 元的幣值皆沒出現在一般常用組合的 14 種最佳幣值組合中。

【五種幣值組合(a、b、c、d、1)】......選用條件以 a≦50 及 b≦25 爲主，共有 55 組

列出總幣數爲 420<目前所使用的最佳五種幣值 50,20,10,5,1>以下之組合

【表 4-4】

(45,20,15,5,1)，總幣數 400 個	(45,25,15,5,1)，總幣數 410 個	(35,20,10,5,1) ，總幣數 420 個
(40,25,15,5,1)，總幣數 405 個	(45,25,15,10,1)，總幣數 410 個	(40,20,10,5,1) ，總幣數 420 個
(35,25,20,5,1)，總幣數 405 個	(40,15,10,5,1)，總幣數 415 個	***(50,20,10,5,1) ，總幣數 420 個**
(45,20,10,5,1)，總幣數 410 個	(30,25,10,5,1)，總幣數 415 個	(50,25,10,5,1) ，總幣數 420 個
(35,25,10,5,1)，總幣數 410 個	(30,25,20,5,1)，總幣數 415 個	(30,20,15,5,1) ，總幣數 420 個
(40,25,10,5,1)，總幣數 410 個	(40,25,20,5,1)，總幣數 415 個	(35,20,15,5,1) ，總幣數 420 個
(45,25,10,5,1)，總幣數 410 個	(45,25,20,5,1)，總幣數 415 個	(35,25,15,5,1) ，總幣數 420 個
(40,20,15,5,1)，總幣數 410 個	(50,25,20,5,1) ，總幣數 415 個	(50,25,15,5,1) ，總幣數 420 個
(50,20,15,5,1)，總幣數 410 個	(35,15,10,5,1) ，總幣數 420 個	(45,20,15,10,1) ，總幣數 420 個
(30,25,15,5,1)，總幣數 410 個	(45,15,10,5,1) ，總幣數 420 個	

1. 有 18 種組合優於我們一般常用的最佳五種幣值組合，有 11 種組合效果與之相同。
2. 50 元的幣值還是不被看好。

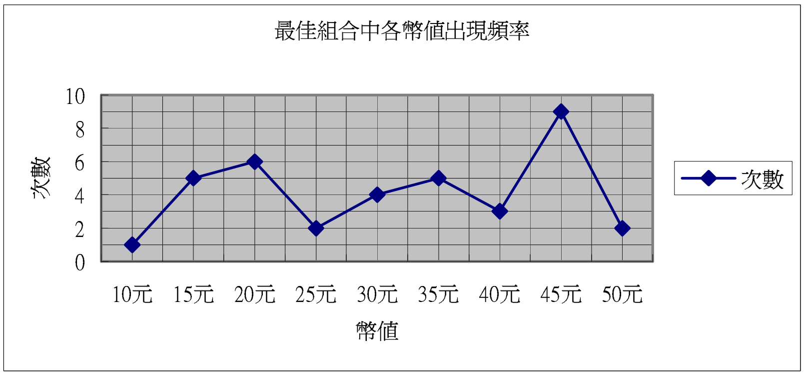
(三) 探討付款金額爲 5 的倍數之最佳幣值組合時，使用幣值設定在 5 的倍數，付款範圍在 5 元～95 元<因爲若爲 100 元，就可以用紙鈔付款>，其分析結果如下：

【表 4-5】

幣值及付款錢數皆爲 5 的倍數情況探討				
	最佳組合	總幣數	平均幣數	備註說明
三種幣值	(30,20,5)(45,20,5)(35,25,5)(40,25,5)	48	2.5	使用幣數最多的組合(10,9,1)與最佳幣值組合所使用幣數相差 29 個幣數
四種幣值	(45,30,10,5)(45,20,15,5)(40,35,15,5)(45,35,15,5) (45,40,15,5)(45,30,20,5)(45,35,20,5)	40	2.1	使用幣數最多的組合(10,9,8,1)與最佳幣值組合所使用幣數相差 19 個幣數
五種幣值	(50,45,35,15,5)(50,45,30,20,5)	35	1.8	使用幣數最多的組合(10,9,8,7,1)與最佳幣值組合所使用幣數相差 11 個幣數

歸納結果：

1. 在物品價錢為5的倍數情況下使用5的倍數的幣值來付款，其方式與錢數範圍在1～19的付款方式相同，其只是同時縮小5倍罷了。
2. 原本我們猜測可能10元、25元及50元的幣值用到的機率較大，但實際上竟然是45元及20元在最佳組合中被使用率最高，而10元、25元及50元使用率反而低（見圖4-1）。



【圖 4-1】

(四)要找出在百元以下的付款方式中，哪三種幣值組合是最佳組合（即總幣數最少），就組合來看，就有$\frac{(48+25)*24}{2}$＝876種組合＜選用條件以 a≦50 及 b≦25 為主＞，我們希望想先就小區間範圍來觀看最少幣數的組合規律，進而對大範圍（1～99）的最佳幣值組合作預測。以下列出當 N 為 1～15、1～20、1～25、1～30、1～35、1～40、1～45、1～50 時的最佳幣值組合：

【表 4-6】

N的範圍	最佳的幣值組合	總幣數	平均幣數
1～15	(7,3,1)(5,4,1)(6,4,1)(7,5,1)	34 個	2.3
1～20	(6,4,1) (9,4,1) (7,5,1)(8,5,1)	52 個	2.6
1～25	(8,6,1)	71 個	2.8
1～30	(8,5,1) (12,5,1) (8,6,1)	93 個	3.1
1～35	(8,5,1)(11,5,1)(12,5,1)(8,6,1)(10,6,1)(14,6,1)(9,7,1)(11,8,1)	118 個	2.6
1～40	(11,7,1)	140 個	3.5
1～45	(11,7,1)	165 個	3.7
1～50	(14,6,1)	193 個	3.9

由上述表格中，我們似乎還無法看出要成為最佳幣值組合是否有規律可循，但是在這些組合中，除了(7,3,1)這一組是直覺式幣值組合外，其餘的皆為非直覺式幣值組合，因此我們大略可以推論，***能成最佳幣值組合的，應是非直覺式幣值組合的機率比較大***。在無法直接推論到付款金額99時，我們只好將876種組合一一跑程式，分析比較其結果如下：

【表 4-7】

類型	非直覺式幣值組合		直覺式幣值組合		直覺式幣值組合
最佳幣值組合	**19、12、1**	23、7、1	23、5、1	22、5、1	20、5、1
總幣數	**515**	516	526	526	550
平均幣數	**5.202**	5.212	5.313	5.313	5.556
備註	1.總幣數<526 有 17 組(非直覺) 2.總幣數=526 有 5 組(非直覺)＋2 組(直覺) 3.550<總幣數<526 有 47 組(非直覺)＋21 組(直覺) 4.總幣數＝550 有 3 組(非直覺)＋10 組(直覺)				目前我們使用的幣值組合

由上表 4-7 中看出(19、12、1)是總幣數最少的最佳幣值組合，但是在實際使用上卻是有難度（換算不易），因此可以考慮(22、5、1)的組合，雖總幣數比(19、12、1)多了一點點，但是其為直覺式幣值組合，付某個款項時只要以直覺式的方式付款即能得到最少幣數。

活動五：特殊幣值組合之探究。

【方　法】

1.在各種條件限制下，能否推算出幣值組合數呢？

2.探討三種、四種、五種幣值皆為質數(最小幣值仍為 1)組合的付款總幣數情形。

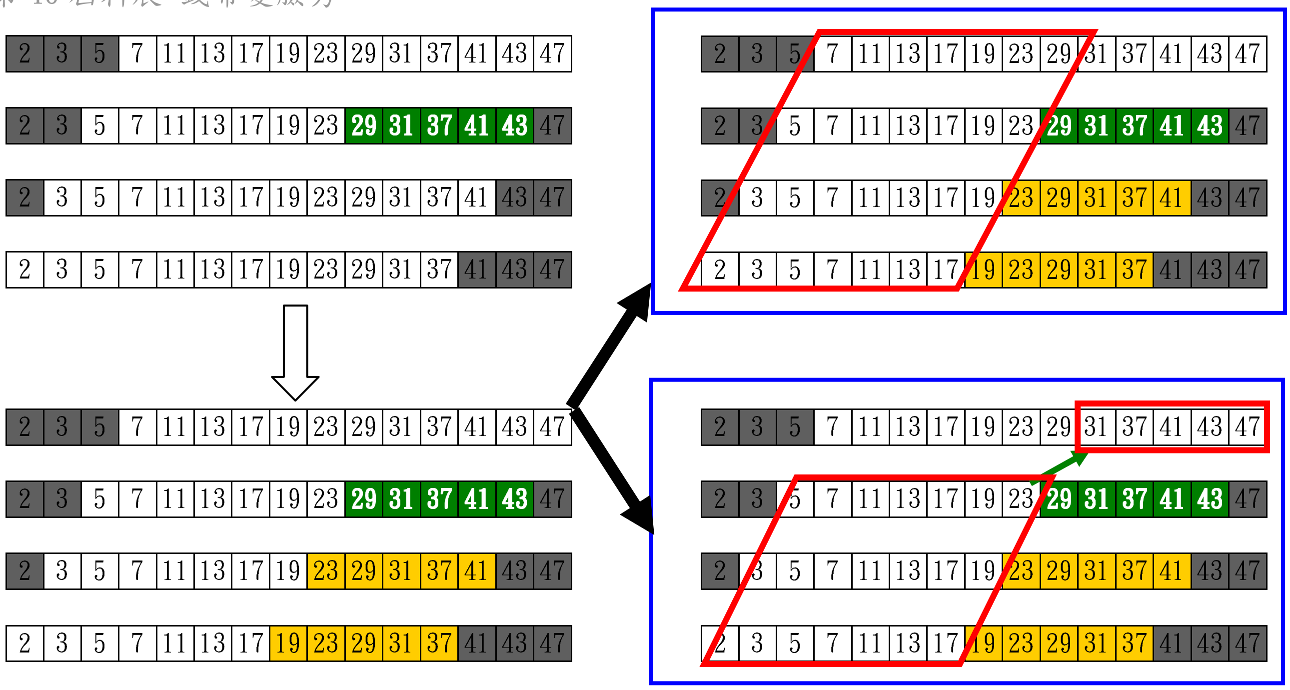
3.探討幣值為 n 進數(最小幣值仍為 1)組合的付款總幣數情形。

【實驗結果】

(一)在有條件的情況，共有多少種組合數關乎著我們要跑多少次的程式，因此首先探討組合數的推算方式，以下是我們的歸納結果：（以質數幣值為例）

【表 5-1】

幣值：1、2、3、5、7、11、13、17、19、23、29、31、37、41、43、47（除了 1 外共有 15 個） 條件：付款範圍在 100 以下(不含 100)，且 a≦50，b≦25		
三種幣值組合 (a、b、1)	方法一	說　明
	$\frac{14*15}{2}-\frac{5*6}{2}=90$ 組	先求出總組合數，再減去不符合條件的組合數
	方法二	說　明
	14+13+12+……6=(6+14)×9÷2=90	固定 b 值，找其它組合數
四種幣值組合 (a、b、c、1)	方法一	說　明
	$\frac{19*8+18*7+17*6+.....+13*2+12*1}{2}$ =300 種組合	a→5～47(13 種) b→3～23(8 種) c→2～19(8 種) c=2 時，有(13+12+11+……+6)種組合=19*8÷2 c=3 時，有(12+11+10+……+6)種組合=18*7÷2 c=5 時，有(11+10+9+……+6)種組合=17*6÷2
	方法二	說　明
	$\frac{10*9*8}{1*2*3}+\frac{9*8}{1*2}\times 5$ ＝300 組	我們發現 15 個質數中，因 b 幣值限制在 25 以下，所以 29 以上則無法使用，因此先算出前 10 個質數所能搭配出的組合數，再加上 a 幣值的另外 5 個幣值與 bc 幣值組合之搭配組合數即可。（參考圖 5-1）
五種幣值組合 (a、b、c、d、1)	方法一	說　明
	$\frac{10*9*8*7}{1*2*3*4}+\frac{9*8*7}{1*2*3}\times 5$ =630 組	【左區塊符合條件的組合】+【a 符合條件＆bcd 符合條件之組合】（見圖 5-1）



【圖 5-1】

(二)我們利用電腦一一將三種、四種、五種幣值皆爲質數(最小幣值仍爲 1)組合之付款總幣數記錄下來，並做以下的整理：

註：最大與第二大幣值做了以下的限制～$\boxed{\mathbf{a \leq 50，b \leq 25}}$。

【表 5-2】

幣值個數	最 佳 的 前 幾 組 質 數 幣 值 組 合				
三種幣值 (僅列出總幣數低於市面硬幣最佳組合(20,5,1)總幣數 550 個之組合)	(23,7,1)…516	(19,11,1)…522	(17,11,1)…524	(17,7,1)…526	(23,5,1)…526
	(29,5,1)…538	(29,7,1)…540	(19,5,1)…540	(17,13,1)…542	
四種幣值 (低於市面最佳組合(50,20,5,1)總幣數 460 個之組合就**有 179 組**，在此僅列出最少的前 15 組)	(31,17,5,1)…394	(39,19,5,1)…396	(37,11,7,1)…400	(29,23,5,1)…400	(29,17,7,1)…400
	(23,19,7,1)…400	(31,19,3,1)…402	(29.11.5.1)…402	(29,19,7,1)…402	(23,17,3,1)…404
	(29,19,3,1)…404	(43,17,5,1)…404	(41,11,7,1)…404	(31,17,7,1)…404	(31,23,5,1)…406
五種幣值 (低於市面最佳組合(50,20,10,5,1)總幣數 420 個之組合就**有 567 組**，在此僅列出最少的前 16 組)	(31,23,11,5,1)…336	(31,23,17,5,1)…338	(37,23,11,7,1)…338	(41,17,11,3,1)…340	(37,23,11,3,1)…340
	(37,23,11,5,1)…340	(37,23,17,5,1)…340	(41,23,11,7,1)…340	(37,23,7,3,1)…342	(41,23,11,3,1)…342
	(41,19,7,5,1)…342	(43,23,7,5,1)…342	(41,13,11,5,1)…342	(31,19,11,5,1)…342	(43,23,11,5,1)…342
	(43,23,11,7,1)…342				

由上表 5-2 中我們發現：

1. 大多數的質數幣值組合其總幣數皆少於我們現在使用的幣值組合，但其實用性較不佳。
2. 並非所有的質數幣值組合皆是非直覺式幣值組合，如：灰色畫底線的組合即是直覺式幣值組合。

(三)思考幣值之間是以 n 進制的模式組合，那麼其付款總幣數又會如何呢？我們做了以下的歸納整理～

【表 5-3】

	三種幣值組合	總幣數	四種幣值組合	總幣數	五種幣值組合	總幣數
二進制	4,2,1	1300	8,4,2,1	724	16,8,4,2,1	460
三進制	9,3,1	704	27,9,3,1	428	81,27,9,3,1	390
四進制	16,4,1	558	64,16,4,1	450		
五進制	25,5,1	550				
六進制	36,6,1	570				
七進制	49,7,1	642				
八進制	64,8,1	666				
九進制	81,9,1	750				
十進制						
市面流通的最佳幣值組	20,5,1	550	50,20,5,1	460	50,20,10,5,1	420

上表 5-3 中 n 進數的幣值組合皆屬於直覺式幣值組合，且明顯可以看出三進數的幣值組合更優於我們市面上流通的幣值，其在實用性上較質數幣值組合或是非直覺式幣值組合要好用，或許可以做爲政府發行新貨幣的考量。

活動六：分析比較各國的幣制系統，並提出建議之較佳幣值組合。

【方　法】

1.分析及比較各國幣制中，哪一種幣制系統較佳？

2.若要減少錢幣的鑄造量，則可以保留哪些幣值來使用效果較佳呢？

【實驗結果】

(一)探討本國的幣制後，我們想進一步了解各國幣制的使用情形，因此上網搜集各國目前使用的幣制相關資料，並以最小紙鈔爲硬幣組合的目標，整理如下：

註 1：我們曾打電話至中央銀行及臺灣銀行查詢，皆沒有相關的各國幣值資料，僅有兌換的紙鈔面額資料。

註 2：灰色區塊表示與最小紙鈔面額相同，則在幣值探討中不採用。

【表 6-1】

國別	最小紙鈔	使用幣值	平均幣數	硬幣付款範圍
台灣	100 元	1 元,5 元,10 元,20 元,50 元 →（1、5、10、20、50）	4.2	1～99
美國	1 元(100 分)	1 分,5 分,10 分,25 分 →（1、5、10、25）	4.7	1～99
港幣	10 元(100 角)	1 角,2 角,5 角,1 元,2 元,5 元,10 元 →（1、2、5、10、20、50）	3.4	1～99
馬來西亞	1 馬幣(100 分)	1 分,5 分,10 分,20 分,50 分,1 馬幣 →（1、5、10、20、50）	4.2	1～99
新加坡	2 元(200 分)	1 分,5 分,10 分,20 分,50 分,1 元 →（1、5、10、20、50、100）	4.7	1～199
歐元	5 元(500 分)	1 分,2 分,5 分,10 分,20 分,50 分,1 元,2 元 →（1、2、5、10、20、50、100、200）	4.6	1～499
加拿大	5 元(500 分)	1 分,5 分,10 分,25 分,1 元,2 元 →（1、5、10、25、100、200）	5.9	1～499
日圓&韓國	1000 元	1 元,5 元,10 元,50 元,100 元,500 元 →（1、5、10、50、100、500）	7.5	1～999
俄羅斯	10 盧布(1000 戈比)	1 戈比,5 戈比,10 戈比,50 戈比,1 盧布,2 盧布,5 盧布,10 盧布 →（1、5、10、50、100、200、500）	6.7	1～999

分析結果：

1. 各國最大幣值都不超過最小紙鈔幣值的一半，而第二大幣值也在最小紙鈔幣值的四分之一以下，這也是我們這次研究為何要將最大幣值及第二大幣值作限制了，日後可以再進一步深入研究在沒有條件限制下會不會有較佳的組合出現。
2. 台灣幣值與馬來西亞幣值單位雖然不同，但是幣值間的比例完全一樣，所以組合情形都相同；日圓與韓幣幣值單位皆相同，所以組合情形也相同。
3. 由於硬幣付款的範圍各不相同及使用的幣值種類個數也不同，所以我們無法直接從平均幣數來斷定哪一國的幣制系統較佳。

(二)若在經濟不景氣的情況下各國想要減少其鑄幣數，究竟該保留現有的哪些幣值，才能有較佳的效果（平均幣數較少）呢？以下就針對各國及選用幣值數作簡單的分析整理：

【表 6-2】

國別	硬幣付款範圍	最佳的三種幣值		最佳的四種幣值		最佳的五種幣值	
		幣值組合	平均幣數	幣值組合	平均幣數	幣值組合	平均幣數
台灣	1～99	20,5,1	5.6	50,20,5,1	4.6	50,20,10,5,1	4.2
美國	1～99	25,10,1	5.5	25,10,5,1	4.7		
港幣	1～99	20,5,1	5.6	50,20,5,1	4.6	20,10,5,2,1 (50,20,10,2,1) (50,20,10,5,1)	4.2
馬來西亞	1～99	20,5,1	5.6	50,20,5,1	4.6	50,20,10,5,1	4.2
新加坡	1～199	20,5,1 (50,5,1) (50,10,1)	8	50,20,5,1	5.6	100,50,20,5,1	5.1
歐元	1～499	50,20,1	10.9	100,20,5,1	7.5	200,50,20,5,1	6.2
加拿大	1～499	100,10,1	11	100,25,10,1	7.4	200,100,25,10,1	6.6
日圓&韓國	1～999	100,10,1	13.5	100,10,5,1 (100,50,10,1) (500,50,10,1) (500,100,10,1)	11.5	100,50,10,5,1 (500,50,10,5,1) (500,100,10,5,1) (500,100,50,5,1) (500,100,50,10,1)	9.5
俄羅斯	1～999	100,10,1	13.5	200,50,5,1 (200,50,10,1)	10	200,50,10,5,1	8

由上表的最佳幣值組合中可以看出，20 元幣值的被使用率很高，回顧我國的幣制系統，使用 20 元的頻率卻少之又少，我們想：當政府要發行 20 元硬幣時，是否也曾經過如此考量，才決定發行，就我們的研究顯示，政府發行 20 元幣值的政策是正確的，只是國人目前還較少能接受它。或許政府可以再仔細做個評估，該使用何種較佳的幣值才能讓付款的幣數減到最低，人們使用方便，且能減少鑄造成本。

柒、討論建議

一、以一組三種幣值（a、b、1）且 a＞b＞1，湊成固定錢數 N 的方法有多少種，可以利用列表方式找出，也可以利用下列算則找出有多少種湊法：

1. 當 a+b＞N 時，則湊成 N 的方法有**〔N÷a〕+〔N÷b〕+1** 種。

   定義“〔N÷a〕”表示 N÷a 其結果的整數值，亦表示使用 a 幣值的最大數量。

2. 當 a+b≦N 時，則湊成 N 的方法可以先列出第一層算式，再依下列公式來推算。

   列出第一層算式：$N \div a = q_1$(第一階商數)…r_1(第一階餘數)　$r_1 \div b = q_2$(第二階商數)……r_2(第二階餘數)

   公式推算法：$\left[\dfrac{\textbf{第一階餘數總和}}{\textbf{b}}\right] + \left[\textbf{第一階的商數+1}\right] - \left[\dfrac{\textbf{第二階餘數總和}}{\textbf{b}}\right]$

※也可利用 **第二階所有算式的商數+1 之總合** 找出有幾種湊法，但運用此法需將所有的式子列出才可<此法也可以類推至四種幣值組合>。

二、使用哪二種幣值組合才是最佳的組合（即平均幣數會最少）要視付款的範圍而定，若付款範圍在 99 元以內，則以(10 元、1 元)或(11 元、1 元)為最佳幣值組合。

三、一般付款方式皆是採直覺式組合的方式（即先使用大幣值硬幣），但是有些狀況則是採非直覺式組合方式付款所需的幣數會較少，例如用 25 元、10 元、1 元來湊成 30 元，若採直覺式方式付款需 6 個硬幣，但採非直覺式方式付款，則只要 3 個硬幣。

四、用三種幣值付款會出現直覺式組合或是非直覺式組合有其簡單的判斷原則，其與 a、b 幣值及付款錢數 N 有關，以下列出幾個主要的判斷方法：

(1) 出現直覺式組合的情形：

1. 當 N 為任意數：

   a 為 b 的倍數時、a+1 為 b 的倍數時、b＝2 時、b= 3 時(a≠4)

2. 當 N 為固定數：

   a+1＝N、N 為 a 的倍數、a+b=N、a 與 b＞$\frac{1}{2}$N、

   a+b＞N 且 N÷a 的商＋餘數≦N÷b 的商＋餘數

(2)出現非直覺式組合的情形：

當 b=$\frac{1}{2}$N 時(但 a+1＜N)、a+b＞N 且 N÷a 的商＋餘數＞N÷b 的商＋餘數

五、當 a÷b=q……r，且 q+r＜b 時，則此（a、b、1）即為非直覺式幣值組合，表示其付款在百元以下所需幣數總和會比以直覺式方式付款所需的幣數要少。且當 a 大於 b×(b-2)+1 時，則必為直覺式幣值組合。

六、四種幣值組合中，最小的三個幣值組合若為直覺式幣值組合，則此幣值組出現直覺式幣值組合與非直覺式幣值組合皆有可能；若最小的三個幣值組合若為非直覺式幣值組合，則此幣值組必定為非直覺式幣值組合。

七、比較我們現有的幣值組合及考慮改以其它 5 的倍數做幣值，則其最佳幣值組合如下：

	目前最佳幣值組合	可改以其它 5 的倍數做幣值(僅列出其中一種作參考)
三種幣值組合	(20、5、1)……………總幣數 550	(25、10、1)………總幣數 540
四種幣值組合	(50、20、5、1) ………總幣數 460	(30、20、5、1) ………總幣數 440
五種幣值組合	(50、20、10、5、1)……總幣數 420	(40、25、15、5、1)……總幣數 405

八、以 5 的倍數來探討最佳幣值組合時，5 元及 25 元的被使用率最高，50 元反而較不用。

九、若物品價錢皆爲 5 的倍數的情形下使用 5 的倍數之幣值來付款，其最佳幣值組合中 45 元及 20 元的被使用率最高，而 10 元、25 元及 50 元的使用率反而低。

十、最佳三種幣值組合是(19、12、1)，其次是(23、7、1)，但其都屬於非直覺式幣值組合，因爲換算不易，所以實用性較不高；而最佳的直覺式幣值組合是(23、5、1)及(22、5、1)，其實用性較佳，也比我們常用的較佳的幣值(20、5、1)平均幣數少，因此可以考慮使用。

十一、做有條件限制的幣值組合數量可利用下列公式來尋求：

例如：1、2、3、4、5……、n，第二大幣值最大爲 20，最小幣值需爲 1 時，則四種幣值的組合數共有$\frac{20*19*18}{3*2*1}+\frac{19*18}{2*1}\times(n-21)$種組合

十二、利用質數做幣值，組合出來的效果大多比現在市面流通的幣值組合好，但是實用性較不足。

十三、若幣值組合是採 n 進制的模式，則以三進數的效果較佳。

十四、比較各國幣制，覺得都大同小異，使用的幣值除了 2 以外都採以 5 的倍數，由於各國最小紙鈔金額各不相同，所以付款的範圍也不相同，使用的硬幣種類個數也不同，所以無法直接從平均幣數來斷定哪一國的幣制系統較佳。

十五、從研究中我們發現在較佳幣值組合中，20 元幣值的被使用率高，應可大量發行，而 50 元幣值在較佳幣值組合中被使用率低，可以減少鑄造，如此一來，可以省下很多鑄造的成本，因爲鑄造一枚 50 元硬幣的成本大致與 50 元等值。

十六、 整個研究看來，現在我們所使用的幣值顯然不是最佳的幣值組合，有太多的組合皆比現在的效果還佳，若有機會可以重新發行國幣，也許可以好好考量，可以保留哪些幣值，增設哪些幣值才能達到最理想的幣值組合，如此一來也能爲國家省下一些鑄造成本。但從另一個角度來看，若牽就物理減量，相對的會造成心理的負擔（增加錢幣使用的困難度），也許正因爲如此，所以各國的錢幣還都是以 5 的倍數爲主，因此本研究也僅供參考，或許下次可以更深入探究，在保留原有的幣值特性下，如何改變或增減其中一個幣值，使其達到較佳的效果。另外也可調查統計坊間各種付款金額（即物價）的出現頻率，再針對其頻率探究較佳的幣值組合會有何不同。

捌、結論

一、任意三種幣值(a、b、1)要湊成 N 元，有〔$\frac{\text{第一階餘數總和}}{b}$〕＋〔**第一階的商數+1**〕－〔$\frac{\text{第二階餘數總和}}{b}$〕種湊法

註：$N \div a = q_1$(第一階商數)…r_1(第一階餘數)　$r_1 \div b = q_2$(第二階商數)……r_2(第二階餘數)

二、付款金額在百元以下的最佳二種幣值組合為(10、1)或(11、1)。

三、使用三種幣值(a、b、1)付款會出現直覺式組合或是非直覺式組合，其與 a、b 幣值及付款錢數 N 有關，也有其判斷原則。且當 $a \div b = q \ldots\ldots r$，且 $q+r < b$ 時，則此（a、b、1）即為非直覺式幣值組合；當 a 大於 $b \times (b-2)+1$ 時，則必為直覺式幣值組合。

四、付款範圍在百元以下，非直覺式幣值組合中以(19、12、1)為最佳組合，(23、7、1)次之；直覺式幣值組合中以(23、5、1)及(22、5、1)為最佳組合。

五、利用質數做幣值組合出來的效果大多比現在市面流通的幣值組合好，但換算較不易；若考量換算較方便的情況下，則以三進數（81、27、9、3、1）的幣值組合較佳。

六、因為各國最小紙鈔金額各不相同，使用的硬幣種類個數也不同，所以無法直接從平均幣數來斷定哪一國的幣制系統較佳，但有一個共通點，是除了 2 以外都採以 5 的倍數作幣值，且在較佳的幣值組合中，20 元幣值的出現率相當高，反觀我國中倒是不常使用 20 元硬幣。

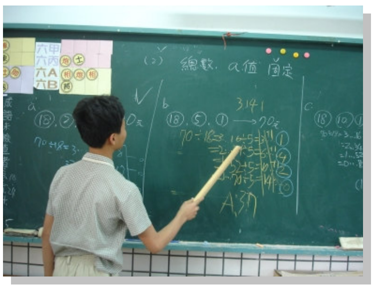
七、本研究結果雖然可以找到很多優於現在使用的幣值組合，但是在牽就物理減量的同時，相對的可能會造成心理的負擔，因此究竟使用何種幣值組合較能在兩者間取得平衡，我們很想知道，也希望有機會能繼續深入探究。

玖、參考資料

丹尼斯・夏沙（民 92）。艾可博士的 36 道推理謎題。台北市：究竟。








評　　語

080414 錢幣變臉秀

本件作品是探討錢幣的湊法，及用最少的幣值來使用，但卻與實際的日常生活不相符合。而「湊錢」的問題，在過去十年中，已經是有人做過的問題，應該在「文獻」上列出來。