

中華民國第四十六屆中小學科學展覽會
作品說明書

國小組 數學科

佳作

080412

驚爆骰子樂之吹牛大王

學校名稱： 臺北縣新莊市昌平國民小學

作者：	指導老師：
小六 何承蓉	潘信佑
小六 盧俊憲	黃敏吾
小六 鄭宇軒	
小六 葉益甫	

關 鍵 詞：排列組合、機率、巴斯卡三角形

驚爆骰子樂之吹牛大王

◎摘要

我們原本只是要研究「吹牛」這個遊戲，希望藉此了解每一個數字出現的機率，到底20顆骰子要喊到幾顆以內才是絕對安全的範圍，又何時「抓」可以十拿九穩的捉到對手吹牛，進而提高我們的獲勝機會，於是我們開始分析規則。

一開始我們先了解遊戲規則，並實際進行活動，以便接下來的分析。首先針對通用點「一點」的設計進行分析，發現此一設計使遊戲更多變、更好玩的，而且「一點」出現的多寡對遊戲的難度相對的提高了；此外，在遊戲中可能出現幾個「一點」進行分析，在分析個過程中，發現了一些規律性，這些規律性除了基本的排列組合外，其中竟然隱藏著一個有趣的數字三角形---「巴斯卡三角形」，這是我們始料未及的。

剛開始我們運用計算機協助計算，配合「巴斯卡三角形」進行機率的分析，爲了讓分析更容易，我們進一步運用Excel軟體來比較機率出現的高低，最後發現其實運用骰子（ $\frac{1}{6}$ ）的機率，再配合別人喊的數字與顆數作爲依據，即可進行歸納出最基本又容易的判斷了。



實際玩吹牛，並紀錄每一次骰到的數量和遊戲結果。

壹、研究動機

電視節目「小氣大財神」裡面的「吹牛」遊戲緊張又刺激，我們幾個找老師挑戰「吹牛」遊戲，但老師總是能獲勝，在不斷的追問老師後，他要我們從六下數學第二單元比率與百分率中去討論骰子數字的出現與比率間的關係，進而討論相關之機率問題，並藉此發現其中之規律性，以便們在玩的時候可以百戰百勝，當然若有機會參加「小氣大財神」這個節目，我們的目標是贏得一輛休旅車。

貳、研究目的

- 一、認識「吹牛」遊戲
- 二、爲何要有通用骰？
- 三、研究骰子「一點」出現的組合並找出規律性
- 四、在排列組合中隱藏的「巴斯卡三角形」
- 五、找出出現一最大機率之所在，探究出吹牛遊戲的原理何在，進一步利用這個原理，去找出其它多元可行的解法。

參、研究設備及器材

骰子、骰盅、紀錄表、計算機、巴斯卡三角形表、電腦

肆、研究過程

一、認識「吹牛」遊戲

(一) 主要遊戲規則：

1. 遊戲人數最少兩人。每一位參加者有一個藏有**五顆骰子**的骰盅。
2. 開始遊戲時，各參加者需要搖動骰盅，然後自己看骰盅裡面的骰子，不讓其他人看到。
3. 一位參加者喊出「X 個 Y」，即是所有參加者中預料會有至少 X 顆面向上的 Y 點數骰子，X 至少為參加者的數目。如參加者有五位，當位參加者喊出「五個二」，即他預料五位參加者中，最少有五顆骰子向上顯示「二點」。
4. 下一位玩家喊出新的骰子數目和點數，X 必須大於或等於上一次叫喊的，但如果 X 與上一位的相同的話，Y 的點數必須大於上一位；如果 X 大於上一位的，Y 的點數無須大於上一位。
5. 骰子上的「一點」是通用，可代表任何點數，但如果有參加者叫喊的 Y 是一，骰子上的「一點」便不再成為通用。
6. 每一位玩家叫喊新的新的骰子數目和點數，直至有玩家不信任其他任何一位玩家的叫喊時，該位玩家需立即喊「抓」全部玩家並打開骰盅，遊戲結束。
7. 輸贏判斷：如果被抓的玩家喊出點數的骰子數目等於或小於實際的骰子數目，則喊「抓」玩家抓錯了成為輸家；大於的話，被抓的玩家就被抓到，則為輸家。輸家接受處罰後，遊戲重新開始。

註：吹牛遊戲是中天電視台「小氣大財神」中的一個擲骰子遊戲，源自於香港流傳已久的「大話骰」遊戲。

討論：1、由於遊戲規則中包含了「數字機率」與「吹牛技術」兩個主要層面，我們先就「數字機率」進行討論，進而藉此作為「吹牛技術」研究的依據。

2、在遊戲規則中，被抓的玩家只有在喊出點數的骰子數目大於實際的骰子數目時才算輸，故在接下來的討論中，直接針對實際的骰子出現的最大數目進行討論。

問題：為什麼規則中要定「1」為通用骰？有何意義？

二、為何要有通用骰？針對此問題，我們以「一顆骰子」及「二顆骰子」為例進行以下分析：

(一) 在一顆骰子的情形下：每一顆骰子都有六面，在沒有作弊的情形下，出現的情形有：1、2、3、4、5、6等六種數字，以比率來說每一個面出現的機會為1：6，也就是每一個數字能朝上的機率為 $(\frac{1}{6})$ 。

1、當「一點」不做為通用骰的情形下：每一個數字出現的機率為 $(\frac{1}{6})$ 。

2、當「一點」為通用骰的情形下：我們認為只有「一點」能代表自己，故能骰出「一點」的機率仍為 $(\frac{1}{6})$ ；但「一點」也能代表其他的數字，因此就其他數字而言，多了一個

機會，故能代表「二、三、四、五、六」點數的機率相對提昇變成了 $2:6$ ，也就是 $(\frac{1}{3})$ ，

結果：在「一」當通用骰的情形下，代表其餘五個數出現的機率提高了。

(二) 在二顆骰子的情形下：理論上將兩顆骰子單獨骰完後，再放在一起觀察，能以(表一)表示可能出現的組合：(第一顆骰子以藍色表示、第二顆骰子以橙色表示。)

	1	2	3	4	5	6
1	1、1	1、2	1、3	1、4	1、5	1、6
2	2、1	2、2	2、3	2、4	2、5	2、6
3	3、1	3、2	3、3	3、4	3、5	3、6
4	4、1	4、2	4、3	4、4	4、5	4、6
5	5、1	5、2	5、3	5、4	5、5	5、6
6	6、1	6、2	6、3	6、4	6、5	6、6

(表一)

由上面的排列數可知一共有 $6 \times 6 = 36$ 種組合出現，也就是每一個組合出現的機率皆為 $\frac{1}{36}$ 。

1、當「一點」不做為通用骰的情形下，有以下兩種可能：

(1) 數字全同：就是兩個數字都要一樣：(1、1) (2、2) (3、3) (4、4) (5、5)

(6、6)，每一個出現的機率皆只有 $\frac{1}{36}$ ，而此種情形總共有六種，共為 $\frac{6}{36} = \frac{1}{6}$ 。

(2) 數字全不同：而兩個骰子出現點數不同的狀況，就 (1、2) (2、1) 而言，其實是相同的結果，都是出現一個一點及一個二點，故其出現的機率相對的變為

$\frac{2}{36}$ ，而此種情形總共有30種，共為 $\frac{30}{36} = \frac{5}{6}$ 。

2、當「一點」為通用骰的情形下，我們將狀況分為三種：

(1) 二個骰子都是一點 (1、1)：其出現的機率由表中得知為 $\frac{1}{36}$ ，但因為一點代表任何數，故當出現 (1、1) 時，所代表的意義為任意組合

(2) 一個骰子一點 (1、?)：其出現的機率由表中得知為 $\frac{10}{36}$ ，由於一點代表任意數，故亦可視為二個相同的骰子。

(3) 沒有骰子是一點的狀況：其出現的機率由表中得知為 $\frac{25}{36}$ 。

討論：就上述可能我們以出現二點的數目為例，(其他數字同理可得) 整理成表二：

機率	「一點」不當通用骰：	「一點」當通用骰
兩個「二」	$\frac{1}{36}$	$\frac{4}{36}$
一個「二」	$\frac{10}{36}$	$\frac{16}{36}$
沒有「二」	$\frac{25}{36}$	$\frac{16}{36}$

(表二)

由表中明顯得知若「一點」不當通用骰，至少有一個代表「二」出現的機率只有 $\frac{10}{36} + \frac{1}{36} = \frac{11}{36}$ ；而有「一點」當通用骰時，至少有一個代表「二」出現的機率為 $\frac{16}{36} + \frac{4}{36} = \frac{20}{36}$ ，比較起來有「一點」當通用骰時其相對出現機率大將近一倍；而且一個「二」和沒有「二」出現的機率相同，增加猜測的難度。

結果：在「一」當通用骰的情形下，其餘五個數字出現的機率提高了，使得預測的過程中，無法完全由機率來評估何時抓一定會贏，而增加了遊戲的難度。

發現：在進行遊戲時，「一點」出現的多寡將明顯左右戰局。

三、研究骰子「一點」出現的組合

由於「一點」出現的多寡將明顯左右戰局，故以不同骰子數「一點」可能出現的狀況進行分析，並分為全都是「一點」、一個不是「一點」、二個不是「一點」……。

(一) 尋找的各種組合之規律性：從四顆骰子中尋找可能的規律性

1、四顆骰子都是「一點」：也就是 ，就只有一種。

2、三顆骰子是「一點」一顆不是：也就是 ，經列出後如表三共20個。

1112	1113	1114	1115	1116
1121	1131	1141	1151	1161
1211	1311	1411	1511	1611
2111	3111	4111	5111	6111

(表三)

討論：當只有一個骰子不確定時，因排除「一點」的機會，因此空白骰子可能出現的數字機會有5種，另外，因空白骰子的出現位置的先後有以下四種可能，

、、、，雖然數字所代表的意義是相同的，但卻因此增加了出現的機會。

結果：我們可以將此20種組合以 5×4 來表示，5代表的是  的數字可能，4代表的是有幾種排列方式，並運用此方法繼續尋找其他的組合數。

發現：因數字的可能皆固定為5，故後續的問題在於如何尋找排列方式

3、二顆骰子是「一點」二顆不是「一點」：可分為兩種情況，一是二顆數字相同、二是二顆數字不同。

(1) 二顆骰子是「一點」、二顆不是「一點」但二顆數字同：也就是 ，經列出後如下表共30個。

1122	1133	1144	1155	1166
1212	1313	1414	1515	1616
1221	1331	1441	1551	1661
2121	3131	4141	5151	6161
2211	3311	4411	5511	6611
2112	3113	4114	5115	6116

表四

(2) 二顆骰子是「一點」、二顆不是「一點」但二顆數字也不同：也就是



，經列出後如表五，共150個。

以 1123 進行排列			以 1132 進行排列		
1123	2113	3112	1132	2113	3112
1132	2131	3121	1123	2131	3121
1213	2311	3211	1213	2311	3211
1231			1231		
1312			1312		
1321			1321		

表五

討論：1、當兩顆骰子若數字不同時，可能的排列數為兩種



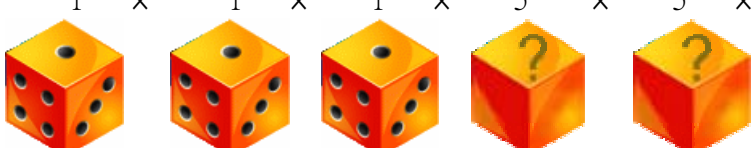
但兩數字相同時只會剩下一種排列



- 2、若此為三個不同的骰子時共會有6種排列，當數字選定後的排列方式，我們可以假設有三個空箱子，第一個箱子先丟一個數字，可以有三種數字可選，第二個箱子則只剩二個數字，最後一個箱子當然沒的選了，也就是 $3 \times 2 \times 1 = 6$ 種，但若這三個數都一樣時，僅會剩下一種。
- 3、當我們選定數字時、就四個骰子而言1123與1132是兩種不同的選擇，但由上表發現在計算排列數時，二種結果竟是一模一樣；這個問題使我們在個別的組合數的總和竟大於4顆骰子應有的總和數，原來發生了重複計算的問題。

結果：1、在計算組合數時，要特別注意骰子排列的計算，特別是 兩個  要視為相同數字進行排列，否則會有重複計算的部分。

- 2、找出計算的規律性：以5顆骰子為例：例如，有3個骰子是「1」點，另外兩顆骰子都有「2~6」等5種可能，所以是 5×5 ，但是要考慮這兩顆順序對調也沒關係，所以5顆骰子，3個1的組合有 $5 \times 5 \times 10 = 250$ 種。

$$1 \times 1 \times 1 \times 5 \times 5 \times 10 = 250 \text{種。}$$


為固定數字下，不同的排列方式

(二) 整理4顆骰子~11顆骰子的各種組合數

1、4顆骰子：

全部的組合數為 $6 \times 6 \times 6 \times 6 = 1296$ 種

4個1有 $1 \times 1 \times 1 \times 1 = 1$ 種

3個1有 $5 \times 4 \times 3 = 20$ 種

2個1有 $5 \times 5 \times 6 \times 2 = 150$ 種

1個1有 $5 \times 5 \times 5 \times 4 = 500$ 種

0個1有 $5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 1 = 625$ 種

2、5顆骰子

全部的組合有 $6 \times 6 \times 6 \times 6 \times 6 = 7776$ 種，我們記成 (6^5) 代表5個6相乘。

全部都是1出現的組合，也就是

5個1有 $1 \times 1 = 1$ 種

4個1有 $5 \times 5 = 25$ 種

3個1有 $5 \times 5 \times 10 = 250$ 種

2個1有 $5 \times 5 \times 5 \times 10 = 1250$ 種

1個1有 $5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 = 3125$ 種

0個1有 $5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 = 3125$ 種

1個1和0個1組合一樣

3、6顆骰子

全部的組合有 $6 \times 6 \times 6 \times 6 \times 6 \times 6 = 6^6$ 種

6個1有 $1 \times 1 = 1$ 種

5個1有 $5 \times 6 = 30$ 種

4個1有 $5 \times 5 \times 15 = 375$ 種

3個1有 $5 \times 5 \times 5 \times 20 = 2500$ 種

2個1有 $5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 15 = 9375$ 種

1個1有 $5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 6 = 18750$ 種

0個1有 $5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 = 15625$ 種

「1個1」組合是「0個1」
的1.2倍

組合是5個骰子的5倍

4、7顆骰子

全部的組合有 6^7 種

7個1有 $1 \times 1 = 1$ 種

6個1有 $5 \times 7 = 35$ 種

5個1有 $5^2 \times 21 = 525$ 種

4個1有 $5^3 \times 35 = 4375$ 種

3個1有 $5^4 \times 35 = 21875$ 種

2個1有 $5^5 \times 21 = 65625$ 種

1個1有 $5^6 \times 7 = 109375$ 種

0個1有 $5^7 \times 1 = 78125$ 種

「1個1」組合是「0個1」
的1.4倍

組合是5個骰子的25倍

5、以表格整理4顆骰子~11顆骰子的各種組合數

	四類	五類	六類	七類	八類	九類	十類	十一類
0個 1	$5^4 \times 1 = 625$	$5^5 \times 1 = 3125$	$5^6 \times 1 = 15625$	$5^7 \times 1 = 78125$	$5^8 \times 1 = 390625$	$5^9 \times 1 = 1953125$	$5^{10} \times 1 = 9765625$	$5^{11} \times 1 = 48828125$
1個 1	$5^3 \times 4 = 500$	$5^4 \times 5 = 3125$	$5^5 \times 6 = 18750$	$5^6 \times 7 = 109375$	$5^7 \times 8 = 625000$	$5^8 \times 9 = 3515625$	$5^9 \times 10 = 19531250$	$5^{10} \times 11 = 107421875$
2個 1	$5^2 \times 6 = 150$	$5^3 \times 10 = 1250$	$5^4 \times 15 = 9375$	$5^5 \times 21 = 65625$	$5^6 \times 28 = 437500$	$5^7 \times 36 = 2812500$	$5^8 \times 45 = 17578125$	$5^9 \times 55 = 107421875$
3個 1	$5^1 \times 4 = 20$	$5^2 \times 10 = 250$	$5^3 \times 20 = 2500$	$5^4 \times 35 = 21875$	$5^5 \times 56 = 175000$	$5^6 \times 84 = 1312500$	$5^7 \times 120 = 9375000$	$5^8 \times 165 = 64453125$
4個 1	$1 \times 1 = 1$	$5^1 \times 5 = 25$	$5^2 \times 15 = 375$	$5^3 \times 35 = 4375$	$5^4 \times 70 = 43750$	$5^5 \times 126 = 393750$	$5^6 \times 210 = 3281250$	$5^7 \times 330 = 25781250$
5個 1		$1 \times 1 = 1$	$5^1 \times 6 = 30$	$5^2 \times 21 = 525$	$5^3 \times 56 = 7000$	$5^4 \times 126 = 78750$	$5^5 \times 252 = 787500$	$5^6 \times 462 = 7218750$
6個 1			$1 \times 1 = 1$	$5 \times 7 = 35$	$5^2 \times 28 = 700$	$5^3 \times 84 = 10500$	$5^4 \times 210 = 131250$	$5^5 \times 462 = 1443750$
7個 1				$1 \times 1 = 1$	$5^1 \times 8 = 40$	$5^2 \times 36 = 900$	$5^3 \times 120 = 15000$	$5^4 \times 330 = 206250$
8個 1					$1 \times 1 = 1$	$5^1 \times 9 = 45$	$5^2 \times 45 = 1125$	$5^3 \times 165 = 20625$
9個 1						$1 \times 1 = 1$	$5^1 \times 10 = 50$	$5^2 \times 55 = 1375$
10 個1							$1 \times 1 = 1$	$5^1 \times 11 = 55$
11 個1								$1 \times 1 = 1$

表六

P S : 五顆骰子的 1 個 1 和 0 個 1 組合一樣

七顆骰子的 1 個 1 組合是 0 個 1 的 1.4 倍

十一顆的 1 個 1 和 2 個 1 的組合一樣。

六顆骰子的1個1組合是0個1的1.2倍

七顆骰子的組合是五個骰子的 25 倍

四、在排列組合中隱藏的「巴斯卡三角形」

（一）發現「巴斯卡三角形」的問題

我們在計算四顆骰子、五顆骰子「一點」出現的組合數時，同學提出二個疑問：

1、為何排列數會重複，全都是「一點」時，其排列數與完全沒有「一點」時，的排列數皆為1。

2、四顆骰子時，只有一個不是「一點」及只有一個是「一點」的排列數都為 4；在五顆骰子時，只有一個不是「一點」及只有一個是「一點」的排列數都為 5。

進而發現「巴斯卡三角形」竟隱藏在其中

發現：我們發現紅色圈圈 圈出的數字剛好是巴斯卡三角形數

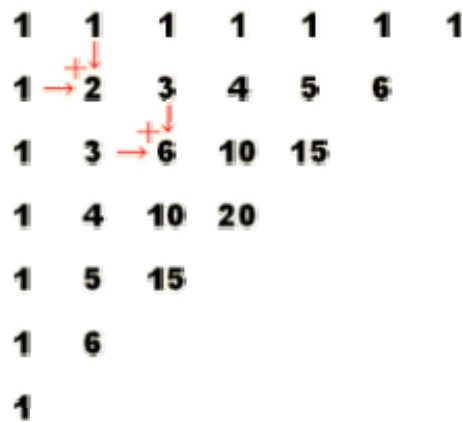
																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																					</
--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	----

表七

所以只要有巴斯卡三角形表，我們可以很容易算出幾顆骰子出現幾個「1」點的可能。
 (二)「巴斯卡三角形」是什麼？

巴斯卡三角形隱藏很多數學的奧秘，它與機率、二項式、費布納西數列、黃金比率等都很有關係哦！

巴斯卡三角形，是在西元 1653 年，由製造出加法計算機的法國數學家**巴斯卡**（Pascal）所創造出來的一個數學三角陣列。造表方法如下：先在紙上寫出一行和一列的「1」，然後在各個位置中填入數字，每一個位置上的數字都是它上面一個數和左邊一個數的和。



我們把上表右轉 45°，放正了，就可以得到一個以數字排列而成的三角形。(數學家的故事)
 利用這樣的算法我們用 Excel 算出 1 到 20 列的巴斯卡三角形數

1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1	3	6	10	15	21	28	36	45	55	66	78	91	105	120	136	153	171	190	
1	4	10	20	35	56	84	120	165	220	286	364	455	560	680	816	969	1140		
1	5	15	35	70	126	210	330	495	715	1001	1365	1820	2380	3060	3876	4845			
1	6	21	56	126	252	462	792	1287	2002	3003	4368	6188	8568	11628	15504				
1	7	28	84	210	462	924	1716	3003	5005	8008	12376	18564	27132	38760					
1	8	36	120	330	792	1716	3432	6435	11440	19448	31824	50388	77520						
1	9	45	165	495	1287	3003	6435	12870	24310	43758	75582	125970							
1	10	55	220	715	2002	5005	11440	24310	48620	92378	167960								
1	11	66	286	1001	3003	8008	19448	43758	92378	184756									
1	12	78	364	1365	4368	12376	31824	75582	167960										
1	13	91	455	1820	6188	18564	50388	125970											
1	14	105	560	2380	8568	27132	77520												
1	15	120	680	3060	11628	38760													
1	16	136	816	3876	15504														
1	17	153	969	4845															
1	18	171	1140																
1	19	190																	
1	20																		
1																			

五、由巴斯卡三角形數找出特定的骰子個數，會出現有一組相同的機率

在分析4顆骰子～11顆骰子的各種組合數中，我們觀察機率發生之最高機會有以下現象：

- 1、在5顆骰子時，出現「1個1」和「0個1」的機會是一樣最高的。
- 2、在11顆骰子時，出現「2個1」和「1個1」的機會是一樣的，

問題：那下一次出現「2個1」和「3個1」機會一樣是幾顆骰子呢？

推論：我們猜測這是有規律的，從第五顆之後每增加6顆就會有兩種情況機率相同，所以下一次出現「2個1」和「3個1」機會一樣是 $11+6=17$ 顆骰子（看黃色那一列），由巴斯卡三角形數 $680 \div 136 = 5$ ，只要相鄰的數差五倍，就代表出現機率一樣。

$$\text{因為 } 5^{17-2} \times 136 = 5^{17-3} \times 5 \times 136 = 5^{17-3} \times 680$$

↑
2個1的機率

↑
3個1的機率

下一次 $17+6=23$ 顆骰子的時候，「3個1」和「4個1」的機率一樣…以此類推。

我們用Excel的巴斯卡三角形數算出各種數量的骰子，幾個1的機率：

5顆骰子		十一顆骰子		十七顆骰子	
幾個1	機率	幾個1	機率	幾個1	機率
5	0.000128601	11	2.75636E-09	17	5.90784E-14
4	0.003215021	10	1.516E-07	16	5.02166E-12
3	0.032150206	9	3.79E-06	15	2.00867E-10
2	0.160751029	8	5.685E-05	14	5.02166E-09
1	0.401877572	7	0.0005685	13	8.78791E-08
0	0.401877572	6	0.003979498	12	1.14243E-06
		5	0.019897488	11	1.14243E-05
		4	0.071062456	10	8.97622E-05
		3	0.177656141	9	0.000561014
		2	0.296093569	8	0.00280507
		1	0.296093569	7	0.011220281
		0	0.134587986	6	0.035700894
				5	0.089252235
				4	0.171638914
				3	0.245198448
				2	0.245198448
				1	0.15324903
				0	0.045073244

發現特定的骰子個數，會出現有一組相同的機率。



結果：只要有巴斯卡三角形表，我們可以很容易算出幾顆骰子出現幾個「1」點的可能。

並以此找出20顆骰子，出現幾個「一點」的機會最大。

發現3.當骰子數大於六顆之後，「每一顆骰子點數都不同」的情況就不可能出現。

因為骰子只有6點，要分配到各顆骰子，7顆骰子分配了6個點數，剩下1顆就一定跟前6顆重複。

六、題：當四個人玩的時候，為什麼要從「4個幾」開始喊？

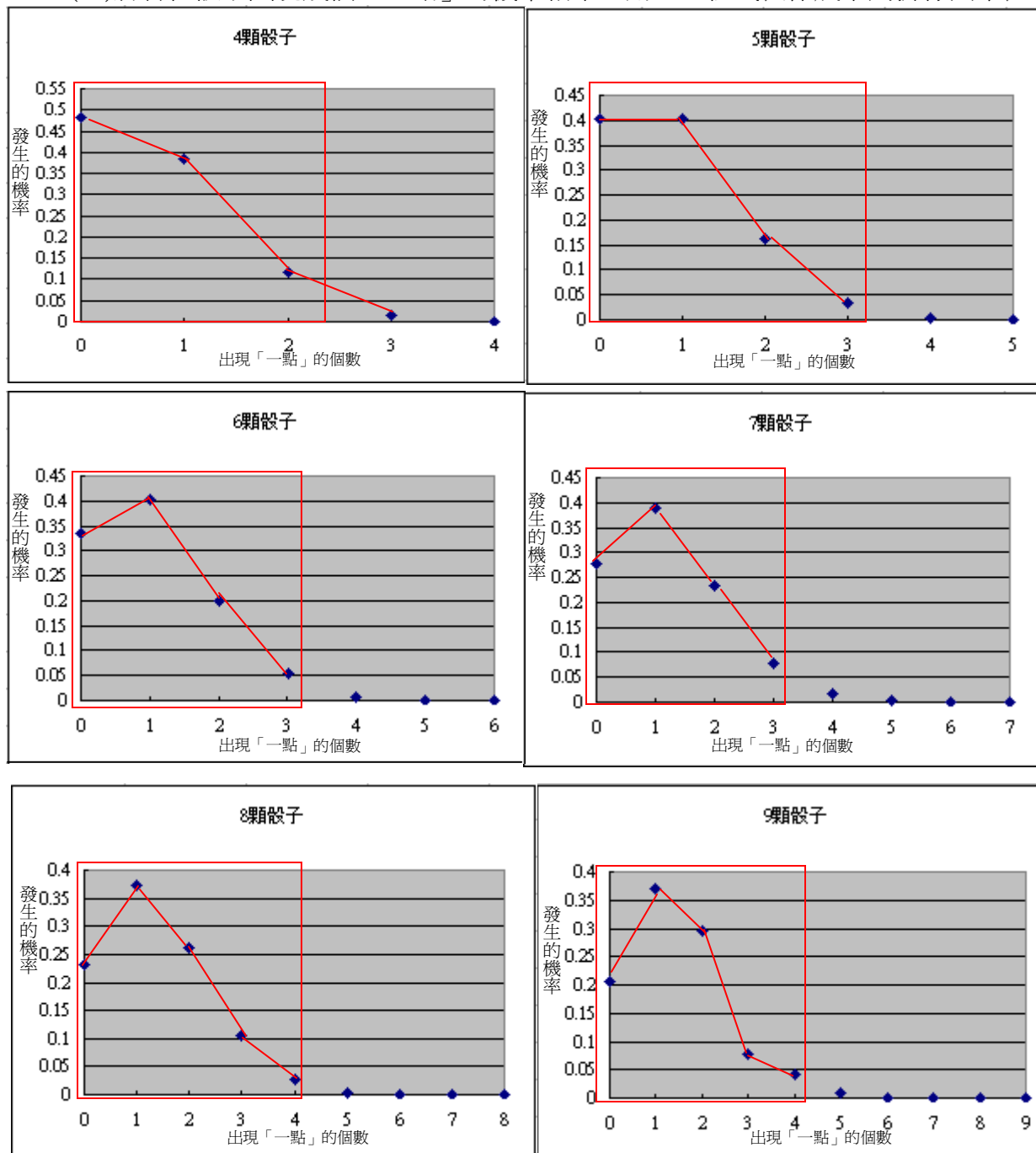
(一) 四個人有20顆骰子，每一個點數出現的機率是 $\frac{1}{6}$ ，所以同一點數在20顆會出現 $\frac{1}{6} \times 20 \div$

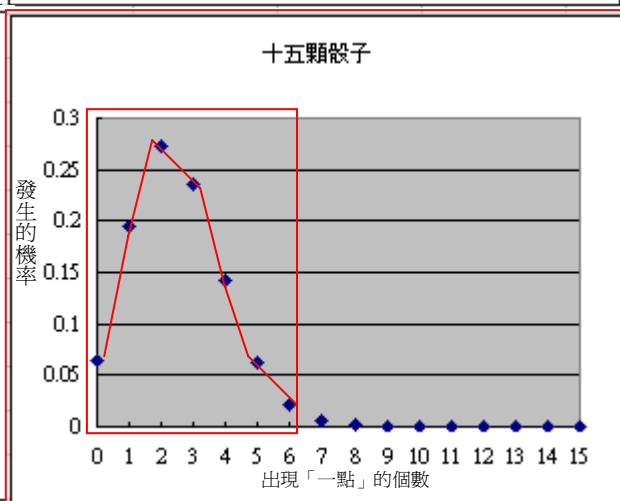
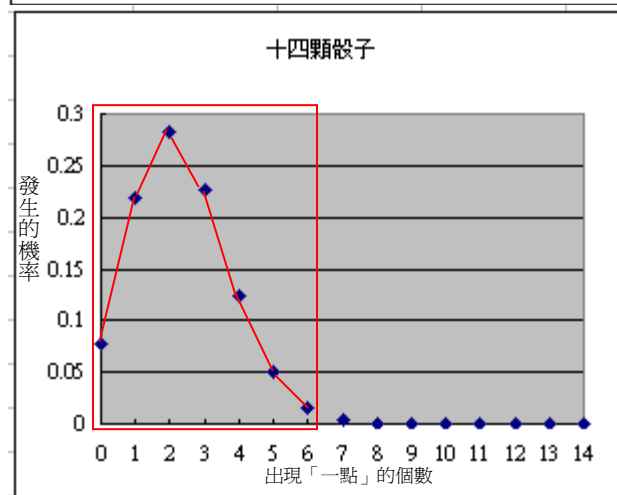
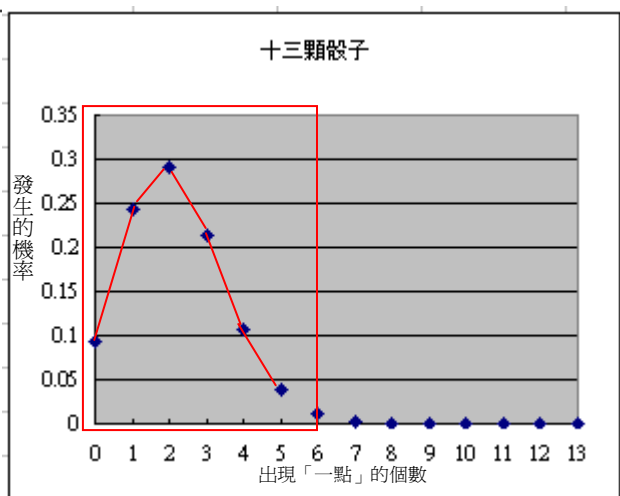
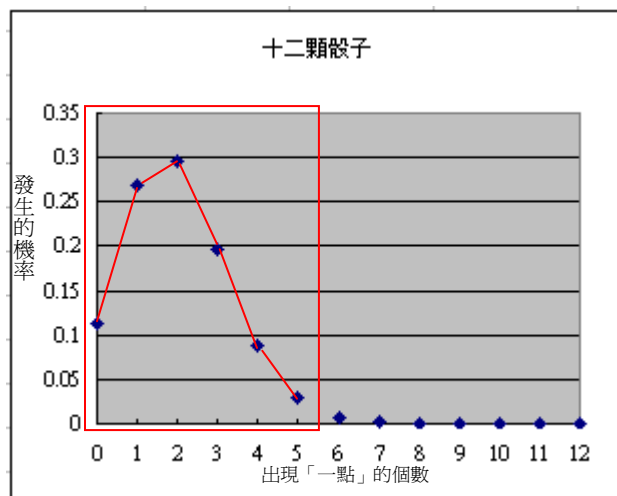
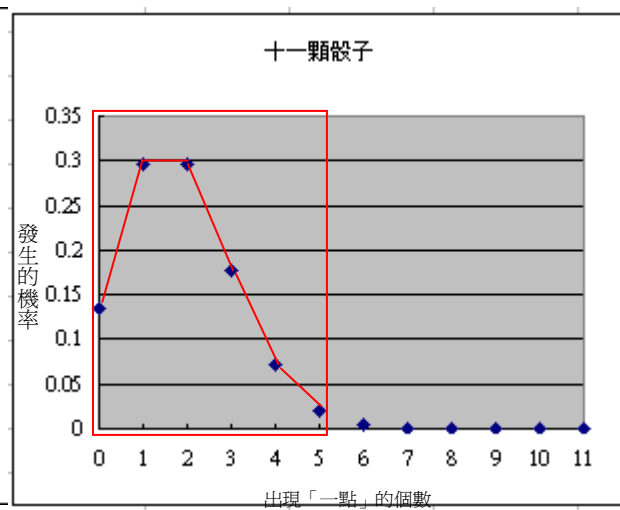
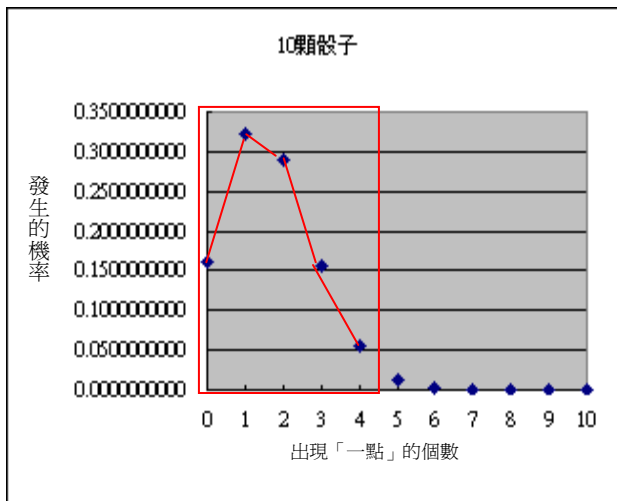
3.3，大約3~4顆。由此類推兩個人玩10顆骰子，同一點數在10顆會出現 $\frac{1}{6} \times 10 \div 1.6$ ，大

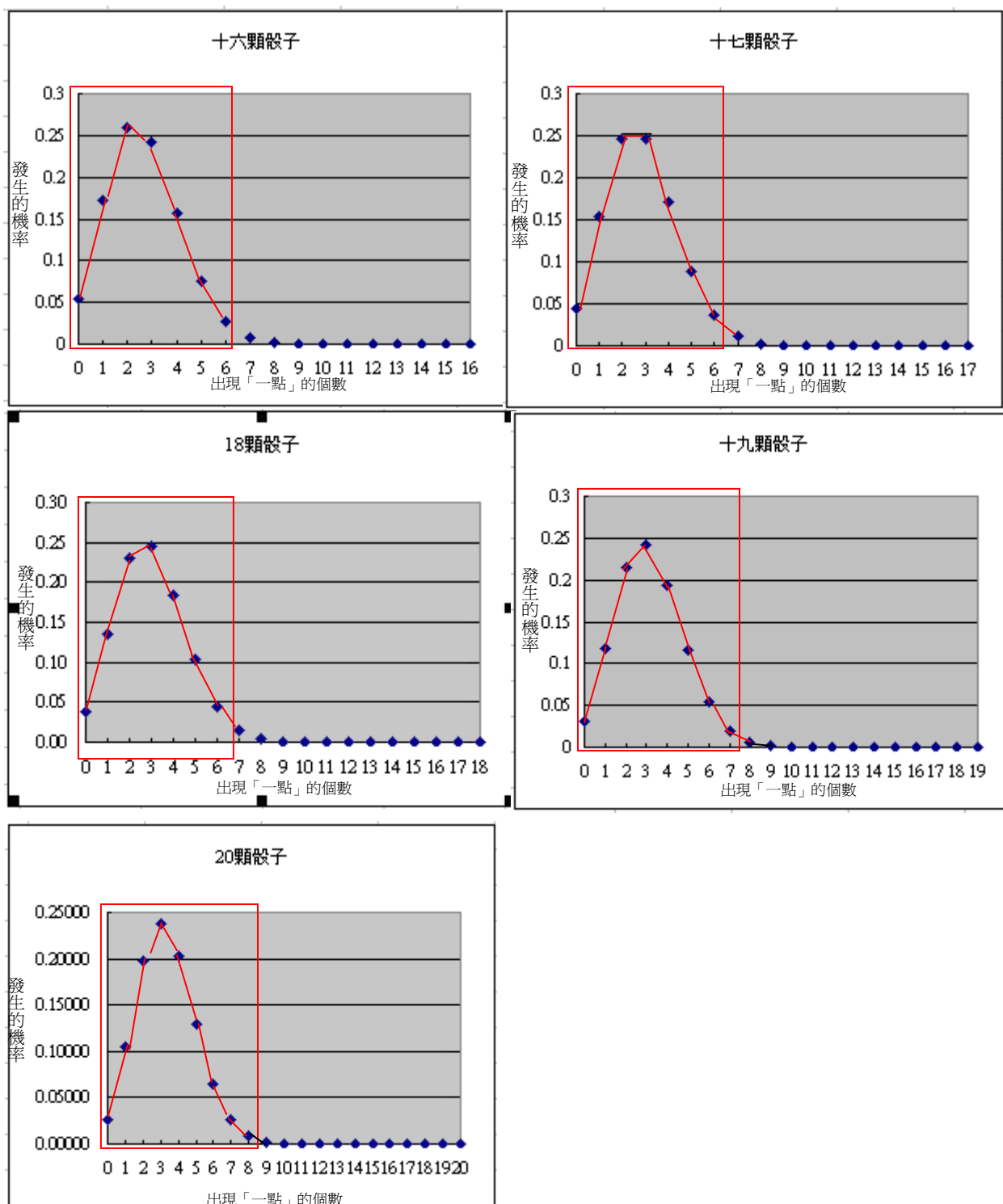
約1~2顆，所以要從2個幾開始喊。

七、由各種骰子的機率可以算出各種人數與玩法推廣到4個人玩，一人有5顆骰子，共20顆骰子。

(一)將各種骰子出現幾個「一點」的機率結果，用excel程式製作成下列折線圖來表示：

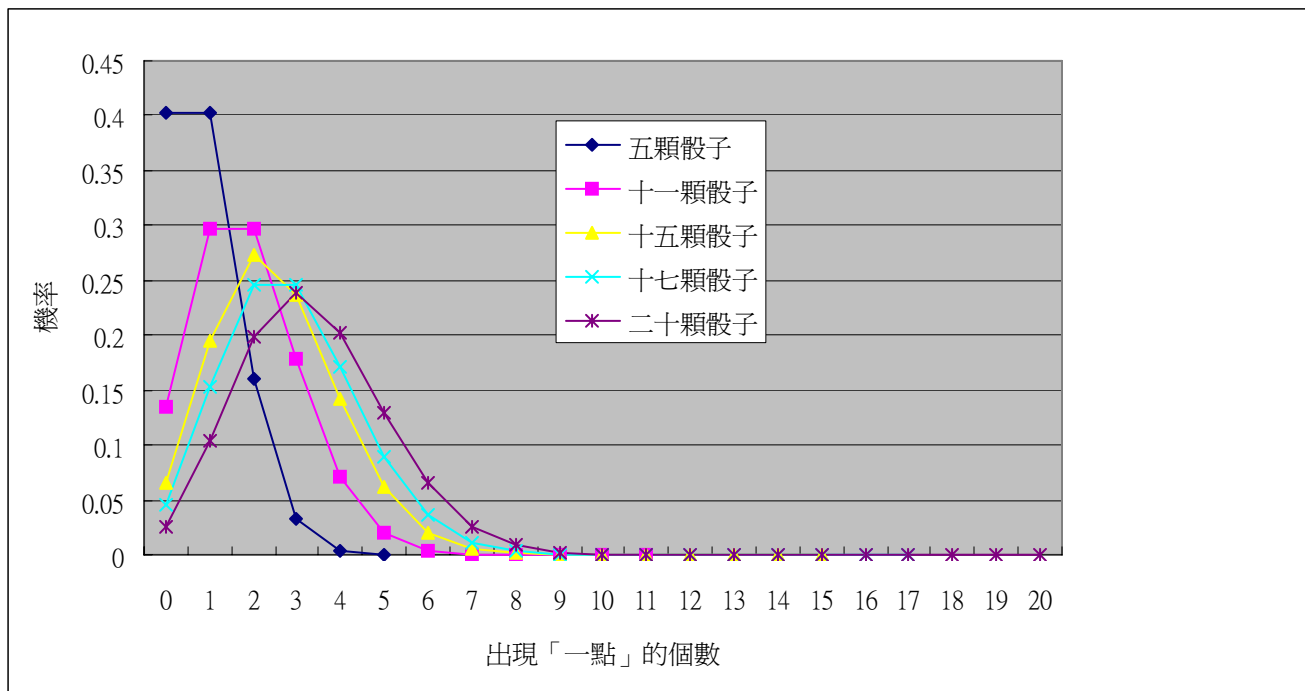






- 結論：(1) 由這些折線圖我們發現從機率「0個1」到「3個1」爬到最高峰，接著下降，到「8個1」之後幾乎機率接近0的水平線。代表一個人可以拿到同樣點數大約是1或2顆，但是全部的人都要拿到同樣點數各2顆或以上的（全部合起來8顆以上）機率太低了。
- (2) 雖然上述折線圖為出現「一點」的個數之機率圖，但亦可適用於單獨探討其他數字的情況，因為就骰子而言，出現六個面中任何一面的機率是相同的，也因此藉由這些圖形，我們可以初步的探討喊到多少的時候可以考慮喊抓。

(二) 將上述折線圖做整理，製作出圖一：



圖一

- 1、先我們可以驗證分別在五、十一、十七顆骰子時，其最高之機率為平頭的，和先前的發現的結果相同，表示出現的機率一樣。
- 2、為四個人玩，共20顆骰子，故由20顆骰子來看，雖然出現「一點」的個數機率最高出現在接近四個「一點」的位置，但以圖形來看，出現機率趨近於 0 的個數要到9個，而出現六顆「一點」的情形以低於0.1的機會，所以當有人單獨喊「六個一」時，在自己手上沒有「一點」出現的情形下，其實就可以喊抓了，但一般瞭解遊戲規則的人只會喊「4個一」，因為其目的只是要把「一點」喊掉而已；但反過來說，當「一點」被喊掉後，通用骰已不存在，此時任一家只要喊到六顆以上，且喊出來的數字又是自己手上沒有的，此時喊捉且捉到的機會將會是相當的高。
- 3、然是20顆骰子同時在進行遊戲，但由於自己先看過自己手中的5顆骰子，在探討時，未知的部分只有15顆骰子，故在圖一中我們將15顆骰子的狀況列入，作為喊到多少的時候可以考慮喊抓的依據。

八、分析喊到多少的時候可以考慮喊抓：(參考圖一)

(一)、「1點」不當通用點的時候：從「4個幾」開始喊，喊到多少的時候可以考慮喊抓：

自己手中相同點數的個數	猜測其他三人有幾個相同點數
0	由圖一中十五顆骰子的折線圖可以發現，喊到「5個幾」的機率已低於0.1更何況是機率只有0.02的「6個幾」，此時可以考慮喊抓。
1、2、3	如果有人喊到跟你手中點數相同者，表示此數字出現多個數的機會增加，除非他是真的在吹牛，否則喊捉的最好時機是在「自己的個數+6」個幾的時候，否則就必須冒險試試看別人是否在吹牛。

4、5	此時自己是「天牌」，也就是單一數字的個數特多，相對的就有某些數字欠缺，故自己可以藉機先喊至五個幾或六個幾，因自己特多，只要任一家能支援1至2個時，就沒有吹牛的疑慮，此時他人喊捉就容易捉錯；倘使下家不捉，則下家被迫喊6個幾或七個幾，若這個數字自己完全沒有，就可嘗試喊捉了。
-----	---

表八

(二)、當「1點」仍當通用點的時候：由於人的思考較為複雜，加上吹牛手法千奇百怪，不同人有不同的吹牛方法，即便是同一個人也會為了模糊焦點，而隨時改變策略，在吹牛的技巧及心理上，相當值得在未來繼續深入探討；且當「1點」作通用點的時候，就要考慮自己手中有的「1點」和其他相同點數的和，情況亦將更為複雜。

伍、研究結果

- 1、在「一」當通用點的情形下，其餘五個數字出現的機率提高了，使得預測的過程中，無法完全由機率來評估何時抓一定會贏，而增加了遊戲的難度。
- 2、運用排列組合計算每類骰子的組合數。
- 3、在我們研究骰子的機率時，發現了「巴斯卡三角形數」。
- 4、不管幾個人玩，每個人至少要有3顆以上的骰子，出現的組合種類比較多，遊戲才好玩。
- 5、在計算骰子的機率，會出現一些規律性，讓我們可以順利去推測更多骰子數，將遊戲變化不同人數、不同骰子數的玩法。
- 6、經由折線圖，分析當「1點」不當通用點的時候，從「4個幾」開始喊，喊到多少的時候可以考慮喊抓（參考表七）

陸、結論

「吹牛」遊戲用機率來看可以得到一些喊的技巧，但是考慮到除了擲骰子之外，喊的人是否有唬人的情形，讓遊戲更為複雜刺激。不過有算過各種骰子的組合情形，再去歸納其他參與遊戲的人的習慣還是可以判斷出是誰在吹牛，讓我們經過這次的研究討論，可以在「吹牛」遊戲更可以知己知彼、當機立斷，成為「吹牛」遊戲常勝軍。

柒、參考資料

1. 維基百科 <http://zh.wikipedia.org/wiki/>
2. 大話骰小遊戲 <http://www.teddyboy.com.hk/gamezone/dicegame/main.php>
3. 數學家的故事（師大數學系網站）：巴斯卡 <http://www.mdnkids.com/mathematician/bascal.htm>

評語

080412 驚爆骰子樂之吹牛大王

本件作品是從電視上「小氣大財神」所探討的機率問題，作者無法回答四張牌抽三張牌有幾種不同的組合，況且「機率」在國小學生階段，過於深奧。但作者透過操作骰子來瞭解數學上新概念，值得嘉勉。