

中華民國第四十六屆中小學科學展覽會
作品說明書

國小組 數學科

080405

數字排排看-正魔多邊形的尋找

學校名稱： 桃園縣大溪鎮員樹林國民小學

作者：	指導老師：
小四 李軍	陳錫湖
小四 陳筱琪	李錫仁
小四 樂美筠	

關 鍵 詞：正魔多邊形、試誤法、分析法

中華民國第 四十六 屆中小學科學展覽數學科

數字排排看 — 正魔多邊形的尋找

壹、摘要

從魔方陣的變形，引伸到正魔多邊形的研究，由原先採用試誤的方法，看出解答的非唯一性，以及經由旋轉、翻轉在解答上的重複性；希望能在解決問題以前先有部分的預測，於是分析這些可能解答的性質，以及找出解答的一種方法，也請老師幫忙就這一部分做些證明，而部分的努力也使我們在使用電腦處理時獲得一些益處。

在分析、使用電腦協助解決問題以後，我們也不再滿足於原來設定的問題，試著分析出可能的解答個數，那是多到無法想像的；我們也增減每邊的數目，看如何尋找解答；一些資料也指出，每邊三個數字也能構成正魔多邊形，於是每邊三個數字正魔多邊形的尋找，也變成我們研究的方向，因為這和我們原來的問題有很大的相似性，於是把以前的基礎應用在這裡。

我們的研究是一個開始，也是一些方向，希望以後有更多人的努力……。

關鍵字詞

正魔多邊形、試誤法、分析法、S 型分配

貳、研究動機：

學校課程，在上整數的四則運算時，講到三個運算的順序規則：有括號先算、先乘除後加減、由左而右計算；可以將一些問題，用幾個算式把思考的步驟記錄下來，很有趣。

有一天，在網路上收到一個很有趣的數學益智遊戲—魔方陣，它是在每邊 N 格的正方形內排列出 $1, 2, 3, \dots, N \times N$ 個數字，而且要求每一直行、橫列、斜的兩條對角線的數字加起來都要一樣，哇！好難，好神奇唷！

後來，老師看到以後，把中間的數字挖空，只剩下周圍的數字，然後把它變形，可以是三角形、四邊形、五邊形、六邊形……後，看看是否也有這樣的性質，而我們是否也可以找到相符合的數字，後來在網路及書上才得知這叫做—正魔多邊形。

當我們愈做愈大以後，發現單靠紙筆、計算機似乎不能滿足需要，而且會變得很辛苦，於是想到利用電腦。哇！好炫！利用電腦幫助我們尋找，不但可以名正言順的使用電腦，而且發現電腦除了遊戲以外，還可以實際幫我們解決問題。

與教材相關性

第八冊第一單元 整數的乘法

第八冊第六單元 整數的除法

第八冊第七單元 整數四則應用

第八冊第十單元 周長及面積

第七冊第二單元 乘法

第七冊第六單元 除法

參、研究目的：

在研究這個問題以前，我們先討論一番，希望能就這個題目儘可能完整的探討，確立研究的一些方向。

首先，在老師提出正魔多邊形的問題後，我們要先尋找可能的組合，組合是否唯一？那方法呢？是否可以分析出一套好用的方法？在邊數變多了之後，也能夠找出來。

其次，當能夠找出正魔多邊形的解答以後，是否每邊一定要那麼多的數字？最少要幾個數字才能滿足同樣的需求呢？經由簡單的推理，似乎每邊三個數字是最少的要求，因為如果只有兩個數字在端點，顯而易見在三角形即為不可能。

於是在和老師、自然老師、電腦老師討論以後，希望能達成以下幾個目標：

- 一、數學中”數與形”的結合，探討數學變化的奧秘。
- 二、找出任意正 N 多邊形，每邊 N 個數字的魔多邊形數字的找法及個數的探討。
- 三、找出任意正 N 多邊形，每邊三個數字的魔多邊形數字的找法。
- 四、利用電腦協助尋找解答，增加尋找的效率。

肆、研究設備及器材：

紙、筆、電腦、數字卡、計算機。

伍、研究過程及方法：

- 一、以試誤法找出三角形、四邊形、五邊形、六邊形的每邊三、四、五、六個數字的解，並計算各個解的各邊和/總和：

(一)、三角形：

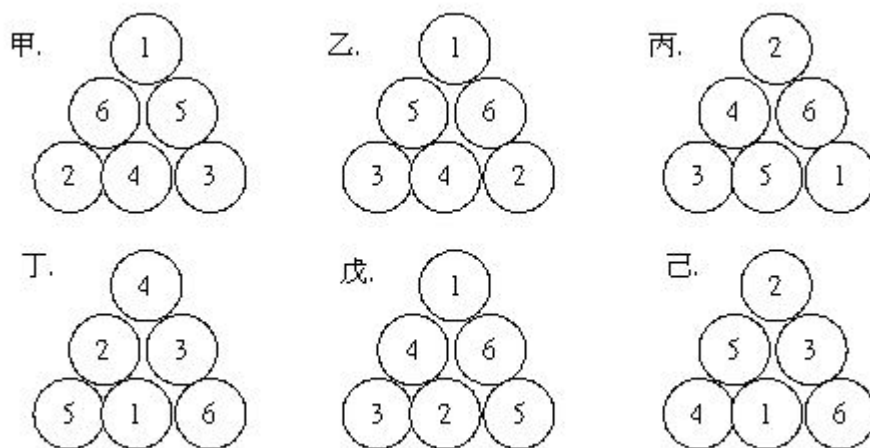


圖1.以試誤法找出三角形每邊三個數字的解

(二)、四邊形：

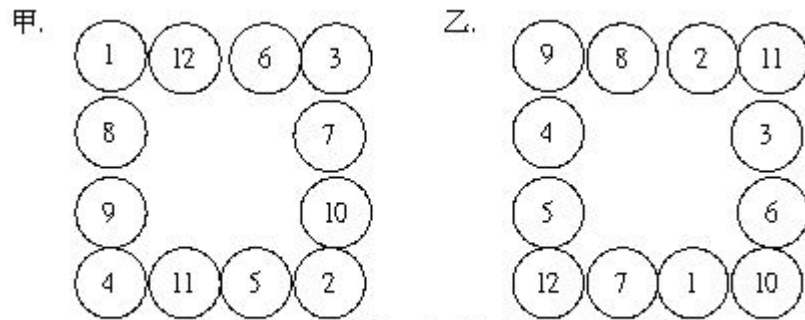


圖2.以試誤法找出四邊形每邊四個數字的解

(三)、五邊形：

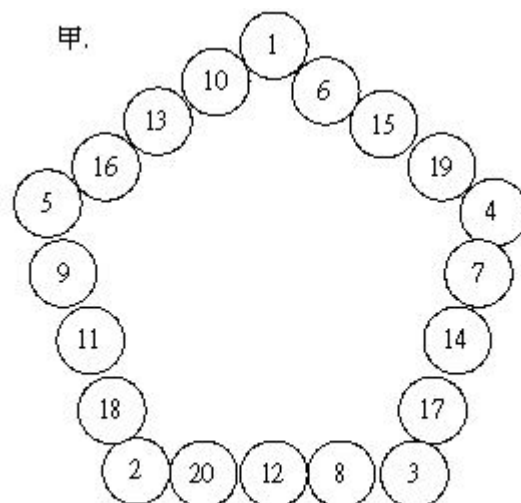


圖3.以試誤法找出五邊形每邊五個數字的解

(四)、六邊形：

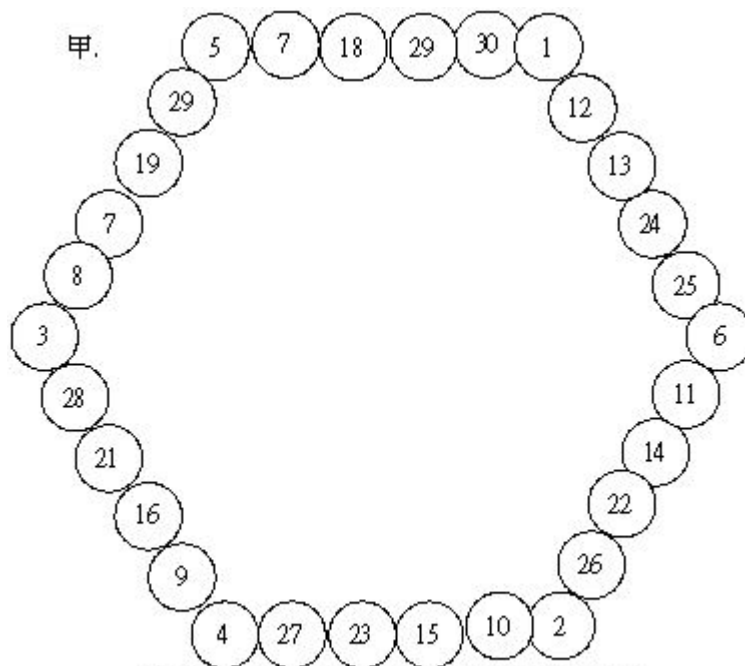


圖4.以試誤法找出六邊形每邊六個數字的解

(五)、計算各邊和/總和

表 1.三、四、五、六邊形中各邊和及總和

	1	2	3	4	5	6
三角形	9/27	9/27	9/27	12/36	10/30	11/33
四邊形	22/88	30/120				
五邊形	45/225					
六邊形	81/486					

二、以分析法找出可能的組合：

- (一)、觀察試誤法的結果，可以知道在計算 N 多邊形各數字總和的時候，每個在 N 個角的數字都會被計算兩次，其他數字都只被計算一次。
- (二)、如果希望所得的總和最大，則要把最大的 N 個數放在個角落(如圖 1 中的丁，圖 2 中的乙)，相反的，如果希望所得的總和最小，則可以把最小的 N 個數放在 N 個頂點(如圖 1、圖 2、圖 3、圖 4 中的甲)。
- (三)、 N 多邊形中每邊有 N 個數，而 N 個頂點被重複算了一次，所以共有 $N \times (N - 1)$ 個數，所以它們是 $1, 2, 3, \dots, N \times (N - 1)$ 。
- (四)、可以根據可能最大/最小的取法，事先算出總和，及各邊的和：

1、三角形中：

共有 $3 \times (3 - 1) = 6$ 個數，為 $1, 2, 3, 4, 5, 6$

總和 $S = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21$

可能最大為： $S_{\max} = 21 + 4 + 5 + 6 = 36$ ，每邊和為： $36 \div 3 = 12$

可能最小為： $S_{\min} = 21 + 1 + 2 + 3 = 27$ ，每邊和為： $27 \div 3 = 9$

2、四邊形中：

共有 $4 \times (4 - 1) = 12$ 個數，為 $1, 2, 3, \dots, 12$

總和 $S = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 + 11 + 12 = 78$

可能最大為： $S_{\max} = 78 + 9 + 10 + 11 + 12 = 120$ ，每邊和為 $120 \div 4 = 30$

可能最小為： $S_{\min} = 78 + 1 + 2 + 3 + 4 = 88$ ，每邊和為 $88 \div 4 = 22$

3、五邊形中：

共有 $5 \times (5 - 1) = 20$ 個數，為 $1, 2, 3, \dots, 20$

總和 $S = 1 + 2 + 3 + \dots + 20 = 210$

可能最大為： $S_{\max} = 210 + 16 + 17 + 18 + 19 + 20 = 300$ ，每邊和為 $300 \div 5 = 60$

可能最小為： $S_{\min} = 210 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 225$ ，每邊和為 $225 \div 5 = 45$

4、六邊形中：

共有 $6 \times (6 - 1) = 30$ 個數，為 $1, 2, 3, \dots, 30$

總和 $S = 1 + 2 + 3 + \dots + 30 = 465$

可能最大為： $S_{\max} = 465 + 25 + 26 + 27 + 28 + 29 + 30 = 630$ ，每邊和為 $630 \div 6 = 105$

可能最小為： $S_{\min} = 465 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 486$ ，每邊和為 $486 \div 6 = 81$

- (五)、依此，可以把不合理的組合先行去掉，以節省時間。如在算三角形中，因為最小的每邊和為 9，所以邊 1-3-4 (和為 8) 的組合、邊 2-5-6 (和為 13) 的組合是不

可能的，可以先行去掉，因為三角形中每邊和最大可能為 12，最小可能為 9；另外，如果以 1-3-4 做為頂點，三邊總和為 $21+1+3+4=29$ ，或以 2-5-6 做為頂點，三邊總和為 $21+2+5+6=34$ ，都無法被 3 整除，也不能做為頂點。

三、以電腦輔助尋找每邊 N 個數字的正魔 N 邊形的解：

(一)、把最小的 N 個數字安排在 N 個頂點，再利用電腦的強大計算能力，減除部分的工作負擔。

(二)、以三角形、四邊形、五邊形、六邊形試驗

1、三角形的解，以 1,2,3 為端點即可求出一解，此即圖 1 中甲的解：

表 2. 以電腦輔助尋找每邊三個數字的正魔三角形的解

中間點	端點一	端點二	端點和	中間點	總和
6	1	2	3	6	9
4	2	3	5	4	9
5	3	1	4	5	9

2、四邊形的解，以 1,2,3,4 為端點即可求出一解，此即圖 2 中甲的解

表 3. 以電腦輔助尋找每邊四個數字的正魔四邊形的解

中間點	端一	端二	端點和	中間點	總和	中間和
6 12	1	3	4	6 12	22	18
7 10	3	2	5	7 10	22	17
5 11	2	4	6	5 11	22	16
8 9	4	1	5	8 9	22	17

3、五邊形的解，以 1,2,3,4,5 為端點即可求出一解，此即圖 3 中甲的解

表 4. 以電腦輔助尋找每邊五個數字的正魔五邊形的解

中間點	端一	端二	端點和	中間點	總和	中間和
6 15 19	1	4	5	6 15 19	45	40
7 14 17	4	3	7	7 14 17	45	38
8 12 20	3	2	5	8 12 20	45	40
9 11 18	2	5	7	9 11 18	45	38
10 13 16	5	1	6	10 13 16	45	39

4、六邊形的解，以 1,2,3,4,5,6 為端點即可求出一解，此即圖 4 中甲的解

表 5. 以電腦輔助尋找每邊六個數字的正魔六邊形的解

中間點	端一	端二	端點和	中間點	總和	中間和
7 18 20 30	1	5	6	7 18 20 30	81	75
8 17 19 29	5	3	8	8 17 19 29	81	73
9 16 21 28	3	4	7	9 16 21 28	81	74
10 15 23 27	4	2	6	10 15 23 27	81	75
11 14 22 26	2	6	8	11 14 22 26	81	73
12 13 24 25	6	1	7	12 13 24 25	81	74

(三)、求解的步驟為

- 1、以 $1, 2, 3, \dots, N$ 排入 N 個頂點，儘量使端點和的差距減少，亦即小的數目和大的數目交錯，以下為數例：

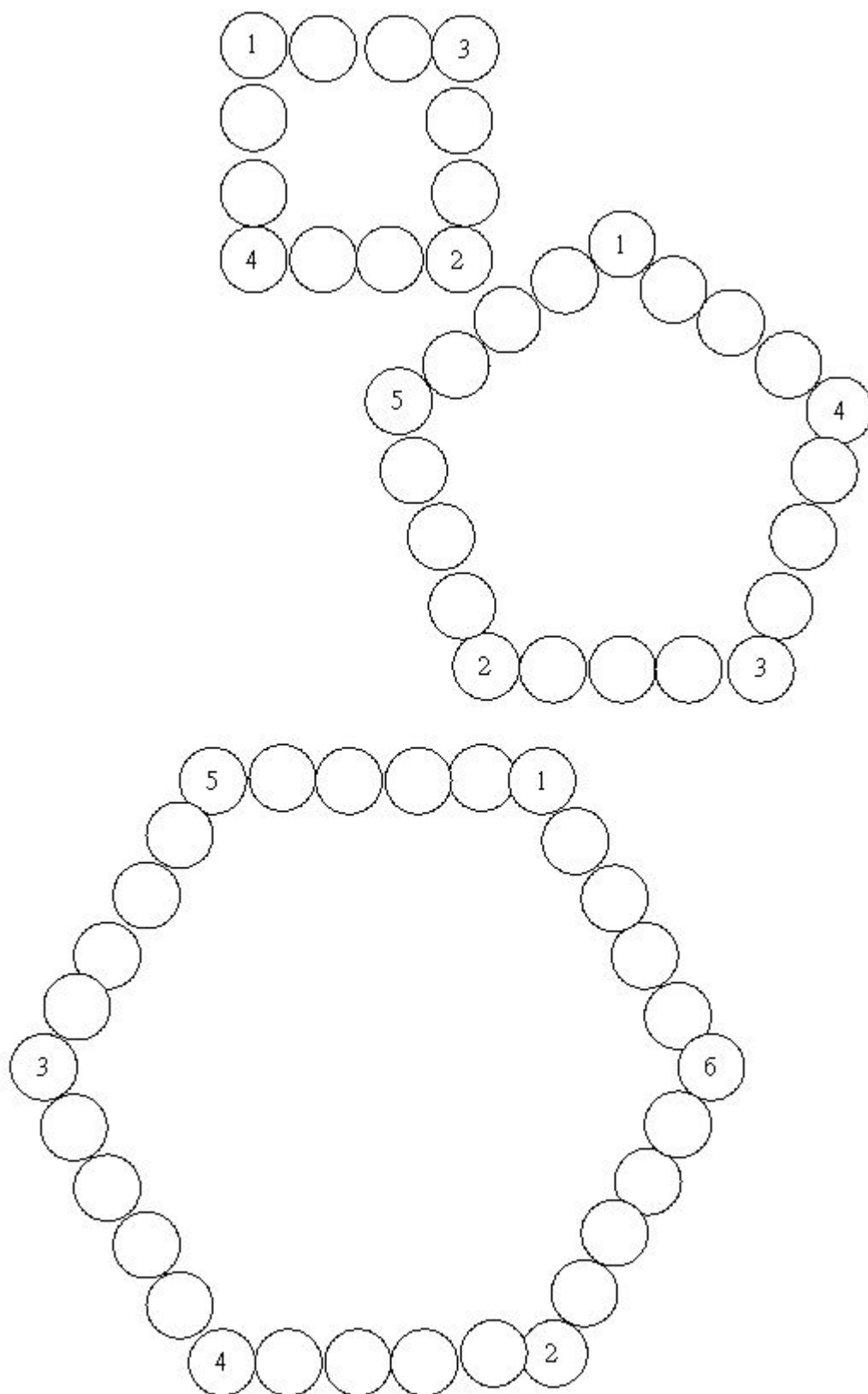


圖5.將 N 個數字置於頂點的排法

2、將剩餘的 $N+1, N+2, N+3, \dots, N \times (N-1)$ 依 S 型分配排列，如下

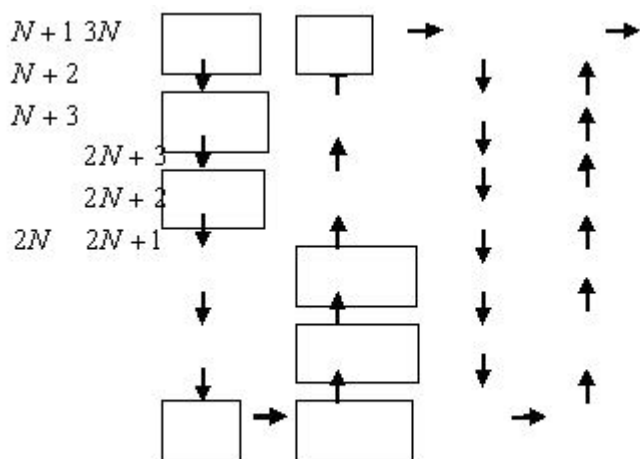


圖6.將剩餘數字S型排列的排法

3、這樣子排列以後，在 N 為偶數時，每一列數字和(中間和)均為相同， N 為奇數時也能把各邊的和相差控制在相當小($N-1$)內，接著調整超過與不足的邊即可，因為是利用電腦計算，所以可以很快找到一組解。

(四)、以上述方法求得之 20 邊形 20 數的解

表 6.每邊 20 數正魔 20 邊形的解

1	20	21	60	61	100	101	140	141	180	181	220	221	260	261	300	301	340	341	380
20	2	22	59	62	99	102	139	142	179	182	219	222	259	262	299	302	339	342	378
2	18	23	58	63	98	103	138	143	178	183	218	223	258	263	298	303	338	343	379
18	4	24	57	64	97	104	137	144	177	184	217	224	257	264	297	304	337	344	376
4	16	25	56	65	96	105	136	145	176	185	216	225	256	265	296	305	336	345	377
16	6	26	55	66	95	106	135	146	175	186	215	226	255	266	295	306	335	346	374
6	14	27	54	67	94	107	134	147	174	187	214	227	254	267	294	307	334	347	375
14	8	28	53	68	93	108	133	148	173	188	213	228	253	268	293	308	333	348	372
8	12	29	52	69	92	109	132	149	172	189	212	229	252	269	292	309	332	349	373
12	10	30	51	70	91	110	131	150	171	190	211	230	251	270	291	310	331	350	370
10	11	32	49	72	89	112	129	152	169	192	209	232	249	272	289	312	329	352	369
11	9	31	50	71	90	111	130	151	170	191	210	231	250	271	290	311	330	351	371
9	13	33	48	73	88	113	128	153	168	193	208	233	248	273	288	313	328	353	367
13	7	34	47	74	87	114	127	154	167	194	207	234	247	274	287	314	327	354	368
7	15	35	46	75	86	115	126	155	166	195	206	235	246	275	286	315	326	355	365
15	5	36	45	76	85	116	125	156	165	196	205	236	245	276	285	316	325	356	366
5	17	37	44	77	84	117	124	157	164	197	204	237	244	277	284	317	324	357	363
17	3	38	43	78	83	118	123	158	163	198	203	238	243	278	283	318	323	358	364
3	19	39	42	79	82	119	122	159	162	199	202	239	242	279	282	319	322	359	361
19	1	40	41	80	81	120	121	160	161	200	201	240	241	280	281	320	321	360	362

※前兩數字為端點，其餘為中間的數，每邊總和均為 3630，只調整粗斜體字部份。

(五)、以上述方法求得 15 邊形 15 數的解

表 7. 每邊 15 數正魔 15 邊形的解

1	15	16	45	53	75	76	105	106	135	136	165	166	195	196	1485
15	2	22	44	47	74	77	104	107	134	137	164	167	194	197	1485
2	13	18	43	54	73	78	103	108	133	138	163	168	193	198	1485
13	4	19	42	49	72	79	102	112	132	139	162	169	192	199	1485
4	11	20	41	50	71	80	101	114	131	140	161	170	191	200	1485
11	6	21	40	51	70	81	100	111	130	141	160	171	190	202	1485
6	9	27	39	52	64	85	99	109	129	144	159	173	189	201	1485
9	8	23	38	46	68	83	98	113	128	143	158	179	188	203	1485
8	7	24	37	48	67	90	97	110	127	142	157	178	187	206	1485
7	10	25	36	55	66	82	96	115	126	145	156	175	186	205	1485
10	5	26	35	56	65	86	95	116	125	146	155	176	185	204	1485
5	12	17	34	57	69	87	94	117	124	147	154	177	184	207	1485
12	3	28	33	58	63	88	93	118	123	148	153	174	183	208	1485
3	14	29	32	59	62	89	92	119	122	149	152	172	182	209	1485
14	1	30	31	60	61	84	91	120	121	150	151	180	181	210	1485

※前兩數字為端點，其餘為中間的數，最後為每邊總和，粗斜體字為調整的數字。

(六)、也可以用最大的 N 個數先排，再按照前面的方法找出解；或者，以任意的 $PN - (N - 1), PN - (N - 2), PN - (N - 3), \dots, PN, P$ 為自然數，等 N 個數亦可很方便找到解。即便以任意的數，未按最小差距的方法排入 N 個頂點，亦可根據多減少加的方式，逐步找到解。

(七)、當每邊可調整的點比較多的時候，找到解答的機會似乎更容易。

四、找出任意正 N 多邊形，每邊三個數字的魔多邊形數字的找法

(一)、從最少的每邊三個數字尋找起，看看是否只有一個中間點時也能找到呢？那又如何找呢？

(二)、這個問題在三角形是和一的討論一樣，所以問題是從四邊形開始的。經過一陣努力，我們找到了一些解：

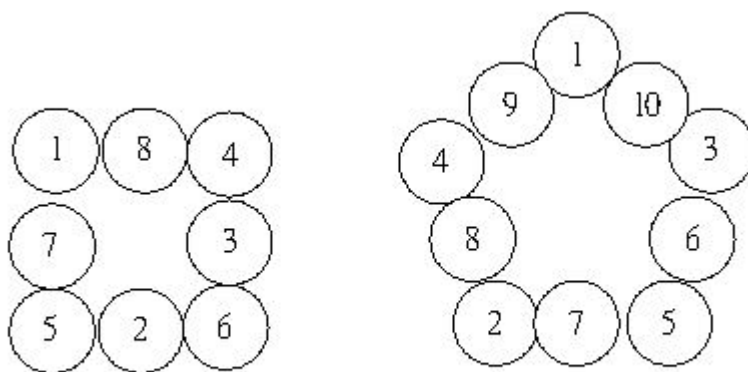


圖 7. 每邊三個數字的正魔多邊形的例子

(三)、 N 多邊形，每邊三個數的時候，共有 $3 \times N - N = 2N$ 個數，最大的總和，應該也是將最大的 N 個數放入 N 個頂點；最小的總和就是把最小的 N 個數放入 N 個頂點。

表 8.四、五、六邊形每邊三個數字的尋找範圍和頂點和

	四邊形	五邊形	六邊形
N	4	5	6
數($2N$)	8	10	12
$S = 1 + 2 + 3 + \dots + N, N + 1, \dots, + 2N$	36	55	78
$S_{\min} = S + 1 + 2 + 3 + \dots + N$	46	70	99
$S_{\max} = S + (N + 1) + (N + 2) + (N + 3) + \dots + 2N$	62	95	135
$S_{\min} \div N$	11.5	14	16.5
$S_{\max} \div N$	15.5	19	22.5
每邊和尋找範圍	12,13,14,15	14,15,16,17,18,19	17,18,19,20,21,22
N 頂點和： $N \times$ 每邊和尋找範圍 $- S$	12,16,20,24	15,20,25,30,35,40	24,30,36,42,48,54

(四)、在偶數邊時，會發現上面算出的 $S_{\min} \div N$ 、 $S_{\max} \div N$ 都是帶小數，由於每邊和都是整數，所以每邊和要從較大/小的整數找起，每次找 N 個數為頂點，計算出不合理的總和時即可放棄。

(五)、求解步驟為：

- 1、先以每邊和尋找範圍，找尋可能的 N 個頂點和，要讓每邊和為整數。
- 2、在可能的組合找到以後，將剩下的 N 個數試著放入 N 個邊， N 個頂點可以調整位置，以便適合這剩下的 N 個數加入。
- 3、如果一直沒有合適的位置擺放任何的一個數時，就是這組不合理，應該放棄，否則就找到了。在下面的例子裡，我們都用劃記的方式來表示不合理的部份。

(1)、四邊形。

表 9.四邊形每邊三個數字的尋找過程

每邊和尋找範圍 / N 頂點和	可能 N 頂點組合					
12/12	1,2,3,6	1,2,4,5				
13/16	1,2,5,8	1,2,6,7	1,3,4,8	1,3,5,7	1,4,5,6	2,3,4,7
	2,3,5,6					
14/20	1,4,7,8	1,5,6,8	2,3,7,8	2,4,6,8	2,5,6,7	3,4,6,7
	3,4,5,8					
15/24	3,6,7,8	4,5,7,8				

※劃記者表不可能的組合

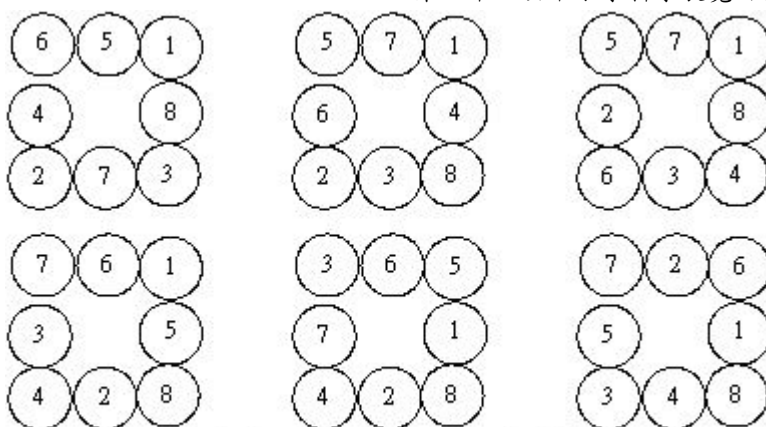


圖8.每邊三個數字的正魔四邊形的解

(2)、五邊形

表 10.五邊形每邊三個數字的尋找過程

每邊和尋找範圍/ N 頂點和	可能 N 頂點組合					
14/15	1,2,3,4,5					
15/20	1,2,3,4,10	1,2,3,5,9	1,2,3,6,8	1,2,4,5,8	1,2,4,6,7	2,3,4,5,6
16/25	1,2,3,9,10	1,2,4,8,10	1,2,5,7,10	1,3,4,7,10	1,3,4,8,9	1,3,5,7,9
	1,3,5,6,10	1,3,6,7,8	1,4,5,6,9	1,4,5,7,8	2,3,4,6,10	2,3,4,7,9
	2,3,5,6,9	2,3,5,7,8	3,4,5,6,7	1,2,5,8,9	1,2,6,7,9	
17/30	1,2,8,9,10	1,3,7,9,10	1,4,6,9,10	1,4,7,8,10	1,5,6,8,10	2,3,6,9,10
	2,3,7,8,10	2,4,5,9,10	2,4,6,8,10	2,4,7,8,9	2,5,6,7,10	2,5,6,8,9
	3,4,5,8,10	3,4,6,7,10	3,4,6,8,9	3,5,6,7,9	4,5,6,7,8,	
18/35	1,7,8,9,10	2,6,8,9,10	3,5,8,9,10	3,6,7,9,10	4,6,7,8,10	4,5,7,9,10
	5,6,7,8,9					
19/40	6,7,8,9,10					

※劃記者表不可能的組合

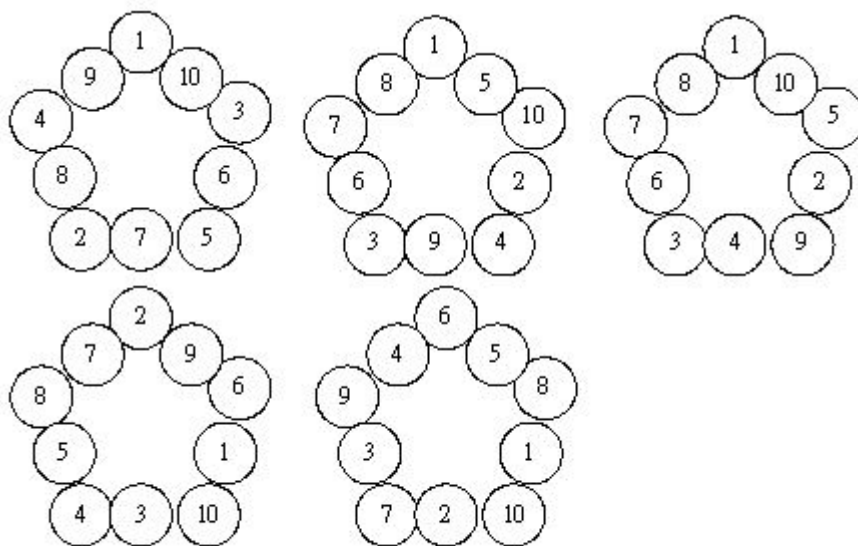


圖9.每邊三個數字的正魔五邊形的解

(3)、六邊形

表 11.六邊形每邊三個數字的尋找過程

每邊和尋找範圍/ N 頂點和	可能 N 頂點組合				
17/24	1,2,3,4,5,9	1,2,3,4,6,8	1,2,3,5,6,7		
18/30	1,2,3,4,8,12	1,2,3,4,9,11	1,2,3,5,7,12	1,2,3,5,8,11	1,2,3,5,9,10
	1,2,3,6,7,11	1,2,3,6,8,10	1,2,3,7,8,9	2,3,4,5,6,10	2,3,4,5,7,9
	2,3,4,6,7,8				
19/36	1,2,3,7,11,12	1,2,3,8,10,12	1,2,3,9,10,11	1,2,4,8,9,12	1,2,4,8,10,11
	1,2,5,7,9,12	1,2,5,7,10,11	1,2,5,8,9,11	1,2,6,7,8,12	1,2,6,7,9,11
	1,2,6,8,9,10	2,3,4,5,10,12	2,3,4,6,9,12	2,3,4,6,10,11	2,3,4,7,8,12
	2,3,4,7,9,11	2,3,4,8,9,10	2,3,5,6,8,12	2,3,5,6,9,11	2,3,5,7,8,11
	2,3,5,7,9,10	2,3,6,7,8,10	3,4,5,6,7,11	3,4,5,6,8,10	3,4,5,7,8,9
20/42	2,3,4,10,11,12	2,3,5,9,11,12	2,3,6,8,11,12	2,3,6,9,10,12	2,3,7,8,10,12
	2,3,7,9,10,11	2,4,5,8,11,12	2,4,5,9,10,12	2,4,6,7,11,12	2,4,6,8,10,12
	2,4,6,9,10,11	2,4,7,8,10,11	2,5,6,7,10,12	2,5,6,8,9,12	2,5,6,8,10,11
	3,4,5,7,11,12	3,4,5,8,10,12	3,4,5,9,10,11	3,4,6,7,10,12	3,4,6,8,9,12
	3,4,6,8,10,11	3,4,7,8,9,11	3,5,6,7,9,12	3,4,6,7,10,11	3,4,6,8,9,11
	4,5,6,7,8,12	4,5,6,7,9,11	4,5,6,8,9,10		
21/48	略				
22/54	略				

※劃記者表不可能的組合

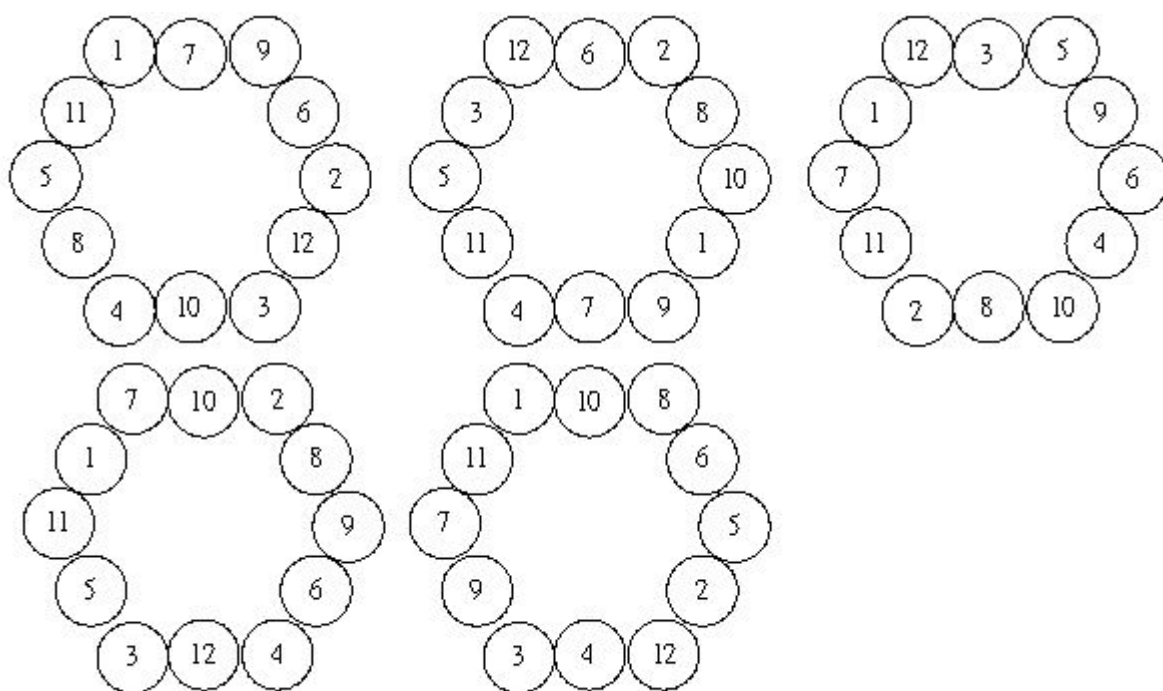


圖10.每邊三個數字的正魔六邊形的解

(六)、以此方法找出的一組 10 邊形 3 數的組合：

表 12.每邊三數正魔 10 邊形的解

3 17 11

1 19 11

1 20 10

6 15 10

6 7 18

8 5 18

8 9 14

13 4 14

13 2 16

3 12 16

※每邊和為 31

(七)、以此方法找出的一組 15 邊形 3 數的組合：

表 13.每邊三數正魔 15 邊形的解

15 16 8

15 17 7

14 18 7

14 19 6

13 20 6

13 21 5

12 22 5

12 23 4

11 24 4

11 25 3

10 26 3

10 27 2

9 28 2

9 29 1

8 30 1

※每邊和為 39

陸、研究結果

一、試誤法小發現：

(一)、三角形中 1、2、3 為相同，2 為翻轉 1 的圖形，3 為將 1 順時針旋轉 60 度後的圖形，所以應該只能算為一種。

(二)、三角形、四邊形中各邊和可能不同，五、六邊形應該也有很多可能。

(三)、當邊數增加時，用試誤法很沒有效率，也不容易找到所有的組合。

二、分析法小發現：

(一)、由三角形、四邊形、五邊形、六邊形中發現，似乎可以直接把最小的 N 個數放置於頂點，找出最小的每邊和/總和的正魔 N 邊形；而把最大的 N 個數放置頂點，找出最大的每邊和/總和的正魔 N 邊形，是嗎？於是請老師幫忙求證：

(二)、正 N 多邊形中

共有 $N \times (N-1) = N^2 - N$ 個數，從 $1, 2, 3, \dots, N-1, N, \dots, N \times (N-1)$

$$\text{總和爲 } 1+2+3+\dots+N^2-1 = \frac{(N^2-N)(N^2-N+1)}{2}$$

(三)、可能最大為：

$$\begin{aligned} & \frac{(N^2-N)(N^2-N+1)}{2} + (N^2-N) + (N^2-N-1) + (N^2-N-2) + \dots + [N^2-N-(N-1)] \\ \Rightarrow & \frac{(N^2-N)(N^2-N+1)}{2} + \frac{N[N^2-N+N^2-N-(N-1)]}{2} \\ \Rightarrow & \frac{(N^2-N)(N^2-N+1)}{2} + \frac{N[2N^2-3N-1]}{2} \end{aligned}$$

每邊和為：

$$\begin{aligned} \Rightarrow & \frac{(N^2-N)(N^2-N+1)}{2N} + \frac{N[2N^2-3N-1]}{2N} \\ \Rightarrow & \frac{(N-1)(N^2-N+1)}{2} + \frac{[2N^2-3N-1]}{2} \\ \Rightarrow & \frac{N^3-2N^2+2N-1}{2} + \frac{2N^2-3N+1}{2} \\ \Rightarrow & \frac{N^3-N}{2} \\ \Rightarrow & \frac{N(N-1)(N+1)}{2} \end{aligned}$$

分子為三連續整數的乘積，故必為 2 之倍數，所以用此分析所得是有可能為最大總和/每邊和的正魔 N 多邊形的一種解答。

(四)、同理，可能最小為：

$$\begin{aligned} & \frac{(N^2-N)(N^2-N+1)}{2} + 1+2+3+\dots+N \\ \Rightarrow & \frac{(N^2-N)(N^2-N+1)}{2} + \frac{N(N+1)}{2} \end{aligned}$$

每邊和為：

$$\begin{aligned} \Rightarrow & \frac{(N^2-N)(N^2-N+1)}{2N} + \frac{N(N+1)}{2N} \\ \Rightarrow & \frac{(N-1)(N^2-N+1)}{2} + \frac{(N+1)}{2} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \frac{N^3 - 2N^2 + 2N - 1}{2} + \frac{N + 1}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{N^3 - 2N^2 + 3N}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{N(N + 3) - 2N^2}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{N(N + 3)}{2} - N^2$$

$N(N + 3)$ 必爲一奇數，一偶數的相乘，故爲 2 的倍數，所以用此分析所得是有可能爲最小總和/每邊和的正魔 N 多邊形的一種解答。

(五)、即使以 $PN - (N - 1), PN - (N - 2), PN - (N - 3), \dots, PN, P$ 爲自然數，等 N 個數爲頂點，亦可以得證，因爲這較(四)中多了 N 個 PN ，所以當然也是可以被 N 整除的。

三、電腦輔助尋找的小發現：

(一)、每找到一個解，就表示找到許多的解，因爲當每邊 N 個點時：

1、其中 $N - 2$ 個中間點可以交換，所以會有 $(N - 2)!$ 種排列。

2、 N 個邊，其中有的中間點的和相同(當然端點和也相同)，假設有 r 組相同，

則 $n_1 + n_2 + n_3 + \dots + n_r = N$ ，其中 $n_1, n_2, n_3, \dots, n_r$ 爲端點和(中間點和)相同

的邊的數目，有 $n_1, n_2, n_3, \dots, n_r$ 個邊中間點和相同，表示這些邊的中間點可

以互換，所以有 $n_1!, n_2!, n_3!, \dots, n_r!$ 種排列。

3、所以一共有 $[(N - 2)!]^N \times n_1! \times n_2! \times n_3! \times \dots \times n_r! = [(N - 2)!]^N \prod_{i=1}^r n_i!$ 。

4、由於我們是以最大配最小的方式，所以只有三種端點和： $N, N + 1, N + 2$ ，

而和爲 N 的有一(奇數時)或二(偶數時)個，和爲 $N + 1$ ， $N + 2$ 的各有一 $\left\lceil \frac{N - 1}{2} \right\rceil$

個， $\left\lceil \frac{N - 1}{2} \right\rceil$ 表示不超過 $\frac{N - 1}{2}$ 的最大整數，例如在我們求出 15 邊形的例子

中爲： $n_1 = 1, n_2 = 7, n_3 = 7$ 個，而求 20 邊形的例子爲 $n_1 = 2, n_2 = 9, n_3 = 9$ 個。

5、當然，這裡面會有一些和翻轉、旋轉某些解答是相同的。

6、因爲 $PN - (N - 1), PN - (N - 2), PN - (N - 3), \dots, PN, P$ 爲自然數，等 N 個數爲頂點也可以爲另一解，所以有 $N - 1$ 組，而每一組，就有可能如 3 中討論那

麼多的解，所以是 $(N - 1) \times [(N - 2)!]^N \prod_{i=1}^r n_i!$ 種解。

7、我們不知道除了以伍、三所述方法，還能找到多少其他的解，但如果找到，其結果又如 3 中討論那般多，下頁即爲一個六邊形的例子。

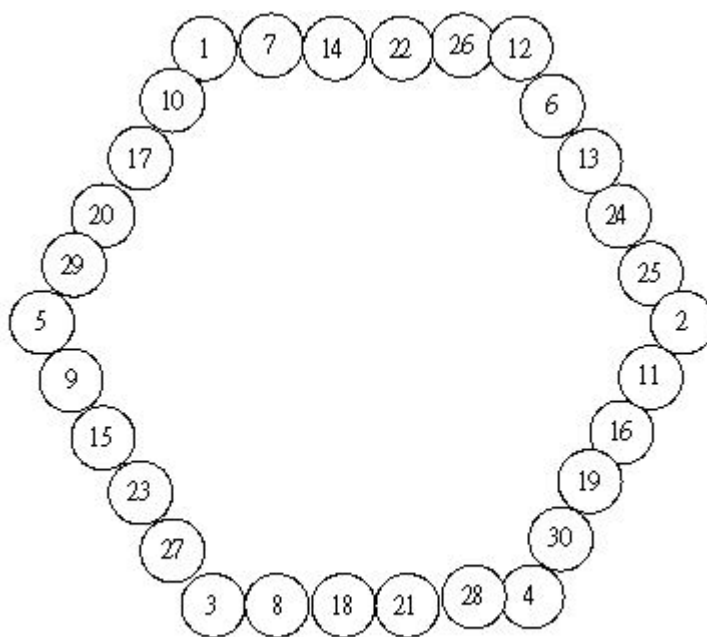


圖1.一個不是以伍、三方法求出解的一例

(二)、如果每邊不是 N 個數，而是較多或較少，是否可以找到解：

- 1、由二之(五)的討論，可以看出增加數字是不成問題的，尤其所增加的數字為 $2N$ 個時，可以直接把這 $2N$ 個數以 S 型分配排列，在不修改原來位置時，把這 $2N$ 個數加入原來的解答，看下頁的例子：

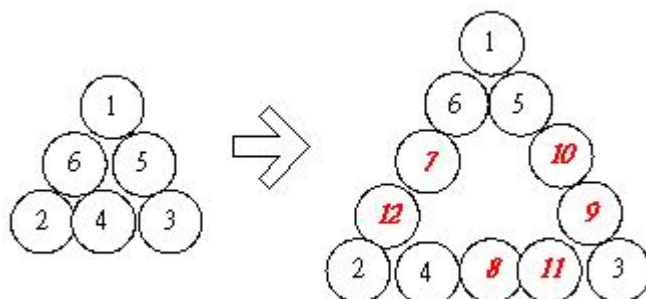


圖12.每邊三數的正魔三角形加入 2×3 個數字的變化

※粗斜體數字表示新增加的數字。

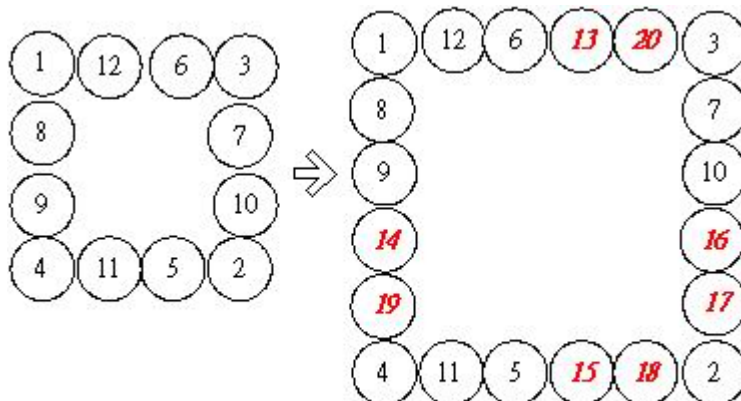


圖13.每邊四數的正魔四邊形加入 2×4 個數字的變化

※粗斜體數字表示新增加的數字。

2、如果增加 N 個數字時，可能最小為：

$$\frac{N^2(N^2+1)}{2} + 1 + 2 + 3 + \dots + N$$

$$\Rightarrow \frac{N^2(N^2+1)}{2} + \frac{N(N+1)}{2}$$

每邊和為：

$$\Rightarrow \frac{N^2(N^2+1)}{2N} + \frac{N(N+1)}{2N}$$

$$\Rightarrow \frac{N(N^2+1)}{2} + \frac{(N+1)}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{N^3 + 2N + 1}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{N(N^2+2)+1}{2}$$

若 N 為奇數，則 N^2 也是奇數， N^2+2 也是奇數，則 $N(N^2+2)+1$ 可以被 2 整除，我們的方法仍可以找到解；若 N 為偶數，則 N^2 也是偶數， N^2+2 也是偶數，則 $N(N^2+2)+1$ 不可以被 2 整除，我們的方法就找不到解。

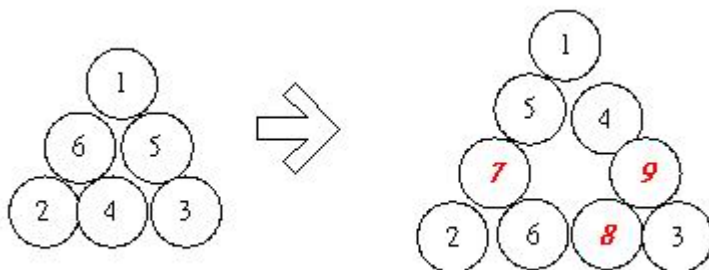


圖14.每邊三數的正魔三角邊形加入3個數字的變化

※粗斜體數字表示新增加的數字。

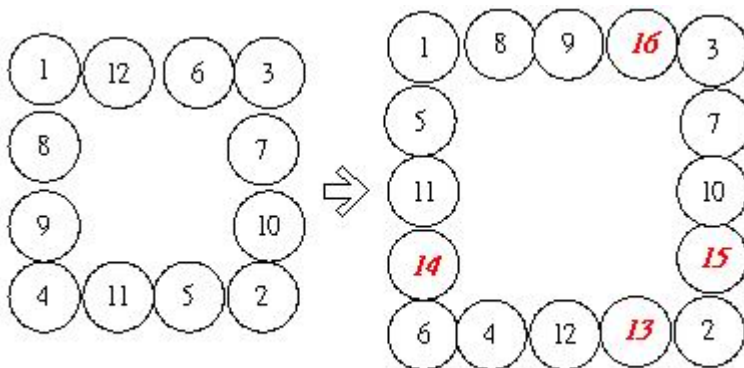


圖15.每邊三數的正魔四邊形加入4個數字的變化

※粗斜體數字表示新增加的數字。注意在四邊形中原來在頂點的數字必須調整，否則是找不到的。

3、每邊可以縮到幾個點，仍然會有這種性質呢？顯而易見的是兩個點(只有端點)時，是沒有辦法找到的。

四、正 N 多邊形，每邊三個數字尋找的小發現：

- (一)、每邊為三個數字的正魔 N 邊形，雖然數字較少，但是一方面可供調整的數較少，一方面 N 個頂點的位置無法預先決定，反而未必好找。
- (二)、在此時，我們覺得須要一個電腦程式，可以幫助我們計算各項組合的數字和，以方便我們在排數字時較為輕鬆。

柒、討論

- 一、試誤法只適用於較小的問題，即使如此，它的效率仍是很差；但是它在初始研究問題時可以提供一些想法，有時候直覺變成是一種方向，也因為不方便就會引導我們尋找更好、更有效的方法。
- 二、透過分析法可以幫助我們事先找出可能的組合，捨棄不合理的組合，縮減問題尋找的範圍及方向；也由此發現其中的規律，找出一個不錯的解法，簡單的證明使我們在使用這個方法更有信心，也發現了電腦的需要和方便性。
- 三、電腦的輔助計算可以幫助解決較大的問題，所以給了我們信心解決更大問題；在分析法的基礎上試著完成幾個較大圖形的解答，發現效率較高，也比較不會出錯。
- 四、正魔多邊形每邊最少需要三數。

捌、結論

- 一、數學的分析可以幫助思考，讓事情能夠很完整的被考慮。
- 二、透過電腦的協助，可以在分析、計算上提供很多協助，所以電腦不是只能打電腦或是查資料。
- 三、如果程式化的步驟更完整，會更有助於尋找組合，但是也相對的可能會減少思考問題的主動性，甚至會讓我們忘記思考。

玖、參考資料及其他

- 一、王頌璋、林筱慈、莊順行、蔡睿甄 〈93 學年〉七邊形的數字謎題，嘉義市科學展覽作品。
- 二、尤怪之家，<http://www.shes.hcc.edu.tw/~oddest/>
- 三、李國賢 〈民 91〉數學魔方陣，林鬱出版社。
- 四、陳建華、連伯修 〈民 94〉方陣之美，中華民國第四十五屆科學展覽會作品。
- 五、其他可能的延伸研究
 - (一)、程式化某些步驟，例如自動調整各邊、組合數字的尋找等。
 - (二)、將問題立體化，以三度空間來思考問題。
 - (三)、結合成數學玩具，讓我們更能以操作來協助思考、學習。

評語

080405 數字排排看-正魔多邊形的尋找

本件作品是用試誤法排出各邊「和」相等的數字，剛開始作者能排出來簡單的圖形，但卻不知怎樣求出所有數字的「總和」？實在很可惜！在文獻探討部分，應該列出過去是否有人做過類似的題目（全國 37 屆科展第二名奇怪的數學遊戲）較為妥當。