

中華民國第四十六屆中小學科學展覽會
作品說明書

國小組 數學科

080410

「角」盡腦汁

學校名稱：金門縣金沙鎮述美國民小學

作者：	指導老師：
小六 黃聖益	黃麗麗
小六 黃亦聖	
小六 李天官	
小六 陳旃綺	
小六 楊恭年	
小六 楊暄禾	

關 鍵 詞：正多面體、 $n \times n = n^2 = n$ 的平方

「角」盡腦汁

—正多邊形在平面與空間組合圖形之探討—

一、摘要：

在數學課中因為介紹多邊形，讓我們引發對形狀的興趣，再加上學校宣傳物—正十二面體存錢筒的接觸，使我們展開了對正多邊形在平面上和空間上的研究。我們研究了正多邊形在平面上與空間中的組合問題。研究後發現只有正三角形、正方形、正六邊形等圖形，因為其內角角度數是 360 的因數，所以可構成平面；一層一層的平面圖形所需要正多邊形個數計算方式，推論如下：正三角形 $[(3n^2 - 3n) \div 2] + 1$ ；正四邊形 $[(4n^2 - 4n) \div 2] + 1$ ；正六邊形 $3n^2 - 3n + 1$ ，此結果可讓我們運用在地磚的鋪設上。而可構成正多面體的條件是正多邊形的單一內角角度 3 以上的整數倍須小於 360° ，實驗結果發現只有正三角形可構成正四面體、正八面體、正二十面體；正四邊形可構成正六面體；正五邊形可構成正十二面體，此研究在建築界有很大的幫助。

二、研究動機：

在建築業中，常常有許多令人嘖嘖稱奇的圖形，而在六年級上學期上數學課時，老師介紹了多邊形的各種特性，讓我們引發興趣，這些有趣的圖形，常常可以拼湊成令人意想不到的神奇組合，我們更發現到，可以利用正多邊形的拼湊，組合成正多面體，例如學校的宣導物十二面體存錢筒，於是、我們決定對正多邊形與正多面體展開一連串的研究，「角」盡腦汁，希望能參透其中的秘密。

三、研究目的：

- (一) 從實驗中研究哪些正多邊形可一層一層往外不斷擴展排列（即哪些正多邊形可鋪地板、磁磚）。
- (二) 可一層一層向外擴展排列的正多邊形中，從實驗中探討組合圖形每一層所需要的個數，及共需要幾個正多邊形？
- (三) 從實驗中研究可由哪些正多邊形拼成立體圖形（正多面體）。
- (四) 從實驗中研究幾個正多邊形時可拼成何種正多面體。

四、關鍵詞：

- (一) 正多面體：每個正多面體的邊長都相等，每一面也都是相同的正多邊形，每個頂點到中心的距離都相等
- (二) $n^2 = n \times n = n$ 的平方

五、研究設備和器材：

- | | | |
|------------|----------|---------|
| (一) 厚紙板 | (二) 圓規 | (三) 量角器 |
| (四) 美工刀、鉛筆 | (五) 彩色噴漆 | |

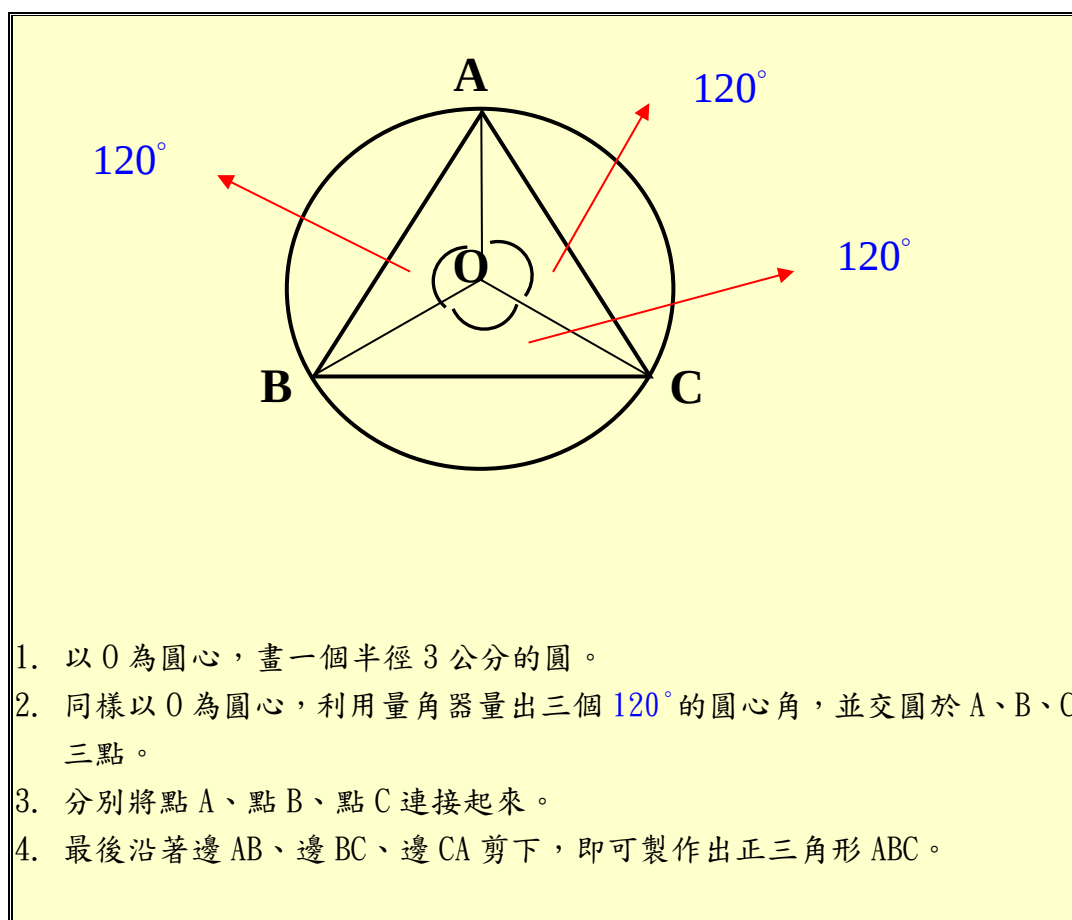
六、研究過程

實驗一

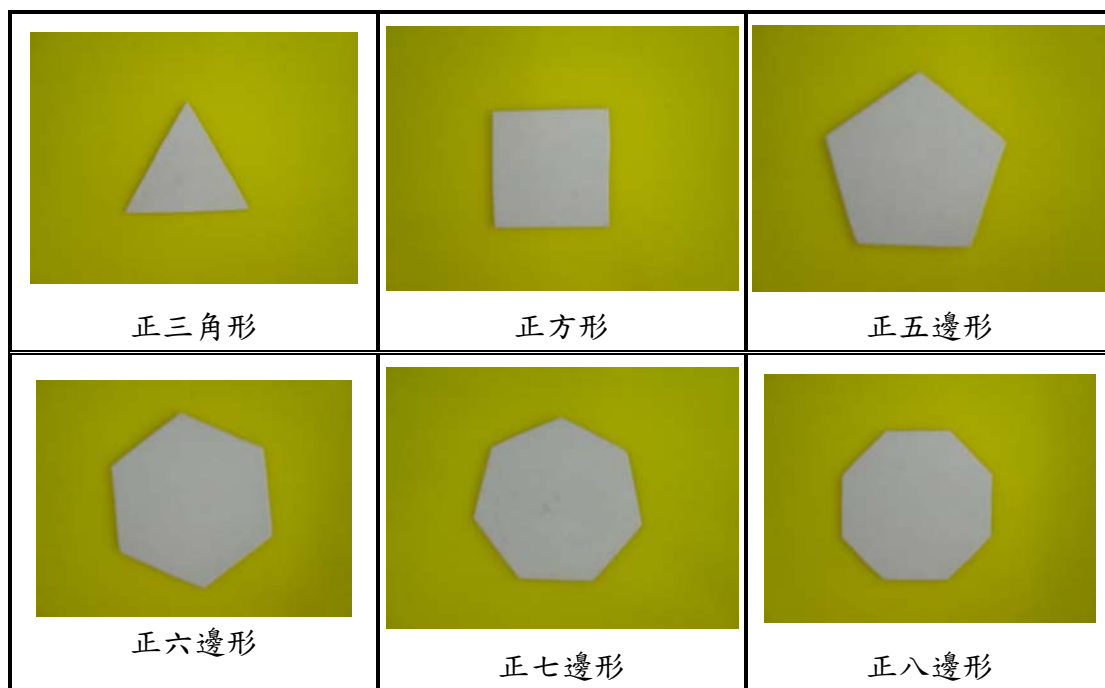
研究正多邊形，沿著其各邊向外一層一層擴展所排出的平面圖形

(一) 材料製作：

1. 我們在厚紙板上利用尺、圓規以及量角器作圖。以「正三角形」為例，用圓規畫一個半徑為 3 公分的圓，再利用量角器將圓分成三等分，也就是將圓分成三個圓心角皆為 120° 的扇形，最後將各頂點連接起來，再沿著各邊剪下圖形(如圖所示)。



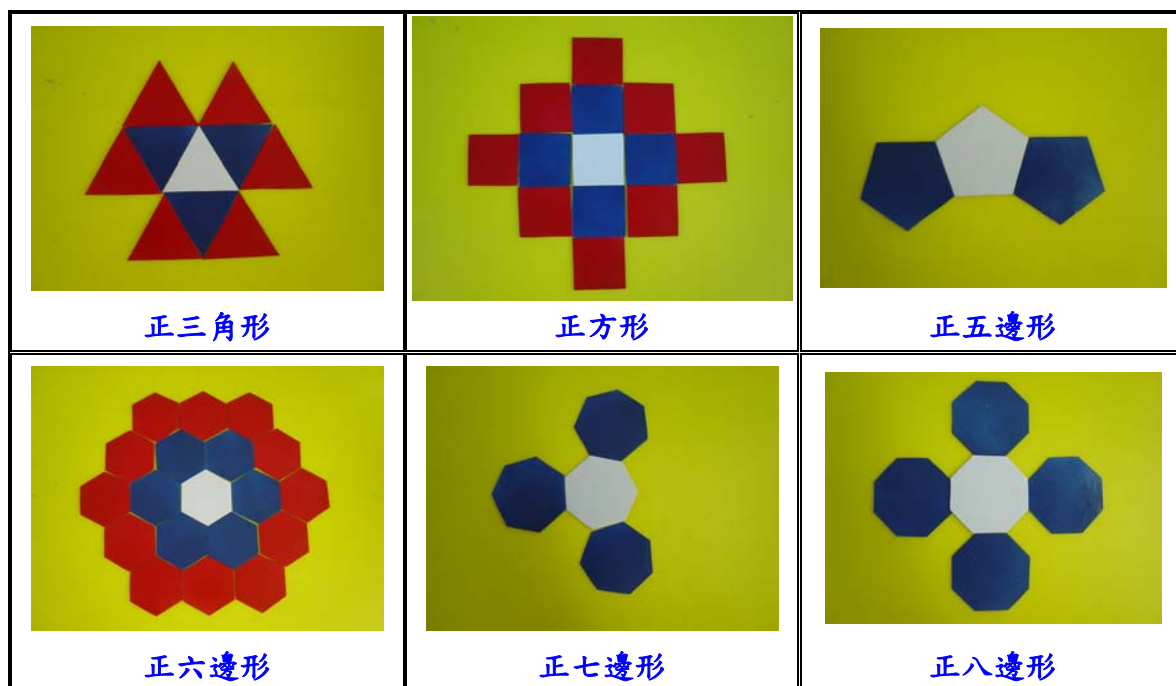
2. 依照同樣的方法，我們分別製作出「正方形」、「正五邊形」、「正六邊形」、「正七邊形」、「正八邊形」的厚紙板模型(如圖所示)，每種圖形各製作約 40 個。



(一) 實驗過程：

實驗 1-1：找出「正三角形」、「正方形」、「正五邊形」、「正六邊形」、「正七邊形」、「正八邊形」中，能沿著各邊向外一層一層擴展的有幾個。

1. 實驗「正三角形」，利用數個正三角形依序排出一層、二層、三層等的圖形(如圖所示)；若可以排列則塗上一層一層不同的顏色。
2. 實驗「正方形」，利用數個正方形依序排出一層、二層、三層等的圖形(如圖所示)；若可以排列則塗上一層一層不同的顏色。
3. 實驗「正五邊形」，利用數個正五邊形依序排出一層、二層、三層等的圖形(如圖所示)；若可以排列則塗上一層一層不同的顏色。
4. 實驗「正六邊形」，利用數個正六邊形依序排出一層、二層、三層等的圖形(如圖所示)；若可以排列則塗上一層一層不同的顏色。
5. 實驗「正七邊形」，利用數個正七邊形依序排出一層、二層、三層等的圖形(如圖所示)；若可以排列則塗上一層一層不同的顏色。
6. 實驗「正八邊形」，利用數個正八邊形依序排出一層、二層、三層等的圖形(如圖所示)；若可以排列則塗上一層一層不同的顏色。



1-1-3

實驗 1-2：分別找出「正三角形」、「正方形」、「正六邊形」排成各層所需要的正三角形、正方形、正六邊形個數。

1. 實驗「正三角形」，沿著各邊向外依序排出一層、二層、三層、四層的圖形，再分別數出第一層、第二層、第三層、第四層的正三角形個數。再觀察其個數的規律，推論出第 n 層的正三角形個數。
2. 實驗「正方形」，沿著各邊向外依序排出一層、二層、三層、四層的圖形，再分別數出第一層、第二層、第三層、第四層的正方形個數。再觀察其個數的規律，推論出第 n 層的正方形個數。
3. 實驗「正六邊形」，沿著各邊向外依序排出一層、二層、三層、四層的圖形，再分別數出第一層、第二層、第三層、第四層的正六邊形個數。再觀察其個數的規律，推論出第 n 層的正六邊形個數。

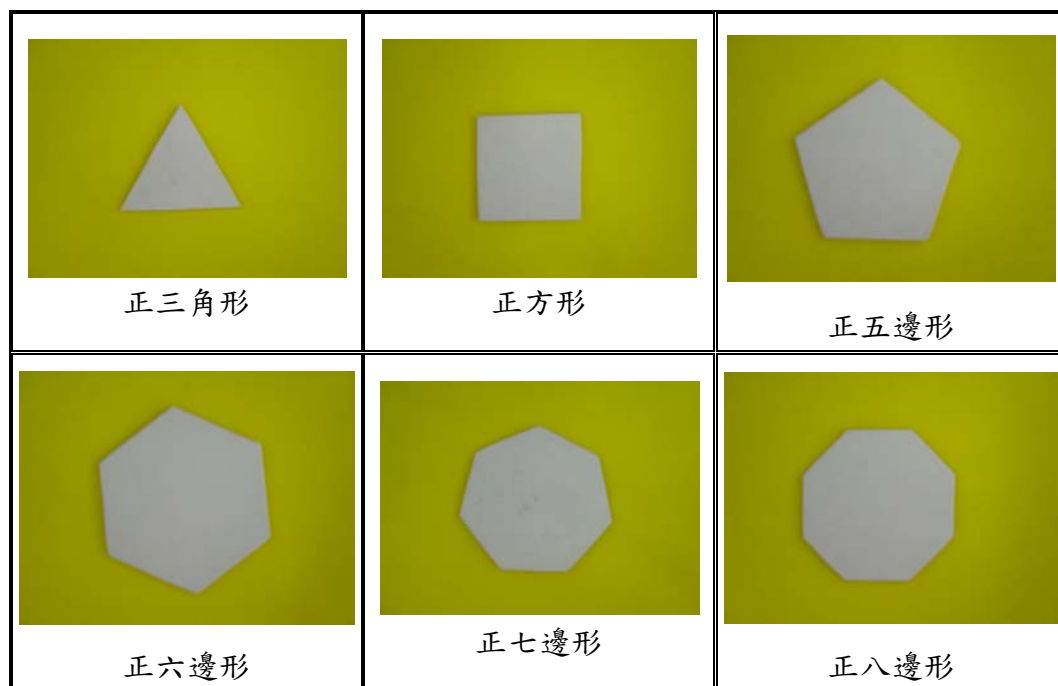
實驗二

探討正多邊形可組合的正多面體有哪幾種？並研究其角度與圖形之間的關係

(一) 材料製作：

在此實驗中，為了組合出各種正多面體，我們在厚紙板上分別畫出「正三角形」、「正方形」、「正五邊形」、「正六邊形」、「正七邊形」、「正八邊形」模型各數個，我們參考實驗一的方式，用圓規畫出一個半徑為七公分的圓，以量角器將圓心角平分分成三部分，將圓分割成三個扇形再連接圓周上的三點，畫出正三角形。

依照同樣的方法，我們製作出「正方形」、「正五邊形」、「正六邊形」、「正七邊形」、「正八邊形」（如圖所示）。



(二) 實驗過程：

實驗 2-1

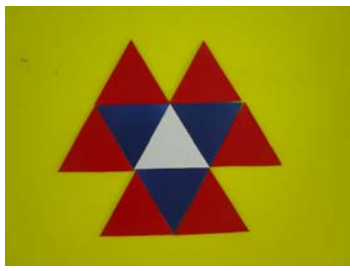
1. 運用一點連接三個正三角形頂點方式連接，結果發現可合成一正四面體。
2. 運用一點連接四個正三角形頂點方式連接，結果發現可合成正八面體。
3. 運用一點連接五個正三角形頂點方式連接，結果發現可完成正二十面體。
4. 運用一點連接六個正三角形頂點方式連接，試試看是否可能拼出正多面體。
5. 運用一點連接三個正四邊形頂點方式連接，結果發現可合併成為一正六面體。
6. 運用一點連接四個正四邊形頂點方式連接，試試看是否可能拼出一個正多面體。
7. 運用一點連接三個正五邊形頂點方式連接，結果發現可拼成一正十二面體。
8. 運用一點連接四個正五邊形頂點方式連接，試試看是否可能拼出正多面體。
9. 運用一點連接三個正六邊形頂點方式連接，試試看是否可能拼出正多面體。
10. 運用一點連接三個正七邊形頂點方式連接，試試看是否可能拼出正多面體。
11. 運用一點連接三個正八邊形頂點方式連接，試試看是否可能拼出正多面體。

七、結果：

實驗一

實驗 1-1

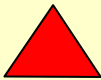
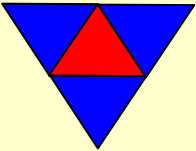
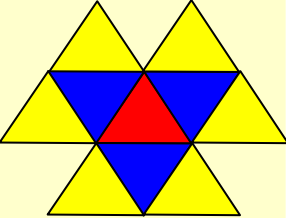
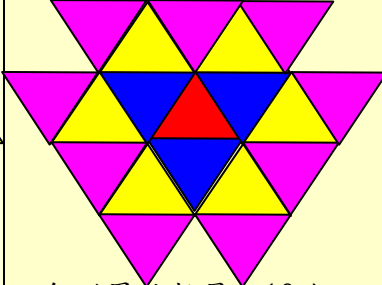
我們發現其中「正三角形」、「正方形」、「正六邊形」皆可以沿著各邊向外擴展排成平面圖形，而「正五邊形」、「正七邊形」、「正八邊形」則無法沿著各邊排出圖形。

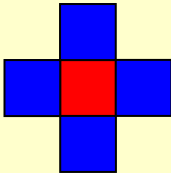
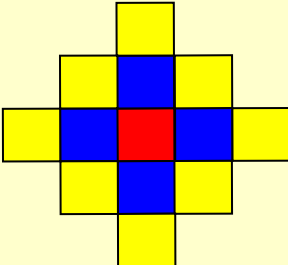
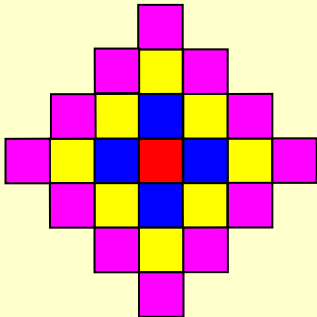
		
正三角形：可以拼成	正方形：可以拼成	正五邊形：無法拼成
		
正六邊形：可以拼成	正七邊形：無法拼成	正八邊形：無法拼成

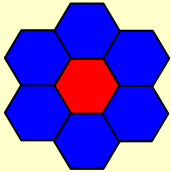
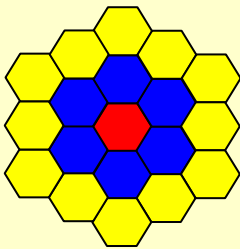
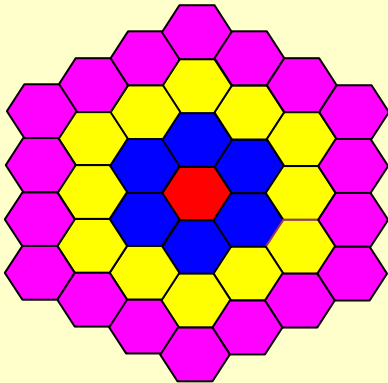
實驗 1—2

- (一) 用「正三角形」排出的圖形，第一層需要 1 個正三角形，第二層需要 3 個正三角形，第三層需要 6 個正三角形，第四層需要 9 個正三角形。
- (二) 用「正方形」排出的圖形，第一層需要 1 個正方形，第二層需要 4 個正方形，第三層需要 8 個正方形，第四層需要 12 個正方形。
- (三) 用「正六邊形」排出的圖形，第一層需要 1 個正六邊形，第二層需要 6 個正六邊形，第三層需要 12 個正六邊形，第四層需要 18 個正六邊形。

我們將實驗結果以表格表示出來：

第一層	第二層	第三層	第四層
三角形數量：1 個	三角形數量：3 個	三角形數量：6 個	三角形數量：9 個
			
三角形累積數量： 1 個	三角形累積數量： 4 個	三角形累積數量： 10 個	三角形累積數量：19 個

一層	第二層	第三層	第四層
正方形數量：1 個	正方形數量：4 個	正方形數量：8 個	正方形數量：12 個
			
正四邊形累積數量：1 個	正四邊形累積數量：5 個	正四邊形累積數量：13 個	正四邊形累積數量：25 個

一層	第二層	第三層	第四層
正六邊形數量 1 個	正六邊形數量 6 個	正六邊形數量 12 個	正六邊形數量：18 個
			
正六邊形累積數量 1 個	正六邊形累積數量 7 個	正六邊形累積數量 19 個	正六邊形累積數量：37 個

實驗二

1. 單一正方形可構成的多面體只有五個。
2. 這五個多面體組合時所需要之正多邊形如下：

項目 多面體	正多邊形	面數
正四面體	正三角形	4
正六面體	正方形	6
正八面體	正三角形	8
正十二面體	正五邊形	12
正二十面體	正三角形	20

八、討論：

實驗一

實驗 1-1.

(一) 我們知道正三角形的內角和是 180° ，所以它的一個內角是 $60^\circ (180 \div 3)$ ；而正方形內角和 360° ，其一個內角是 $90^\circ (360 \div 4)$ ，所以只要知道正多邊形的內角和，我們就可以知道它的一內角是幾度，而知道一個正多邊形的內角是幾度，才能知道它是不是 360 的正因數，但如果用量角器來測量一定會有誤差，所以我們試著用其他方法找出內角角度的規則。

(二) 我們發現任意正多邊形皆可以分成數個三角形，而我們都知道三角形的內角和是 180° ，所以只要知道任意正多邊形能分成幾個三角形，我們就能知道任意正多邊形的內角和是幾度。

經由正多邊形分割後，我們發現正方形可以分成 2 個三角形；正五邊形可以分 3 個三角形；正六邊形可以分 4 個三角形；正七邊形可以分 5 個三角形；正六邊形可以分 6 個三角形，所以我們可以統計出下面表格：

正多邊形	正方形	正五邊形	正六邊形	正七邊形	正八邊形
分割成三角形的個數 (個)	2	3	4	5	6

由表格 1-2-6 我們可以更清楚的發現，正 n 邊形可以分成 $(n-2)$ 個三角形，所以可以推論出正 n 邊形的內角和就是 $【180^\circ \times (n-2)】$ ；而正 n 邊形的一個內角角度就是 $【180^\circ \times (n-2) \div n】$ 。

我們得知「任意正多邊形，其每一個內角的角度度數是 360 的正因數，則此正多邊形就可以向外一層一層擴展，排出我們所要的平面圖形；反之，則無法排出我們所要的圖形」。所以我們只要找出 360 的所有正因數，再找出有哪個正多邊形其一內角角度和其中一個正因數吻合。

※找出 360 的所有正因數

根據我們所學，我們知道 360 的所有正因數有：1、2、3、4、5、6、8、9、10、12、15、18、20、24、30、36、40、45、60、72、90、120、180、360，總共 24 個。

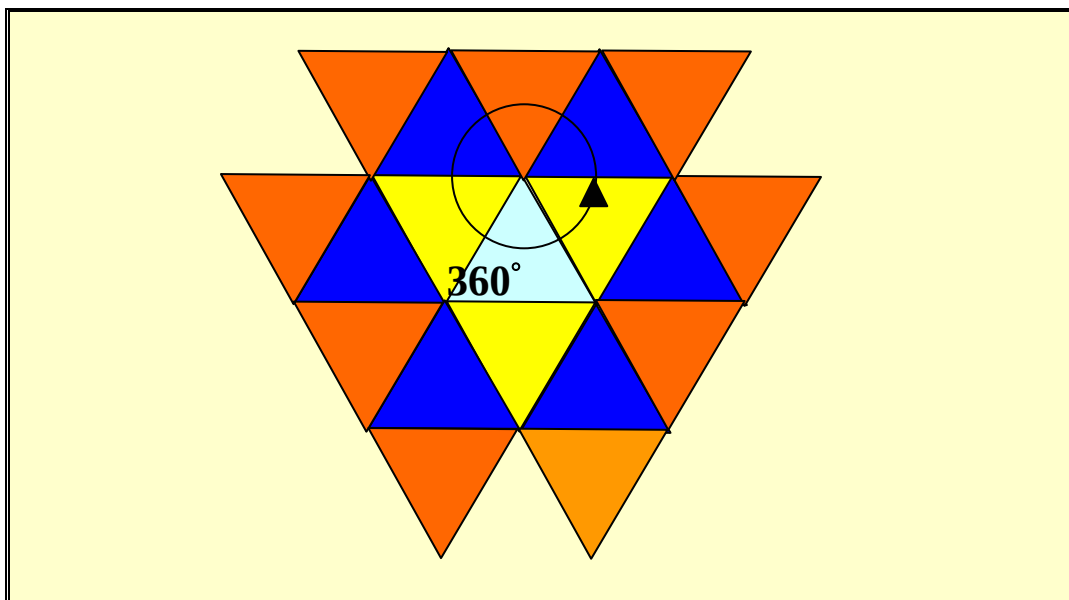
經過我們的計算之後，我們可以將各正多邊形的內角角度歸納如下表：

正 n 邊形	計 算 算 式	正 n 邊形一內角角度
正三角形	$180^{\circ} \times (3-2) \div 3$	60°
正方形	$180^{\circ} \times (4-2) \div 4$	90°
正五邊形	$180^{\circ} \times (5-2) \div 5$	108°
正六邊形	$180^{\circ} \times (6-2) \div 6$	120°
正七邊形	$180^{\circ} \times (7-2) \div 7$	約 128.57°
正八邊形	$180^{\circ} \times (8-2) \div 8$	135°
正九邊形	$180^{\circ} \times (9-2) \div 9$	140°
正十邊形	$180^{\circ} \times (10-2) \div 10$	144°
正十一邊形	$180^{\circ} \times (11-2) \div 11$	約 147.27°
正十二邊形	$180^{\circ} \times (12-2) \div 12$	150°

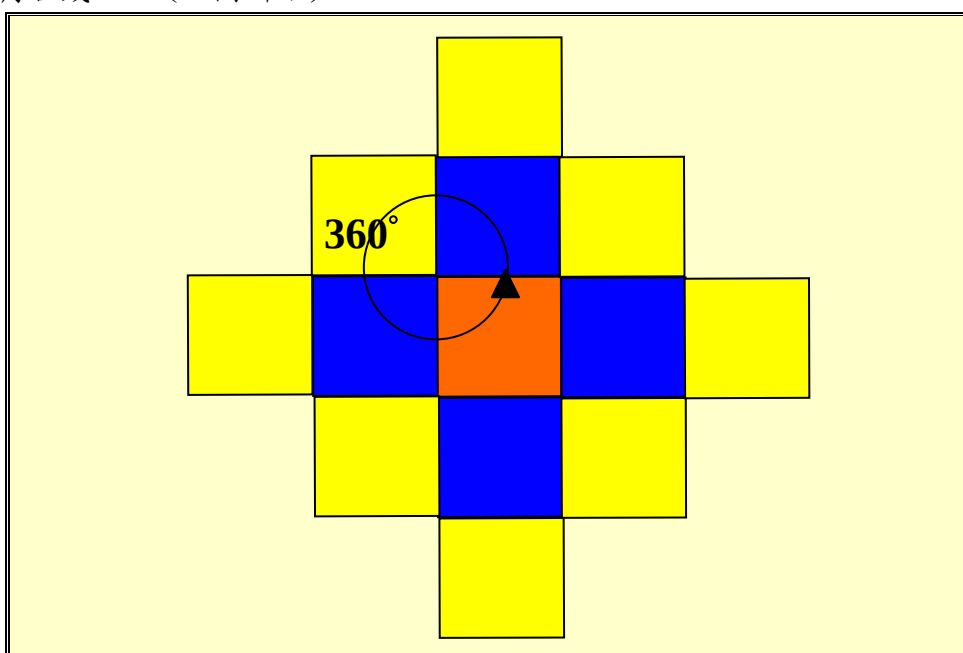
(三) 實驗推論：

我們已知其中「正三角形」、「正方形」、「正六邊形」的一內角角度度數分別是「 60° 」、「 90° 」、「 120° 」，都是 360 的正因數，也確實可以向外一層一層緊密擴展排成平面圖形。而根據表格 1-2-7，我們可以清楚發現，**正 n 邊形隨著邊數的增加，其一內角角度也跟著增加**，也就是正十三邊形其一內角角度必定會大於正十二邊形的 150° 。所以「正六邊形」以後，接下來的正 n 邊形一內角角度必定大於 120° ，而 360 的正因數中大於 120 的只剩下 180 和 360，也就是可能向外一層一層緊密擴展排成平面圖形的正 n 邊形，其一內角角度只剩下 180° 以及 360° 的可能。但是我們所討論的正 n 邊形，其一內角角度一定要小於 180° ，否則就不是正「凸」多邊形，因此即使有正 n 邊形其一內角角度是 180° 或 360° ，還是不能向外一層一層緊密擴展排成我們想要的平面圖形，故**正多邊形除了「正三角形」、「正方形」、「正六邊形」以外，沒有其他正多邊形能沿著各邊向外排出一層一層緊密擴展的平面圖形。**

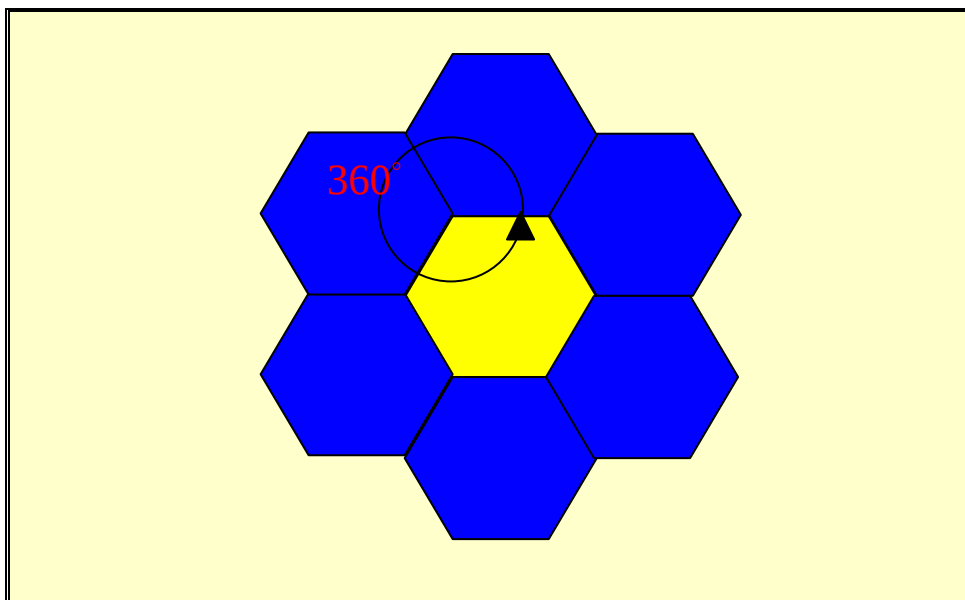
我們從實驗 1-1 的結果能清楚發現，可以向外層層擴展的「**正三角形**」、「**正方形**」、「**正六邊形**」有一定的共通性。就是它們的每一個邊都必須與相鄰的正多邊形緊密相連，而每一個角皆會與周圍正多邊形的角緊密相合。我們以「正三角形」為例，正三角形的每一邊皆與其他正三角形的邊緊密相鄰，而且每一內角都可以和周圍的正三邊形緊密相合。此外，我們也發現，由於正三角形每一內角都可以和周圍的正三邊形緊密相合，所以正三角形的每一內角都可以和周圍五個正三角形的五個內角合成 360° (如圖所示)。



接著以「正方形」為例，正方形的每一邊皆與其他正方形的邊緊密相鄰，而且每一內角都可以和周圍的正方形緊密相合。也因為正方形每一內角都可以和周圍的正方形緊密相合，所以正方形的每一內角都可以和周圍三個正方形的三個內角合成 360° (如圖所示)。



同樣的，以「正六邊形」為例，正六邊形的每一邊皆與其他正六邊形的邊緊密相鄰，而且每一內角都可以和周圍的正六邊形緊密相合。也因為正六邊形每一內角都可以和周圍的正六邊形緊密相合，所以正六邊形的每一內角都可以和周圍兩個正方形的兩個角合成 360° (如圖所示)。



由以上發現我們可以推論出，正多邊形如果要能緊密排成平面圖形，它的每一個角的角度必須與相鄰的正多邊形的角合成 360° 。例如：我們知道正三角形的每一個內角都是 60° ，所以只要六個正三角形就可以組合成 360° ，也就是我們上面提到的，正三角形的每一內角都可以和周圍五個正三角形的五個內角合成 360° 。同樣的，正方形的每一個內角都是 90° ，只要四個正方形就可以組成 360° ，也就是之前提到的，正方形的每一內角都可以和周圍三個正方形的三個內角合成 360° 。由以上推論，我們可以假設「只要任意正多邊形每一個內角的角度度數能將 360 整除，則此正多邊形就可以向外一層一層擴展，排出我們所要的平面圖形」；也就是「只要任意正多邊形，其每一個內角的角度度數是 360 的正因數，則此正多邊形就可以向外一層一層擴展，排出我們所要的平面圖形」。

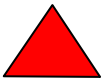
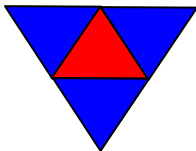
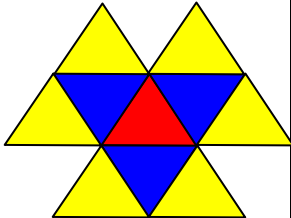
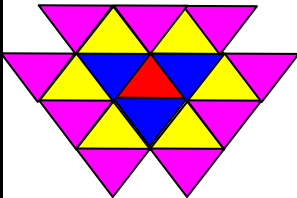
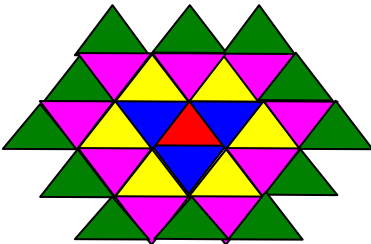
為了證明我們的假設正確，我們以「正六邊形」來驗證。首先我們要知道正六邊形的每一個內角是幾度，我們利用量角器量出正六邊形的其中一個內角，發現它是 120° 。而 120 正是 360 的其中一個正因數，且根據實驗 1-1，我們知道正六邊形確實可以排出我們要的平面圖形，所以這可以支持我們「任意正多邊形，其每一個內角的角度是 360° 的正因數，則此正多邊形就可以向外一層一層擴展，排出我們所要的平面圖形」的假設。

接著，我們以「正五邊形」為例，由實驗結果，我們知道正五邊形並不能向外一層一層擴展，排出我們所要的平面圖形，而根據我們的假設，這就表示正五邊形每一個內角的角度度數，並不能整除 360，所以我們決定實際驗證看看。

首先要知道正五邊形的一個內角是幾度，我們利用量角器量出正五邊形的每一個內角都是 108° ，我們將 360 除以 108 等於 3.333...，發現果真無法整除。同樣的，我們分別驗證「正七邊形」和「正八邊形」，我們利用量角器量出正七邊形的每一個內角約為 129° ，正八邊形的每一個內角約為 135° ，將 360 除以 129 約等於 2.7906976，而 360 除以 135 等於 2.666...，兩者亦無法整除。這和我們的實驗結果符合，所以根據上述正例與反例，我們推論出「任意正多邊形，其每一個內角的角度是 360° 的正因數，則此正多邊形就可以向外一層一層擴展，排出我們所要的平面圖形；反之，則無法排出我們所要的圖形」。

實驗 1-2

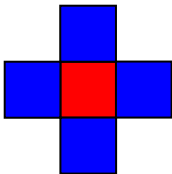
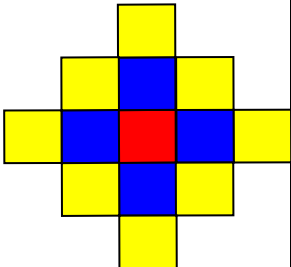
(一) 根據實驗結果，討論「正三角形」，在每一層的個數，我們列表如下：

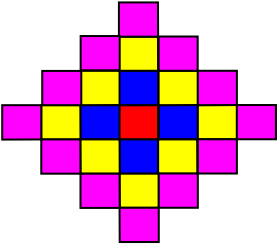
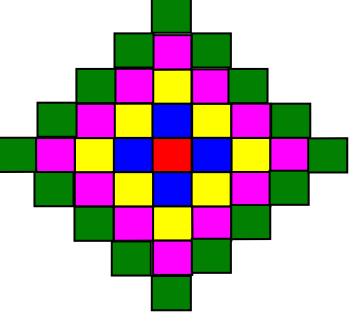
層數	第一層	第二層	第三層
圖形			
層數	第四層	第五層	
圖形			

我們將每一層個數的統計如下表：

層數	個數計算	統計
一	1	1
二	2+1	3
三	2+2+2	6
四	3+2+2+2	9
五	3+2+2+2+3	12
六	4+2+2+2+2+3	15
七	4+2+2+2+2+2+4	18
•	• (觀察規律，每增	
•	• 加一層，就多	
•	• 1+2=3 個)	
n		$3 \times (n-1)$

(二) 根據實驗結果，討論「正方形」在每一層的個數，我們列表如下：

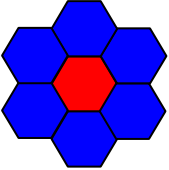
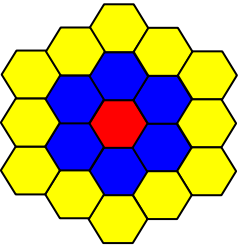
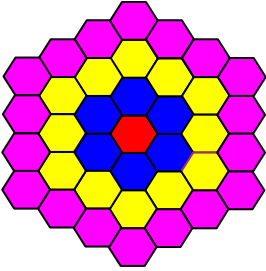
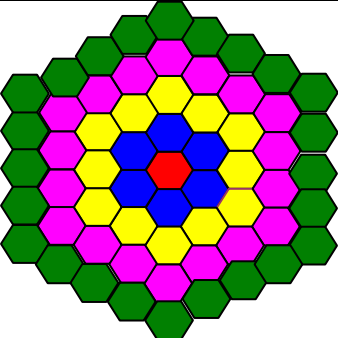
層數	第一層	第二層	第三層
圖形			

層數	第四層	第五層	
圖形			

我們將每一層個數的統計如下表：

層數	個數計算	統計
一	1	1
二	$1+2+1$	4
三	$1+2+2+2+1$	8
四	$1+2+2+2+2+2+1$	12
五	$1+2+2+2+2+2+2+2+1$	16
六	$1+2+2+2+2+2+2+2+2+2+1$	20
七	$1+2+2+2+2+2+2+2+2+2+2+2+1$	24
• • •	• (觀察規律，每 • 增加一層，就 • 多 $2+2=4$ 個)	
n		$4 \times (n-1)$

(三) 根據實驗結果，討論「正六邊形」在每一層的個數，我們列表如下：

層數	第一層	第二層	第三層
圖形			
層數	第四層	第五層	
圖形			

我們將每一層個數的統計如下表：

層數	個數計算	統計
一	1	1
二	$2 \times 6 - 6$ (邊長為 2 個六邊形所成的圖形)	6
三	$3 \times 6 - 6$ (邊長為 3 個六邊形所成的圖形)	12
四	$4 \times 6 - 6$ (邊長為 4 個六邊形所成的圖形)	18
五	$5 \times 6 - 6$ (邊長為 5 個六邊形所成的圖形)	24
六	$6 \times 6 - 6$ (邊長為 6 個六邊形所成的圖形)	30
七	$7 \times 6 - 6$ (邊長為 7 個六邊形所成的圖形)	36
• • •	• (觀察規律，每增加一層， • 則增加六個) •	
n		$6 \times (n-1)$

依據以上推論(不考慮第一層之個數)，我們可以列表如下頁：

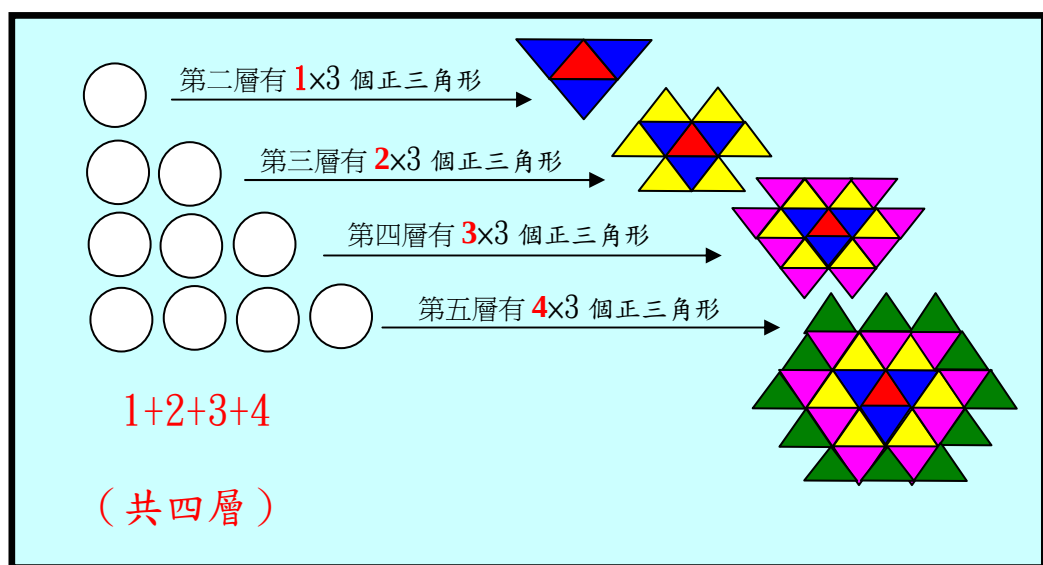
所需圖形個數 圖形種類	正三角形	正方形	正六邊形
第二層	3	4	6
第三層	6	8	12
第四層	9	12	18
第五層	12	16	24
第六層	15	20	30
第七層	18	24	36
第八層	21	28	42
第九層	24	32	48
第十層	27	36	54
第十一層	30	40	60
• • •	• • •	• • •	• • •
第 n 層	$3 \times (n-1)$	$4 \times (n-1)$	$6 \times (n-1)$

我們換個方向想，如果不考慮第一層，從第二層開始，三種圖形分別所需的圖形個數，有固定的規則。以「正三角形」為例，從第二層開始，各層所需的正三角形個數分別為「3」、「6」、「9」、「12」、「15」、「18」、「21」、「24」、「27」、「30」……。依此類推，我們不難發現，它們之間都相差 3，也就是各層所需的

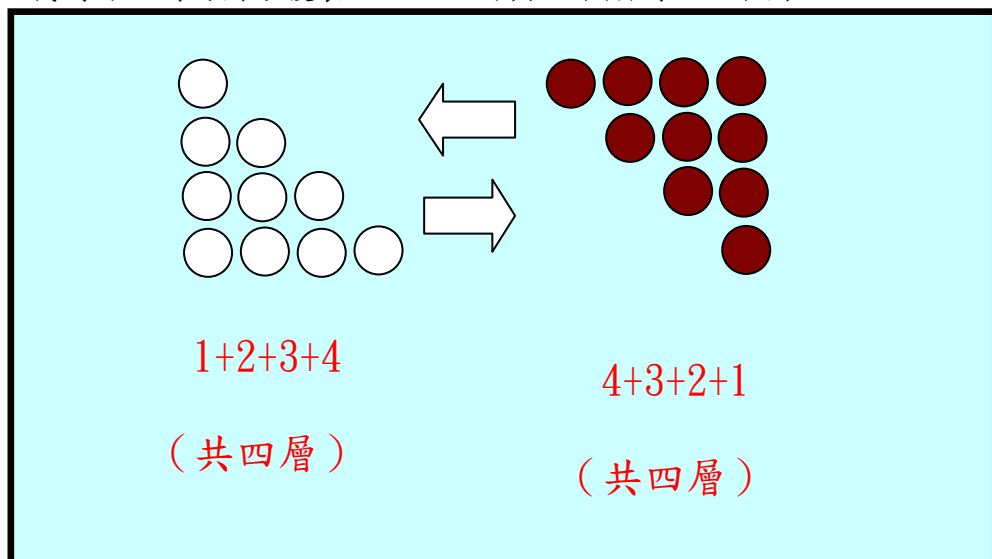
正三角形個數皆相差 3。

同理，以「正方形」為例，從第二層開始，各層所需的正方形個數分別為「4」、「8」、「12」、「16」、「20」、「24」、「28」、「32」、「36」、「40」……，各層所需正方形個數皆相差 4。而以「正六邊形」為例，從第二層開始，各層所需的正六邊個數分別為「6」、「12」、「18」、「24」、「30」、「36」、「42」、「48」、「54」、「60」……，各層所需正六邊形個數皆相差 6。

接著，我們同樣不考慮第一層，只觀察第二層到第五層，它們的正三角形個數分別為 1×3 個、 2×3 個、 3×3 個、 4×3 個，總和為 $1 \times 3 + 2 \times 3 + 3 \times 3 + 4 \times 3 = (1+2+3+4) \times 3$ 個（可看成 1 個 3 加上 2 個 3 加上 3 個 3 加上 4 個 3），因此、我們先算 $1+2+3+4$ ，列出下列圖形輔助：



我們將上列的圖形複製一個，並將其上下顛倒，如下圖：



將兩邊的圖形合併，我們觀察其中的規律：

(最小) (最大)

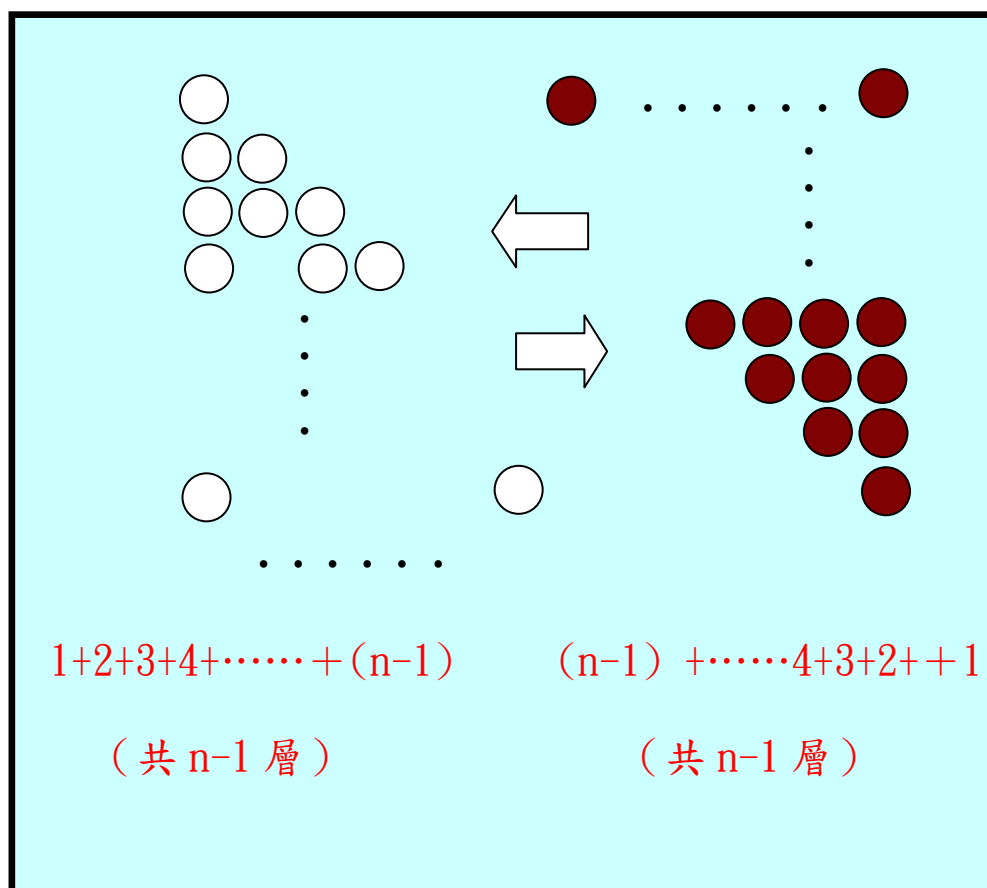
由長方形面積求法，我們可以知道上列圖形為
 $4 \times (1+4)$
 所以我們可以知道 $1+2+3+4=4 \times (1+4) \div 2$

所以第二層到第五層共 $3 \times [(1+4) \times 4 \div 2]$ 個

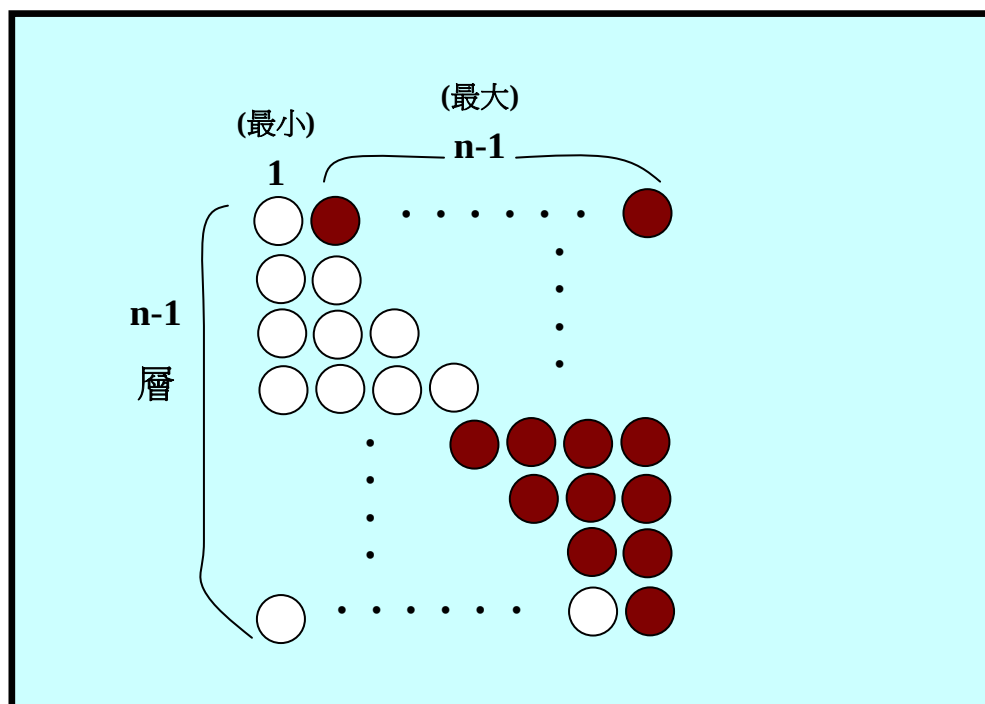
同理，我們將此種計算方式運用到第 n 層正三角形的計算，在前面我們已經知道正三角形的圖形拼湊活動中，第 n 層有 $(n-1) \times 3$ 個正三角形，第一層三角形先暫且不算，則第 2 層至第 n 層共有 $[1+2+3+4+5+\cdots+(n-1)] \times 3$ 個，，以上述計算方式，我們先計算 $[1+2+3+4+5+\cdots+(n-1)]$ ，列圖如下：

$1+2+3+4+\cdots+(n-1)$ (共 $n-1$ 層)

複製同一個圖形，將其上下顛倒



將兩邊的圖形合併，圖形如下頁：



我們先計算結合後所成的正方形所用的圓形個數，計算發現為 $(n-1) \times [1 + (n-1)]$ ，因為我們複製了一次，所以實際的個數應除以 2，所以我們可以知道： $1+2+3+4+5+\cdots+(n-1) = (n-1) \times [1 + (n-1)] \div 2 = (n-1) \times n \div 2 = (n^2 - n) \div 2$

也可以說，在正三角形的拼湊中，第 2 層至第 n 層所用的正三角形共有 $3 \times (n^2 - n) \div 2 = [(3n^2 - 3n) \div 2]$ 個，但如果欲知道排出第一層到第 n 層所需的圖形總個數，記得要再加入第一層的 1 個，因為任意正 n 邊形，第一層的圖形個數皆是 1 個，之前所有推論，皆沒有考慮到第一層，所以，最後要記得算進去。所以可以知道，正三角形拼湊的個數共有 $[(3n^2 - 3n) \div 2] + 1$ 。

同理，計算「正方形」與「正六邊形」的第二層到第 $n-1$ 層中，所需的圖形總個數。分別以式子「 $4 \times (n-1) \times [1 + (n-1)] \div 2$ 」與「 $6 \times ((n-1) \times [1 + (n-1)]) \div 2$ 」表示，因此、因為任意正 n 邊形，第一層的圖形個數皆是 1 個，之前所有推論，皆沒有考慮到第一層，所以，最後要記得算進去。

以「正方形」為例，排出第一層同樣需要 1 個正方形，而從第二層開始，欲排出第 n 層所需的正方形個數為 $[4 \times (n-1)]$ 個，所以第二層所需的正方形個數即為 $[4 \times (2-1)] = 4$ 個，而第 n 層所需的正方形個數還是 $[4 \times (n-1)] = (4n-4)$ 個。所以根據上述計算方式，可以導出「 $4 \times (n-1) \times [1 + (n-1)] \div 2 = [4 + (4n-4)] \times (n-1) \div 2$ 」，最後再加上第一層的 1 個正方形，也就是「 $[(4n^2 - 4n) \div 2] + 1$ 」個。

同樣以十一層正方形排成的圖形驗證。欲用正方形排出十一層的圖形，所需的正方形個數，就是將 n 以 11 代入，結果等於「 $(4 \times 11 \times 11 - 4 \times 11) \div 2 + 1 = 221$ 個」，根據上面統整的表格(1-2-8)，將各層所需的正方形個數相加，也就是「 $1+4+8+12+16+20+24+28+32+36+40 = 221$ 」，可以清楚發現兩者的答案相同，故同樣驗證我們所歸納出來正方形的規則。

同理，以「正六邊形」為例，排出第一層同樣需要 1 個正六邊形，而從第二層開始，欲排出第 n 層所需的正六邊形個數為 $[6 \times (n-1)]$ 個，所以第二層所需的正方形個數即為 $[6 \times (2-1)] = 6$ 個，而第 n 層所需的正六邊形個數還是 $[6 \times (n-1)] = (6n-6)$ 個。所以根據梯形公式，可以導出「 $6 \times ((n-1) \times [1 + (n-1)]) \div 2 = [6 + (6n-6)] \times (n-1) \div 2$ 」，最後再加上第一層的 1 個正方形，也就是「 $[(6n^2 - 6n) \div 2] + 1 = 3n^2 - 3n + 1$ 」個。

以十一層正六邊形排成的圖形驗證。欲用正六邊形排出十一層的圖形，所需的正六邊形個數，就是將 n 以 11 代入，結果等於「 $(6 \times 11 \times 11 - 6 \times 11) \div 2 + 1 = 331$ 個」，根據上面統整的表格(1-2-9)，將各層所需的正六邊形個數相加，也就是「 $1+6+12+18+24+30+36+42+48+54+60 = 331$ 」，可以清楚發現兩者的答案相同，故同樣驗證我們所歸納出來正六邊形的規則。

實驗二

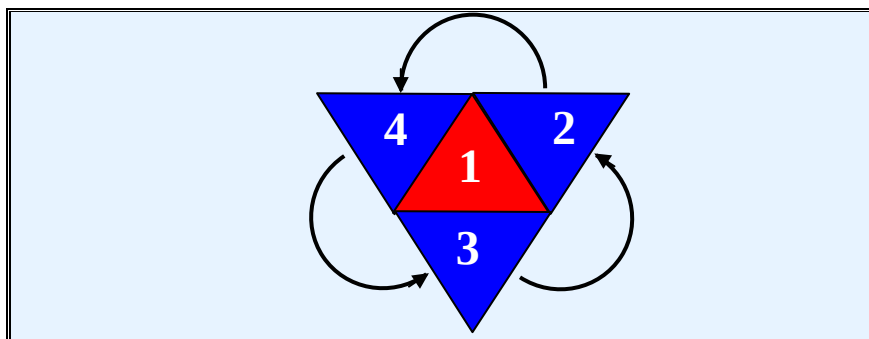
在組合出「正四面體」、「正六面體」、「正八面體」、「正十二面體」、「正二十面體」之後，我們觀察它們的共通性。第一，其每一個面的每一邊，都有圖形相鄰；第二，我們可以發現想要排成立體圖形，正多邊形各邊相鄰的正多邊形，並不會與正多邊形在同一個平面上；也就是正多邊形周圍緊鄰的正多邊形

會同時向下或向上傾斜。舉「正四面體」的例子來說，正四面體是由四個正三角形所組成，其中任意一個正三角形必定不會與它周圍緊鄰的三個正三角形在同一個平面上。

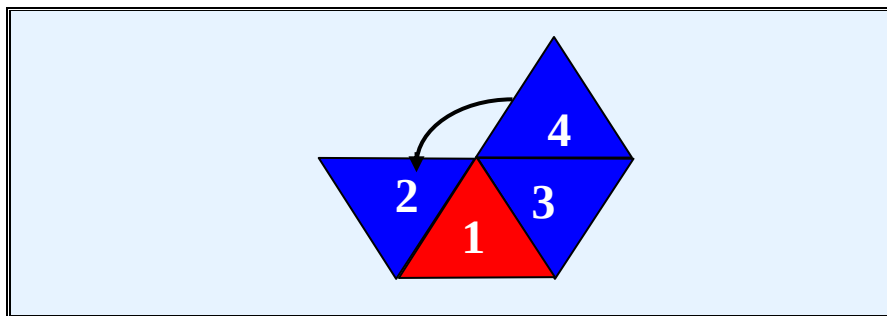
同樣的，「正六面體」中，任意一個正方形必定不會與它周圍緊鄰的四個正方形在同一個平面上；「正八面體」中，任意一個正三角形必定不會與它周圍緊鄰的三個正三角形在同一個平面上；「正十二面體」中，任意一個正五邊形必定不會與它周圍緊鄰的五個正五邊形在同一個平面上；「正二十面體」中，任意一個正三角形必定不會與它周圍緊鄰的三個正三角形在同一個平面上。

接著我們以它們的平面展開圖來解說，首先，以「正三角形」為例，由正三角形所組成的「正四面體」、「正八面體」、「正二十面體」中，任意一個正三角形，其與周圍緊鄰的正三角形展開圖皆如圖 所示。根據我們上述推論，在立體圖形中，假設我們以圖中 1 號正三角形為底，1 號正三角形周圍緊鄰的三個正三角形，也就是 2 號正三角形、3 號正三角形、4 號正三角形，皆會同時向下或向上傾斜。而為了要讓 2 號正三角形、3 號正三角形、4 號正三角形有空間傾斜，所以在平面展開圖中，2 號正三角形與 3 號正三角形、3 號正三角形與 4 號正三角形、4 號正三角形與 2 號正三角形之間分別都要有多餘的空間，才能向上或向下組成立體圖形(如圖箭頭所示)，如果其間空間皆填滿則無法排成立體圖形。

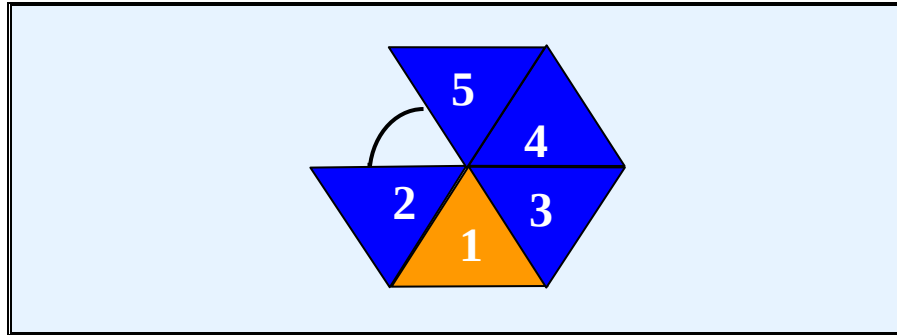
可拼成正四面體



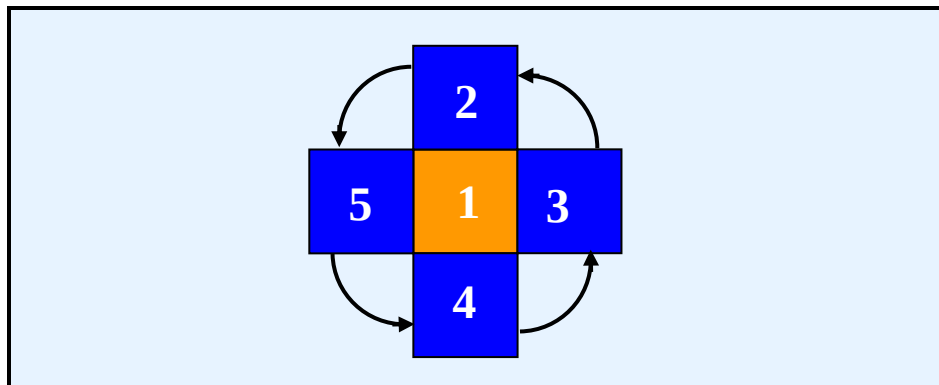
可拼成正八面體的組合單



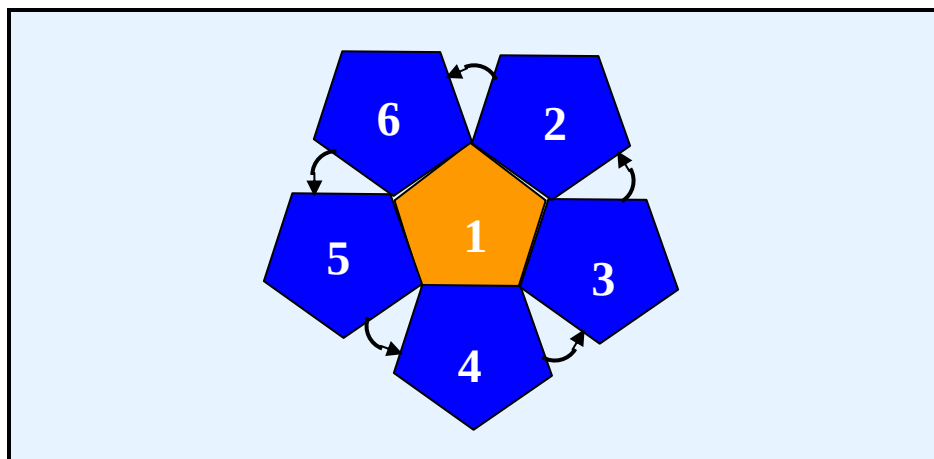
可拼成正 20 面體的組合單位



以「正方形」為例，由正方形所組成的正六面體中，任意一個正方形，其與周圍緊鄰的四個正方形展開圖如圖所示。根據我們上述推論，在立體圖形中，假設我們以圖中 1 號正方形為底，1 號正方形周圍緊鄰的四個正方形，也就是 2 號正方形、3 號正方形、4 號正方形，皆會同時向下或向上傾斜。而為了要讓 2 號正方形、3 號正方形、4 號正方形、5 號正方形有空間傾斜，所以在平面展開圖中，2 號正方形與 3 號正方形、3 號正方形與 4 號正方形、4 號正方形與 5 號正方形、5 號正方形與 2 號正方形之間分別都要有多餘的空間，才能向上或向下組成立體圖形，如果其間空間皆填滿則無法排成立體圖形(如圖箭頭所示)。

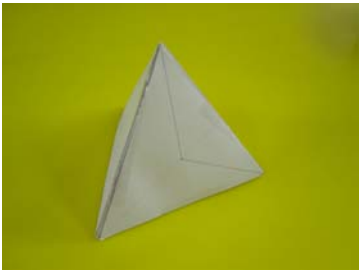
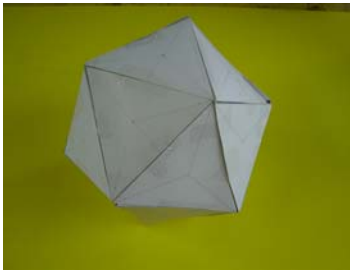
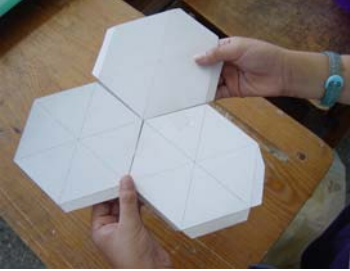


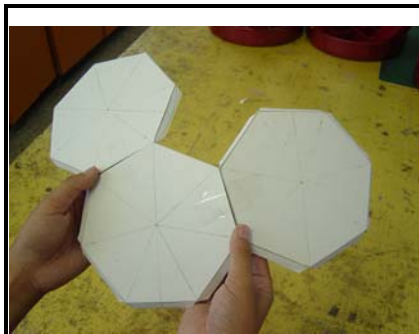
以「正五邊形」為例，由正五邊形所組成的正十二面體中，任意一個正五邊形，其與周圍緊鄰的五個正五邊形展開圖如圖所示。根據我們上述推論，在立體圖形中，假設我們以圖中 1 號正五邊形為底，1 號正五邊形周圍緊鄰的五個正五邊形，也就是 2 號正五邊形、3 號正五邊形、4 號正五邊形、5 號正五邊形、6 號正五邊形，皆會同時向下或向上傾斜。而為了要讓 2 號正五邊形、3 號正五邊形、4 號正五邊形、5 號正五邊形、6 號正五邊形有空間傾斜，所以在平面展開圖中，2 號正五邊形與 3 號正五邊形、3 號正五邊形與 4 號正五邊形、4 號正五邊形與 5 號正五邊形、5 號正五邊形與 6 號正五邊形、6 號正五邊形與 2 號正五邊形之間分別都要有多餘的空間，才能向上或向下組成立體圖形，如果其間空間皆填滿則無法排成立體圖形(如圖箭頭所示)。



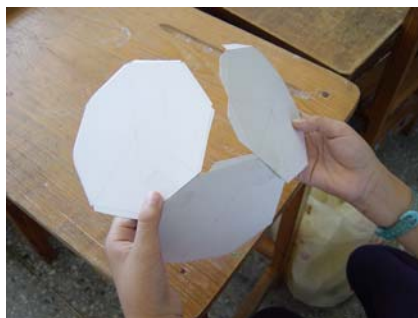
經由推論，我們得知**正多邊形要組成正立方體，正多邊形其各邊必須皆緊鄰正多邊形，而且正多邊形所緊鄰的正多邊形之間，必須要有空隙。**

最後，我們以「正六邊形」、「正七邊形」、「正八邊形」做驗證，根據圖，我們可以清楚看到，「正六邊形」的展開圖中，雖然其任意一正六邊形各邊都緊鄰著正六邊形，但是它們之間沒有空隙可以向上或向下折，所以只能排出平面圖形，不可以組成立體圖形。而「正七邊形」、「正八邊形」，我們在排平面圖形時，即可發現正七邊形的各邊並不能都緊鄰著正七邊形，正八邊形的各邊也不能緊鄰著正八邊形，所以都不能組成立體圖形了。

 正三角形所拼成的 正四面體	 正三角形所拼成的 正八面體	 正三角形所拼成的 正二十面體
 正方形所拼成的 正六面體	 正五邊形所拼成的正十 二面體	 正六邊形無法拼成 正立體圖形



正七邊形無法拼成
正立體圖形



正八邊形無法拼成
正立體圖形

(二) 當我們用正多邊形拼合時，在一個點上可和三個、四個和五個正三角形的頂點連接，原因為 $60^\circ \times 3 < 360^\circ$ 、 $60^\circ \times 4 < 360^\circ$ 、 $60^\circ \times 5 < 360^\circ$ ，故當我們想折成立體圖形（正多面體）時尚有多餘的角度摺疊。而這個即成為正多面體的一個頂點。

當在一個點連接 6 個三角形時，此時已構成一個平面，只能折成有凹陷的立體圖形，並不能折成我們所要的凸正多面體。所以根據推論可做以下說明：

假設甲＝正多面體一頂點連接的正多邊形個數

1. 正三角形的一內角為 60°

(1) 若甲＝3 時

$60^\circ \times 3 = 180^\circ$ $180^\circ < 360^\circ$ 先將 3 個正三角形拼成一個平面，最後拼成正四面體。

(2) 若甲＝4 時

$60^\circ \times 4 = 240^\circ$ $240^\circ < 360^\circ$ 先將 4 個正三角形拼成一個平面，最後拼成正八面體。

(3) 若甲＝5 時

$60^\circ \times 5 = 300^\circ$ $300^\circ < 360^\circ$ 先將 5 個正三角形拼成一個平面，最後拼成正二十面體。

(4) 若甲＝6 時

$60^\circ \times 6 = 360^\circ$ $360^\circ < 360^\circ$ 所以，不能拼成正多面體。

2. 正方形內角為 90°

(1) 若甲＝3

$90^\circ \times 3 = 270^\circ$ $270^\circ < 360^\circ$ 先將 3 個正方形拼成一個平面，最後拼成正六面體。

(2) 若甲＝4

$90^\circ \times 4 = 360^\circ$ $360^\circ < 360^\circ$ 所以，不能拼成正多面體。

3. 正五邊形一內角為 108°

(1) 若 $n=3$

$108^\circ \times 3 = 324^\circ$ $324^\circ < 360^\circ$ 先將 3 個正五邊形拼成一個平面，
最後拼成正十二面體。

(2) 若 $n=4$

$108^\circ \times 4 = 432^\circ$ $432^\circ > 360^\circ$ 所以，不能拼成正多面體。

4. 正六邊形一內角為 120°

若 $n=3$

$120^\circ \times 3 = 360^\circ$ $360^\circ = 360^\circ$ 所以，不能拼成正多面體。

5. 正七邊形一內角約 128.57°

若 $n=3$

$128.57^\circ \times 3 = 385.71^\circ$ $385.71^\circ > 360^\circ$ 所以，不能拼成正多面體。

6. 正八邊形一內角約 135°

若 $n=3$

$135^\circ \times 3 = 405^\circ$ $405^\circ > 360^\circ$ 所以，不能拼成正多面體。

九、結論：

實驗一

實驗 1-1

(一) 單一正多邊形可一層一層排成面的只有正三角形、正方形、正六邊形三種，其餘的正多邊形不行。

(二) 單一正多邊形若要構成平面，需此正多邊形內角的度數為 360 的因數。

實驗 1-2

所以根據以上推論，我們如果想知道正多邊形一層一層往外擴展 n 層所需的正多邊形個數計算方法如下：

正多邊形 項目	正三角形	正四邊形	正六邊形
計算方式	$[(3n^2 - 3n) \div 2] + 1$	$[(4n^2 - 4n) \div 2] + 1$	$3n^2 - 3n + 1$

實驗二

(一) 單一正多邊形構成正多面體時，其一內角的 3 倍必須小於 360°

(二) 故從此實驗可以得到一個結論

假設有一個自然數甲，且 $\text{甲} \geq 3$

使某一正多邊形之內角 $\times \text{甲} < 360^\circ$

則此正多邊形可以拼成正多面體。

(三) 正多面體只有五個：正四面體、正六面體、正八面體、正十二面體、正二十面體。

十、推廣與應用：

做完了這次實驗，我們知道可以選正三角形、正方形、正六邊形的圖形鋪地板或是人行道的磁磚。若我想要有一層一層不同顏色的圖案，也可輕易的運用實驗所得準備所需的各色磁磚個數。

實驗二除了可運用正多面體製作燈籠、美術燈和建築用品，自然的奧妙真是無限而充滿變化。我們在這個實驗中發現：原來蜂巢多為六邊形組合而成、自然乾化所成的泥裂也大致成六邊形、烏龜殼的形狀、、、等等，而為何自然界會有那麼多自然形成的的六邊形呢？

此外，鋪地板的活動，如果搭配對稱圖案來組合，會不會有更多令人意想不到的規律呢？也許這是下一次我們研究的方向，在圖型的世界裡，拼湊出更多特別的圖案。

十一、參考資料：

(一) 蒼弘萃編，康軒文教事業國小數學第11冊，第2版，p. 32-36，2005.

(二) 鈞浩康作，簡瑞宏譯，與愛麗絲同遊奇妙的數學世界，第1版，p. 61-p. 85，2003.

(三) 葛登能著 葉偉文譯 迷宮、黃金比、索馬立方體，第1版，p. 8-p. 21，2003 .

評語

080410「角」盡腦汁

本作品研究過程除了角度分析外，尚採實作方式進行，團隊合作精神可嘉，細心觀查，且大部份分析條理清楚，唯部份關係式的來龍去脈敘說欠清楚，書面資料部份錯誤。本主題內容已為多人討論過，創意稍嫌不足。