

中華民國第四十六屆中小學科學展覽會
作品說明書

國小組 數學科

第三名

080411

排排看

學校名稱： 臺北縣樹林市文林國民小學

作者：	指導老師：
小六 陳郁涵	林忠正
小六 林瑋翔	王郁惠
小六 陳冠丞	

關 鍵 詞：奇偶

排排看

壹、摘要

有 x 瓶牛奶，要排在 $n \times n$ 的正方形牛奶箱中，要如何排，才能使得牛奶箱中的(1)每行每列皆為奇數瓶(2)每行每列皆為偶數瓶(3)行列中一邊為奇數瓶，另一邊為偶數瓶。要回答上述的問題，可實際上去排一排，或經由解聯立方程式，得知行列瓶數的組合情形，再去排列。除此之外，是否可找到一種不經由解聯立方程式，就可以操縱排牛奶瓶的方法？此為本研究的目的。最後再進一步推廣到長方形。

貳、研究動機：

有一次上數學課，同學問老師一個問題：「有 11 瓶牛奶要排在一個可容納 25 瓶牛奶的正方形牛奶箱中，要怎麼排，才可使得牛奶箱中每行、每列的瓶數皆為奇數？」老師說，這個問題很有趣，要我們想想看。

參、研究目的：

一、探討正方形牛奶箱：

(一)、藉由聯立方程式的討論及實際排列，找出每行、每列的瓶數

- 1、皆為奇數時的 x 值。
- 2、皆為偶數時的 x 值。
- 3、一邊為奇數，另一邊為偶數時的 x 值。

(二)、當牛奶瓶數為 x 時，利用聯立方程式找出行列瓶數的組合，然後排之。

(三)、當牛奶瓶數為 x 時，不利用聯立方程式，而另外找出一個可操縱排牛奶瓶的方法。

二、探討長方形牛奶箱：

(一)、藉由聯立方程式的討論及實際排列，找出每行、每列的瓶數

- 1、皆為奇數時的 x 值。
- 2、皆為偶數時的 x 值。
- 3、一邊為奇數，另一邊為偶數時的 x 值。

(二)、當牛奶瓶數為 x 時，利用聯立方程式找出行列瓶數的組合，然後排之。

(三)、當牛奶瓶數為 x 時，不利用聯立方程式，而另外找出一個可操縱排牛奶瓶的方法。

肆、研究設備及器材：

紙、筆、牛奶箱模型、牛奶瓶模型。

伍、研究過程：

一、定義：

(一) 符號：

1. x ：牛奶瓶數 ($x \in \mathbb{N}$)。
2. n ：牛奶箱的行數 ($n \in \mathbb{N}$)。
3. m ：牛奶箱的列數 ($m \in \mathbb{N}$)。
4. $\bullet$ ：代表牛奶瓶。
5. a_{2k} (或 a_{2k+1})：每行排 $2k$ (或 $2k+1$) 瓶的行數。例如： $a_2=3$ 表示每行排 2 瓶的行數有 3 行。
6. b_{2k} (或 b_{2k+1})：每列排 $2k$ (或 $2k+1$) 瓶的列數。例如： $b_4=5$ 表示每列排 4 瓶的列數有 5 列。

(二) 名詞解釋：

1. $m \times n$ 的牛奶箱：表示此牛奶箱的長邊有 n 格，寬邊有 m 格，如圖 1 所示。

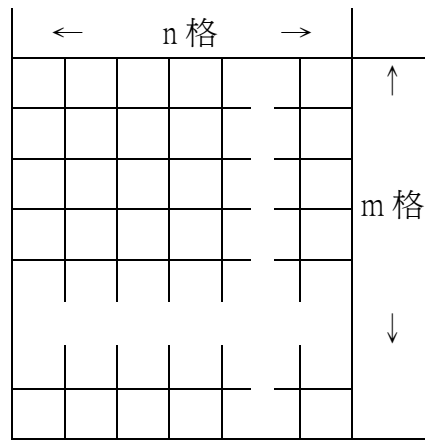


圖 1

2.對角線：在本篇報告中的對角線，如果牛奶箱不是正方形，則對角線指的是“長方形中左邊之最大正方形的對角線”，亦即長方形 $m \times n (m < n)$ ，我們取“ $m \times m$ ” (正方形) 中的對角線，如圖 2 所示。

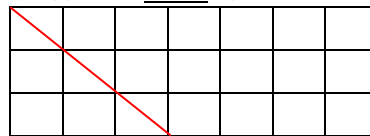


圖 2

二、探討正方形牛奶箱：

根據牛奶箱的行數 n 為奇數或偶數，而把正方形牛奶箱分為正奇數牛奶箱和正偶數牛奶箱兩種。我們利用總行數、總列數以及瓶數間的關係來找這兩種牛奶箱在不同條件下的 x 值。

(一) 牛奶箱在行列皆為奇數瓶時，運用下述 1.~ 3. 的關係來找 x 值。

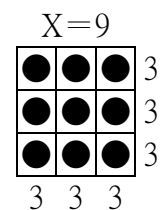
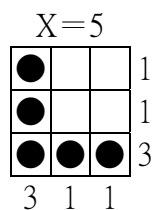
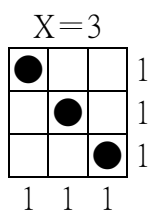
1. 總行數 $n = a_1 + a_3 + a_5 + \cdots + a_{2k+1}$

2. 總列數 $n = b_1 + b_3 + b_5 + \cdots + b_{2k+1}$

3. 瓶數 $x = 1 \times a_1 + 3 \times a_3 + 5 \times a_5 + \cdots + (2k+1) \times a_{2k+1}$
 $= 1 \times b_1 + 3 \times b_3 + 5 \times b_5 + \cdots + (2k+1) \times b_{2k+1}$

4. 舉一個例子來說明如何找出 x 值。如圖三

[例一]：找出“3×3”的牛奶箱且行列皆為奇數瓶時的 x 值。



(說明)：(1) 行的關係 $\Rightarrow$ 總行數： $a_1 + a_3 = 3 \cdots \textcircled{1}$

瓶數： $1 \times a_1 + 3 \times a_3 = x \cdots \textcircled{2}$

由①得 $(a_1, a_3) = (3, 0)$ 或 $(2, 1)$ 或 $(1, 2)$ 或 $(0, 3)$

分別將 (a_1, a_3) 的值代入②，得到 $x = 3, 5, 7, 9$ ，

(2) 列的關係 $\Rightarrow$ 總列數： $b_1 + b_3 = 3 \cdots \textcircled{1}$

瓶數： $1 \times b_1 + 3 \times b_3 = x \cdots \textcircled{2}$

由①得 $(b_1, b_3) = (3, 0)$ 或 $(2, 1)$ 或 $(1, 2)$ 或 $(0, 3)$

分別將 (b_1, b_3) 的值代入②，得到 $x = 3, 5, 7, 9$ ，

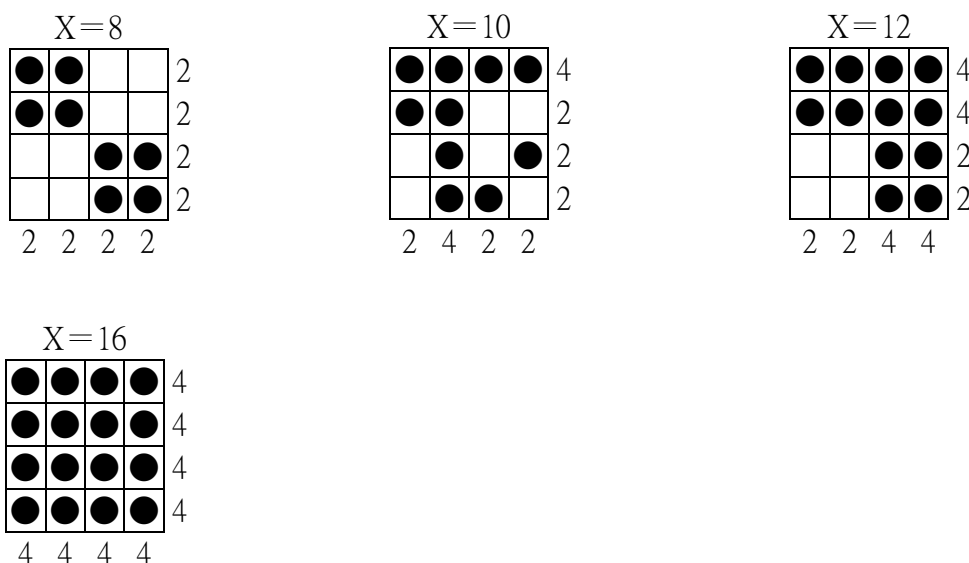
- (3)由行與列的關係找到 $x=3、5、7、9$ ，但實際排列時， $x=7$ 無法排出，所以當“ 3×3 ”的牛奶箱且行列皆為奇數瓶時， $x=3、5、9$ 。
- (4) $x=3、5、9$ 的排列情形如上。

圖三

(二)牛奶箱在行列皆為偶數瓶時，運用下述 1.~ 3.的關係來找 x 值。

- 1.總行數 $n=a_2+a_4+a_6+\cdots+a_{2k}$
- 2.總列數 $n=b_2+b_4+b_6+\cdots+b_{2k}$
- 3.瓶數 $x=2\times a_2+4\times a_4+6\times a_6+\cdots+2k\times a_{2k}$
 $=2\times b_2+4\times b_4+6\times b_6+\cdots+2k\times b_{2k}$
- 4.舉一個例子來說明如何找出 x 值。如圖四

[例二]：找出“ 4×4 ”的牛奶箱且行列皆為偶數瓶時的 x 值。



- (說明)：(1)行的關係 $\Rightarrow$ 總行數： $a_2+a_4=4\cdots$ ①
 瓶數： $2\times a_2+4\times a_4=x\cdots$ ②
 由①得 $(a_2、a_4)=(4、0)$ 或 $(3、1)$ 或 $(2、2)$ 或 $(1、3)$ 或 $(0、4)$
 分別將 $(a_2、a_4)$ 的值代入②，得到 $x=8、10、12、14、16$
- (2)列的關係 $\Rightarrow$ 總列數： $b_2+b_4=4\cdots$ ①
 瓶數： $2\times b_2+4\times b_4=x\cdots$ ②
 由①得 $(b_2、b_4)=(4、0)$ 或 $(3、1)$ 或 $(2、2)$ 或 $(1、3)$ 或 $(0、4)$
 分別將 $(b_2、b_4)$ 的值代入②，得到 $x=8、10、12、14、16$
- (3)由行與列的關係找到 $x=8、10、12、14、16$ ，但實際排列時， $x=14$ 無法排出，所以當“ 4×4 ”的牛奶箱且行列皆為偶數瓶時， $x=8、10、12、16$ 。
- (4) $x=8、10、12、16$ 的排列情形如上。

圖四

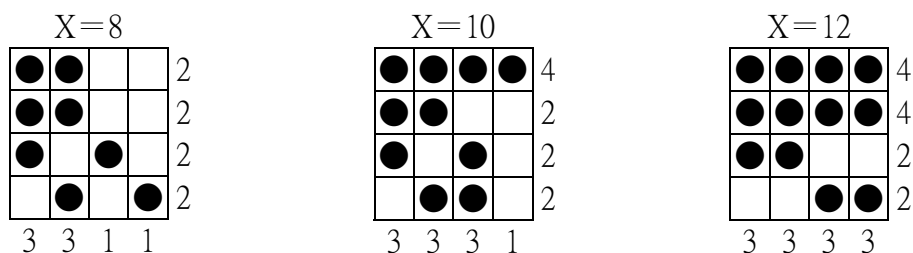
(三)牛奶箱的行列中一邊為奇數瓶，而另一邊為偶數瓶時，運用下述 1.~ 2.的關係來找 x 值。

- 1.奇數瓶：(1)總行數 $n=a_1+a_3+a_5+\cdots+a_{2k+1}$
 (2)總列數 $n=b_1+b_3+b_5+\cdots+b_{2k+1}$
 (3)瓶數 $x=1\times a_1+3\times a_3+5\times a_5+\cdots+(2k+1)\times a_{2k+1}$
 $=1\times b_1+3\times b_3+5\times b_5+\cdots+(2k+1)\times b_{2k+1}$
- 2.偶數瓶：(1)總行數 $n=a_2+a_4+a_6+\cdots+a_{2k}$
 (2)總列數 $n=b_2+b_4+b_6+\cdots+b_{2k}$

$$(3) \text{瓶數 } x = 2 \times a_2 + 4 \times a_4 + 6 \times a_6 + \cdots + 2k \times a_{2k} \\ = 2 \times b_2 + 4 \times b_4 + 6 \times b_6 + \cdots + 2k \times b_{2k}$$

3.舉一個例子來說明如何找出 x 值。如圖五

〔例三〕：找出“4×4”的牛奶箱且行列中一邊為奇數瓶，另一邊為偶數瓶時的 x 值。



(說明)：假設每行要排奇數瓶，每列要排偶數瓶

(1)行的關係⇒總行數： $a_1 + a_3 = 4 \cdots ①$

瓶數： $1 \times a_1 + 3 \times a_3 = x \cdots ②$

由①得 $(a_1, a_3) = (4, 0)$ 或 $(3, 1)$ 或 $(2, 2)$ 或 $(1, 3)$ 或 $(0, 4)$

分別將 (a_1, a_3) 的值代入②，得到 $x = 4, 6, 8, 10, 12$

(2)列的關係⇒總列數： $b_2 + b_4 = 4 \cdots ①$

瓶數： $2 \times b_2 + 4 \times b_4 = x \cdots ②$

由①得 $(b_2, b_4) = (4, 0)$ 或 $(3, 1)$ 或 $(2, 2)$ 或 $(1, 3)$ 或 $(0, 4)$

分別將 (b_2, b_4) 的值代入②，得到 $x = 8, 10, 12, 14, 16$

(3)因為一邊為奇數瓶，而另一邊為偶數瓶，故此時的 x 值為行與列中找到之 x 值的交集。所以當“4×4”的牛奶箱且行列中一邊為奇數瓶，另一邊為偶數瓶時， $x = 8, 10, 12$ 。

(4) $x = 8, 10, 12$ 的排列情形如上。

圖五

(四)我們同上述(一)、(二)、(三)的方法來找“3×3”、“5×5”、“7×7”、…的牛奶箱且行列皆為奇數瓶、偶數瓶或行列中一邊為奇數瓶，另一邊為偶數瓶時的 x 值，而歸納整理成表一。

表一：正奇數牛奶箱($n \times n$, n 為奇數)			
限制 x 箱子大小 ($n \times n$)	行列皆為奇數瓶	行列皆為偶數瓶	行、列中 一邊為奇數瓶， 另一邊為偶數瓶
3×3	3、5、9	6	×
5×5	5、7、9、…19、21、 25	10、12、14、16、18、 20	×
7×7	7、9、11、…43、45、 49	14、16、18、…38、40、 42	×
9×9	9、11、13、…75、77、 81	18、20、22、…68、70、 72	×
⋮	⋮	⋮	×
$n \times n$	$n、n+2、n+4、n+$	$2n、2n+2、2n+$	×

(n 為奇數)	6.....、 n^2-6 、 n^2-4 、 n^2	4、..... ...、 $n \times (n-1)-2$ 、 $n \times (n-1)$	
---------	---	---	--

說明：

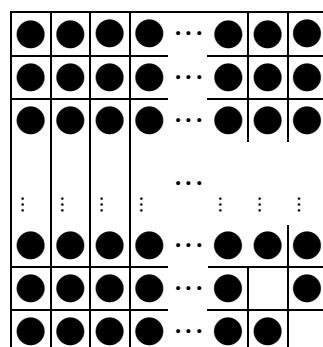
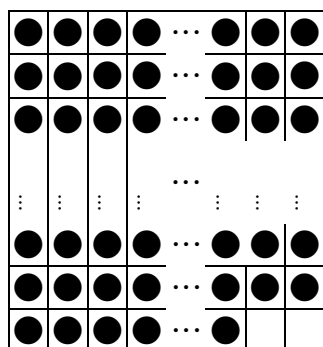
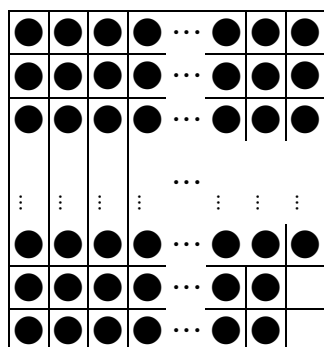
1、行列皆為奇數瓶時：

(1)x 的最小值產生於每行(或每列)都排一瓶，此時 $x = 1 \times n = n$ 。

(2)x 的最大值產生於每行(或每列)全排滿，此時 $x = n \times n = n^2$ 。

(3)x 為奇數個奇數瓶之和，故 x 必為奇數。

(4)當 $x = n^2-2$ 時，只有下列三種排法，而這三種排法均無法使行列皆為奇數，所以 x 不為 n^2-2 。



(5)
由

上述(1)~(4)知：x 從最小值 n 到最大值 n^2 間，每增加 2 瓶都可排出，但 $x = n^2-2$ 除外。

2、行列皆為偶數瓶時：

(1)x 的最小值產生於每行(或每列)都排二瓶，此時 $x = 2 \times n = 2n$ 。

(2)x 的最大值產生於每行(或每列)全排滿少一瓶，此時 $x = (n-1) \times n$ 。

(3)x 為奇數個偶數瓶的和，故 x 必為偶數。

(4)由上述(1)~(3)知：x 從最小值 2n 到最大值 $n \times (n-1)$ 間，每增加 2 瓶都可排出。

3、行列中一邊為奇數瓶，另一邊為偶數瓶時：

行列中一邊為奇數瓶，則 x 為奇數個奇數瓶之和，x 必為奇數；而另一邊為偶數瓶，則 x 為奇數個偶數瓶之和，x 必為偶數。因此若要一邊為奇數瓶，而另一邊為偶數瓶，x 就得同時為奇數和偶數，故 x 無解。

(五)我們同上述(一)、(二)、(三)的方法來找“2x2”、“4x4”、“6x6”、…的牛奶箱且行列皆為奇數瓶、偶數瓶或行列中一邊為奇數瓶，另一邊為偶數瓶時的 x 值，而歸納整理成表二。

表二：正偶數牛奶箱($n \times n$ ，n 為偶數)			
限制值 x 箱子大小 ($n \times n$) 行列皆為奇數瓶 行列皆為偶數瓶 行、列中 一邊為奇數瓶， 另一邊為偶數瓶			

2×2	2	4	×
4×4	4、6、8、10、12	8、10、12、16	8、10、12
6×6	6、8、10、…26、28、30	12、14、16、…30、32、36	12、14、16、…26、28、30
8×8	8、10、12、…52、54、56	16、18、20、…58、60、64	16、18、20、…52、54、56
⋮	⋮	⋮	⋮
n×n (n 為偶數)	n、n+2、n+4、n+6…… ……n×(n-1)-2、n×(n-1)	2n、2n+2、2n+4、…… ……、n ² -6、n ² -4、n ²	2n、2n+2、2n+4、…… ……、n×(n-1)-2、n×(n-1)

說明：

1、行列皆為奇數瓶時：

- (1)x 的最小值產生於每行(或每列)都排一瓶，此時 $x = 1 \times n = n$ 。
- (2)x 的最大值產生於每行(或每列)全排滿少一瓶，此時 $x = (n-1) \times n$ 。
- (3)x 為偶數個奇數瓶的和，故 x 必為偶數。
- (4)由(1)~(3)知：x 從最小值 n 到最大值 $(n-1) \times n$ 間，每增加 2 瓶都可排出。

2、行列皆為偶數瓶時：

- (1)x 的最小值產生於每行(或每列)都排二瓶，此時 $x = 2 \times n = 2n$ 。
- (2)x 的最大值產生於每行(或每列)全排滿，此時 $x = n \times n = n^2$ 。
- (3)x 為偶數個偶數瓶的和，故 x 必為偶數。
- (4)當 $x = n^2 - 2$ 時，只有三種排法，而這三種排法均無法使行列皆為偶數，所以 x 不為 $n^2 - 2$ 。(此三種排法見於第六頁說明 1)
- (5)由(1)~(4)知：x 從最小值 2n 到最大值 n^2 間，每增加 2 瓶都可排出，但 $x = n^2 - 2$ 除外。

3、行、列中一邊為奇數瓶，另一邊為偶數瓶時：

- (1)x 的最小值產生於每列都排二瓶，此時 $x = 2 \times n = 2n$ 。
- (2)x 的最大值產生於每行全排滿少一瓶，此時 $x = (n-1) \times n$ 。
- (3)x 為偶數個奇數瓶的和(或偶數個偶數瓶的和)，故 x 必為偶數。
- (4)由(1)~(3)知：x 從最小值 2n 到最大值 $(n-1) \times n$ 間，每增加 2 瓶都可排出。

(六)利用聯立方程式找出行列瓶數的組合，然後排之

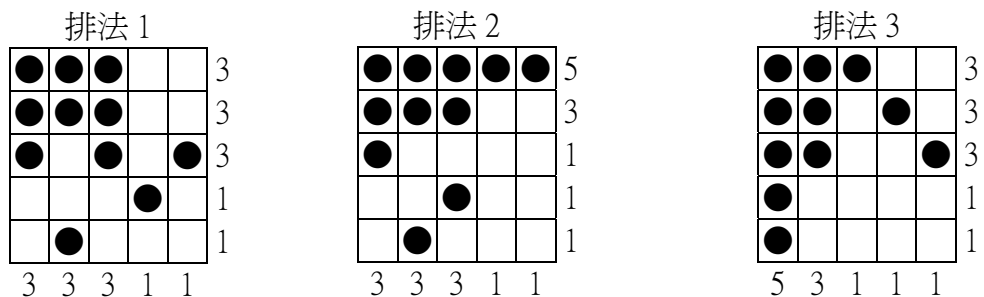
當知道排列的瓶數 x 和牛奶箱大小(n×n)，以及行列瓶數限制的條件後，就可利用總行數、總列數以及瓶數間的關係找出(a_1 、 a_3 、 a_5 、…、 a_{2k+1})(或(a_2 、 a_4 、 a_6 、…、 a_{2k}))的值，然後再根據 a_1 、 a_3 、 a_5 、…、 a_{2k+1} (或 a_2 、 a_4 、 a_6 、…、 a_{2k})的情形排列之。

1.行列瓶數限制皆為奇數瓶時，運用下述(1)~(3)的關係來找出(a_1 、 a_3 、 a_5 、…、 a_{2k+1})的值，然後再根據 a_1 、 a_3 、 a_5 、…、 a_{2k+1} 的情形排列之。

- (1)總行數 $n = a_1 + a_3 + a_5 + \dots + a_{2k+1}$
- (2)總列數 $n = b_1 + b_3 + b_5 + \dots + b_{2k+1}$
- (3)瓶數 $x = 1 \times a_1 + 3 \times a_3 + 5 \times a_5 + \dots + (2k+1) \times a_{2k+1}$
 $= 1 \times b_1 + 3 \times b_3 + 5 \times b_5 + \dots + (2k+1) \times b_{2k+1}$

2.舉一個例子來說明如何找出(a_1 、 a_3 、 a_5 、…、 a_{2k+1})的值，然後再根據 a_1 、 a_3 、 a_5 、…、 a_{2k+1} 的情形排列之。如圖六

〔例四〕：將 11 瓶牛奶排在“5×5”的牛奶箱中，且行列皆為奇數瓶。



(說明)：(1)行的關係⇒總行數： $a_1 + a_3 + a_5 = 5 \cdots \textcircled{1}$

瓶數： $1 \times a_1 + 3 \times a_3 + 5 \times a_5 = 11 \cdots \textcircled{2}$

由②-①得 $2a_3 + 4a_5 = 6 \Rightarrow a_3 + 2a_5 = 3 \Rightarrow a_3 = 3 - 2a_5$

將 $a_3 = 3 - 2a_5$ 代入①得 $a_1 = a_5 + 2$

又因為 $a_1 + a_3 + a_5 = 5$ ，故可得如下的結果。

a_5	0	1	2	3	4	...
a_3	3	1	-1	-3	-5	負數
a_1	2	3	4	5	6	...
			不合	不合	不合	不合

故找到 $(a_1, a_3, a_5) = (2, 3, 0)$ 或 $(3, 1, 1)$

(2)列的關係：因為此為正方形牛奶箱，故列的情形和行的情形一樣，亦即可以找到相同的結果，所以可得 $(b_1, b_3, b_5) = (2, 3, 0)$ 或 $(3, 1, 1)$

(3)由(1)、(2)知：行列共有 4 種組合，其排法如上。

排法 1： $(a_1, a_3, a_5) = (2, 3, 0)$ 、 $(b_1, b_3, b_5) = (2, 3, 0)$

排法 2： $(a_1, a_3, a_5) = (2, 3, 0)$ 、 $(b_1, b_3, b_5) = (3, 1, 1)$

排法 3： $(a_1, a_3, a_5) = (3, 1, 1)$ 、 $(b_1, b_3, b_5) = (2, 3, 0)$

排法 4： $(a_1, a_3, a_5) = (3, 1, 1)$ 、 $(b_1, b_3, b_5) = (3, 1, 1)$ 無法排出。

圖六

3. 行列瓶數限制皆為偶數瓶時，運用下述(1)~(3)的關係來找出 $(a_2, a_4, a_6, \dots, a_{2k})$ 的值，然後再根據 $a_2, a_4, a_6, \dots, a_{2k}$ 的情形排列之。

(1)總行數 $n = a_2 + a_4 + a_6 + \dots + a_{2k}$

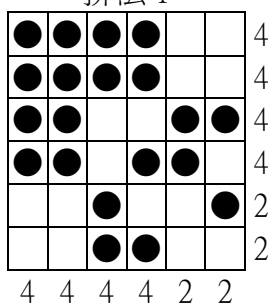
(2)總列數 $n = b_2 + b_4 + b_6 + \dots + b_{2k}$

(3)瓶數 $x = 2 \times a_2 + 4 \times a_4 + 6 \times a_6 + \dots + 2k \times a_{2k}$
 $= 2 \times b_2 + 4 \times b_4 + 6 \times b_6 + \dots + 2k \times b_{2k}$

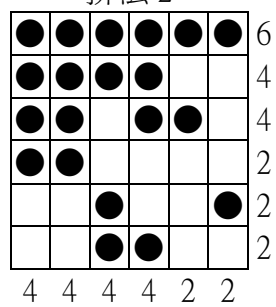
4. 舉一個例子來說明如何找出 $(a_2, a_4, a_6, \dots, a_{2k})$ 的值，然後再根據 $a_2, a_4, a_6, \dots, a_{2k}$ 的情形排列之。如圖七

〔例五〕：將 20 瓶牛奶排在“6×6”的牛奶箱中，且行列皆為偶數瓶。

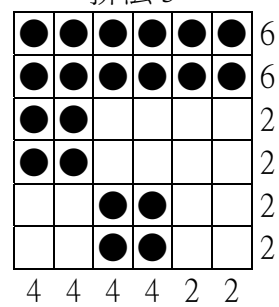
排法 1



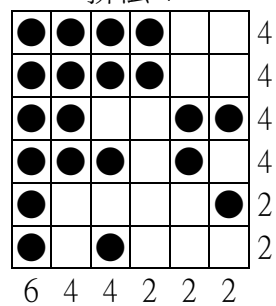
排法 2



排法 3



排法 4



排法 7

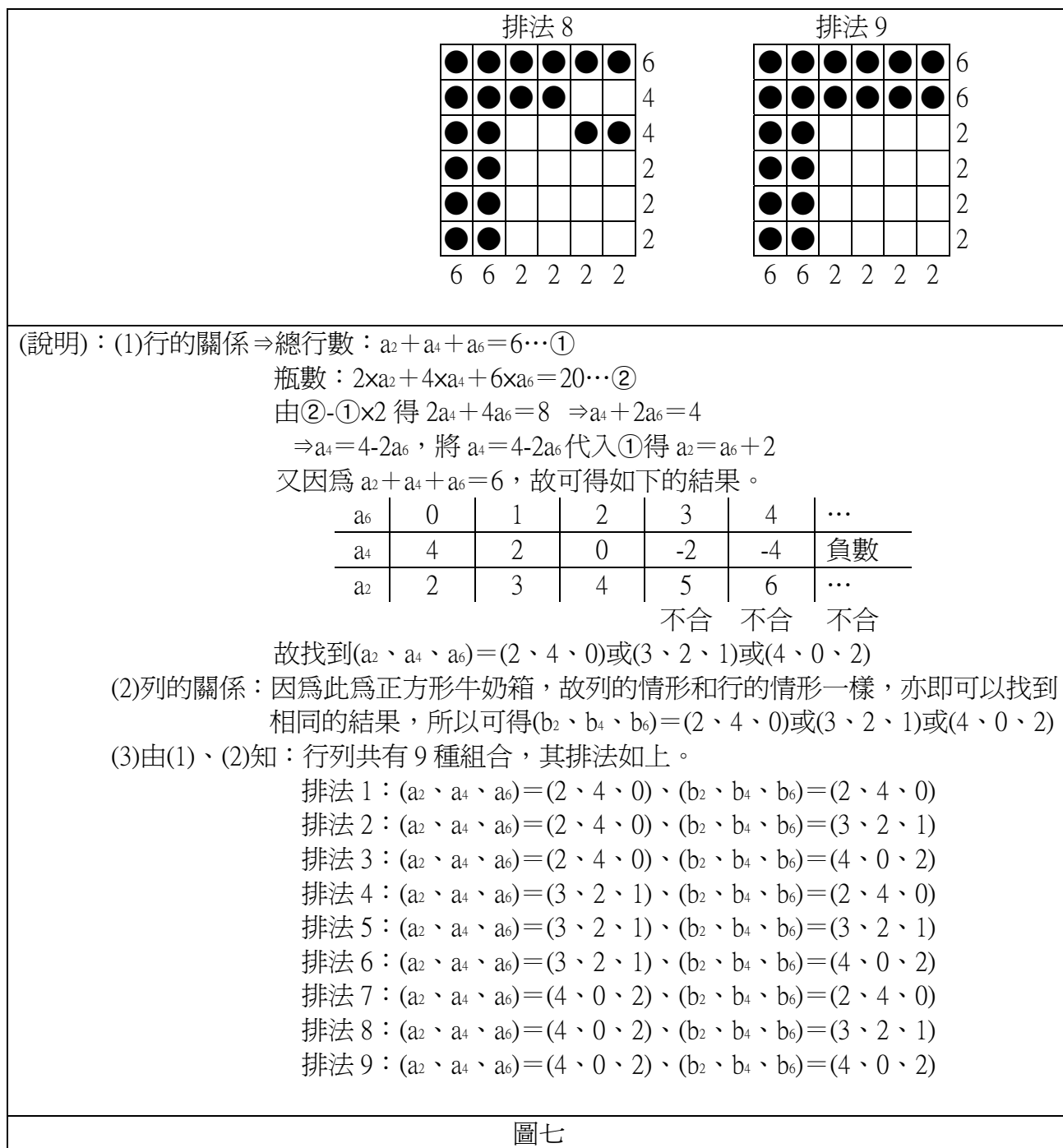
●	●	●	●			4
●	●	●	●			4
●	●			●	●	4
●	●			●	●	4
●	●					2
●	●					2
6	6	2	2	2	2	

排法 5

●	●	●	●	●	●	6
●	●	●	●			4
●	●			●	●	4
●		●				2
●	●					2
●		●				2
6	4	4	2	2	2	

排法 6

●	●	●	●	●	●	6
●	●	●	●	●	●	6
●	●					2
●		●				2
●	●					2
●		●				2
6	4	4	2	2	2	



5.牛奶箱的行列中一邊為奇數瓶，而另一邊為偶數瓶時，運用下述(1)~(3)的關係來找出 $(a_1, a_3, a_5, \dots, a_{2k+1})$ 的值，以及(4)~(6)的關係來找出 $(a_2, a_4, a_6, \dots, a_{2k})$ 的值，然後再根據 $a_1, a_3, a_5, \dots, a_{2k+1}$ 和 $a_2, a_4, a_6, \dots, a_{2k}$ 的情形排列之。

(1)總行數 $n = a_1 + a_3 + a_5 + \dots + a_{2k+1}$

(2)總列數 $n = b_1 + b_3 + b_5 + \dots + b_{2k+1}$

(3)瓶數 $x = 1 \times a_1 + 3 \times a_3 + 5 \times a_5 + \dots + (2k+1) \times a_{2k+1} = 1 \times b_1 + 3 \times b_3 + 5 \times b_5 + \dots + (2k+1) \times b_{2k+1}$

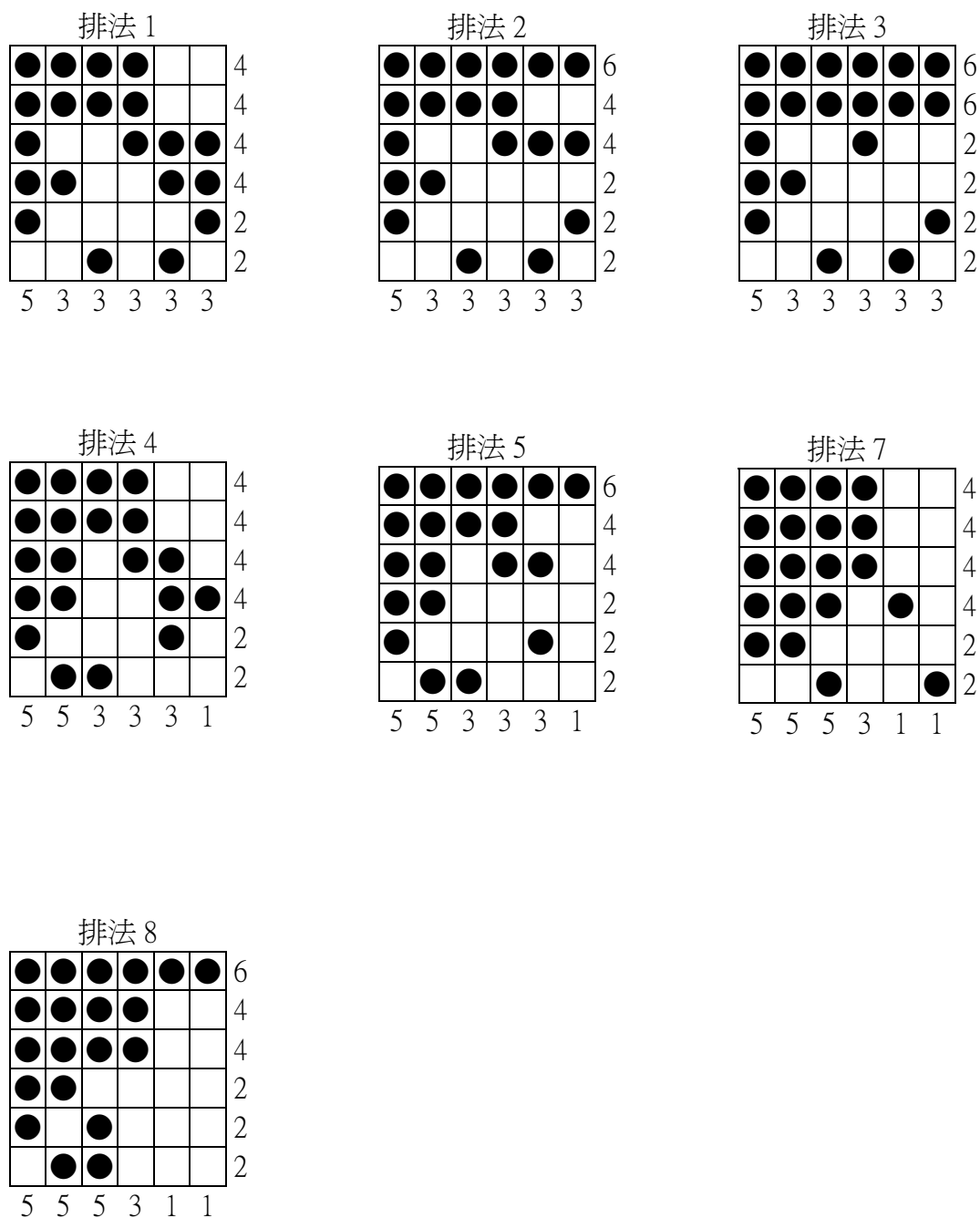
(4)總行數 $n = a_2 + a_4 + a_6 + \dots + a_{2k}$

(5)總列數 $n = b_2 + b_4 + b_6 + \dots + b_{2k}$

(6)瓶數 $x = 2 \times a_2 + 4 \times a_4 + 6 \times a_6 + \dots + 2k \times a_{2k} = 2 \times b_2 + 4 \times b_4 + 6 \times b_6 + \dots + 2k \times b_{2k}$

6.舉一個例子來說明如何找出 $(a_1, a_3, a_5, \dots, a_{2k+1})$ 和 $(a_2, a_4, a_6, \dots, a_{2k})$ 的值，然後再根據 $a_1, a_3, a_5, \dots, a_{2k+1}$ 和 $a_2, a_4, a_6, \dots, a_{2k}$ 的情形排列之。如圖八

〔例六〕：將 20 瓶牛奶排在“6×6”的牛奶箱中，且行列中一邊為奇數瓶，另一邊為偶數瓶。



(說明)：(1)行的關係：假設每行排奇數瓶

$$\Rightarrow \text{總行數：} a_1 + a_3 + a_5 = 6 \cdots \text{①}$$

$$\text{瓶數：} 1 \times a_1 + 3 \times a_3 + 5 \times a_5 = 20 \cdots \text{②}$$

$$\text{由②-①得 } 2a_3 + 4a_5 = 14 \Rightarrow a_3 + 2a_5 = 7 \Rightarrow a_3 = 7 - 2a_5$$

$$\text{將 } a_3 = 7 - 2a_5 \text{ 代入①得 } a_1 = a_5 - 1$$

又因為 $a_1 + a_3 + a_5 = 6$ ，故可得如下的結果。

a_5	0	1	2	3	4	...
a_3	7	5	3	1	-1	負數
a_1	-1	0	1	2	3	...
	不合				不合	不合

故找到 $(a_1, a_3, a_5) = (0, 5, 1)$ 或 $(1, 3, 2)$ 或 $(2, 1, 3)$

(2) 列的關係：假設每列排偶數瓶

⇒總列數： $b_2 + b_4 + b_6 = 6 \cdots ①$

瓶數： $2 \times b_2 + 4 \times b_4 + 6 \times b_6 = 20 \cdots ②$

由②-① $\times 2$ 得 $2b_4 + 4b_6 = 8 \Rightarrow b_4 + 2b_6 = 4 \Rightarrow b_4 = 4 - 2b_6$

將 $b_4 = 4 - 2b_6$ 代入①得 $b_2 = b_6 + 2$

又因為 $b_2 + b_4 + b_6 = 6$ ，故可得如下的結果。

b_6	0	1	2	3	4	...
b_4	4	2	0	-2	-4	負數
b_2	2	3	4	5	6	...

不合 不合 不合

故找到 $(b_2, b_4, b_6) = (2, 4, 0)$ 或 $(3, 2, 1)$ 或 $(4, 0, 2)$

(3)由(1)、(2)知：行列共有 9 種組合，其排法如上。

排法 1： $(a_1, a_3, a_5) = (0, 5, 1)$ 、 $(b_2, b_4, b_6) = (2, 4, 0)$

排法 2： $(a_1, a_3, a_5) = (0, 5, 1)$ 、 $(b_2, b_4, b_6) = (3, 2, 1)$

排法 3： $(a_1, a_3, a_5) = (0, 5, 1)$ 、 $(b_2, b_4, b_6) = (4, 0, 2)$

排法 4： $(a_1, a_3, a_5) = (1, 3, 2)$ 、 $(b_2, b_4, b_6) = (2, 4, 0)$

排法 5： $(a_1, a_3, a_5) = (1, 3, 2)$ 、 $(b_2, b_4, b_6) = (3, 2, 1)$

排法 6： $(a_1, a_3, a_5) = (1, 3, 2)$ 、 $(b_2, b_4, b_6) = (4, 0, 2)$ 排不出來。

排法 7： $(a_1, a_3, a_5) = (2, 1, 3)$ 、 $(b_2, b_4, b_6) = (2, 4, 0)$

排法 8： $(a_1, a_3, a_5) = (2, 1, 3)$ 、 $(b_2, b_4, b_6) = (3, 2, 1)$

排法 9： $(a_1, a_3, a_5) = (2, 1, 3)$ 、 $(b_2, b_4, b_6) = (4, 0, 2)$ 排不出來。

圖八

(四)不利用聯立方程式，另外找出一個可操縱排列牛奶瓶的方法。

是否能在不知行列瓶數組合的情形下，也能快速的排列出來。為此，我們想要找到一個可操縱排列牛奶瓶的方法。經過多次的嘗試後，找到一個較具體的排法，這個方法是把排列過程分成三個步驟。

步驟一：先在對角線的位置上做排列。

步驟二：等量增加(每次排 4 瓶)若干次，直到排完瓶數。

步驟三：若在等量增加的最後一次，無法一次排 4 瓶，則以“一次排 2 瓶”的方法排之並做適度的調整。

在步驟一時，需隨著條件限制，做些微的改變，但大致上可分成以下三種：

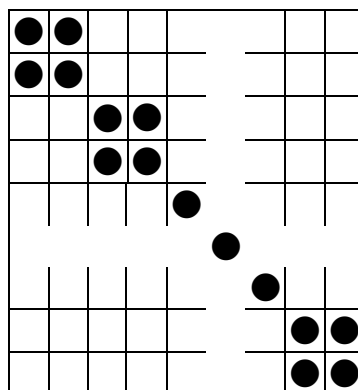
1、行列皆為奇數瓶時：在對角線上各排 1 瓶。

排法：

●						
	●					
		●				
			●			
				●		
					●	
						●

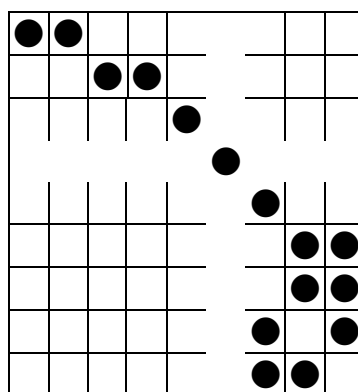
2、行列皆為偶數瓶時：在對角線上各排 4 瓶。

排法：



3、行列中一邊為奇數瓶，另一邊為偶數瓶時：從對角線開始依序排 2 瓶。

排法：

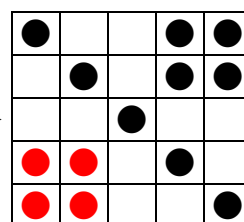
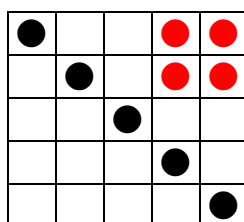
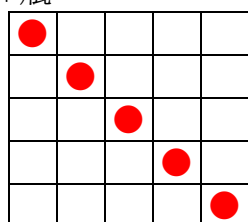


4、我們舉四個例子來說明上述的排法。如圖九、圖十、圖十一、圖十二

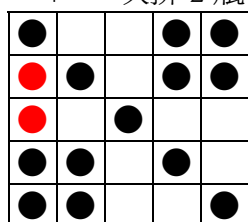
〔例七〕：將 15 瓶牛奶排在 5x5 的牛奶箱中，且行列皆為奇數瓶。

1、在對角線上各排 1 瓶 2、一次排 4 瓶 3、一次排 4 瓶

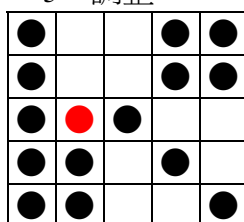
4 瓶



4、一次排 2 瓶



5、調整

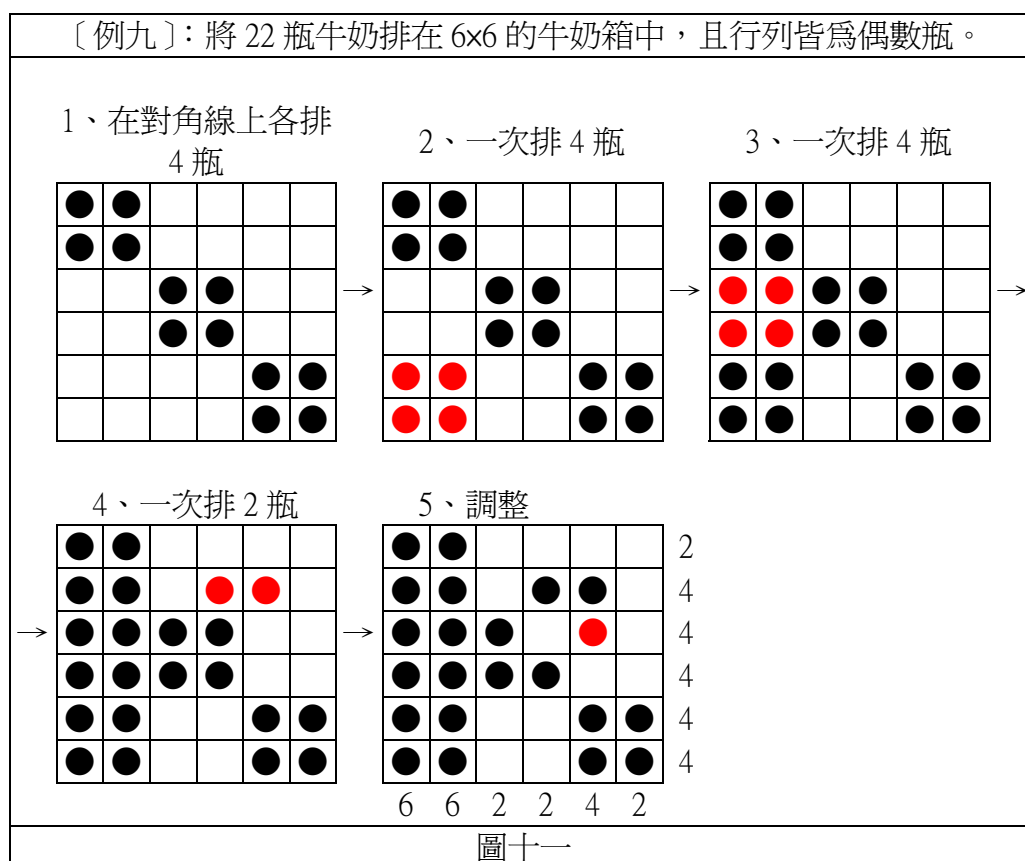
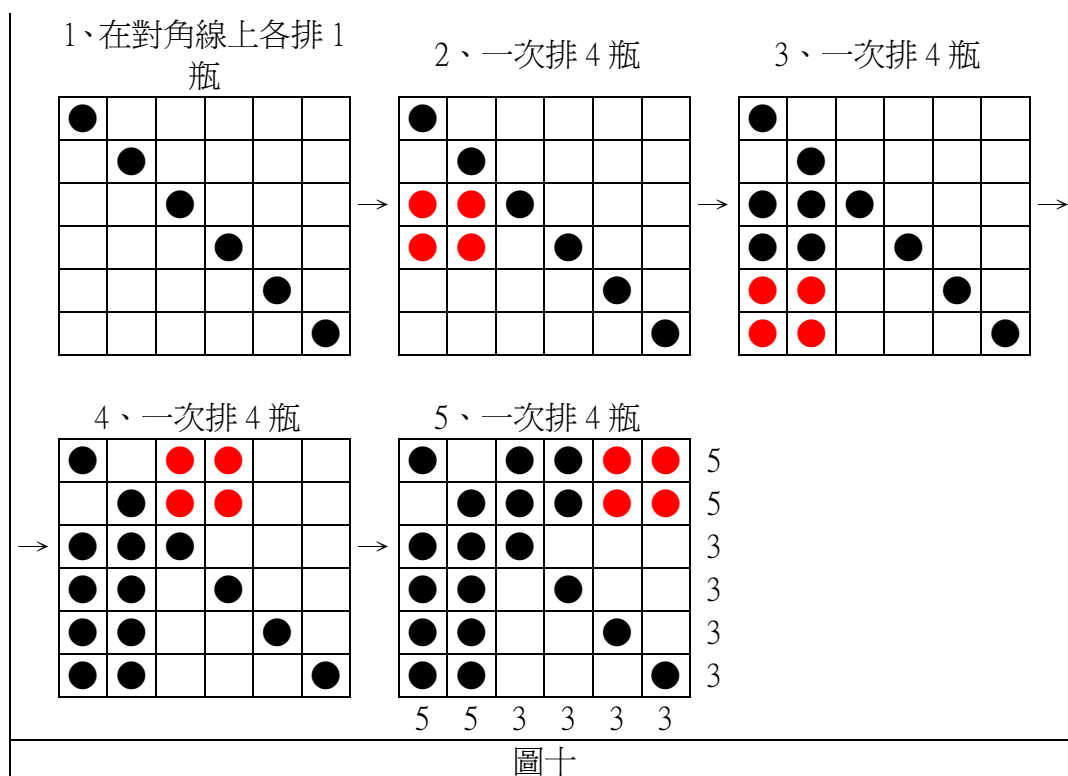


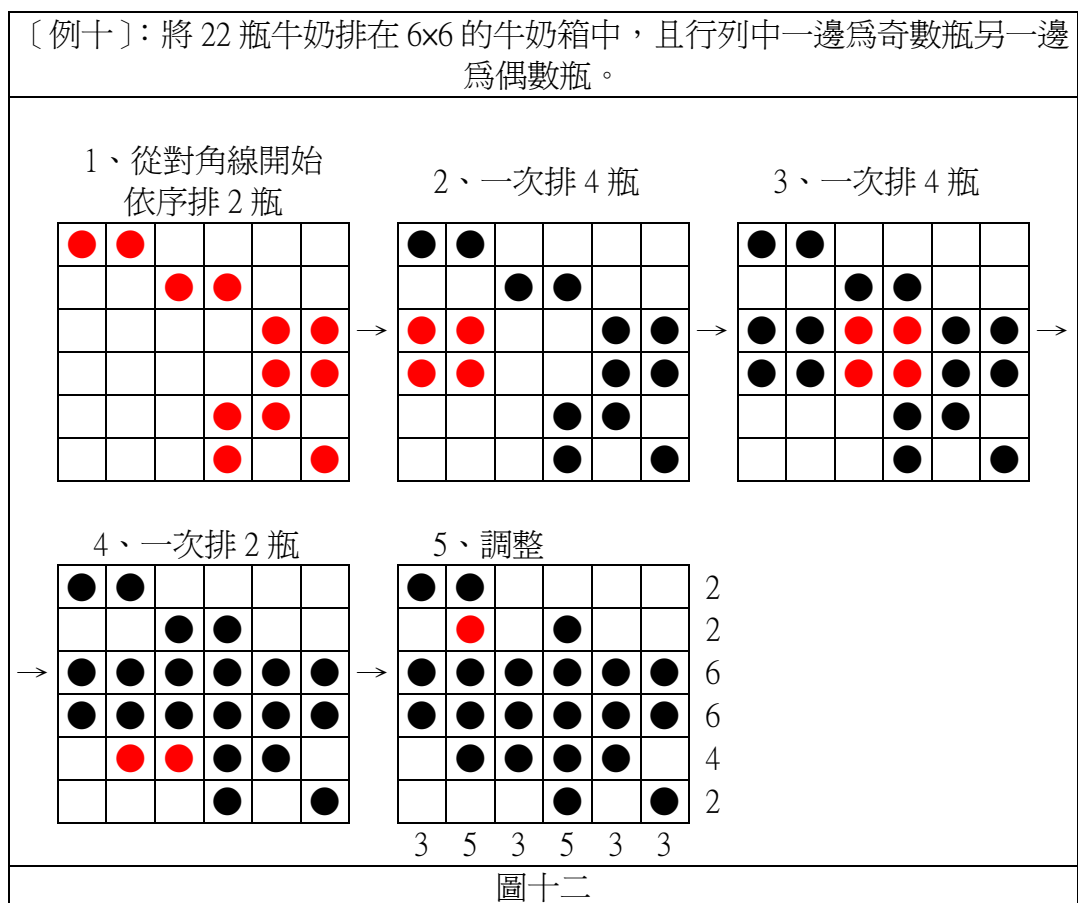
3
3
3
3
3

5 3 1 3 3

圖九

〔例八〕：將 22 瓶牛奶排在 6x6 的牛奶箱中，且行列皆為奇數瓶。





三、探討長方形牛奶箱：

針對長方形牛奶箱行數 n 、列數 m 為奇數或偶數的不同，而把長方形牛奶箱分成 4 種。

(1) m 、 n 皆為奇數：我們將它稱之為奇數型牛奶箱。

(2) m 、 n 皆為偶數：偶數型牛奶箱。

(3) m 為偶數、 n 為奇數：奇偶型牛奶箱。

(4) m 為奇數、 n 為偶數：偶奇型牛奶箱。

除此之外，規定 n 大於 m ，因為 n 小於 m 只是把 n 大於 m 的圖形換個方向來看。以下我們同正方形牛奶箱找 x 值的方法來找 4 種長方形牛奶箱在不同條件限制下的 x 值，而得到表三、表四、表五、表六。

(一)奇數型牛奶箱($m \times n$ ， $n > m > 1$ ， m 、 n 皆為奇數)

表三：奇數型牛奶箱($m \times n$ ， $n > m > 1$ ， m 、 n 皆為奇數)

限制 x 箱子 ($m \times n$) 大小	行列皆為 奇數瓶	行列皆為 偶數瓶	行為奇數瓶 列為偶數瓶	行為偶數瓶 列為奇數瓶
3x5	5、7、9、11、15	10	×	×
3x7	7、9、11、...17、21	14	×	×
3x9	9、11、13、15、...	18	×	×

	、21、23、 27			
∴	∴	∴	×	×
$3 \times n$	$n、n+2、n+4、\dots\dots$ $\dots\dots 3n-6、3n-4、$ $3n$	$2n$	×	×
5×7	7、9、11、13、 $\dots\dots$ $\dots\dots 29、31、35$	14、16、18、 $\dots\dots$ $\dots\dots 24、26、28$	×	×
5×9	9、11、13、 15、 $\dots\dots$ 、 $\dots\dots 39、41、$ 45	18、20、22、 $\dots\dots$ $\dots\dots 32、34、36$	×	×
5×11	11、13、15、 17、 $\dots\dots$ 、 $\dots\dots 49、51、$ 55	22、24、26、 $\dots\dots$ $\dots\dots 40、42、44$	×	×
∴	∴	∴	×	×
$5 \times n$	$n、n+2、n+4、\dots\dots$ $\dots\dots 5n-6、5n-4、$ $5n$	$2n、2n+2、$ $2n+4、\dots\dots$ $\dots\dots 4n-4、4n-2、4n$	×	×
7×9	9、11、13、 15、 $\dots\dots$ 、 $\dots\dots 57、59、$ 63	18、20、22、 $\dots\dots$ $\dots\dots 50、52、54$	×	×
7×11	11、13、15、 17、 $\dots\dots$ 、 $\dots\dots 71、73、$ 77	22、24、26、 $\dots\dots$ $\dots\dots 62、64、66$	×	×
∴	∴	∴	×	×
$7 \times n$	$n、n+2、n+4、\dots\dots$ $\dots\dots 7n-6、7n-4、$ $7n$	$2n、2n+2、$ $2n+4、\dots\dots$ $\dots\dots 6n-4、6n-2、6n$	×	×
∴	∴	∴	×	×
$m \times n (n > m > 1)$ (n 爲奇數)	$n、n+2、n+4、$ $n+6\dots\dots$ $\dots\dots\dots\dots\dots\dots$ $m \times n-6、m \times n-4、$ $m \times n$	$2n、2n+2、$ $2n+4、\dots\dots$ $\dots\dots\dots (m-1) \times$ $n-4、$ $(m-1) \times n-2、$ $(m-1) \times n$	×	×

說明：

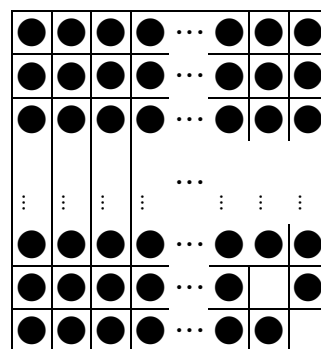
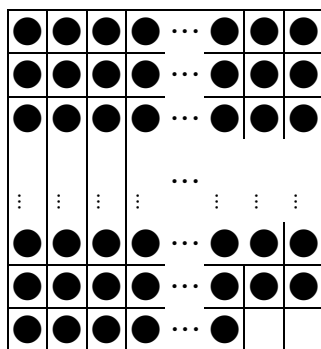
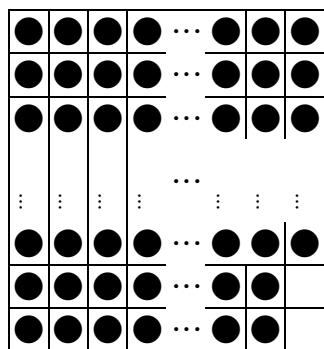
1、行列皆為奇數瓶時：

(1)x 的最小值產生於每行都排一瓶，此時 $x = 1 \times n = n$ 。

(2)x 的最大值產生於每行(或每列)全排滿，此時 $x = m \times n$ 。

(3)x 為奇數個奇數瓶之和，故 x 必為奇數。

(4)當 $x = n^2 - 2$ 時，只有下列三種排法，而這三種排法均無法使行列皆為奇數，所以 x 不為 $n^2 - 2$ 。



(5)由

(1)~(4)知：x 從最小值 n 到最大值 $m \times n$ 間，每增加 2 瓶都可排出，但 $x = n^2 - 2$ 除外。

2、行列皆為偶數瓶時：

(1)x 的最小值產生於每行都排二瓶，此時 $x = 2 \times n = 2n$ 。

(2)x 的最大值產生於每行全排滿少一瓶，此時 $x = (m-1) \times n$ 。

(3)x 為奇數個偶數瓶的和，故 x 必為偶數。

(4)由(1)~(3)知：x 從最小值 2n 到最大值 $(m-1) \times n$ 間，每增加 2 瓶都可排出。

3、行為奇數瓶，列為偶數瓶時：

每行為奇數瓶，則 x 為奇數個奇數瓶之和，x 必為奇數；而每列為偶數瓶，則 x 為奇數個偶數瓶之和，x 必為偶數。故若要行為奇數瓶，列為偶數瓶，則 x 就得同時為奇數和偶數，換句話說，此種 x 是不存在的，亦即 x 無解。

4、行為偶數瓶，列為奇數瓶時：

每行為偶數瓶，則 x 為奇數個偶數瓶之和，x 必為偶數；而每列為奇數瓶，則 x 為奇數個奇數瓶之和，x 必為奇數。故若要行為偶數瓶，列為奇數瓶，則 x 就得同時為奇數和偶數，換句話說，此種 x 是不存在的，亦即 x 無解。

(二)偶數型牛奶箱($m \times n$ ， $n > m > 1$ ，m、n 皆為偶數)

表四：偶數型牛奶箱($m \times n$ ， $n > m > 1$ ，m、n 皆為偶數)

限制 x 值 箱子大小 ($m \times n$)	行列皆為 奇數瓶	行列皆為 偶數瓶	行為奇數瓶 列為偶數瓶	行為偶數瓶 列為奇數瓶
2×4	4	8	4	×
2×6	6	12	6	×
2×8	8	16	8	×
⋮	⋮	⋮	⋮	×
2×n	n	2n	n	×

4×6	6、8、10、12、 14、 16、18	12、14、16、18、 20、24	8、10、12、14、 16、18	12、14、16、18、 20
4×8	8、10、12、 14、…… ……、20、22、 24	16、18、20、…… ……、26、28、 32	8、10、12、 14、…… ……、20、22、 24	16、18、20、…… ……、24、26、 28
4×10	10、12、14、 16、…… ……、26、28、 30	20、22、24、…… ……34、36、40	10、12、14、 16、…… ……、26、28、 30	20、22、24、…… ……、32、34、 36
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
4×n	n、n+2、n+4、…… ……3n-4、3n-2、 3n	2n、2n+2、 2n+4、… …4n-6、4n-4、4n	n、n+2、n+4、…… ……3n-4、3n-2、 3n	2n、2n+2、 2n+4、… 4×(n-1)-2、4×(n-1)
6×8	8、10、12、 14、…… ……、36、38、 40	16、18、20、…… ……42、44、48	12、14、16…… ……、36、38、 40	16、18、20、…… ……38、40、42
6×10	10、12、14、 16、…… ……、46、48、 50	20、22、24、…… ……54、56、60	12、14、16…… ……、46、48、 50	20、22、24、…… ……50、52、54
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
6×n	n、n+2、n+4、…… ……5n-4、5n-2、 5n	2n、2n+2、 2n+4、… …6n-6、6n-4、6n	n、n+2、n+4、…… ……5n-4、5n-2、 5n	2n、2n+2、 2n+4、… 6×(n-1)-2、6×(n-1)
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
m×n(n>m>1) (2m≥n)	n、n+2、n+4、 n+6…… ……(m-1)× n-4、 (m-1)×n-2、(m-1) ×n	2n、2n+2、 2n+4、… ……m× n-6、 m×n-4、m×n	2m、2m+2、 2m+4、… ……(m-1)× n-4、 (m-1)×n-2、(m-1) ×n	2n、2n+2、 2n+4、… m×(n-1)-2、m× (n-1)
m×n(n>m>1) (2m<n)	n、n+2、n+4、 n+6…… ……(m-1)× n-4、 (m-1)×n-2、(m-1) ×n	2n、2n+2、 2n+4、… ……m× n-6、 m×n-4、m×n	n、n+2、n+4、 n+6…… ……(m-1)× n-4、 (m-1)×n-2、(m-1) ×n	2n、2n+2、 2n+4、… m×(n-1)-2、m× (n-1)

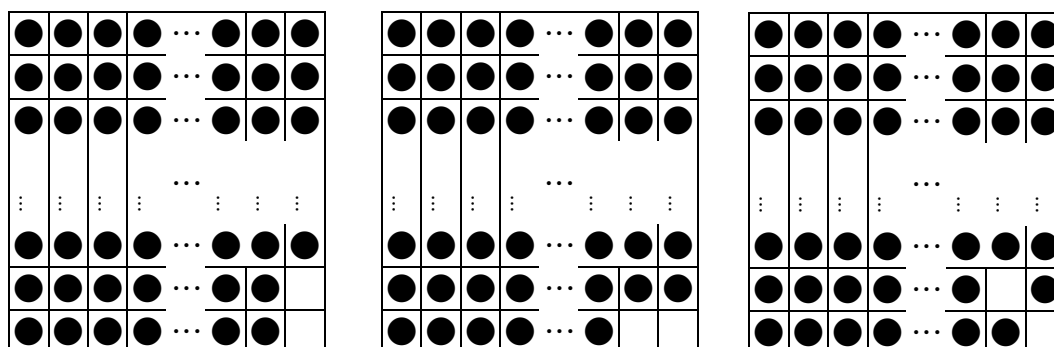
說明：

1、行列皆為奇數瓶時：

- (1) x 的最小值產生於每行都排一瓶，此時 $x = 1 \times n = n$ 。
- (2) x 的最大值產生於每行全排滿少一瓶，此時 $x = (m-1) \times n$ 。
- (3) x 為偶數個奇數瓶之和，故 x 必為偶數。
- (4) 由(1)~(3)知： x 從最小值 n 到最大值 $(m-1) \times n$ 間，每增加 2 瓶都可排出。

2、行列皆為偶數瓶時：

- (1) x 的最小值產生於每行都排二瓶，此時 $x = 2 \times n = 2n$ 。
- (2) x 的最大值產生於每行全排滿，此時 $x = m \times n$ 。
- (3) x 為偶數個偶數瓶之和，故 x 必為偶數。
- (4) 當 $x = m \times n - 2$ 時，只有下列三種排法，而這三種排法均無法使行列皆為偶數，所以 x 不為 $m \times n - 2$ 。



- (5) 由(1)~(4)知： x 從最小值 $2n$ 到最大值 $m \times n$ 間，每增加 2 瓶都可排出，但 $x = m \times n - 2$ 除外。

3、行為奇數瓶，列為偶數瓶時：

- (1) $2m \geq n$
 - ① x 的最小值產生於每列都排二瓶，此時 $x = 2 \times m = 2m$ 。
 - ② x 的最大值產生於每行全排滿少一瓶，此時 $x = (m-1) \times n$ 。
 - ③ x 為偶數個奇數瓶之和，故 x 必為偶數。
 - ④ 由①~③知： x 從最小值 $2m$ 到最大值 $(m-1) \times n$ 間，每增加 2 瓶都可排出。

(2) $2m < n$

- ① x 的最小值產生於每行都排一瓶，此時 $x = 1 \times n = n$ 。
- ② x 的最大值產生於每行全排滿少一瓶，此時 $x = (m-1) \times n$ 。
- ③ x 為偶數個奇數瓶之和，故 x 必為偶數。
- ④ 由①~③知： x 從最小值 n 到最大值 $(m-1) \times n$ 間，每增加 2 瓶都可排出。

4、行為偶數瓶，列為奇數瓶時：

- (1) x 的最小值產生於每行都排二瓶，此時 $x = 2 \times n = 2n$ 。
- (2) x 的最大值產生於每列全排滿少一瓶，此時 $x = m \times (n-1)$ 。
- (3) x 為偶數個偶數瓶之和，故 x 必為偶數。
- (4) 由(1)~(3)知： x 從最小值 $2n$ 到最大值 $m \times (n-1)$ 間，每增加 2 瓶都可排出。

(三)奇偶型牛奶箱($m \times n$ ， $n > m > 1$ ， m ：偶數， n ：奇數)

表五：奇偶型牛奶箱($m \times n$ ， $n > m > 1$ ， m ：偶數， n ：奇數)

限制 x 值 箱子大小 ($m \times n$)	行列皆為奇數瓶	行列皆為偶數瓶	行為奇數瓶 列為偶數瓶	行為偶數瓶 列為奇數瓶
---	---------------------------------	---------------------------------	--	--

2×3	×	×	×	6
2×5	×	×	×	10
2×7	×	×	×	14
$\vdots$	×	×	×	$\vdots$
$2 \times n$	×	×	×	$2n$
4×5	×	10、12、14、16	×	10、12、14、16、20、
4×7	×	14、16、18、20、 22、24	×	14、16、18、20、22、 24、28
4×9	×	18、20、22、…… ……28、30、32	×	18、20、22、…… ……30、32、36
$\vdots$	×	$\vdots$	×	$\vdots$
$4 \times n$	×	$2n$ 、 $2n+2$ 、 $2n+4$ 、…… $4 \times (n-1)-2$ 、 $4 \times$ $(n-1)$	×	$2n$ 、 $2n+2$ 、 $2n+4$ 、…… $4n-6$ 、 $4n-4$ 、 $4n$
6×7	×	14、16、18、…… ……32、34、36	×	14、16、18、…… ……36、38、42
6×9	×	18、20、22、…… ……44、46、48	×	18、20、22、…… ……48、50、54
$\vdots$	×	$\vdots$	×	$\vdots$
$6 \times n$	×	$2n$ 、 $2n+2$ 、 $2n+4$ 、…… $6 \times (n-1)-2$ 、 $6 \times$ $(n-1)$	×	$2n$ 、 $2n+2$ 、 $2n+4$ 、…… $6n-6$ 、 $6n-4$ 、 $6n$
$\vdots$	×	$\vdots$	×	$\vdots$
$m \times n$ ($n > m > 1$)	×	$2n$ 、 $2n+2$ 、 $2n+4$ 、…… …… $m \times$ $(n-1)-4$ 、 $m \times (n-1)-2$ 、 $m \times$ $(n-1)$	×	$2n$ 、 $2n+2$ 、 $2n+4$ 、…… …… $m \times n-6$ 、 $m \times n-4$ 、 $m \times n$

說明：

1、行列皆為奇數瓶時：

每行為奇數瓶，則 x 為奇數個奇數瓶之和， x 必為奇數；每列為奇數瓶，則 x 為偶數個奇數瓶之和， x 必為偶數。故若要行列皆為奇數瓶，則 x 就得同時為奇數和偶數，換句話說，此種 x 是不存在的，亦即 x 無解。

2、行列皆為偶數瓶時：

(1) x 的最小值產生於每行都排二瓶，此時 $x = 2 \times n = 2n$ 。

(2) x 的最大值產生於每列全排滿少一瓶，此時 $x = m \times (n-1)$ 。

(3) x 為奇數個偶數瓶之和(或偶數個偶數瓶之和)，故 x 必為偶數。

(4)由(1)~(3)知： x 從最小值 $2n$ 到最大值 $m \times (n-1)$ 間，每增加 2 瓶都可排出。

3、行為奇數瓶，列為偶數瓶時：

每行為奇數瓶，則 x 為奇數個奇數瓶之和， x 必為奇數；而每列為偶數瓶，則 x 為偶數個偶數瓶之和， x 必為偶數。故若要行為奇數瓶，列為偶數瓶，則 x 就得同時為奇數和偶數，換句話說，此種 x 是不存在的，亦即 x 無解。

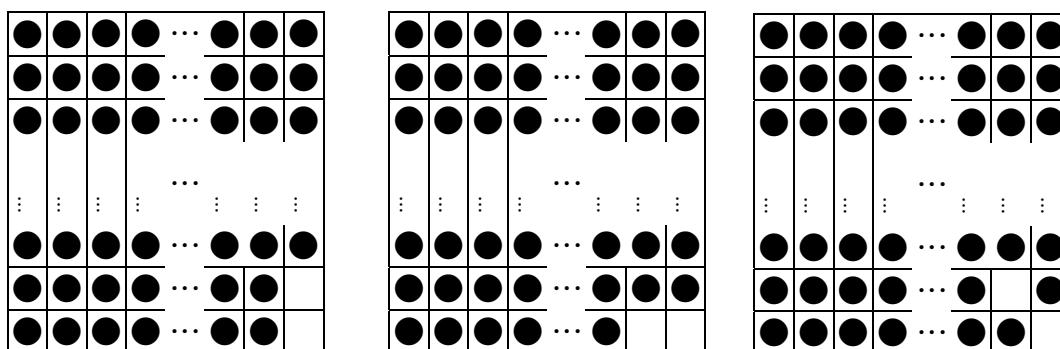
4、行為偶數瓶，列為奇數瓶時：

(1) x 的最小值產生於每行都排二瓶，此時 $x = 2 \times n = 2n$ 。

(2) x 的最大值產生於每行全排滿，此時 $x = m \times n$ 。

(3) x 為奇數個偶數瓶之和(或偶數個奇數瓶之和)，故 x 必為偶數。

(4)當 $x = m \times n - 2$ 時，只有下列三種排法，而這三種排法均無法使行為偶數瓶，列為奇數瓶，所以 x 不為 $m \times n - 2$ 。



(5)由(1)~(4)知： x 從最小值 $2n$ 到最大值 $m \times n$ 間，每增加 2 瓶都可排出，但 $x = m \times n - 2$ 除外。

(四)偶奇型牛奶箱($m \times n$ ， $n > m > 1$ ， m ：奇數， n ：偶數)

表六：偶奇型牛奶箱($m \times n$ ， $n > m > 1$ ， m ：奇數， n ：偶數)

限制 值 大小 X 箱子 ($m \times n$)	行列皆為 奇數瓶	行列皆為 偶數瓶	行為奇數瓶 列為偶數瓶	行為偶數瓶 列為奇數瓶
3x4	×	8	6、8、12	×
3x6	×	12	6、8、...、14、18	×
3x8	×	16	8、10、12、14、16、 18、20、24	×
⋮	×	⋮	⋮	×
3xn	×	2n	n、n+2、n+4、... ...3n-6、3n-4、3n	×
5x6	×	12、14、16、18、 20、22、24	10、12、14、... ...24、26、30	×

5×8	×	16、18、20、22、 24、26、28、30、 32	16、18、20、…… ……26、28、32	×
5×10	×	20、22、24、…… ……36、38、40	20、22、24、…… ……34、36、40	×
⋮	×	⋮	⋮	×
5×n	×	2n、2n+2、 2n+4、… …4n-4、4n-2、 4n	n、n+2、n+4、…… ……5n-6、5n-4、5n	×
7×8	×	16、18、20、…… ……44、46、48	16、18、20、…… ……42、44、48	×
7×10	×	20、22、24、…… ……56、58、60	20、22、24、…… ……54、56、60	×
⋮	×	⋮	⋮	×
7×n	×	2n、2n+2、 2n+4、… …6n-4、6n-2、 6n	n、n+2、n+4、…… ……7n-6、7n-4、7n	×
⋮	×	⋮	⋮	×
m×n(n>m>1) (2m≥n)	×	2n、2n+2、 2n+4、… ……(m-1)× n-4、 (m-1)×n-2、 (m-1)×n	2m、2m+2、2m+4、… …… m×n-6、m×n-4、m×n	×
m×n(n>m>1) (2m<n)	×	2n、2n+2、 2n+4、… ……(m-1)× n-4、 (m-1)×n-2、 (m-1)×n	n、n+2、n+4、… …… m×n-6、m×n-4、m×n	×

說明：

1、行列皆為奇數瓶時：

每行為奇數瓶，則 x 為偶數個奇數瓶之和， x 必為偶數；每列為奇數瓶，則 x 為奇數個奇數瓶之和， x 必為奇數。故若要行列皆為奇數瓶，則 x 就得同時為奇數和偶數，換句話說，此種 x 是不存在的，亦即 x 無解。

2、行列皆為偶數瓶時：

(1) x 的最小值產生於每行都排二瓶，此時 $x = 2 \times n = 2n$ 。

(2) x 的最大值產生於每行全排滿少一瓶，此時 $x = (m-1) \times n$ 。

(3) x 為偶數個偶數瓶之和(或奇數個偶數瓶之和)，故 x 必為偶數。

(4)由(1)~(3)知： x 從最小值 $2n$ 到最大值 $(m-1) \times n$ 間，每增加 2 瓶都可排出。

3、行為奇數瓶，列為偶數瓶時：

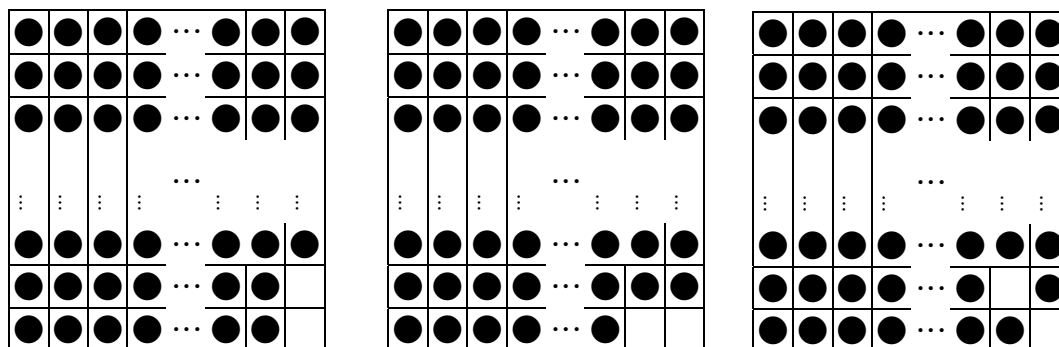
(1) $2m \geq n$

① x 的最小值產生於每列都排二瓶，此時 $x = 2 \times m = 2m$ 。

② x 的最大值產生於每行全排滿，此時 $x = m \times n$ 。

③ x 為偶數個奇數瓶之和(或奇數個偶數瓶之和)，故 x 必為偶數。

④ 當 $x = m \times n - 2$ 時，只有下列三種排法，而這三種排法均無法使行為奇數瓶，列為偶數瓶，所以 x 不為 $m \times n - 2$ 。



⑤ 由①~④知： x 從最小值 $2m$ 到最大值 $m \times n$ 間，每增加 2 瓶都可排出，但 $x = m \times n - 2$ 除外。

(2) $2m < n$

① x 的最小值產生於每行都排一瓶，此時 $x = 1 \times n = n$ 。

② 其餘之情形同上 $2m \geq n$ 的情形。

4、行為偶數瓶，列為奇數瓶時：

每行為偶數瓶，則 x 為偶數個偶數瓶之和， x 必為偶數；每列為奇數瓶，則 x 為奇數個奇數瓶之和， x 必為奇數。故若要行為偶數瓶，列為奇數瓶，則 x 就得同時為奇數和偶數，換句話說，此種 x 是不存在的，亦即 x 無解。

(五) 利用聯立方程式找出行列瓶數的組合，然後排之

當知道排列的瓶數 x 和牛奶箱大小($m \times n$)，以及行列瓶數限制的條件後，就可利用下述的總行數、總列數以及瓶數間的關係找出(a_1 、 a_3 、 a_5 、 $\dots$ 、 a_{2k+1})(或(a_2 、 a_4 、 a_6 、 $\dots$ 、 a_{2k}))和(b_1 、 b_3 、 b_5 、 $\dots$ 、 b_{2k+1})(或(b_2 、 b_4 、 b_6 、 $\dots$ 、 b_{2k}))的值，然後再根據 a_1 、 a_3 、 a_5 、 $\dots$ 、 a_{2k+1} (或 a_2 、 a_4 、 a_6 、 $\dots$ 、 a_{2k})和 b_1 、 b_3 、 b_5 、 $\dots$ 、 b_{2k+1} (或 b_2 、 b_4 、 b_6 、 $\dots$ 、 b_{2k})的情形排列之。

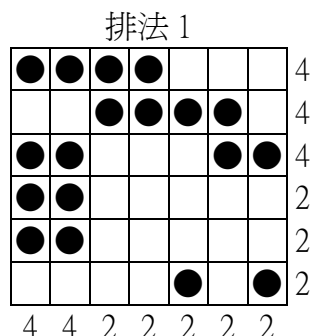
(1) 總行數 $n = a_1 + a_3 + a_5 + \dots + a_{2k+1}$ (或總行數 $n = a_2 + a_4 + a_6 + \dots + a_{2k}$)

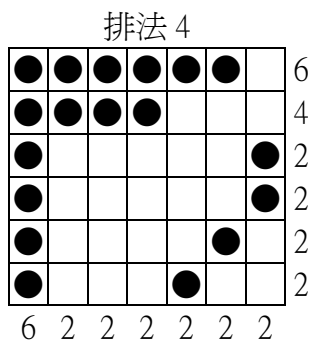
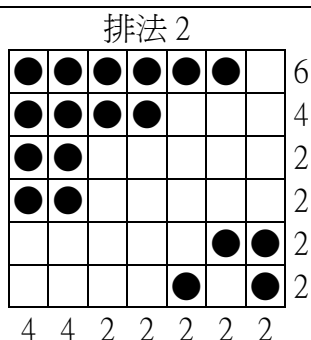
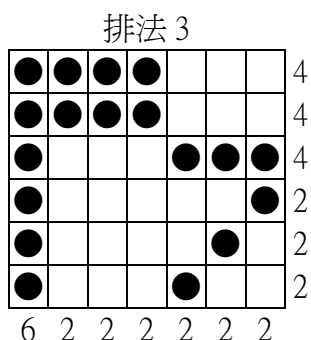
(2) 總列數 $m = b_1 + b_3 + b_5 + \dots + b_{2k+1}$ (或總列數 $m = b_2 + b_4 + b_6 + \dots + b_{2k}$)

(3) 瓶數 $x = 1 \times a_1 + 3 \times a_3 + \dots + (2k+1) \times a_{2k+1} = 1 \times b_1 + 3 \times b_3 + \dots + (2k+1) \times b_{2k+1}$
(或瓶數 $x = 2 \times a_2 + 4 \times a_4 + 6 \times a_6 + \dots + 2k \times a_{2k} = 2 \times b_2 + 4 \times b_4 + 6 \times b_6 + \dots + 2k \times b_{2k}$)

● 以下我們將舉二個例子說明之。如圖十三、圖十四

[例一]：將 18 瓶牛奶排在“ 6×7 ”的牛奶箱中，且行列皆為偶數瓶。





(說明)：(1)行的關係 $\Rightarrow$ 總行數： $a_2 + a_4 + a_6 = 7 \cdots \text{①}$

瓶數： $2 \times a_2 + 4 \times a_4 + 6 \times a_6 = 18 \cdots \text{②}$

由②-① $\times 2$ 得 $2a_4 + 4a_6 = 4 \Rightarrow a_4 + 2a_6 = 2 \Rightarrow a_4 = 2 - 2a_6$

將 $a_4 = 2 - 2a_6$ 代入①得 $a_2 = a_6 + 5$ ，又因為 $a_2 + a_4 + a_6 = 7$ ，故可得如下的結果。

a_2	0	1	2	3	4	...
a_4	2	0	-2	-4	-6	負數
a_6	5	6	7	8	9	...
	不合	不合	不合	不合	不合	不合

故找到 $(a_2, a_4, a_6) = (5, 2, 0)$ 或 $(6, 0, 1)$

(2)列的關係 $\Rightarrow$ 總列數： $b_2 + b_4 + b_6 = 6 \cdots \text{①}$

瓶數： $2 \times b_2 + 4 \times b_4 + 6 \times b_6 = 18 \cdots \text{②}$

由②-① $\times 2$ 得 $2b_4 + 4b_6 = 6 \Rightarrow b_4 + 2b_6 = 3 \Rightarrow b_4 = 3 - 2b_6$

將 $b_4 = 3 - 2b_6$ 代入①得 $b_2 = b_6 + 3$

又因為 $b_2 + b_4 + b_6 = 6$ ，故可得如下的結果。

b_6	0	1	2	3	4	...
b_4	3	1	-1	-3	-5	負數
b_2	3	4	5	6	7	...
	不合	不合	不合	不合	不合	不合

故找到 $(b_2, b_4, b_6) = (3, 3, 0)$ 或 $(4, 1, 1)$

(3)由(1)、(2)知：行列共有 4 種組合，其排法如上。

排法 1： $(a_2, a_4, a_6) = (5, 2, 0)$ 、 $(b_2, b_4, b_6) = (3, 3, 0)$

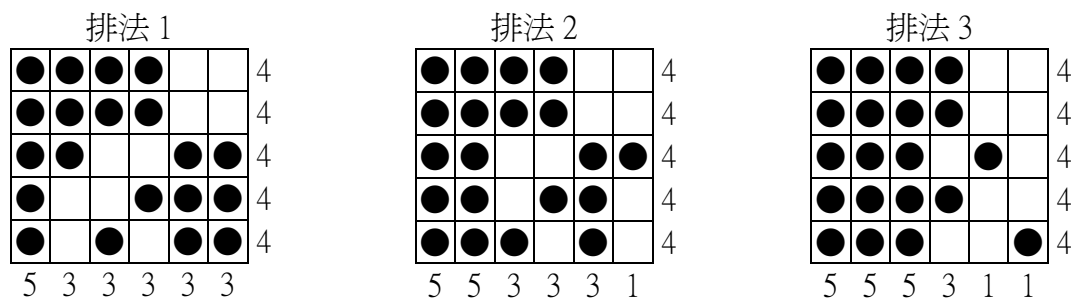
排法 2： $(a_2, a_4, a_6) = (5, 2, 0)$ 、 $(b_2, b_4, b_6) = (4, 1, 1)$

排法 3： $(a_2, a_4, a_6) = (6, 0, 1)$ 、 $(b_2, b_4, b_6) = (3, 3, 0)$

排法 4： $(a_2, a_4, a_6) = (6, 0, 1)$ 、 $(b_2, b_4, b_6) = (4, 1, 1)$

圖十三

〔例二〕：將 20 瓶牛奶排在“5×6”的牛奶箱中，且每行為奇數瓶，每列為偶數瓶。



(說明)：(1)行的關係⇒總行數： $a_1 + a_3 + a_5 = 6 \cdots \textcircled{1}$

瓶數： $1 \times a_1 + 3 \times a_3 + 5 \times a_5 = 20 \cdots \textcircled{2}$

由②-①得 $2a_3 + 4a_5 = 14 \Rightarrow a_3 + 2a_5 = 7 \Rightarrow a_3 = 7 - 2a_5$

將 $a_3 = 7 - 2a_5$ 代入①得 $a_1 = a_5 - 1$

又因為 $a_1 + a_3 + a_5 = 6$ ，故可得如下的結果。

a_5	0	1	2	3	4	...
a_3	7	5	3	1	-1	負數
a_1	-1	0	1	2	3	...
	不合				不合	不合

故找到 $(a_1, a_3, a_5) = (0, 5, 1)$ 或 $(1, 3, 2)$ 或 $(2, 1, 3)$

(2)列的關係⇒總列數： $b_2 + b_4 = 5 \cdots \textcircled{1}$

瓶數： $2 \times b_2 + 4 \times b_4 = 20 \cdots \textcircled{2}$

由②-①×2 得 $2b_4 = 10 \Rightarrow b_4 = 5 \Rightarrow b_2 = 0$ ，故找到 $(b_2, b_4) = (0, 5)$

(3)由(1)、(2)知：行列共有 3 種組合，其排法如下。

排法 1： $(a_1, a_3, a_5) = (0, 5, 1)$ 、 $(b_2, b_4) = (0, 5)$

排法 2： $(a_1, a_3, a_5) = (1, 3, 2)$ 、 $(b_2, b_4) = (0, 5)$

排法 3： $(a_1, a_3, a_5) = (2, 1, 3)$ 、 $(b_2, b_4) = (0, 5)$

圖十四

(六)不利用聯立方程式，另外找出一個可操縱排列牛奶瓶的方法。

是否能在不知行列瓶數組合的情形下，也能快速的排列出來。為此，我們想要找到一個可操縱排列牛奶瓶的方法。經過多次的嘗試後，找到一個較具體的排法，這個方法是把排列過程分成三個步驟。

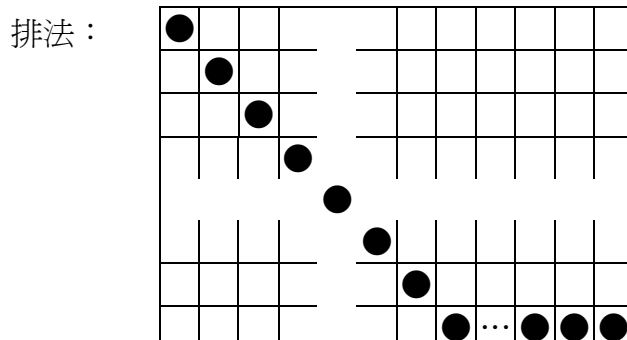
步驟一：先在對角線的位置上做排列。

步驟二：等量增加(每次排 4 瓶)若干次，直到排完瓶數。

步驟三：若在等量增加的最後一次，無法一次排 4 瓶，則以“一次排 2 瓶”的方法排之並做適度的調整。

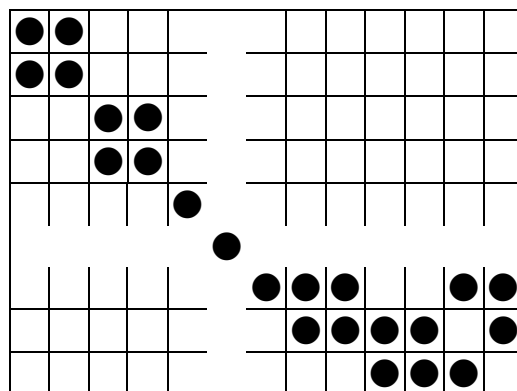
在步驟一時，需隨著條件限制，而有些微的改變，但大致上可分成以下四種：

1、行列皆為奇數瓶時：在對角線上各排 1 瓶。

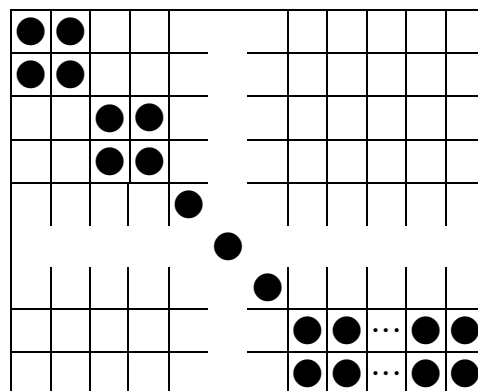


2、行列皆為偶數瓶時：在對角線上各排 4 瓶。

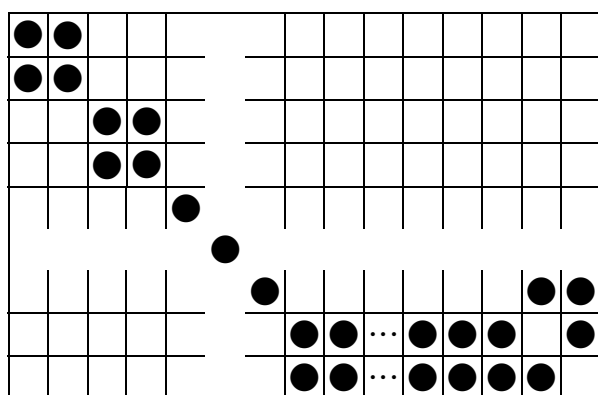
排法 1：



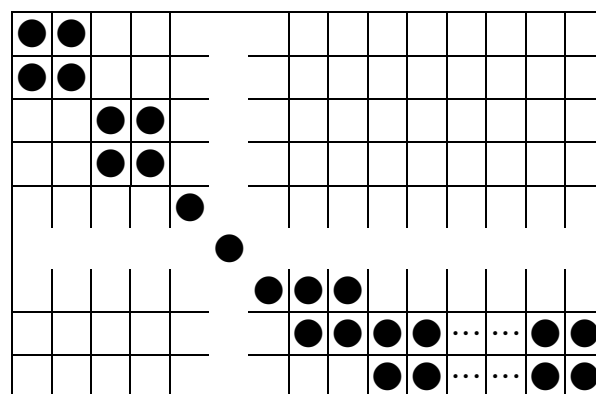
排法 2：



排法 3：

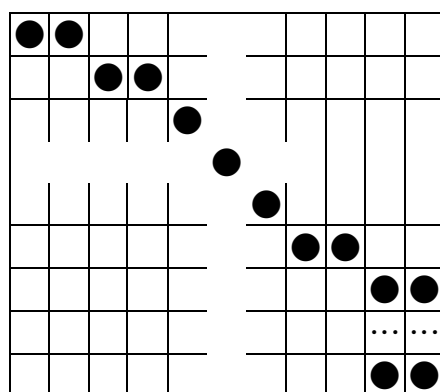


排法 4：

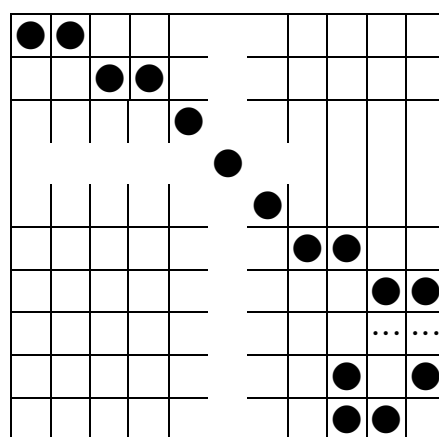


3、行為奇數瓶，列為偶數瓶時：從對角線開始依序排 2 瓶。

排法 1：



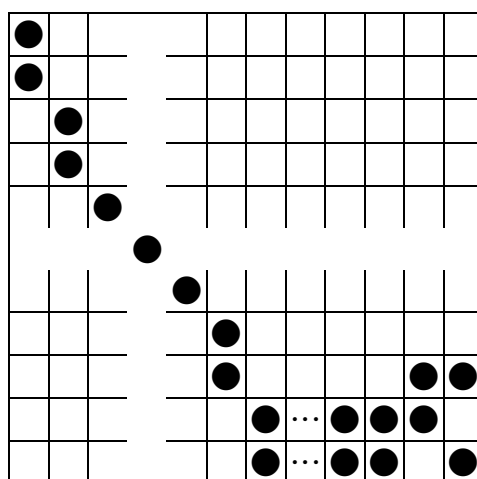
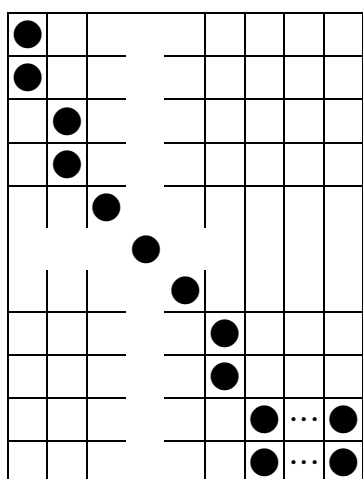
排法 2：



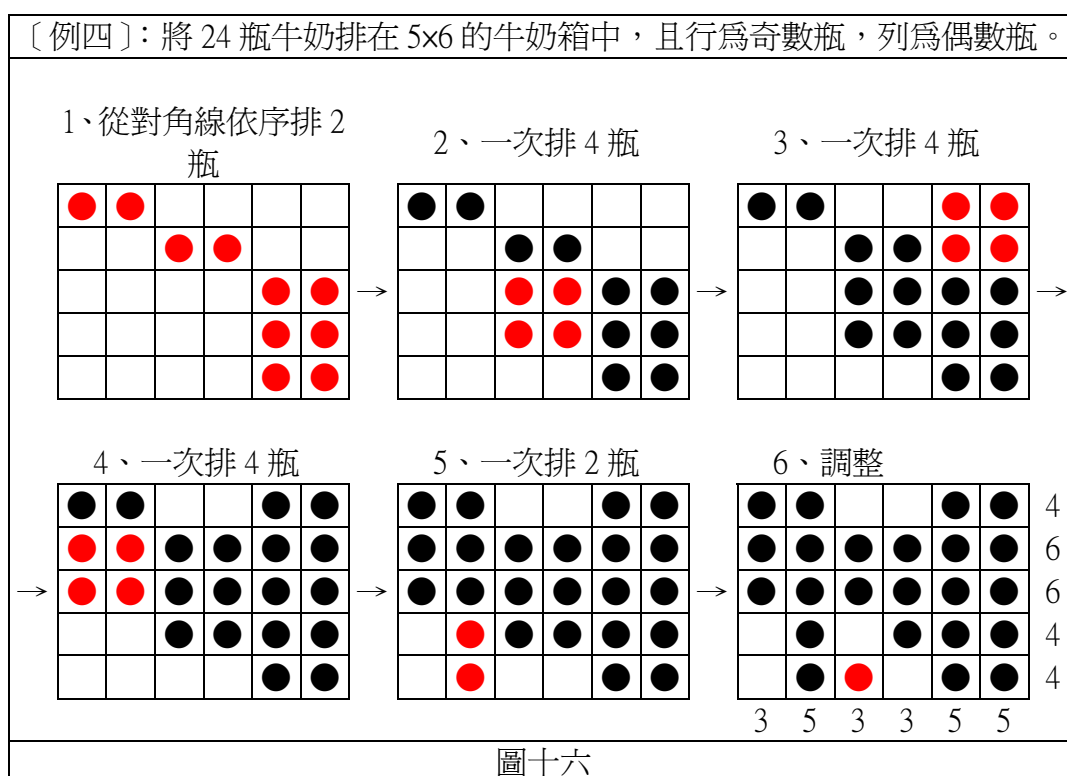
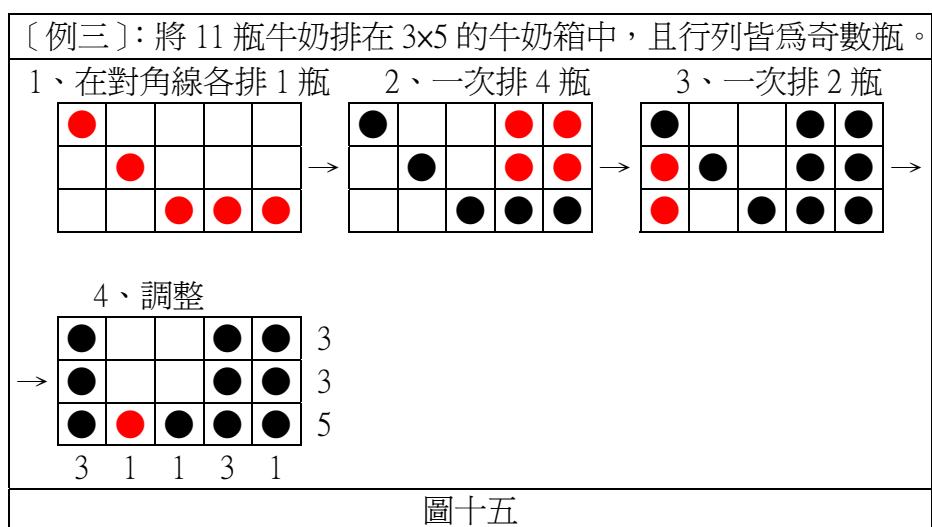
4、行為偶數瓶，列為奇數瓶時：從對角線開始依序排 2 瓶。

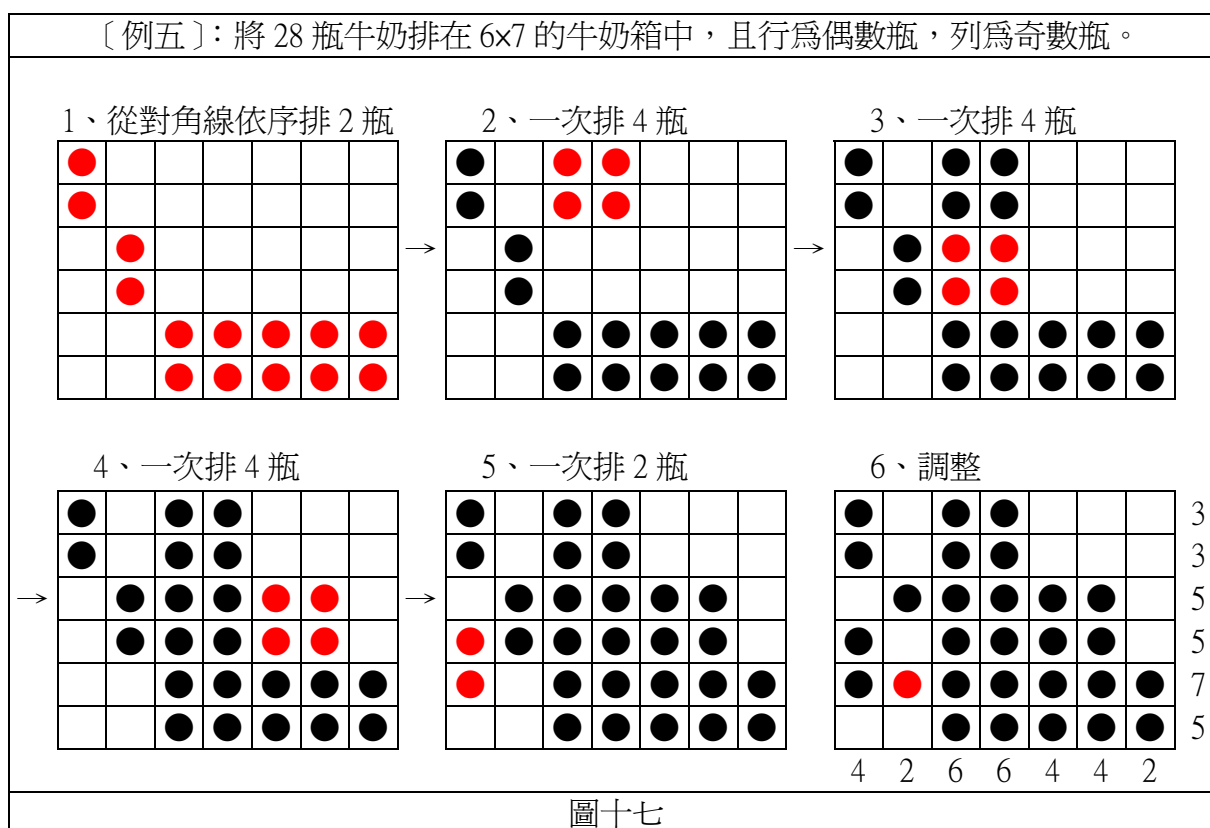
排法 1：

排法 2：



5、我們舉三個例子來說明上述的排法。如圖十五、圖十六、圖十七





陸、研究結果：

一、我們將各種牛奶箱在不同條件限制下的瓶數(x 值)範圍，整理成表七。

表七

x 箱 子 種 類 限 制 值 類	行列皆為 奇數瓶	行列皆為 偶數瓶	行為奇數瓶 列為偶數瓶	行為偶數瓶 列為奇數瓶
正奇數牛奶箱 (n×n, n 為奇數)	$n \leq x \leq n^2$ ($x \neq n^2-2$)	$2n \leq x \leq n(n-1)$	×	×
正偶數牛奶箱(n ×n, n 為偶數)	$n \leq x \leq n(n-1)$	$2n \leq x \leq n^2$ ($x \neq n^2-2$)	$2n \leq x \leq n(n-1)$	$2n \leq x \leq n(n-1)$
奇數型牛箱 (m×n, m、n 皆為 奇數)	$n \leq x \leq m \times n$ ($x \neq m \times n-2$)	$2n \leq x \leq (m-1)n$	×	×
偶數型牛奶箱(m ×n, m、n 皆為偶 數)	$n \leq x \leq (m-1)n$	$2n \leq x \leq m \times n$ ($x \neq m \times n-2$)	(1) $2m \geq n$ $2m \leq x \leq (m-1)n$ (2) $2m < n$ $n \leq x \leq (m-1)n$	$2n \leq x \leq m(n-1)$
奇偶型牛奶箱(m ×n, n 為偶數、m 為奇數)	×	$2n \leq x \leq m(n-1)$	×	$2n \leq x \leq m \times n$ ($x \neq m \times n-2$)
偶奇型牛奶箱(m ×n, m 為偶數、n	×	$2n \leq x \leq (m-1)n$	(1) $2m \geq n$	×

$2m \leq x \leq m \times n$

爲奇數)			$(x \neq m \times n - 2)$	
			$(2) 2m < n$ $n \leq x \leq m \times n$ $(x \neq m \times n - 2)$	

二、利用聯立方程式找出行列瓶數的組合，然後排之

當知道排列的瓶數 x 和牛奶箱大小 $(m \times n)$ ，以及行列瓶數限制的條件後，就可利用下述的總行數、總列數以及瓶數間的關係找出 $(a_1、a_3、a_5、\cdots a_{2k+1})$ (或 $(a_2、a_4、a_6、\cdots、a_{2k})$) 和 $(b_1、b_3、b_5、\cdots b_{2k+1})$ (或 $(b_2、b_4、b_6、\cdots、b_{2k})$) 的值，然後再根據 $a_1、a_3、a_5、\cdots a_{2k+1}$ (或 $a_2、a_4、a_6、\cdots、a_{2k})$ 和 $b_1、b_3、b_5、\cdots b_{2k+1}$ (或 $b_2、b_4、b_6、\cdots、b_{2k})$ 的情形排列之。

(1) 總行數 $n = a_1 + a_3 + a_5 + \cdots + a_{2k+1}$ (或總行數 $n = a_2 + a_4 + a_6 + \cdots + a_{2k}$)

(2) 總列數 $m = b_1 + b_3 + b_5 + \cdots + b_{2k+1}$ (或總列數 $m = b_2 + b_4 + b_6 + \cdots + b_{2k}$)

(3) 瓶數 $x = 1 \times a_1 + 3 \times a_3 + 5 \times a_5 + \cdots + (2k+1) \times a_{2k+1} = 1 \times b_1 + 3 \times b_3 + 5 \times b_5 + \cdots + (2k+1) \times b_{2k+1}$
(或瓶數 $x = 2 \times a_2 + 4 \times a_4 + 6 \times a_6 + \cdots + 2k \times a_{2k} = 2 \times b_2 + 4 \times b_4 + 6 \times b_6 + \cdots + 2k \times b_{2k}$)

三、不利用聯立方程式，另外找出一個可操縱排列牛奶瓶的方法。

是否能在不知行列瓶數組合的情形下，也能快速的排列出來。爲此，我們想要找到一個可操縱排列牛奶瓶的方法。經過多次的嘗試後，找到一個較具體的排法，這個方法是把排列過程分成三個步驟。

步驟一：先在對角線的位置上做排列。

步驟二：等量增加(每次排 4 瓶)若干次，直到排完瓶數。

步驟三：若在等量增加的最後一次，無法一次排 4 瓶，則以“一次排 2 瓶”的方法排之並做適度的調整。

柒、討論：

- 一、正奇數牛奶箱和奇數牛奶箱在行列皆爲奇數瓶時，其排法中，當行列都沒有任何全排滿的情形時，此時排法中的空格部分，恰巧爲行列皆爲偶數瓶的答案；反之亦是，此現象甚爲有趣。
- 二、經由解聯立方程式得知行、列的瓶數組合情形，但並非每種瓶數組合都可以排出來，有少數幾個是無法排出來的。
- 三、利用解聯立方程式，可以找到較多的排法，但較費時；而利用我們自己所推敲出來的排法，可以很快排出，但排法較少。

捌、參考資料：

- 一、周智輝 IQ 智力性向測驗 初版 台北市 五洲出版社 188、219 頁 1999 年 6 月
- 二、建中 49 屆 314 班全體同學譯 數學思考 一版二刷 台北市 九章出版社 163、164 頁 2000 年 4 月
- 三、張良杰 游耿能譯 趣味數學問題集 初版四刷 新竹市 凡異出版社 6、161 頁 86 年 6 月
- 四、裘宗滬 趣味數學 300 題 初版五刷 新竹市 凡異出版社 8、21 頁 86 年 7 月

評	語
---	---

080411 排排看

本作品由一個簡單有趣的排牛奶之問題出發，經由詳細之探討，利用方程組列式找出各種不同行列瓶數的組合，頗具深度。問答流利且表達清晰，值得鼓勵。