

中華民國第四十六屆中小學科學展覽會
作品說明書

國小組 數學科

佳作

080409

操盤手全面翻紅

學校名稱： 台南市北區文元國民小學

作者：	指導老師：
小五 許玄新	鄭文隆
小五 鄭永奕	陳福慶
小五 林宏星	
小五 黃威霖	

關 鍵 詞：翻翻樂、兩面棋、棋盤方陣

作品名稱

操盤手-全面翻紅

摘要

本文試著討論，在一個 3x3 的棋盤上放置九個兩面棋(一面為紅色、一個為黑色)，規定其中任何一個棋子翻面時，則與它相鄰的棋子也必須同時翻面，依照這個規定，我們要研究：翻那幾個棋子才能過關?我們先以 2x2 棋盤，來看看會有什麼蛛絲馬跡?在一面歸納一面嘗試之後，發現 3x3 棋盤快速過關的祕訣，以及那些棋子翻動後就無法過關。

另外，如果棋盤擴增為 4x4 或 5x5 時，我們試著先翻棋盤上對角線的棋子，全面翻紅的成功率比較高，在尋找 4x4 或 5x5 的過關翻法時，我們察覺到 4x4 棋盤過關翻法的前幾步與 3x3 棋盤過關翻法一樣；5x5 棋盤過關翻法的前幾步與 4x4 棋盤過關翻法一樣，如果真能如此有規律的一直下去，那我們真的就是無敵「操盤手」。

壹、研究動機

在一次課間活動時，老師讓我們玩「魔方陣」，大家玩的不亦樂乎!後來老師將答案用黑板上的圓形的軟性磁片(一面紅、一面黑)蓋在數字上面，並向大家宣佈：「要看答案的人，要先解開密碼。」沒想到這個過關密碼竟然是另一個永無止盡的開始，這個過關遊戲的規定是：若其中一個磁片翻面，與它相鄰的磁片就要跟著翻面，能夠全部都翻成紅色的人，就可以先過來查看答案做對了嗎?大家絞盡腦汁越玩越有意思，所以，幾個同學組了個義勇隊，發誓要解開這謎團。

貳、研究目的

- 一、在 3x3 棋盤上，黑色面朝上的九個兩面棋，如何翻動才能將它們全部翻成紅色面朝上，尋找其中的規律。
- 二、如果將原來的 3x3 棋盤擴增成 4x4 棋盤或 5x5 棋盤時，能運用 3x3 的過關祕訣嗎? 若不行，是否可以在成功的例子中發現其他過關規則?

參、研究設備及器材

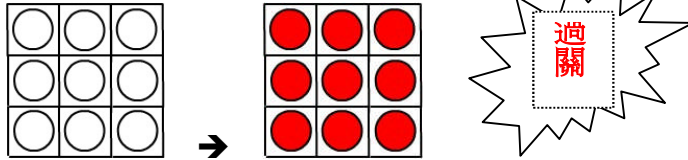
- 一、電腦 (Word 及 Excel)。
- 二、棋譜記錄方格紙(3x3 4x4 5x5)。
- 三、雙色圓形棋。

肆、研究過程或方法

一、定義及說明：

1. 遊戲規則

給定一個 3x3 的棋盤及九個兩面棋(一面為紅色、一個為黑色)，一開始棋子都是同一色(黑色面)，若其中一個棋子翻面時，與此相鄰的所有棋子都必須跟著翻面。由原本棋子全為黑色面翻到最後全都是紅色面，即成功過關。



2. 翻面結果呈現方式：

代表是兩面棋的黑色面；代表是兩面棋的紅色面。

3. 為了方便組員間的溝通，所以將棋盤上的位置加以命名。

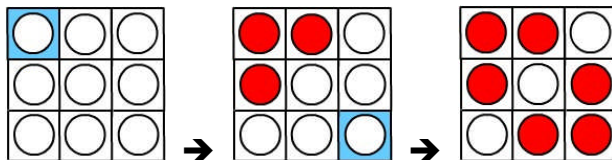
A11	A12	A13
A21	A22	A23
A31	A32	A33

A11 符號表示：

A 後面第一位數字代表第幾行。

A 後面第二位數字代表第幾列。

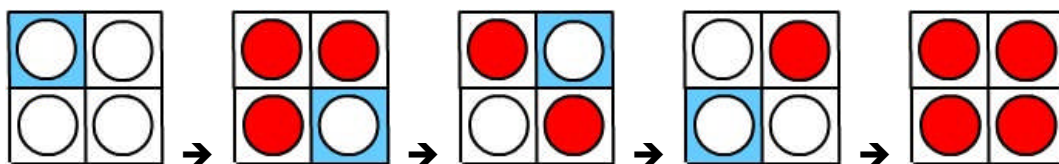
4. ：表示現在要翻的位置



二、從源頭開始：觀察 2x2 棋盤，尋找翻面規則

在幾番嘗試之後，我們感覺到：有時就快要成功，卻又好像翻到不該翻的棋子而又失敗；有時已經翻了很久，有些棋子也不知翻過了幾遍了，所以，我們決定要從頭開始，先找出 2x2 的棋局裡面所暗藏的祕密。

(一) 2x2 棋盤的解法。



耶!成功了! 而且，我們還從中發現了一些現象。

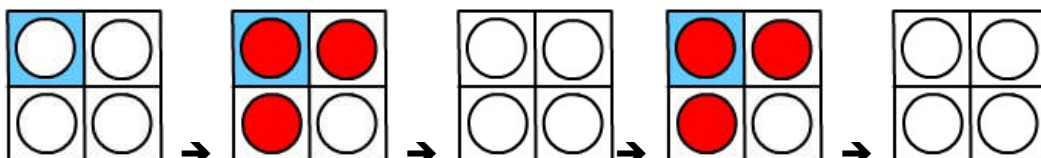
(二) 發現討論(2x2 棋盤)：

1. 如果要翻動 A11 和 A12，不論先翻那一個，最後結果都一樣。

翻動的位置	A11	A12	結果	A21、A22 是紅色面
紅色面的位置	A11、A12、A21	A21、A22		
翻動的位置	A12	A11	結果	A21、A22 是紅色面
紅色面的位置	A11、A12、A22	A21、A22		

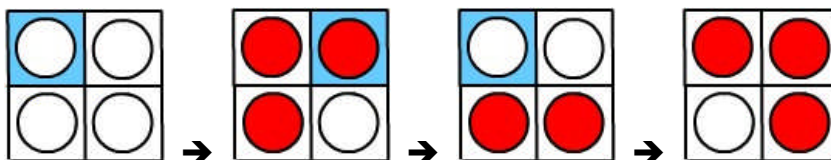
2. 棋子翻動的次數是偶數次，則結果等於沒翻過：

(1)A11 翻動四次，結果於沒翻一樣。



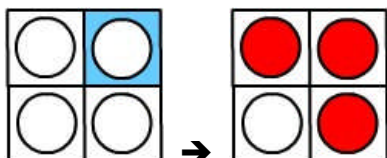
翻動的位置	A11	A11	A11	A11
紅色面的位置	A11、A12、A21	無	A11、A12、A21	無

(2)A11 翻動二次、A12 翻動一次。



翻動的位置	A11	A12	A11
紅色面的位置	A11、A12、A21	A21、A22	A11、A12、A22

(3) A12 翻動一次。



翻動的位置	A12
紅色面的位置	A11、A12、A22

從上(2)(3)可以知道，結果是一樣的，所以 A11 翻動二次，反而等於沒翻一樣。

3. 「新加法」：我們依棋子所呈現的顏色(被翻成紅色面、被翻成黑色面)，想出了一套有別於現在所學的數字運算規則：假設翻動次數是 0 次 (黑色面)，我們給它記錄成數字「0」；翻過一次(紅色面)，我們給它「1」；而翻動次數是偶數次(例如：2、4、6、8、…次)，依上述的結果等於是沒翻，所以我們也給它數字「0」，結果就會成為下列的「新加法」。

(1) $0=0$ (3) $0+1=1$ → 所以 題目若是 $1+1+1=(\quad)$

(2) $1=1$ (4) $1+1=0$

則答案會是 $1+1+1=0+1=1$

所以，我們若是要在任何棋盤上都能成功，那我們就要使每一個位置上，翻動的次

數都要是奇數次就可以了，不過要怎麼做呢？

4. 棋子本身與相鄰棋子之間的關係：

- (1) 當翻動某一個棋子甲後，要維持該棋子是紅色面，那在它周圍的鄰棋被翻動過的棋數要是**偶數個**(0、2、4)，不然，棋子甲就又被翻回黑色面。
- (2) 當某一個棋子乙，我們打算都不要翻動它，那翻紅就必須靠鄰棋來做，所以鄰棋被翻動過的棋數要是**奇數個**(1、3)，這樣才能使棋子乙被翻成紅色面。

(三) 實事求是：我們將這個 2x2 棋盤上的發現告訴老師，老師當時問我們：「還有其他的解法嗎？」大家一致認為只有這種解法，但說法各異。正好我們學過「數量關係」，所以，我們想把所學的，再加上我們找出來的「新加法」來證明。

1. 假設：

把 A11 翻動次數用 a 表示；把 A12 翻動次數用 b 表示
把 A21 翻動次數用 c 表示；把 A22 翻動次數用 d 表示

A11 被翻動 (a+b+c)次	A12 被翻動 (a+b+d)次
A21 被翻動 (a+c+d)次	A22 被翻動 (b+c+d)次

2. 分析

① $a + b + c = 1$

從① ② 知道 $c = d$

② $a + b + d = 1$

從②、③知道 $b = c$

③ $a + c + d = 1$

從③、④知道 $a = b$

④ $b + c + d = 1$

所以，我們知道 $a = b = c = d$ ，因此，只要一翻任何一個棋子，就得翻其他的棋子才能破關，nice!

三、再戰 3x3 棋局

把九種翻法呈現出來，並將棋局與數字做對照

A11 的位置：翻第一行第一列 →

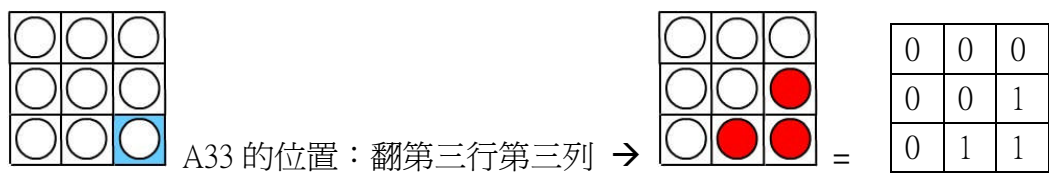
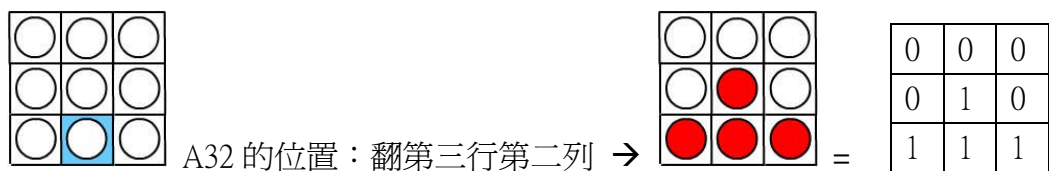
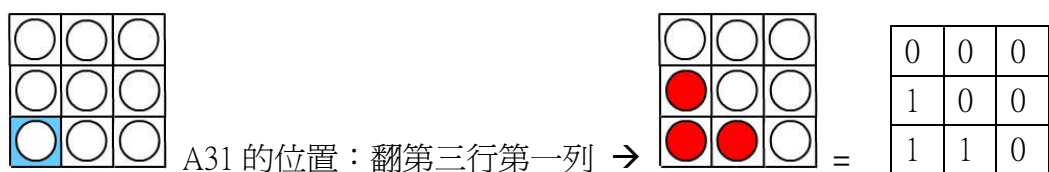
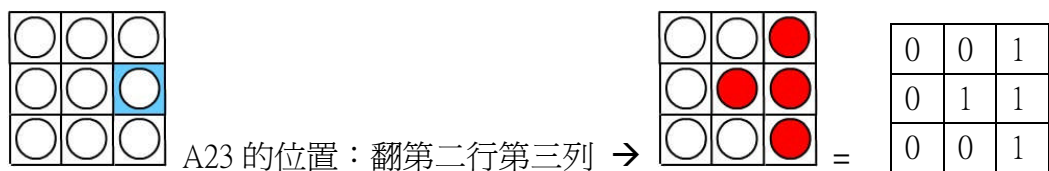
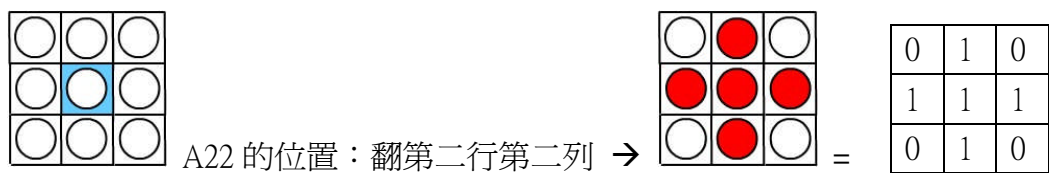
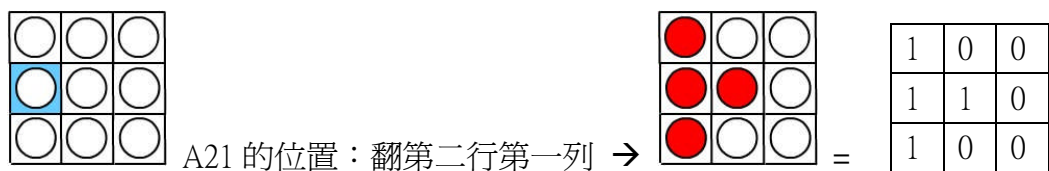
1	1	0
1	0	0
0	0	0

A12 的位置：翻第一行第二列 →

1	1	1
0	1	0
0	0	0

A13 的位置：翻第一行第三列 →

0	1	1
0	0	1
0	0	0



翻動棋子時，會連帶影響其他的棋子，我們整理成關係表，如下：

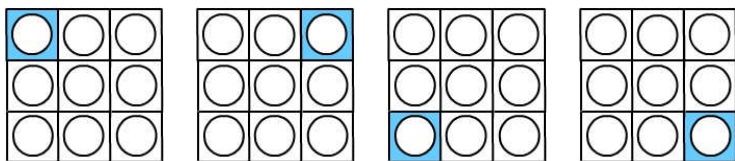
		受影響的棋子								
		A11	A12	A13	A21	A22	A23	A31	A32	A33
翻動的 位置	A11	1	1		1					
	A12	1	1	1		1				
	A13		1	1			1			
	A21	1			1	1		1		
	A22		1		1	1	1		1	
	A23			1		1	1			1
	A31				1			1	1	
	A32					1		1	1	1
	A33						1		1	1
影響該位置的 棋子數量		3	4	3	4	5	4	3	4	5

3	4	3
4	5	4
3	4	3

(一) 從頂角出發

【溝通和命名】

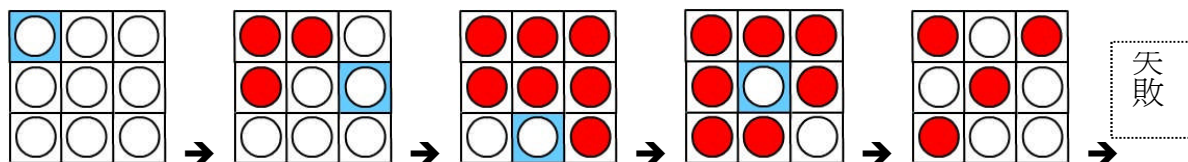
這四種翻法看起來不同，但因棋盤具有對稱性，所以，轉一下就成為一樣的方式。



我們將九個棋子依「影響該位置的棋子數量」做分類：

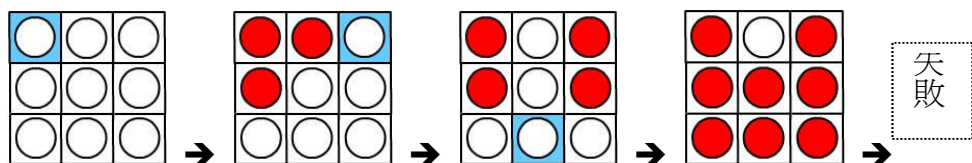
- 頂角棋子(受本身與相鄰二顆影響)：在四個角落的棋子，有 A11、A13、A31、A33。
- 邊上棋子(受本身與相鄰三顆影響)：在邊線上的棋子，有 A12、A21、A23、A32。
- 中間棋子(受本身與相鄰四顆影響)：四周都有棋子圍著，有 A22。

1. 在翻動的過程中，只翻動一個頂角，以 A11 代表

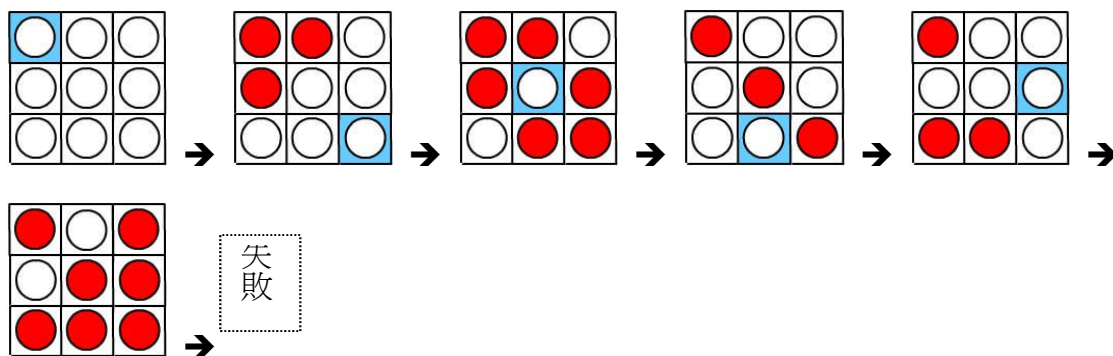


2. 在翻動的過程中，只能翻動二個頂角

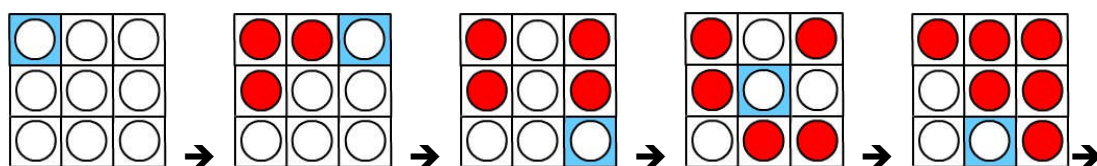
(1) 兩頂角相鄰，以(A11、A13)作代表。

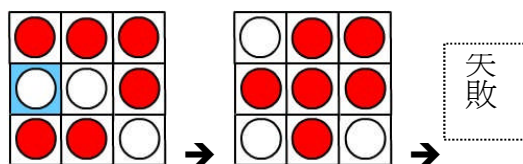


(2) 兩頂角相對，以(A11、A33)作代表。

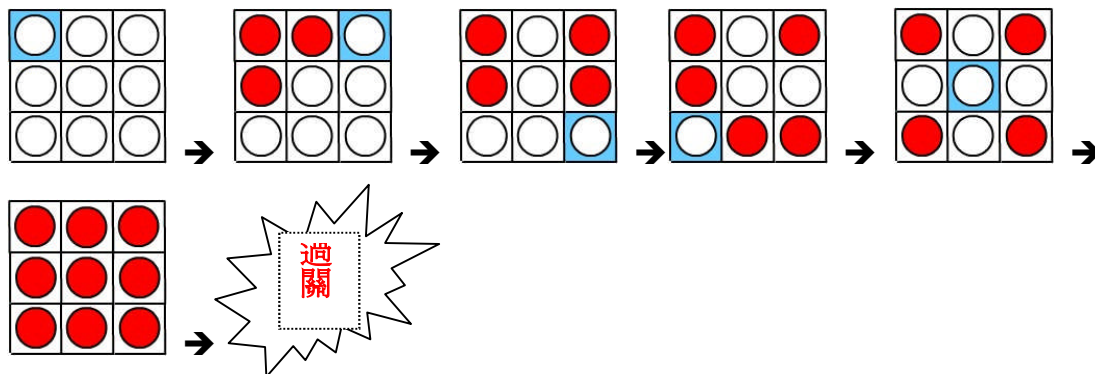


3. 在翻動的過程中，只能翻動三個頂角以(A11、A13、A33)做代表，其他組合只要轉個角度就好了。





4. 在翻動的過程中，翻動四個頂角(A11、A13、A31、A33)



【思考】

從記錄當中，我們覺得要過關就得翻四個角頂與中間的棋子才可以達成，但是我們又在考慮：

可能一：會不會有某一個棋子不能翻，一翻動就無法過關而不是像上面所說的一定需要四個頂角和中間的棋子。

可能二、幾個頂角與中間棋子 A22 所形成的結果，可不可以用 A12、A21、A23、A32 來代替？這樣，也許就有不一樣的解法。

(二) 找出暗藏中的可怕陷阱

我們將每個位置所會影響到的棋子做了一個 Excel 檔案，減輕在操作上的負擔，如下圖。

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L			
		A11	A12	A13	A21	A22	A23	A31	A32	A33		次數			
1															
2	A11		1	1		1						1			
3	A12			0	0		0					1		1	1
4	A13				1	1		1				1		1	1
5	A21		0			0	0		0			1		1	1
6	A22			1		1	1	1		1		1		1	1
7	A23				0		0	0			0	1		1	1
8	A31					1			1	1		1		1	1
						0		1	0	0	0	1		1	1
12															
13	翻次		1	3	1	3	1	3	1	3	1				
14															

程式：
=SUM(B2:B10)

程式：
=IF(MOD(D13,2),1,"")

“(空白)代表黑色面；1代表紅色面。用來模擬棋盤的真實情況。

在棋盤相對位置上的數字，代表該棋子被翻動的次數

程式：
=L9

【使用方式】

- (1) 請在「次數」字樣的字塊上填上數字「1」，若有數字則代表你翻動該棋子，而這個操作過程，將會引發黃字格子上的數字變化。
- (2) 電腦會自動將黃色格子上每一行的數字加總在畫面最下面的「翻次」，這所代表的是該棋子被翻動的次數(包含了被相鄰棋子影響，而翻動的次數)。
- (3) 在畫面右上角的是「模擬真實棋盤上的情況」，若浮現的數字是「1」，代表是呈現紅色面。
- (4) 在畫面右下角的是「呈現相對棋子有沒有翻動過」。

原本，我們想要將所有的翻法都詳列出來，但預估大約將近快一百種，大家認為應該有更有效率的方法。在思考過後，我們回想之前曾想過：「是否可用幾個邊上棋子，來代替成功翻法中的幾個頂角棋子和中間棋子」。所以，我們嘗試強制一定要用邊上棋子。

【簡化問題說明】棋盤為 3X3 有對稱性，所以有些翻法其實可以當成同一類，因為轉個角度就一樣，所以底下結果列表，單就代表的棋子來做呈現。

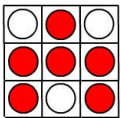
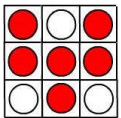
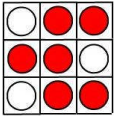
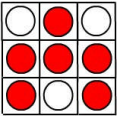
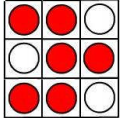
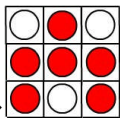
(1) 翻動一個邊上棋子

以 A12 代表。			
	翻動 A12 的結果		順時鐘轉 180 度 →
	順時鐘轉 90 度 →		
	順時鐘轉 270 度 →		

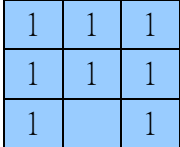
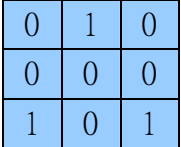
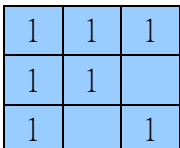
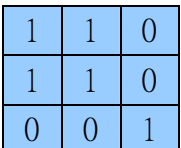
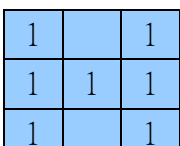
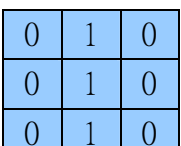
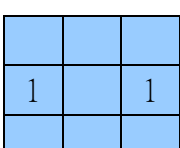
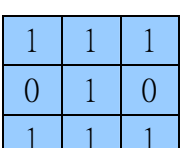
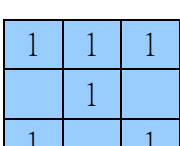
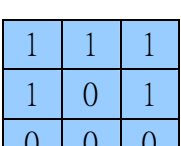
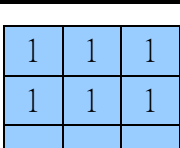
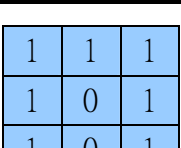
(2) 翻動二個邊上棋子

以 A12 + A21 為代表			
	翻動 A12、A21 的結果		順時鐘轉 180 度 →
	順時鐘轉 90 度 →		
	順時鐘轉 270 度 →		
以 A12、A32 為代表			
	翻動 A12、A32 的結果		順時鐘轉 90 度 →

(3) 翻動三個邊上棋子

以 A12、A21、A23 代表。		
	翻動 A12、A21、A23 的結果	
	順時鐘轉 90 度 →	
	順時鐘轉 270 度 →	

1. 結果列表

項次	翻動的位置	翻動幾個頂角棋子	翻動幾個中間棋子	翻動幾個邊上棋子	電腦圖形結果	
					模擬棋盤	「1」：翻動棋子的位置
1	A12、A31、A33	2	0	1		
2	A12、A21、A33、A22、A11	2	1	2		
3	A12、A32、A22	0	1	2		
4	A12、A32、A22、A11、A13、A31、A33	4	1	2		
5	A12、A21、A23、A11、A13	2	0	3		
6	A12、A21、A23、A11、A13、A31、A33	4	0	3		

7	A12、A21、A23、 A11、A13、A31、A33 A22	4	1	3	<table><tr><td>1</td><td></td><td>1</td></tr><tr><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td></td><td>1</td><td></td></tr></table>	1		1					1		<table><tr><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr><tr><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr><tr><td>1</td><td>0</td><td>1</td></tr></table>	1	1	1	1	1	1	1	0	1
1		1																						
	1																							
1	1	1																						
1	1	1																						
1	0	1																						
8	A12、A21、A23、 A32、A11、A13、 A31、A33 A22	4	1	4	<table><tr><td>1</td><td></td><td>1</td></tr><tr><td></td><td>1</td><td></td></tr><tr><td>1</td><td></td><td>1</td></tr></table>	1		1		1		1		1	<table><tr><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr><tr><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr><tr><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr></table>	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1		1																						
	1																							
1		1																						
1	1	1																						
1	1	1																						
1	1	1																						

2. 發現：從這些記錄看來：只要有一個邊上棋子被翻動，就無法過關，所以，過關的方法就只有「翻動四個頂角棋子和中間棋子」。

(三) 數字會說話

光做這麼多的記錄眼睛早就累了，但我們心裡想，老師一直會說：「這麼多的組合裡，你們怎麼可以肯定的說：『只能翻動四個頂角棋子和中間棋子，翻動其他的就無法成功呢!』。」爲了讓老師心服口服，我們乾脆用數學算式來說服老師。

1. 假設：

A11 翻動次數 = a；A12 翻動次數 = b；A13 翻動次數 = c

A21 翻動次數 = d；A22 翻動次數 = e；A23 翻動次數 = f

A31 翻動次數 = g；A32 翻動次數 = h；A33 翻動次數 = i

A11 被翻動 (a+b+d)次	A12 被翻動 (a+b+c+e)次	A13 被翻動 (b+c+f)次
A21 被翻動 (a+d+e+g)次	A22 被翻動 (b+d+e+f+h)次	A23 被翻動 (c+e+f+i)次
A31 被翻動 (d+g+h)次	A32 被翻動 (e+g+h+i)次	A33 被翻動 (f+h+i)次

2. 九條算式，各自代表每一個棋子可能被翻動的次數。

第一次運算：

必須符合的條件

前左邊所推論出來的關係

① $a + b + d = 1$

② $a + b + c + e = 1$

③ $b + c + f = 1$

④ $a + d + e + g = 1$

⑤ $b + d + e + f + h = 1$

⑥ $c + e + f + i = 1$

⑦ $d + g + h = 1$

⑧ $e + g + h + i = 1$

⑨ $f + h + i = 1$



⑩ 從①、②知道 $d = c + e$

⑪ 從⑧、⑨知道 $f = e + g$

⑫ 從⑦、⑧知道 $d = e + i$

⑬ 從②、③知道 $a + e = f$

⑭ 從⑩、⑫知道 $c = i$

⑮ 從⑤、⑥知道 $c + i = b + d + h$

⑯ 從⑥、⑨知道 $h = c + e$

⑰ 從⑬、⑪知道 $a = g$

⑱ 從⑩、⑰知道 $h = d$

第二次運算：這樣的結果還不夠清楚，所以，我們再把第一次運算的那些未知數數量減少，用 g 代替 a；用 d 代替 h；用 i 代替 c。

必須符合的條件	前左邊所推論出來的關係
① $g + b + d = 1$	⑩ 從①、②知道 $d = i + e$
② $g + b + i + e = 1$	⑪ 從②、③知道 $f = g + e$
③ $b + i + f = 1$	⑫ 從④、⑤知道 $g + g = b + f + d$
④ $g + d + e + g = 1$	⑬ 從⑤、⑥知道 $i + i = b + d + d$
⑤ $b + d + e + f + d = 1$	⑭ 從⑤、⑨知道 $i = b + d + e$
⑥ $i + e + f + i = 1$	⑮ 從③、⑨知道 $d = b$
⑦ $d + g + d = 1$	⑯ 從⑫、⑪知道 $g = b + e + d$
⑧ $e + g + d + i = 1$	⑰ 從⑭、⑯知道 $i = g$
⑨ $f + d + i = 1$	

第三次運算：再接再勵，我們再把第二次運算的那些未知數數量減少(用 i 代替 g；用 b 代替 d)。

必須符合的條件	前左邊所推論出來的關係
① $i + b + b = 1$	
② $i + b + i + e = 1$	從④、⑥知道 $b = f$
③ $b + i + f = 1$	從⑤ 知道 $e = 1$
④ $i + b + e + i = 1$	
⑤ $b + b + e + f + b = 1$	
⑥ $i + e + f + i = 1$	
⑦ $b + i + b = 1$	
⑧ $e + i + b + i = 1$	
⑨ $f + b + i = 1$	

從這三次的運算結果，我們可以清楚的了解

要能符合原來的那九條等式，必須達到下列條件：

- | | |
|------------------------|--------------------|
| 1. $a = g = c = i$ | 4. $f + f + i = 1$ |
| 2. $b = d = f = h$ | 5. $e = 1$ |
| 3. $i + i + f + e = 1$ | |

3. 現在使用推導的數學結果，來驗證我們操作的結果是否正確？

【假設一】邊上棋子 A12 要翻動

依據數學推導的結果，則 A21、A23、A32 都要翻，所以

1. $h = d = f = b = 1$(符合 1.)

2. 設定 $e = 1$ (符合 5.)

3. $f + f + i = 1$ (條件 4)

所以 $i = 1$ (新式加法)

4. $i + i + f + e = 1$ (條件 3)

所以 $1 + 1 + 1 + 1 = 0$ (不等於 1)(不符合 3.)

假設是錯誤的。

【假設二】邊上棋子 A12 不要翻動

依據數學推導的結果，則 A21、A23、A32 都不能翻，所以

1. $h = d = f = b = 0$(符合 1.)

2. $e = 1$ (符合 5.)

3. $f + f + i = 1$ (條件 4)

所以 $i = 1$ (新式加法)

4. $i + i + f + e = 1$ (條件 3)

所以 $1 + 1 + 0 + 1 = 1$ (符合 3.)

完全符合，也因此證實了在 3X3 的棋盤上，不能翻動邊上棋，否則就會失敗。

(四) 操盤手祕訣大公開

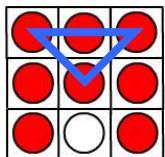
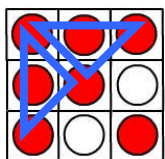
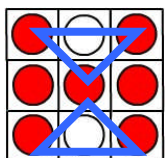
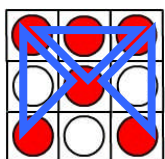
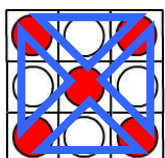
在我們沒日沒夜地埋頭尋出過關翻法的那段日子裡，桌上盡是滿滿的棋譜，在不經意的相互拿來比較的當下，我們突然發現了一個大祕密，這也是我們所向無敵的祕訣，說明如下：

1. 圖形舉例說明

	翻棋的位置	棋盤結果	翻棋的位置	棋盤結果
只用一個「邊上棋子」	A12、A31		A12、A33	
	A12、A31、A33		A12、A22、A31、A33	
用二個「邊上棋子」	A12、A21、A33		A11、A12、A21、A22、A33	
	A12、A32、A22		A23、A32、A11、A22	
	A21、A23、		A23、A32、A11、A22、A33	

2. 文字說明：我們先注意只用一個「邊上棋子」的部份，當在 A11、A13、A22、A31、A33 都是翻成紅色時，就會有一個現象，就是唯一使用的那個「邊上棋子(A12)」的對面那個棋(A32)就會是黑色面。而再來看用二個「邊上棋子」的部份，也是一樣，只要是在 A11、A13、A22、A31、A33 都是翻成紅色時，它們兩個邊上邊上棋子(A12、A21)」的對面那個棋就會是黑色面(A32、A23)。

完整列表

翻棋的位置	棋盤結果
(A12、A31、A33) = (A21、A33、A13) 順時鐘轉 90 度 = (A32、A11、A13) 順時鐘轉 180 度 = (A23、A11、A31) 順時鐘轉 270 度	
(A12、A21、A11、A22、A33) = (A21、A32、A13、A22、A31) 順時鐘轉 90 度 = (A23、A32、A11、A22、A33) 順時鐘轉 180 度 = (A12、A23、A13、A22、A33) 順時鐘轉 270 度	
(A12、A32、A22) = (A21、A23、A22) 順時鐘轉 90 度	
(A12、A21、A23、A11、A13) = (A21、A12、A32、A11、A31) 順時鐘轉 90 度 = (A21、A32、A23、A31、A33) 順時鐘轉 180 度 = (A12、A23、A32、A13、A33) 順時鐘轉 270 度	
(A12、A21、A23、A32、A11、A13、A31、A33、A22)	

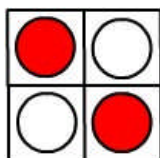
由這樣的規律，其實無論之前已經翻過那些棋子，我們都能馬上找出來，因為只要把那五個位置 A11、A13、A22、A31、A33 都想辦法翻成紅色面，再看看那裡有黑色面，一眼就能知道在它的對面那個邊上棋子曾被人翻過。

四、趁勝追擊：4x4 棋盤、 5x5 棋盤

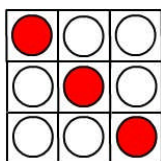
(一) 找出捷徑

翻法跟棋盤的對角線有關。

- 2x2 棋盤的過關翻法：(A11→A22→A12→A21)：



- 3x3 棋盤的過關翻法：(A11→A13→A31→A33→A22)，但也可以是 (A11→A22→A33→A13→A31)，同樣也是翻對角線。



【發現】

開始時，先把在對角線上的棋子翻成紅色面，再把這條紅線當成對稱軸，線的左邊翻動那裡，線的右邊就翻動它對應的棋子，所翻棋子的位置呈現對稱，而且對稱軸正好是對角線。

- (二) 大膽假設：對於 $n \times n$ 的棋盤要快速過關，首先，要先翻對角線的棋子：A11、A22、A33、A44、…；再來，以所設定的那條對角線當成對稱軸，在這條對稱軸的兩側翻相對應的棋子，就能成功。

1. 4x4 的棋盤

A11	A12	A13	A14
A21	A22	A23	A24
A31	A32	A33	A34
A41	A42	A43	A44

4x4 過關翻法(一)

順序	翻動的棋子位置	棋盤情況	順序	翻動的棋子位置	棋盤情況
1	A11		5	A31	
2	A22		6	A13	
3	A33		7	A43	
4	A44		8	A34	

解法一：如上所述。

解法二：(A11、A22、A33、A44、A41、A14、A32、A23、A13、A31、A24、A42)

【疑問】

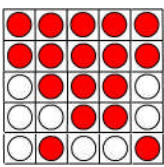
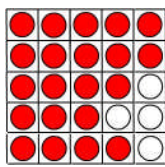
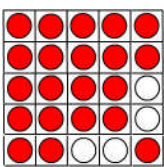
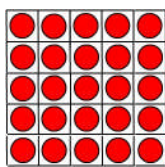
在過程中，我們看到從第 1 步到第 6 步(扣掉第 4 步)，就是在解 3x3 棋盤的翻法，這是不是代表著其實 5x5 棋盤可以用 4x4 棋盤的翻法來破解？

2. 5x5 的棋盤

A11	A12	A13	A14	A15
A21	A22	A23	A24	A25
A31	A32	A33	A34	A35
A41	A42	A43	A44	A45
A51	A52	A53	A54	A55

5x5 過關翻法

順序	翻動的棋子位置	棋盤情況	順序	翻動的棋子位置	棋盤情況
1	A11		7	A13	
2	A22		8	A42	
3	A33		9	A24	
4	A44		10	A14	
5	A55		11	A23	
6	A31		下頁還有四個步驟		

12	A32		14	A54	
13	A41		15	A45	

【發現二】

在這過程中，我們看到從第 1 步到第 13 步(扣掉第 5 步)，是剛才解 4x4 棋盤的第二種翻法，這說明 5x5 棋盤可以用 4x4 棋盤的翻法來破解。

我們的觀察結果沒有錯，真是跟對角線有關，但是，還是得運用數學式子來證明。但是，光 4x4 棋盤上，就有 16 個棋子，要去討論每個棋子翻動與不翻動，就需要有 16 個未知符號，這使我回想起在算 3x3 的經驗~。如果要算 5x5 棋盤，那就得要有 25 個未知符號，我們笑著說：「就連英文單字都快要無法應付了。」

我們仔細去想如果我們是對的，也就是說：「如果，過關的條件之一：對角線的棋子都要翻動」，那麼原來 4x4 棋盤要討論的 16 個未知符號，就可以變成討論(16-4) 個未知符號就可以；原來 5x5 要討論的 25 個未知符號，也可以變成討論(25-5)個未知符號就行，這會精簡了我們在找其他不是在對角線的棋子之間的關係。這些尚未成熟的想法，就留待日後慢慢深思吧！

伍、研究結果

經過一連串的記錄與不斷的假設、驗證，終於讓我們找出了那麼一些些的規律：

一、過關條件：

1. 在 3x3 的棋盤中，想要過關就必須要翻滿四個頂角棋子和中間棋子。
2. 只要翻動任何一個中間棋子，則這盤棋就無法過關。
3. 從算式關係，我們知道 A11、A13、A31、A33 的翻動次數要一樣；A12、A21、A23、A32 的翻動次數要一樣。

二、觀察得知：

在頂角棋子和中間棋子都是紅色面時，會有下列的規則：

- (1) 黑色面棋子的個數，就是中間棋子翻動次數為 1 次的數量。
- (2) 黑色面棋子的位置正對面，就是翻動為 1 次的中間棋子。

三、我們預測： $n \times n$ 的棋盤，只要先翻對角線上的棋子，就能簡化或較快速找出過關翻法。

陸、討論

一、新的遊戲規則

在我們研究出「操盤手祕訣」的時候，心裡就在想著如何提升遊戲的難度，因為大家都知道如何從頭到尾翻成紅色面。所以，我們想出了另一個玩法，這個規則其實是結合大富翁的攻地遊戲，我們通稱它為「搶地盤」。

(一)「搶地盤」的玩法：以 3×3 的棋盤為主。

1. 玩家有兩人，首先兩人各自選好要黑色面，或是紅色面。
2. 再來必須猜拳九次，贏的人可以把屬於自己顏色的棋子放在對自己有利的位置上(自由選擇)。
3. 等完全放好了後，再猜一次拳就可以開始了。接下來的玩法就跟原來的一樣：若其中一個棋子翻面時，與此相鄰的所有棋子都必須跟著翻面。

新的規則比較多變化，一半要靠手氣；一半要靠實力，如果你有幸能有一手好地盤，那勝利的機會比較高，但也有人擁有五個自己的棋子，但卻在不知不覺的情況下，被另一方玩家給收拾掉。平時在玩的時候，老師還會突然從旁邊冒出來開始說他的人生哲理：「什麼~人生就像是一盤棋，有些人原來擁有很多屬於自己顏色的棋子，卻不知如何使用，反而讓它悄悄溜走；有些人一生下來，雖然沒有什麼可以幫助他的，可是憑著他的雙手，也可以”翻”出一片天。」說到這裡大家都笑開了，直說老師真不愧是老師，連在玩遊戲都能說出長篇大論，真是服了他了。

二、在尋找 4×4 、 5×5 的過程中，發現： 4×4 的過關翻法的前頭就是 3×3 的破關翻法；而 5×5 的過關翻法的前頭就是 4×4 的破關翻法。這讓我們想到：那 6×6 、 7×7 、 $\dots$ 、 $(n-1) \times (n-1)$ 是不是都有可能用 5×5 、 6×6 、 $\dots$ 、 $n \times n$ 呢？

如果我們要繼續追查下去，則我們必須去把 5×5 的過關翻法找出來，再去找 6×6 的…一直下去，沒完沒了。所以，我們必須想出一個可以用來代表 4×4 的算式，好用它來證明 5×5 的可以接著它繼續翻下去，說不一定，就找出可以表示 5×5 的一個算式，這樣就好像是接龍一樣，找到算不盡的大數棋盤，那就厲害了。

柒、結論

一開始接觸到這遊戲時只覺得十分有趣，並沒有做額外的思考。爲了能比同學快一步找出答案，所以只要下課時，就會去跟老師討論「是否有什麼快速的解題方法？」。爲了不走冤枉路，所以我們利用「棋譜」**紀錄**的方式來做研究，我們觀察翻動的那個棋子與鄰近棋子之間的關係，從中**找出可能的規律**。

我們學習到利用**觀察**「棋譜」的方式，來將破解方法**從繁化簡**，例如：翻蓋的次數關係(若棋子被翻動偶數次，則就等於是沒有翻動過；若棋子被翻蓋奇數次，其結果都跟被翻過 1 次相同，因此我們大膽的預設，棋子翻動的情況就是 2 種類型)，來減少紀錄和不相關數字的干擾，這也讓我們發明了新的加法($1+1=0$)。

面對 3×3 的棋盤時，我們不只把九個棋子翻動的關係找出來，還能看出之前翻過那些棋

子，這些的新發現，使得我們越找越有意思，也明白了生活中一切看似沒什麼關係的兩者，其實只要仔細去觀察，就會有不一樣的結果。

最後，多虧有這次的研究，讓我們在一成不變的學校裡，找出了一個新遊戲-「搶地盤」，最重要的是這是我們自己發明的喔!!呵!

捌、參考資料及其他

1. 昌爸工作坊：<http://www.mathland.idv.tw/>
2. 南一書局：國民小學數學第十冊(五下)。修訂版。民國 94 年 2 月。

評語

080409 操盤手全面翻紅

本作品能將動作改變狀況轉換成數字「0」和「1」，且以「新加法」算式運算來呈現各個操作步驟所產生的關係與結果，以達到以簡御繁之效果，頗值得肯定。另外分析與推斷清晰合理，口頭說明流暢，操作熟練，顯示觀念清楚，團隊表現不錯，值得給予佳作，以茲鼓勵。