

中華民國第四十六屆中小學科學展覽會
作品說明書

國小組 數學科

第二名

080403

我拆！我拆！我拆拆拆！－拆除最少邊數以阻
擋正多邊形的研究

學校名稱： 臺北市大同區蓬萊國民小學

作者：	指導老師：
小五 黃和敬	利育緬
小六 王德瀚	卓美月

關 鍵 詞：阻擋遊戲、拆除最少邊數、正多邊形

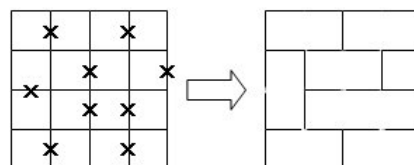
我拆！我拆！我拆拆拆！ ～～拆除最少邊數以阻擋正多邊形的研究

壹、摘要

阻擋正多邊形曾在第 44 屆全國科展高小組數學科第二名—阻擋正多邊形出現，其主題是「正方形棋盤儘可能打最少『×』，使其找不到四個空格，以空格當頂點，可連成一個正方形」，本研究改變其規則—討論正方形棋盤儘可能刪除最少的邊，使棋盤中找不到四個邊組成一個正方形。選定這個主題，因為我們數學課本，剛好也學到垂直平行與四邊形及怎樣解題（觀察、察覺數列的規律性）。我們從阻擋正方形研究起，推展正三角形及正六邊形，加上變換棋盤形狀，最後再到阻擋長方形，透過實際操作、表列觀察，從過程中找到阻擋正多邊形的共通策略—兩個方格共用一個「×」及方格放大後呈現回字型一層層增加固定的「×」數，而且特定圖形會像數列排列一樣的有規律性。

貳、研究動機

上學期中的一次分組活動中，老師讓我們做一題火柴棒遊戲，題目是要我們在火柴棒圍成的 4×4 的方格中，最少拿掉 9 枝火柴棒，讓這個方格中無法再出現任何大小的正方形，後來和老師討論以後，我們都覺得這個題目很有挑戰性，我們想：加大棋盤、改變棋盤的形狀或改為無法拼出長方形或正三角形等等，是不是能找到規律性？於是我們在老師的指導下完成這項研究。



我們研究主題的內容，與在校所使用的教材，有相關的數學學習活動有：

南一版五上第三單元垂直平行與四邊形（P24~34 及 P61）--以橡皮筋在釘板上依序圍出不同大小不同的正方形，而這些以橡皮筋所圍出的正方形個數呈現一定的規律性、南一版五上第十單元多邊形和內角和 P90~97（正多邊形特性）、南一版五下第八單元怎樣解題（觀察、察覺數列的規律性）。

參、研究目的

- 一、研究阻擋正方形，從簡單的正方形棋盤，邊長 2×2 開始，歸納正方形棋盤格上所扣除最少邊個數（也就是「×」的個數），得到一般性，再深入研究長方形棋盤格，當棋盤邊加大時，找出「×」記號增加的規律。
- 二、接著研究阻擋正三角形及正六邊形的模式，找出這兩種棋盤邊加大時，找出「×」記號增加的規律。另外還針對這兩種棋盤加以改變為特殊棋盤 1 和特殊棋盤 2 來尋找規律。
- 三、延伸為研究阻擋長方形模式，從正方形棋盤著手加大棋盤格，進而轉為研究長方形棋盤格，當棋盤邊加大時，找出「×」記號增加的規律。

肆、研究問題

一、阻擋正方形：

- (一) 正方形棋盤最少需要幾個「x」記號，才能阻擋棋盤內不同大小的正方形出現？其中這些「x」記號個數有什麼規律？
- (二) 長方形棋盤最少需要幾個「x」記號，才能阻擋棋盤內不同大小的正方形出現？其中這些「x」記號個數有什麼規律？

二、阻擋正三角形：

- (一) 正三角形棋盤最少需要幾個「x」記號，才能阻擋棋盤內不同大小的正三角形出現？其中這些「x」記號個數有什麼規律？
- (二) **特殊棋盤 1** (詳見圖示) 最少需要幾個「x」記號，才能阻擋棋盤內不同大小的正三角形出現？其中這些「x」記號個數有什麼規律？

三、阻擋正六邊形：

- (一) 正六邊形棋盤最少需要幾個「x」記號，才能阻擋棋盤內不同大小的正六邊形出現？其中這些「x」記號個數有什麼規律？
- (二) **特殊棋盤 2** (詳見圖示) 最少需要幾個「x」記號，才能阻擋棋盤內不同大小的正六邊形出現？其中這些「x」記號個數有什麼規律？

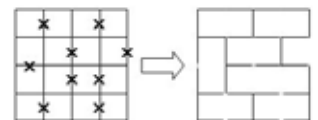
四、阻擋長方形 (裡頭不能有正方形、長方形)：

- (一) 正方形棋盤最少需要幾個「x」記號，才能阻擋棋盤內不同大小的長方形出現？其中這些「x」記號個數有什麼規律？
- (二) 長方形棋盤最少需要幾個「x」記號，才能阻擋棋盤內不同大小的長方形出現？其中這些「x」記號個數有什麼規律？

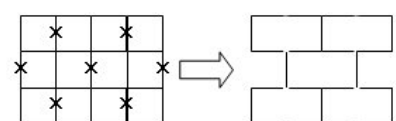
伍、遊戲規則

一、阻擋正方形：

- (一) 正方形棋盤，當最少的「x」記號填入後，裡頭不可以再形成任何一個正方形，如右圖的圖形所示，圖中已無任何正方形存在。

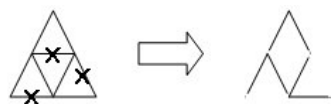


- (二) 長方形棋盤當最少的「x」記號填入後，裡頭不可以再形成任何一個正方形，如右圖的圖形所示，圖中已無任何正方形存在。



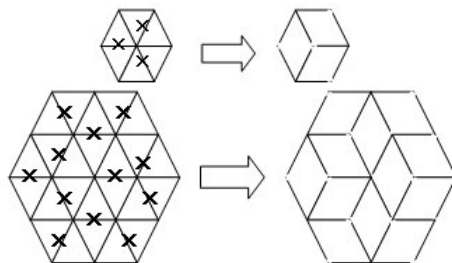
二、阻擋正三角形

- (一) 正三角形棋盤，當最少的「x」記號填入後，裡頭不可以再形成任何一個正三角形，如右圖所示，圖中已無任何正三角形存在。



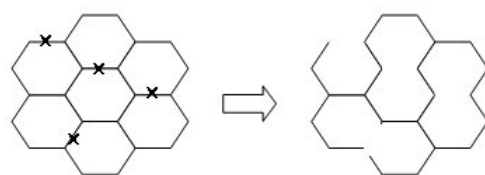
(二) 特殊棋盤 1

當最少的「x」記號填入後，不可以再形成任何一個正三角形，如右圖中已無任何正三角形存在。



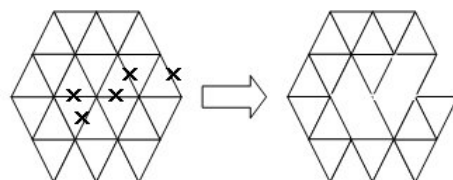
三、阻擋正六邊形

- (一) 正六邊形棋盤，當最少的「x」記號填入後，裡頭不可以再形成任何一個正六邊形，如右圖所示，圖中已無任何正六邊形存在。



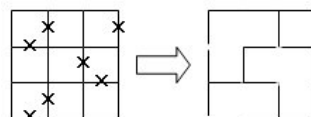
(二) 特殊棋盤 2 (詳見圖示)

當最少的「x」記號填入後，裡頭不可以再形成任何一個正六邊形，如右圖所示，圖中已無任何正六邊形存在。

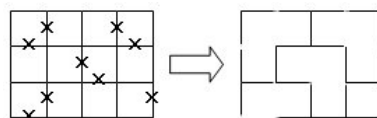


四、阻擋長方形

- (一) 正方形棋盤，當最少的「x」記號填入後，裡頭不可以再形成任何一個長方形，如右圖所示，圖中已無任何長方形存在。



- (二) 長方形棋盤，當最少的「x」記號填入後，裡頭不可以再形成任何一個長方形，如右圖所示，圖中已無任何長方形存在。



陸、研究過程和討論

一、阻擋正方形：

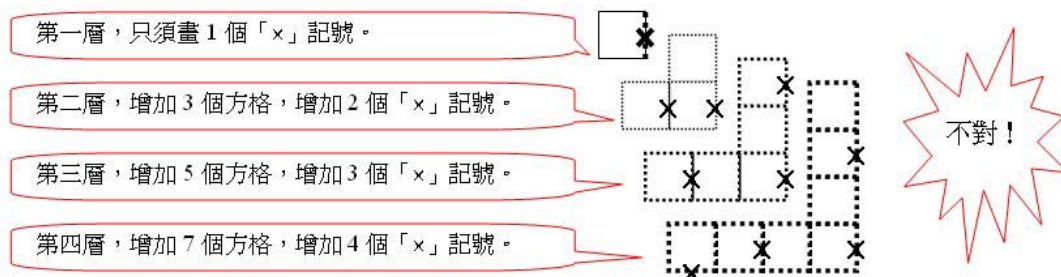
(一) 正方形棋盤

【毫無頭緒】

一開始從棋盤 1x1、2x2、3x3.....開始畫起，雖然兩人在小棋盤都能畫出一致的最少「x」數，但隨著棋盤擴大，畫錯或「x」數不一致的機會就越多。

【重新出發】想法：找規律性必須有次序地找。

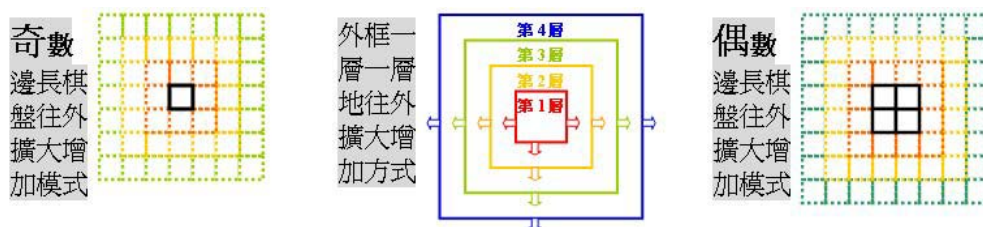
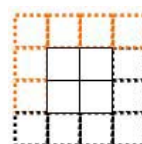
我們發現當棋盤邊長逐一增加，所增加的方格數似乎有規律性的增加，例如：棋盤 2×2 增加為 3×3 ，增加 5 個虛線方格。但依照此方式畫下去，在棋盤 4×4 卻畫畫出 10 個「x」，而畫不出最少的 9 個「x」數。



所以上述想法只好作罷，思考了很久，後來和老師討論，有了新想法，「為何都只增加奇數方格？如果能增加偶數方格的話，會有何結果？」

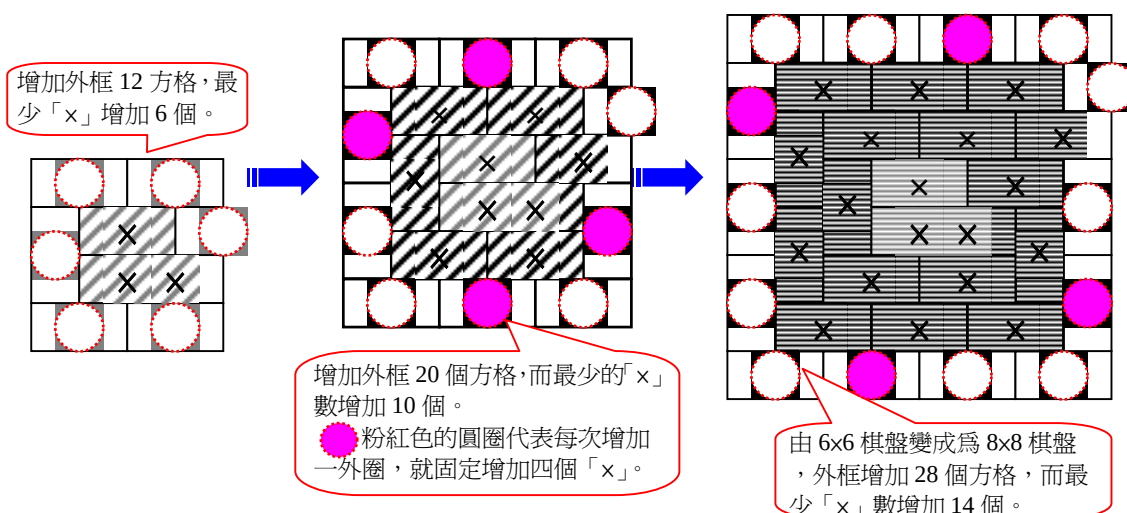
【抽絲剝繭】想法：盡量節省「x」，兩個方格共用 1 個「x」，找偶數方格。

若是方格逐次增加的規律性改為兩個 L 型形成一個口字，這樣每次增加的規律方格就是偶數個，而且增加的方式為一層一層外框往外擴增。後來我們決定將棋盤分成奇數邊長和偶數邊長二大組來分析，果然讓我們找到特定的規律性。



1、邊長為偶數

先從簡單的 2×2 棋盤開始，最少須畫 3 個「x」，接著在外圍加一圈，變為 4×4 棋盤（下圖二）。依序增加，變為 6×6 棋盤（下圖三）。



棋盤邊長	總方格數	最少「x」數	試找規律 邊長和最少 「x」數的關係	外圍增加 方格	外圍增畫 「x」數	試找規律 邊長與增畫 「x」數關係
3x3	9	3	$3 \times 3 \div 2 + 2$			
5x5	25	14	$5 \times 5 \div 2 + 2$	16	8	$2 \times (5-1)$
7x7	49	26	$7 \times 7 \div 2 + 2$	24	12	$2 \times (7-1)$
9x9	81	42	$9 \times 9 \div 2 + 2$	32	16	$2 \times (9-1)$
11x11	121	62	$11 \times 11 \div 2 + 2$	40	20	$2 \times (11-1)$
				48	24	$2 \times (13-1)$
.....						
$n \times n$	$n \times n$		$n \times n \div 2 + 2$	$4(n-1)$		$2(n-1)$

☞ 從上表中我們發現：

每增加一次外圈（變為 $n \times n$ ），「x」數增加 $2(n-1)$ 個，

總「x」數為 $n \times n \div 2 + 2$ 個（ n 是大於 1 的奇數為主、 $n \times n \div 2$ 須取整數部分為主）。

因為兩個方格共用一個「x」記號是最為節省的，所以總方格數和最少總「x」數之間存在著兩倍差的關係，而其中的「+2」，指的是阻擋外框正方形以及落單的一個正方形，所必須加上的二個「x」。

（二）長方形棋盤

【基本想法】

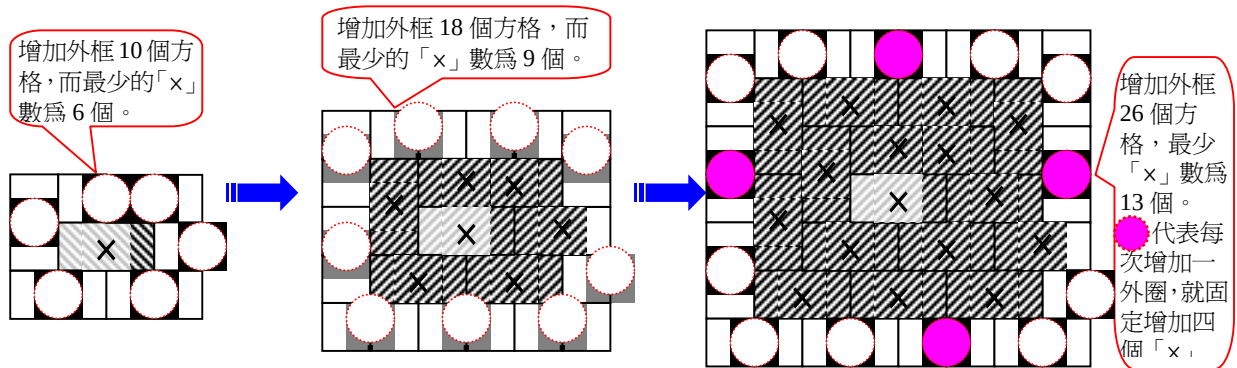
在長方形棋盤中阻擋正方形，想要得到最少的「x」數，兩個方格必須共用一個「x」，讓我們繼續仿照前面的「回字」策略來研究，但因為棋盤為長方形，所以決定以「長和寬的差」作為分類的依據，而且是以奇數和偶數來分類：（限於版面有限，僅呈現奇數長寬差為 1 及偶數長寬差為 2。）

奇數	長寬差 1	棋盤 $1 \times 2 \rightarrow 3 \times 4 \rightarrow 5 \times 6 \rightarrow 7 \times 8 \rightarrow 9 \times 10 \dots\dots\dots$ 棋盤 $2 \times 3 \rightarrow 4 \times 5 \rightarrow 6 \times 7 \rightarrow 8 \times 9 \rightarrow 10 \times 11 \dots\dots\dots$	呈現在說明書中
	長寬差 3	棋盤 $1 \times 4 \rightarrow 3 \times 6 \rightarrow 5 \times 8 \rightarrow 7 \times 10 \rightarrow 9 \times 12 \dots\dots\dots$ 棋盤 $2 \times 5 \rightarrow 4 \times 7 \rightarrow 6 \times 9 \rightarrow 8 \times 11 \rightarrow 10 \times 13 \dots\dots\dots$	呈現在研究日誌
	長寬差 5	棋盤 $1 \times 6 \rightarrow 3 \times 8 \rightarrow 5 \times 10 \rightarrow 7 \times 12 \rightarrow 9 \times 14 \dots\dots\dots$ 棋盤 $2 \times 7 \rightarrow 4 \times 9 \rightarrow 6 \times 11 \rightarrow 8 \times 13 \rightarrow 10 \times 15 \dots\dots\dots$	呈現在研究日誌
偶數	長寬差 2	棋盤 $1 \times 3 \rightarrow 3 \times 5 \rightarrow 5 \times 7 \rightarrow 7 \times 9 \rightarrow 9 \times 11 \dots\dots\dots$ 棋盤 $2 \times 4 \rightarrow 4 \times 6 \rightarrow 6 \times 8 \rightarrow 8 \times 10 \rightarrow 10 \times 12 \dots\dots\dots$	呈現在說明書中
	長寬差 4	棋盤 $1 \times 5 \rightarrow 3 \times 7 \rightarrow 5 \times 9 \rightarrow 7 \times 11 \rightarrow 9 \times 13 \dots\dots\dots$ 棋盤 $2 \times 6 \rightarrow 4 \times 8 \rightarrow 6 \times 10 \rightarrow 8 \times 12 \rightarrow 10 \times 14 \dots\dots\dots$	呈現在研究日誌
	長寬差 6	棋盤 $1 \times 7 \rightarrow 3 \times 9 \rightarrow 5 \times 11 \rightarrow 7 \times 13 \rightarrow 9 \times 15 \dots\dots\dots$ 棋盤 $2 \times 8 \rightarrow 4 \times 10 \rightarrow 6 \times 12 \rightarrow 8 \times 14 \rightarrow 10 \times 16 \dots\dots\dots$	呈現在研究日誌

1、寬和長差為 1

(1) 1x2 棋盤、3x4 棋盤、5x6 棋盤……

從 1x2 棋盤開始（圖一中心），最少須畫 1 個「x」。接著在外圍加一圈，變為 3x4 棋盤（下圖一）。其餘依序往外增加為 5x6 棋盤、7x8 棋盤……



棋盤邊長	總方格數	最少「x」數	試找規律 邊長和最少「x」數的關係	外圍增加 方格	外圍增畫 「x」數	試找規律 邊長與增畫「x」數關係
1x2	2	1	不合			
3x4	12	7	$3 \times 4 \div 2 + 1$	10	6	$(2 \times 3 - 1)$
5x6	30	16	$5 \times 6 \div 2 + 1$	18	9	$(2 \times 5 - 1)$
7x8	56	29	$7 \times 8 \div 2 + 1$	26	13	$(2 \times 7 - 1)$
9x10	90	46	$9 \times 10 \div 2 + 1$	34	17	$(2 \times 9 - 1)$
.....				42	21	$(2 \times 11 - 1)$
.....						
$n \times (n+1)$	$n \times (n+1)$		$n \times (n+1) \div 2 + 1$	$2 \times (2n-1)$		$(2 \times n - 1)$

☞ 從上表中我們發現：

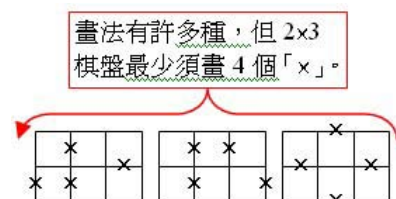
每增加一次外圈（變為 $n \times (n+1)$ ），「x」數增加 $(2n-1)$ 個，

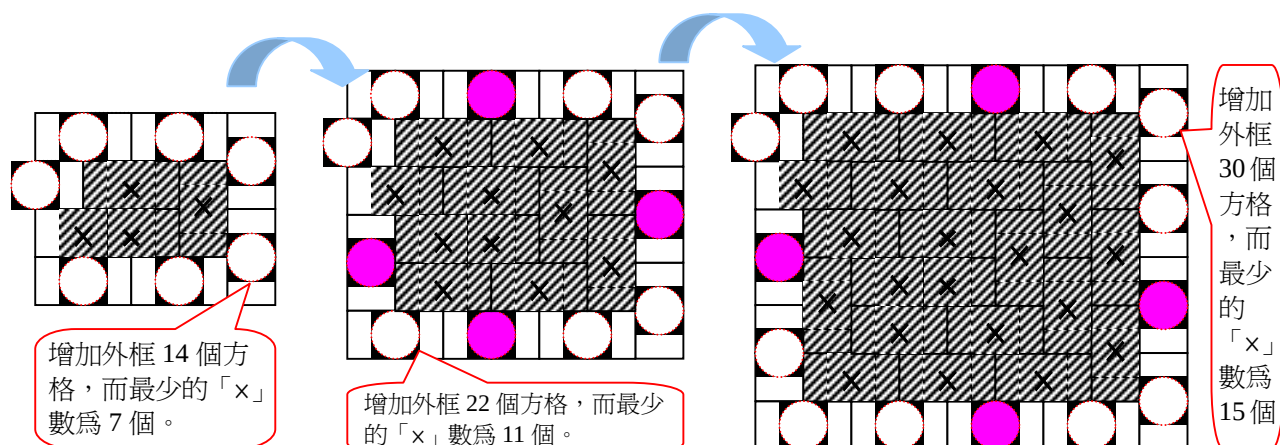
總「x」數為 $n \times (n+1) \div 2 + 1$ 個， n 須是大於 1 的奇數為主。

兩個方格共用一個「x」記號是最為節省的，所以總方格數和最少總「x」數之間存在著兩倍差的關係，而其中的「+1」，指的是阻擋一個落單正方形的「x」。

(2) 2x3 棋盤、4x5 棋盤、6x7 棋盤……

從 2x3 棋盤開始，最少須畫 4 個「x」，如右圖。其餘依序往外增加為 4x5 棋盤、6x7 棋盤、8x9 棋盤……





棋盤邊長	總方格數	最少「x」數	試找規律 邊長和最少「x」數的關係	外圍增加方格	外圍增畫「x」數	試找規律 邊長與增畫「x」數關係
2x3	6	4	$2 \times 3 \div 2 + 1$			
4x5	20	11	$4 \times 5 \div 2 + 1$	14	7	$(2 \times 4 - 1)$
6x7	42	22	$6 \times 7 \div 2 + 1$	22	11	$(2 \times 6 - 1)$
8x9	72	37	$8 \times 9 \div 2 + 1$	30	15	$(2 \times 8 - 1)$
10x11	110	56	$10 \times 11 \div 2 + 1$	38	19	$(2 \times 10 - 1)$
.....				46	23	$(2 \times 12 - 1)$
.....						
$n \times (n+1)$	$n \times (n+1)$		$n \times (n+1) \div 2 + 1$	$2 \times (2n-1)$		$(2 \times n - 1)$

☞ 從上表中我們發現：

每增加一次外圈（變為 $n \times (n+1)$ ），「x」數增加 $(2n-1)$ 個，

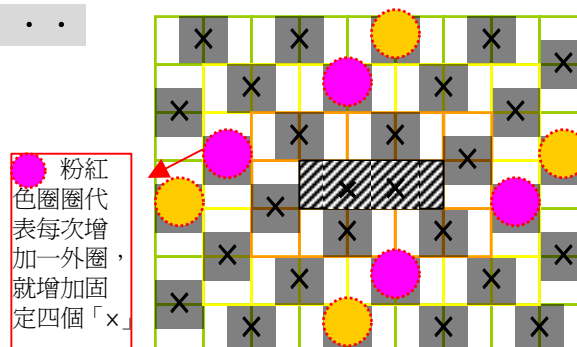
總「x」數為 $n \times (n+1) \div 2 + 1$ 個，這裡的 n 偶數為主。

兩個方格共用一個「x」記號是最為節省，所以總方格數和最少總「x」數之間存在著兩倍差的關係，而其中的「+1」，指的是阻擋一個落單正方形的「x」。

2、長寬差為 2

(1) 1x3 棋盤、3x5 棋盤、5x7 棋盤...

從 1x3 棋盤開始，最少須畫 2 個「x」。接著每次在外圍加一圈，變為 3x5 棋盤，繼續依序往外增加為 5x7 棋盤、7x9 棋盤...（限於篇幅，僅呈現 7x9 棋盤）



棋盤邊長	總方格數	最少「x」數	試找規律 邊長和最少x數的關係	外圍增加方格	外圍增畫「x」數	試找規律 邊長與增畫x數關係
1x3	3	2	$1 \times 3 \div 2 + 1$			
3x5	15	8	$3 \times 5 \div 2 + 1$	12	6	2x3
5x7	35	18	$5 \times 7 \div 2 + 1$	20	10	2x5
7x9	63	32	$7 \times 9 \div 2 + 1$	28	14	2x7
9x11	99	50	$9 \times 11 \div 2 + 1$	36	18	2x9
.....				44	22	2x11
.....						
$n \times (n+2)$	$n \times (n+2)$		$n \times (n+2) \div 2 + 1$	$4 \times n$		$2 \times n$

☞☞ 從上表中我們發現：

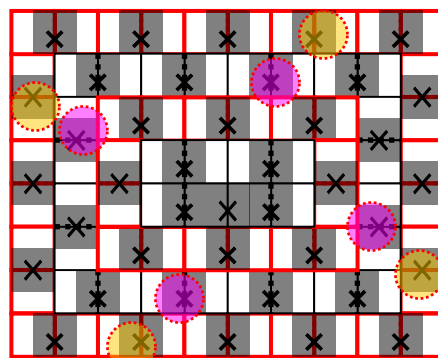
每增加一次外圈(變為 $n \times (n+2)$)，「x」數增加 $2n$ 個，總「x」數為 $n \times (n+2) \div 2 + 1$ 個，這裡的 n 以奇數為主。備註： $n \times (n+2) \div 2$ 部分須以取整數部分為主。

總方格數和最少總「x」數之間存在著兩倍差的關係，而其中的「+1」，指的是中心處棋盤 1x3 的阻擋一個落單正方形的「x」。

(2) 2x4 棋盤、4x6 棋盤、6x8 棋盤.....

從 2x4 棋盤開始，最少須畫 5 個「x」，如右圖所示。接著每次在外圍加一圈，變為 4x6 棋盤，繼續依序往外增加為 6x8 棋盤、8x10 棋盤.....

(限於版面篇幅，僅呈現 8x10 棋盤)



棋盤邊長	總方格數	最少「x」數	試找規律 邊長和最少x數的關係	外圍增加方格	外圍增畫「x」數	試找規律 邊長與增畫x數關係
2x4	8	5	$2 \times 4 \div 2 + 1$			
4x6	24	13	$4 \times 6 \div 2 + 1$	14	8	2x4
6x8	48	25	$6 \times 8 \div 2 + 1$	24	12	2x6
8x10	80	41	$8 \times 10 \div 2 + 1$	32	16	2x8
10x12	120	50	$10 \times 12 \div 2 + 1$	40	20	2x10
.....				48	24	2x12
.....						
$n \times (n+2)$	$n \times (n+2)$		$n \times (n+2) \div 2 + 1$	$4 \times n$		$2 \times n$

☞☞ 從上表中我們發現：

每增加一次外圈(變為 $n \times (n+2)$)，「x」數增加 $2n$ 個，

總「x」數為 $n \times (n+2) \div 2 + 1$ 個，這裡的以偶數為主。

總方格數和最少總「x」數之間存在著兩倍差的關係，而其中的「+1」，指的是中心處棋盤 2x4 的阻擋兩個 2x2 正方形的一個「x」。

我們試著對長方形棋盤阻擋正方形找出其中共同的特徵及公式，再經過進一步整理，可以寫成下表：

奇數	長寬差 1	棋盤 1x2→3x4→5x6→7x8→9x10…… 棋盤 2x3→4x5→6x7→8x9→10x11……	$n \times (n+1) \div 2 + 1$ $n \times (n+1) \div 2 + 1$	n 為大於 1 的奇數 n 為偶數
	長寬差 3	棋盤 1x4→3x6→5x8→7x10→9x12…… 棋盤 2x5→4x7→6x9→8x11→10x13……	$n \times (n+3) \div 2 + 1$ $n \times (n+3) \div 2 + 1$	n 為大於 1 的奇數 n 為偶數
	長寬差 5	棋盤 1x6→3x8→5x10→7x12→9x14…… 棋盤 2x7→4x9→6x11→8x13→10x15……	$n \times (n+5) \div 2 + 1$ $n \times (n+5) \div 2 + 1$	n 為大於 1 的奇數 n 為偶數
偶數	長寬差 2	棋盤 1x3→3x5→5x7→7x9→9x11…… 棋盤 2x4→4x6→6x8→8x10→10x12……	$n \times (n+2) \div 2 + 1$ $n \times (n+2) \div 2 + 1$	n 為奇數（取商數） n 為偶數
	長寬差 4	棋盤 1x5→3x7→5x9→7x11→9x13…… 棋盤 2x6→4x8→6x10→8x12→10x14……	$n \times (n+4) \div 2 + 1$ $n \times (n+4) \div 2 + 1$	n 為奇數（取商數） n 為偶數
	長寬差 6	棋盤 1x7→3x9→5x11→7x13→9x15…… 棋盤 2x8→4x10→6x12→8x14→10x16……	$n \times (n+6) \div 2 + 1$ $n \times (n+6) \div 2 + 1$	n 為奇數（取商數） n 為偶數

☞ 從上表中我們發現：

不管長與寬差是奇數或是偶數，大致上都符合公式長×寬÷2+1。唯獨長寬差為奇數時，寬度必須大於 1（也就是 2 以上），否則結果與公式不合。

3、彙整表格

另外我們將在正方形棋盤及長方形棋盤的阻擋正方形的最少「x」個數，有規律性予以彙整，分析整理邊長×邊長與最少的「x」個數的關係，整理在下表中：

邊長	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	1	1	2	2	3	3	4	4	5	5	6	6
2		3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
3			6	7	8	10	11	13	14	16	17	19
4				9	11	13	15	17	19	21	23	25
5					14	16	18	21	23	26	28	31
6						19	22	25	28	31	34	37
7							26	29	32	36	39	43
8								33	37	41	45	49
9									42	46	50	55
10										51	56	61
11											62	67
12												73

☞ 從上表中我們發現：

- 標示綠色方框數字，是邊長為 1xn 的棋盤格（n 為偶數）所得的最少「x」個數，其數值符合公式 $1 \times n \div 2$ ；
- 標示底線紅色數字，是 nxn 的棋盤格（n 為偶數）所得的最少「x」個數，其數值符合公式 $n \times n \div 2 + 2$ ；
- 其餘的數字則是不同於上述兩種情形，其數值符合公式 $n \times m \div 2 + 1$ 。

【驗證結論】

過程中找到預測棋盤更大時可拆掉的最少邊數的公式，並實際畫出解答，發現結果也能符合公式的結果。可是老師說：「舉例只是部分，不能代表全部，所以舉再多也只是舉例，必須找出一個合理的依據。」所以如何確認我們所找的「x」數就是最少的？

我們也從圖形上得知，確認每一次增加的 4 個「x」數是從固定位置的產生的，並且也從數字上來推測一層一層地增加後所產生的規律公式，也是符合的。其實整個過程中，我們按部就班地從最小的棋盤，逐步地增加外框，確認每一次增加的「x」數是最少的（因為兩個方格共用一個「x」最為節省），之後依此類推，再逐步增大棋盤，感覺起來很像是在推骨牌，第一個、第二個倒了....第十個也倒了，那麼第十一個也會倒呀！，所以我們確認所找的「x」數就是該棋盤中最少的。

二、阻擋正三角形

【基本想法】

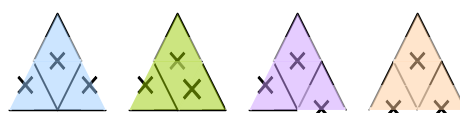
在正三角棋盤棋盤中阻擋正三角形，想要得到最少的「x」數，兩個三角形必須共用一個「x」。因為棋盤為正三角形，所以決定以正三角形邊長作為分類的依據，一開始從棋盤邊長 1、2、3.....開始畫起，我們先觀察單一邊增加是否能出規律性，若找不出規律性，再繼續仿照阻擋正方形「回字」策略來研究。我們發現當棋盤邊長逐一增加，所增加的三角形格數以及最少「x」數的確有規律性的增加。（備註：其實回字型外框擴大也可找到規律性，但是較為複雜，所以不在此呈現。）

（一）正三角形棋盤

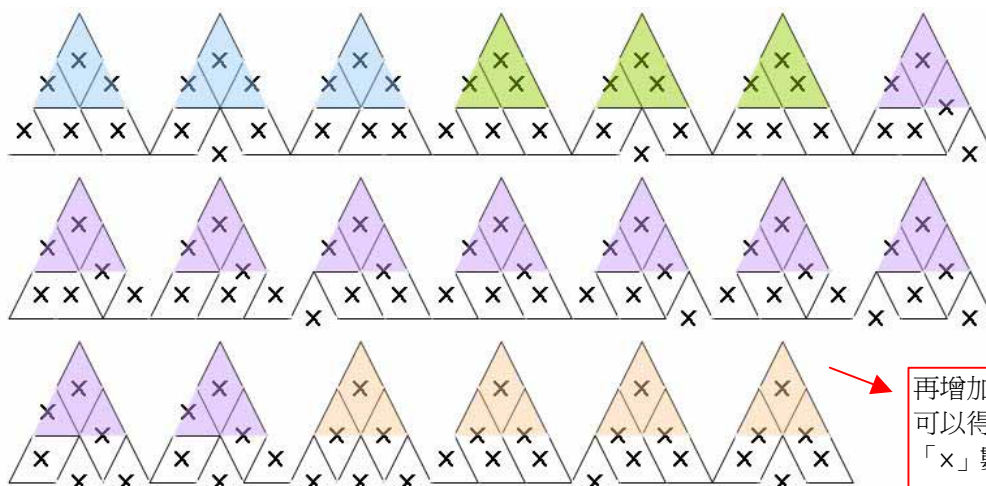
1. 邊長為 1 棋盤，最少須畫 1 個「x」，只有一種畫法。



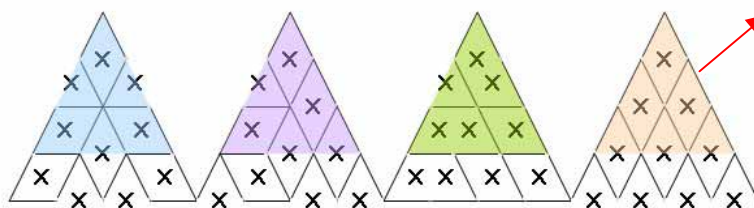
2. 邊長為 2 棋盤，最少須畫 3 個「x」，共有四種畫法（扣除旋轉及翻面後的圖形）。



3. 邊長為 3 棋盤，最少須畫 6 個「x」，如下圖所示，共有 20 種畫法。

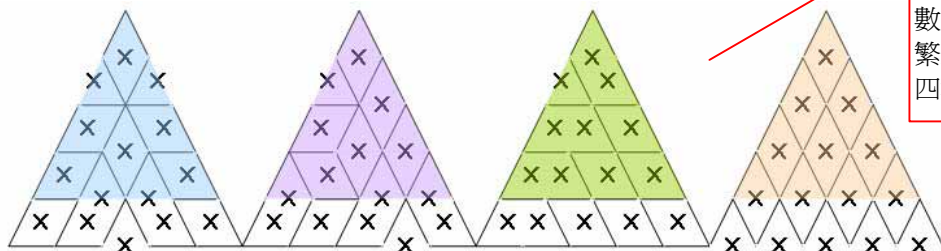


4.邊長為 4 棋盤，最少須畫 10 個「x」，如圖所示。



仿照前面的畫法，再增加一層，都可以得到最少「x」數 4 個，但因圖形繁雜，在此僅列出四種圖形畫法。

5.邊長為 5 棋盤，最少須畫 15 個「x」，如右圖所示。



再增加一層，都可以得到最少「x」數 5 個，但因圖形繁雜，在此僅列出四種圖形畫法。

6.我們把最少「x」個數整理如下表，經觀察後發現其數字是有規律性的。

棋盤 邊長	總三角格數	最少「x」數	試找規律 邊長和最少x數的關係	下層增加格	下層增畫 「x」數	試找規律 邊長與增畫x數關係
1	1	1	$1 \times (1+1) \div 2$			
2	4	3	$2 \times (2+1) \div 2$	3	2	2
3	9	6	$3 \times (3+1) \div 2$	5	3	3
4	16	10	$4 \times (4+1) \div 2$	7	4	4
5	25	15	$5 \times (5+1) \div 2$	9	5	5
6	36	21	$6 \times (6+1) \div 2$	11	6	6
.....				13	7	7
						
n	$n \times n$		$n \times (n+1) \div 2$	$2 \times n - 1$		n

觀察上表，「x」個數彼此間的差剛好也呈現 2、3、4、5.....的規律性，以 21 為例：

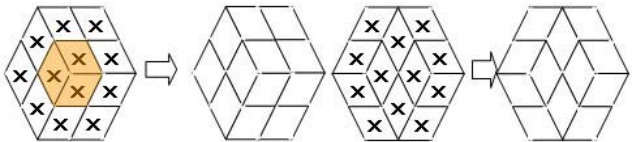
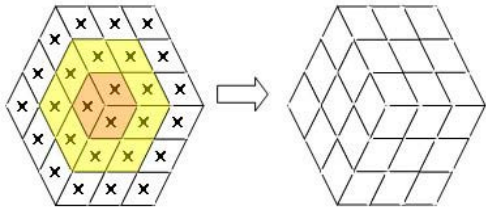
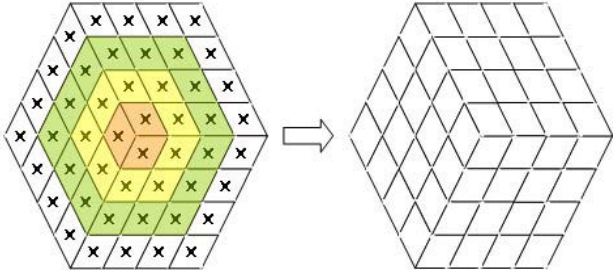
$$\begin{array}{lcl}
 21 = 15 + 6 & 21 = 10 + 5 & \Rightarrow 21 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 \\
 15 = 10 + 5 & 10 = 6 + 4 & \Downarrow \\
 10 = 6 + 4 & 6 = 3 + 3 & N = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + \dots + n \\
 6 = 3 + 3 & 3 = 1 + 2 & \Downarrow \\
 3 = 1 + 2 & & N = \frac{1}{2} \times (n+1) \times n
 \end{array}$$

☞ 從上表中我們發現：

每增加一次下層（變為 n），「x」數增加 n 個，總「x」數為 $n \times (n+1) \div 2$ 個。
總格數和最少總「x」數之間存在著兩倍差的關係。

(二) 特殊棋盤 1

我們在解正三角形棋盤時，還發現了另外一種特別的圖形，也就是六個正三角形可以組成正六邊形，當時我們有個念頭：「既然正三角形棋盤有規律性，那麼由正三角形所組成的正六邊形棋盤是否也有規律性？」因此我們就針對這種棋盤作深入研究。

(1) 每邊為 1 的正六邊形棋盤，最少須畫 3 個「x」，只有一種畫法。 	(2) 每邊為 2 的正六邊形棋盤，最少須畫個 12 個「x」，如右圖所示。 
(3) 每邊為 3 的正六邊形棋盤，最少須畫 27 個「x」如下圖所示。 	(4) 每邊為 4 的正六邊形棋盤，最少須畫 48 個「x」如下圖所示。 

我們把最少「x」個數整理如下表，經觀察後發現其數字是有規律性的。

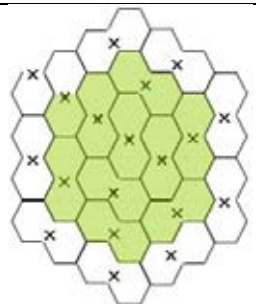
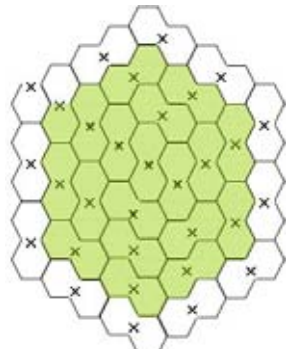
棋盤邊長	總三角格數	最少「x」數	試找規律 邊長和最少x數的關係	外層增加格	外層增畫「x」數	試找規律 邊長與增畫x數關係
1	6	3	$3 \times 1 \times 1$			
2	24	12	$3 \times 2 \times 2$	18	9	$3 \times (2 \times 2 - 1)$
3	54	27	$3 \times 3 \times 3$	30	15	$3 \times (3 \times 2 - 1)$
4	96	48	$3 \times 4 \times 4$	42	21	$3 \times (4 \times 2 - 1)$
5	150	75	$3 \times 5 \times 5$	54	27	$3 \times (5 \times 2 - 1)$
.....				66	33	$3 \times (6 \times 2 - 1)$
n	$6 \times n \times n$		$3 \times n \times n$	$6 \times (2n - 1)$		$3 \times (2n - 1)$

☞ 從上表中我們發現：

每增加一次外圈（變為 n ），「x」數增加 $3 \times (2n - 1)$ 個，總「x」數為 $3 \times n \times n$ 個。
總方格數和最少總「x」數之間存在著兩倍差的關係。

三、阻擋正六邊形

(一) 正六邊形棋盤

1. 邊長為 1 的棋盤，最少須畫 1 個「x」，只有一種畫法。 2. 在邊長 1 棋盤外圍加上一圈，變成邊長 2 的棋盤，最少須畫 4 個「x」	 	3. 接著在邊長 2 的棋盤外圍加上一圈，使其變為邊長為 3 的棋盤，最少須畫 10 個「x」。	
4. 接著在邊長 3 棋盤的外圍加上一圈，變成邊長為 4 的棋盤，最少須畫 19 個「x」。		5. 接著在這個邊長為 4 的棋盤的外圍加上一圈，使其變為邊長為 5 的棋盤，最少須畫 31 個「x」，如下圖所示。	

我們把最少「x」個數整理如下表，經觀察後發現其數字是有規律性的。

棋盤邊長	總格數	最少「x」數	試找規律 邊長和最少x數的關係	外層增加格	外層增量「x」數	試找規律 邊長與增量x數關係
1	1	1	$3 \times 1 \times (1-1) \div 2 + 1$			
2	7	4	$3 \times 2 \times (2-1) \div 2 + 1$	6	3	$3 \times (2-1)$
3	19	10	$3 \times 3 \times (3-1) \div 2 + 1$	12	6	$3 \times (3-1)$
4	37	19	$3 \times 4 \times (4-1) \div 2 + 1$	18	9	$3 \times (4-1)$
5	61	31	$3 \times 5 \times (5-1) \div 2 + 1$	24	12	$3 \times (5-1)$
6	91	46	$3 \times 6 \times (6-1) \div 2 + 1$	30	15	$3 \times (6-1)$
.....				36	18	$3 \times (7-1)$
n	$3 \times n \times (n-1) + 1$		$3 \times n \times (n-1) \div 2 + 1$	$6 \times (n-1)$		$3 \times (n-1)$

觀察上表，「x」個數彼此間的差剛好也呈現 3、6、9、12.....的規律性，以 46 為例：

$$\begin{aligned}
 46 &= 31 + 3 \times 5 \\
 31 &= 19 + 3 \times 4 \\
 19 &= 10 + 3 \times 3 \\
 10 &= 4 + 3 \times 2 \\
 4 &= 1 + 3 \times 1
 \end{aligned}
 \Rightarrow
 \begin{aligned}
 46 &= 1 + 3 \times 1 + 3 \times 2 + 3 \times 3 + 3 \times 4 + 3 \times 5 \\
 N &= 1 + 3 \times 1 + 3 \times 2 + 3 \times 3 + 3 \times 4 + 3 \times 5 + \dots + 3 \times (n-1) \\
 N &= 1 + 3 \times \frac{1}{2} \times n \times (n-1)
 \end{aligned}$$

(二) 特殊棋盤 2

六個正三角形可以組成一個正六邊形，因此我們想針對這種正三角形所組成的正六邊形棋盤作深入研究。在特殊棋盤 2 上阻擋正六邊形的安排「x」記號，圖形變化多端，例如：下圖邊長 2 的特殊圖形，須將圖形分為紅、綠、藍三類分別進行「x」記號的安排，若是邊長更大，則更複雜，還要加上其他大小不等的正六邊形。

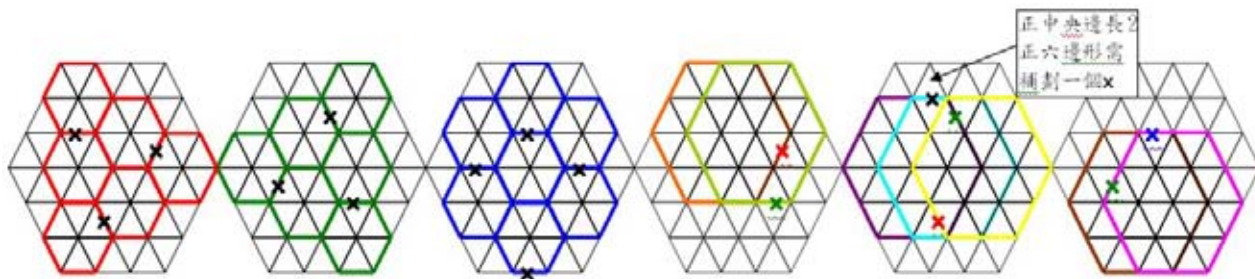
1、每邊為 1 的棋盤，最少須畫 1 個「x」，如下圖 1。



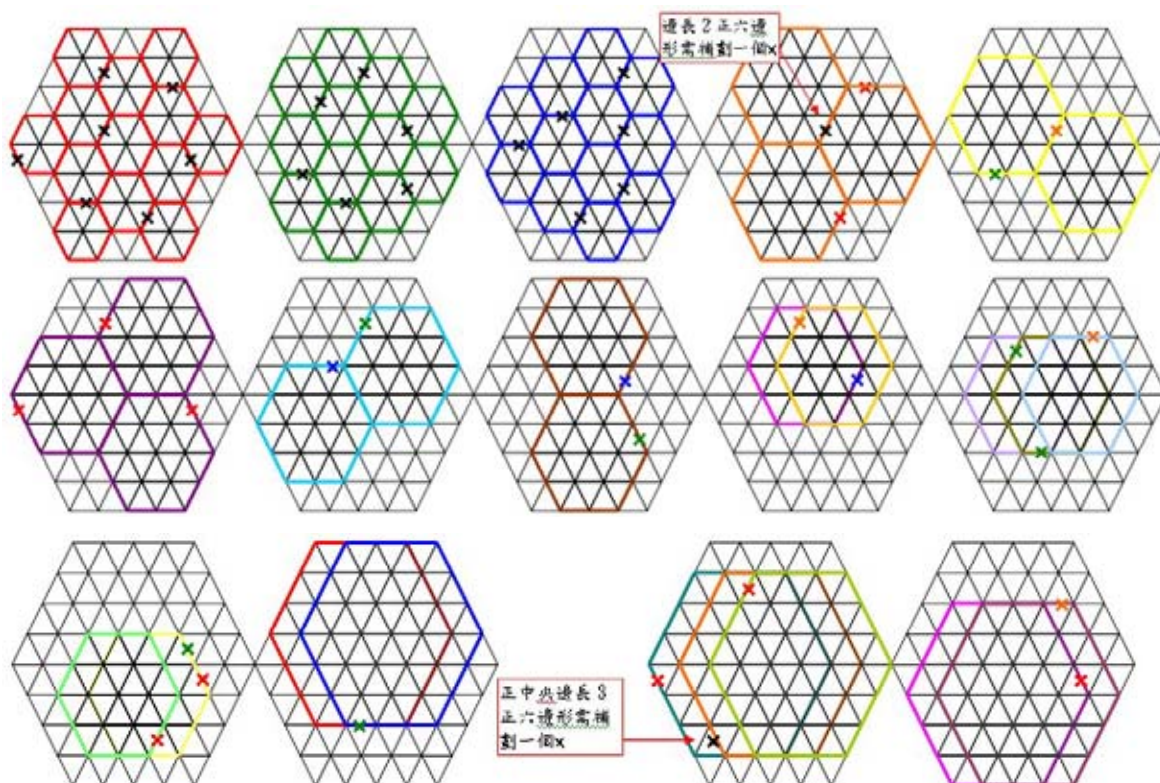
2、每邊為 2 的棋盤，最少須畫 5 個「x」，如下圖 2。



3、每邊為 3 的棋盤，最少須畫 11 個「x」，如下圖 3。(以黑色「x」為主要統計)



4、每邊為 4 的棋盤，最少須畫 21 個「x」，如下圖 4。

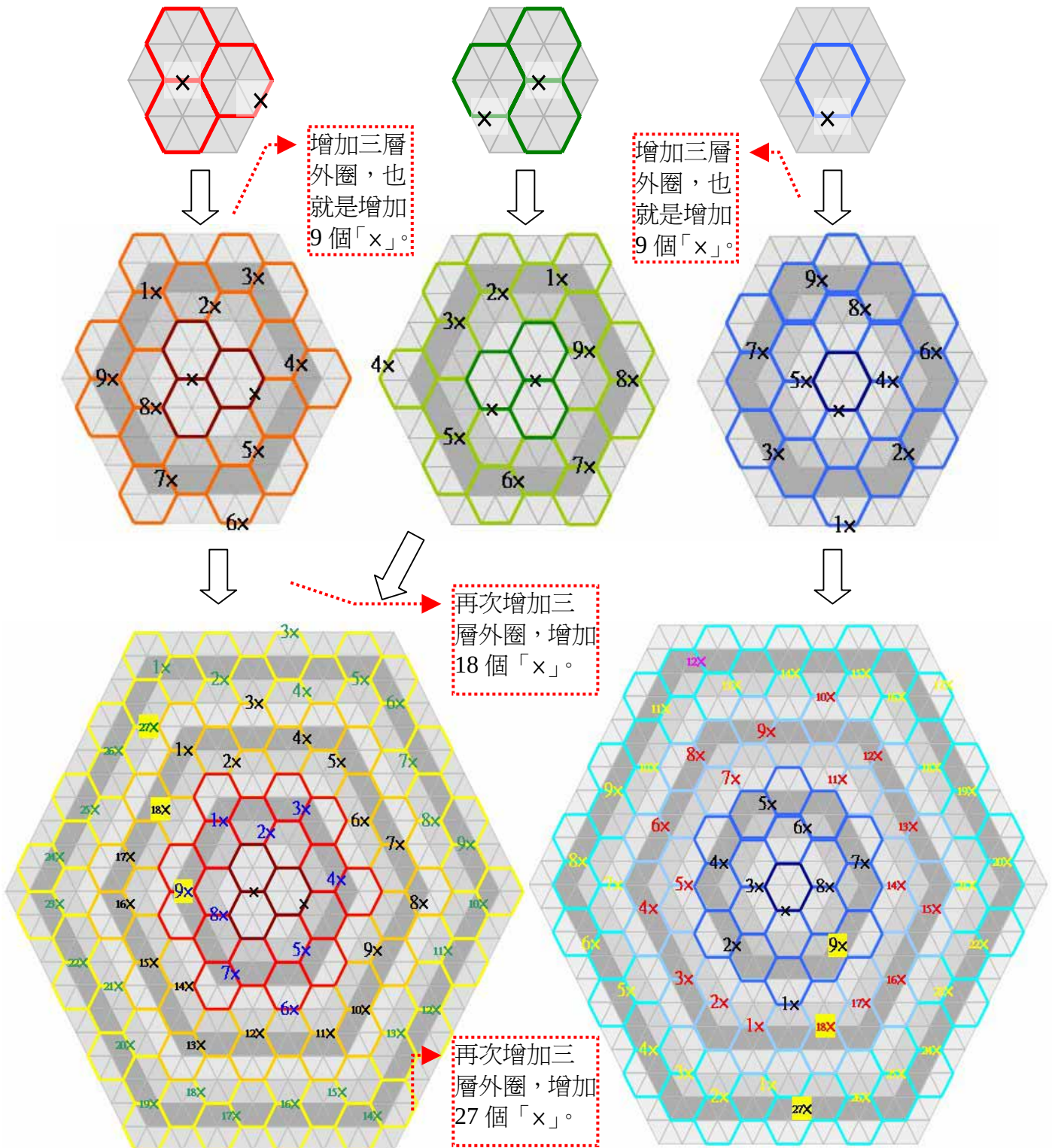


5、每邊為 5 的棋盤，最少須畫 35 個「x」，因限於篇幅，故煩請詳見附件。

6、尋找關聯性

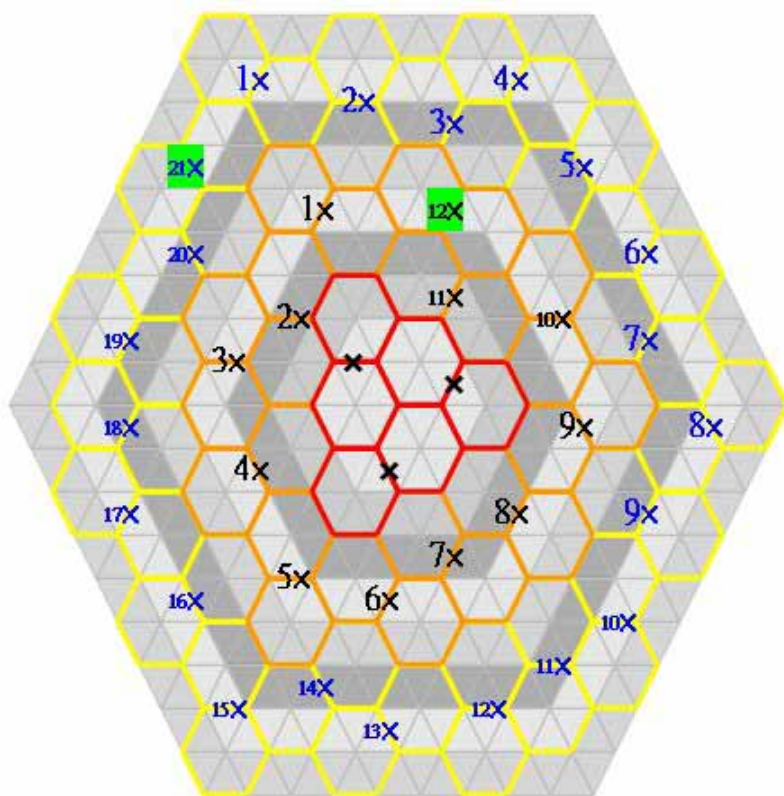
(1) 第一組：邊長 2、邊長 5、邊長 8

邊長 2 加上外圍三層後即是邊長 5，邊長 5 加上外為三層後即是邊長 8。但是必須分成紅、綠、藍三類進行，(綠色圖形也是紅色圖形的對稱圖形)，如下圖所呈現，每增加三層外層，兩個正六邊形共用一個「x」，所以增加的「x」數就以 $9 \Rightarrow 18 \Rightarrow 27 \dots$ 的數列累積增加。



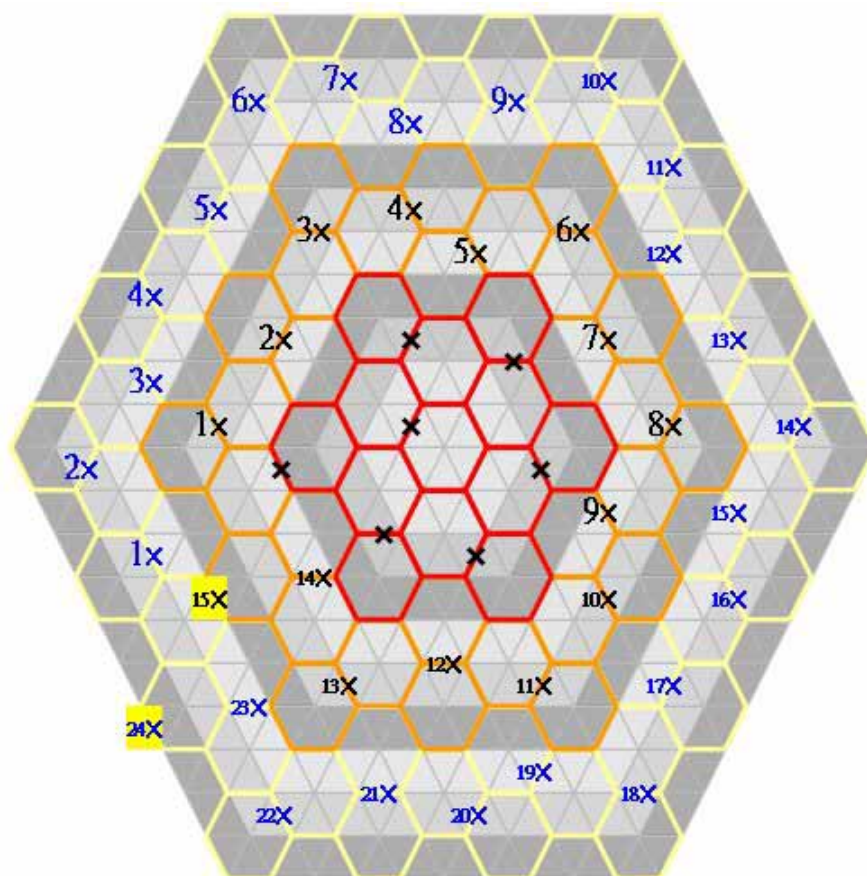
(2) 第二組：邊長 3、邊長 6、邊長 9

邊長 3 加上外圍三層後即是邊長 6，邊長 6 加上外為三層後即是邊長 9。但是必須分成紅、綠、藍三類進行，(因版面有限，僅呈現最後的邊長 9 的紅色圖形)，每增加三層外層，兩個正六邊形共用一個「x」，所以增加的「x」數就以 $12 \Rightarrow 21 \Rightarrow 30 \dots$ 的數列累積增加。



(3) 第三組：邊長 4、邊長 7、邊長 10

邊長 4 加上外圍三層後即是邊長 7，邊長 7 加上外為三層後即是邊長 10。但是必須分成紅、綠、藍三類進行，(因版面有限，僅呈現最後的邊長 10 的紅色圖形)，每增加三層外層，兩個正六邊形共用一個「x」，所以增加的「x」數就以 $15 \Rightarrow 24 \Rightarrow 33 \dots$ 的數列累積增加。



7、我們把最少「x」個數整理如下表，經觀察後發現其數字是有規律性的。

棋盤	總共的 「x」隻	紅色邊長 1		綠色邊長 1		藍色邊長 1		邊長 2	邊長 3	邊長 4	邊長 5		試找規律
		總格	總「x」數	總格	總「x」數	總格	總「x」數	「x」隻	「x」隻	「x」隻	「x」隻		邊長 n 與最少總「x」數關係
邊長 1	1	1	「x」=1										
邊長 2	5	3	「x」=2	3	「x」=2	1	「x」=1						$5=((2 \times (2-1) \div 2 + 1) \times 3 - 1) + (2-2)$
邊長 3	11	6	「x」=3	6	「x」=3	7	「x」=4	「x」=1					$11=(3 \times (3-1) \div 2 \times 3 + 1) + (3-2)$
邊長 4	21	12	「x」=6	12	「x」=6	13	「x」=7	「x」=1	「x」=1				$21=(4 \times (4-1) \div 2 \times 3 + 1) + (4-2)$
邊長 5	35	21	「x」=11	21	「x」=11	19	「x」=10	「x」=1	「x」=1	「x」=1			$35=((5 \times (5-1) \div 2 + 1) \times 3 - 1) + (5-2)$
邊長 6	50	30	「x」=15	30	「x」=15	31	「x」=16	「x」=1	「x」=1	「x」=1	「x」=1	補至邊 5	$50=(6 \times (6-1) \div 2 \times 3 + 1) + (6-2)$
邊長 7	69	42	「x」=21	42	「x」=21	43	「x」=22	「x」=1	「x」=1	「x」=1	「x」=1	補至邊 6	$69=(7 \times (7-1) \div 2 \times 3 + 1) + (7-2)$
邊長 8	92	57	「x」=29	57	「x」=29	55	「x」=28	「x」=1	「x」=1	「x」=1	「x」=1	補至邊 7	$92=((8 \times (8-1) \div 2 + 1) \times 3 - 1) + (8-2)$
邊長 9	116	72	「x」=36	72	「x」=36	73	「x」=37	「x」=1	「x」=1	「x」=1	「x」=1	補至邊 8	$116=(9 \times (9-1) \div 2 \times 3 + 1) + (9-2)$
邊長 10	144	90	「x」=45	90	「x」=45	91	「x」=46	「x」=1	「x」=1	「x」=1	「x」=1	補至邊 9	$144=(10 \times (10-1) \div 2 \times 3 + 1) + (10-2)$
.....													
邊長 n		當 $n=2.5.8...3k+2$ 符合 $nx(n-1) \div 2 + 1$ 其餘 符合 公式 $nx(n-1) \div 2$		當 $n=2.5.8...3k+2$ 符合 $nx(n-1) \div 2 + 1$ 其餘 符合 公式 $nx(n-1) \div 2$		當 $n=2.5.8...3k+2$ 符合 $nx(n-1) \div 2$ 其餘 符合公式 $nx(n-1) \div 2 + 1$		(n-2) 本部分所必須補的「x」數必須視紅、 綠、藍色三種圖形交錯出最佳排列 後，才能得到最少的「x」。					當 $n=2.5.8...3k+2$ 符合 最少「x」= $(nx(n-1) \div 2 \times 3 - 1) + (n-2)$ 其餘 符合公式 最少「x」= $(nx(n-1) \div 2 \times 3 + 1) + (n-2)$

⇒ 從上表中我們發現：

每增加三層外圈，「x」數就呈現 9、18、27 的數列累加（或呈現為 12、21、30....數列；15、24、33....數列）。

而且紅、綠、藍三色圖形重疊後，所需填補的「x」數也呈現（n-2）每次 1、2、3....累積。

①標示黃色文字，是邊 2、5、8 的棋盤格，所得的最少「x」個數，其數值符合 $(nx(n-1) \div 2 \times 3 - 1) + (n-2)$ ；

②標示綠色文字，是除了邊 $3k+2$ 棋盤以外（ $k=0、1、2....$ ），所得的最少「x」個數，其數值符合 $(nx(n-1) \div 2 \times 3 + 1) + (n-2)$ ；

四、阻擋長方形：

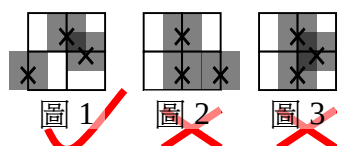
(一) 正方形棋盤

【摸索階段】

最初嘗試仿照阻擋正方形的模式，先分為偶數邊長與奇數邊長，但卻找不到相關的畫法，最後只得重新從簡單的 1x1 棋盤、2x2 棋盤、3x3 棋盤開始畫，雖然兩人在小棋盤都能畫出一致的最少「x」數，但隨著棋盤擴大，畫錯或「x」數不一致的機會就越多。

【找規律性】

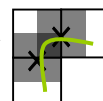
在畫的過程中，我們發現若想要阻擋長方形，不能只用二個方格共用 1 個「x」的方式，而需要三到四的方格共用 2~3 個「x」，其中以三個方格共用 2 個「x」最為經濟，必須畫的「x」數最少，我們以 2x2 棋盤為例說明：



左邊三個圖中，都只畫三個「x」而已，但圖 3 外圍的大正方形(正方形也是長方形的一種)並未阻擋，圖 2 上半圖的長方形也未能阻擋，因此須畫成圖 1 的「x」號分布情形。

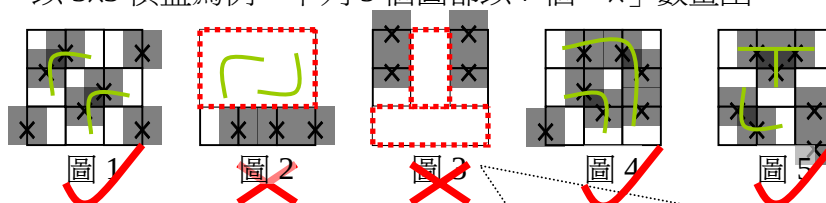
【假設驗證】

假設：根據上面的發現，我們假設阻擋長方形的畫法，必須畫 L 型方格，這樣能得到最少的「x」數。



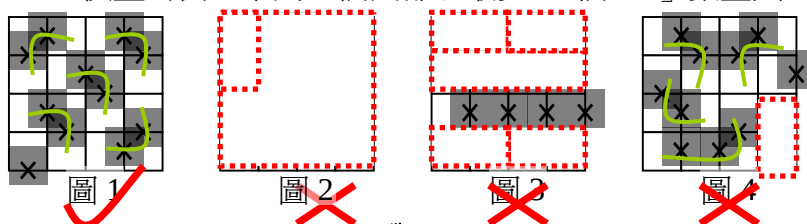
驗證：我們繼續畫 3x3 棋盤、4x4 棋盤，確認在這兩種棋盤上以 L 型方格畫法能出現最少的「x」數。

以 3x3 棋盤為例，下列 5 個圖都以 7 個「x」數畫出：



只有圖 1、圖 4 和圖 5 剛好是利用 L 型及最少 7 個「x」數畫出。圖 2 有一個長方形未阻擋(雖然兩個 L 型方格組合，但組合方式不對)、圖 3 有二個長方形未阻擋。

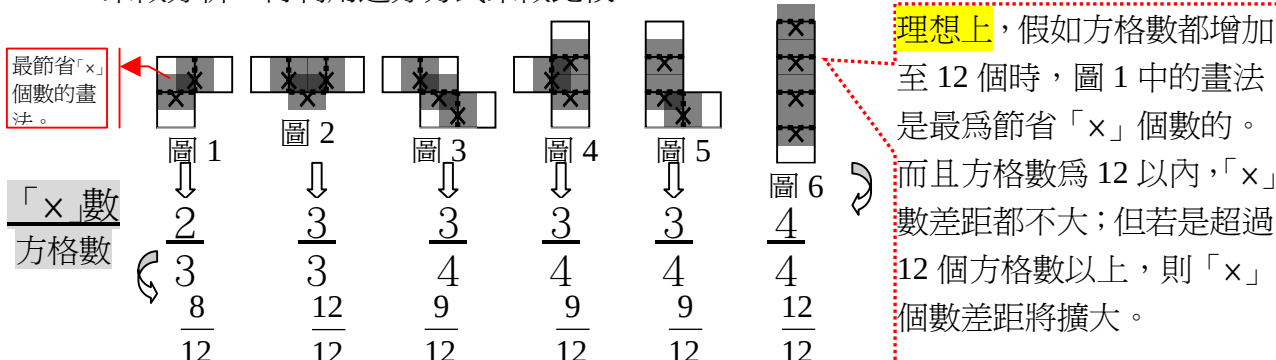
以 4x4 棋盤為例，下列 4 個圖都以最少 11 個「x」數畫出：



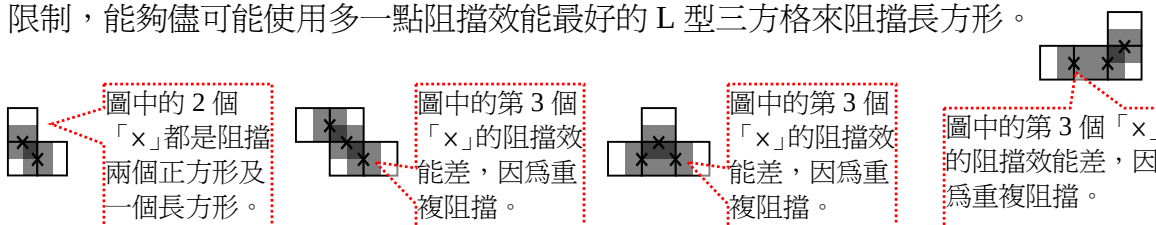
只有圖 1 是利用 L 型及最少 11 個「x」數畫出。圖 2 有二個長方形未阻擋、圖 3 有五個長方形未阻擋、圖 4 有一個長方形未阻擋。

【再次驗證】

另外我們再來比較下列各種圖形的畫法，我們使用「x」數與方格數的比例大小來做分析，再利用通分方式來做比較：

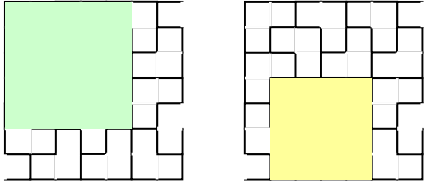
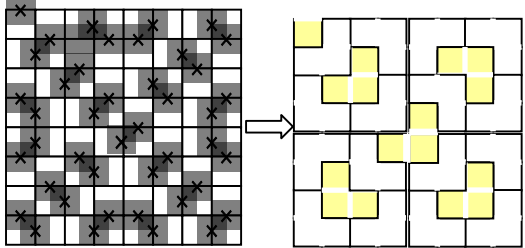
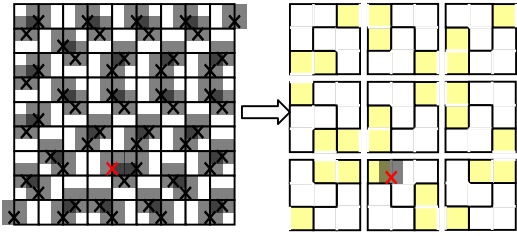
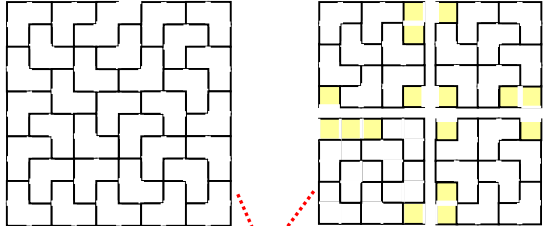


但實際上，一個棋盤 3x4（共有 12 個方格），是無法完全只單獨利用上面六個圖中的任一個來完全覆蓋，而沒有遺漏。如同前頁棋盤 3x3 及 4x4，只能說礙於圖形限制，能夠儘可能使用多一點阻擋效能最好的 L 型三方格來阻擋長方形。



經過上述的驗證，我們更加確認 L 型三方格是阻擋長方形的最佳畫法，所以接下來將針對正方形棋盤找出阻擋長方形的最少「x」個數。

(1) 1x1 棋盤，最少須畫 1 個「x」。	(2) 2x2 棋盤，最少須畫 3 個「x」。
(3) 3x3 棋盤，最少須畫 7 個「x」。 左邊分別是二種 3x3 棋盤的拼法。	(4) 4x4 棋盤，最少須畫 11 個「x」，由四個 2x2 的基本圖形所組合。 四組 3 個「x」扣除 1 個重複的「x」 $3 \times 4 - 1 = 11$
(5) 5x5 棋盤，最少須畫 18 個「x」。 左邊分別是二種 5x5 棋盤的拼法。	(6) 6x6 棋盤，最少須畫 25 個「x」。 由 4 個 3x3 棋盤所組合而成的，但外框是正方形須阻擋。 $7 \times 4 - 4 + 1 = 25$

(7) 7x7 棋盤，最少須畫 34 個「x」。  我們可利用 5x5 棋盤來發展成 7x7 棋盤，可以拼出最少的 34 個「x」。 我們可利用 4x4 棋盤來發展成 7x7 棋盤，可以拼出最少的 34 個「x」。	(8) 8x8 棋盤，最少須畫 43 個「x」，由四個 4x4 的基本圖形所組合。  $1 \times 4 - 1 = 4 \quad 3$ 四組 11 個「x」扣除 1 個重複的「x」
(9) 9x9 棋盤，最少須畫 55 個「x」，由 9 個 3x3 的基本圖形所組合。  $7 \times 9 - 8 = 5 \quad 5$ 九組 7 個「x」扣除 8 個重複的「x」	(10) 10x10 棋盤，最少須畫 68 個「x」。  我們利用 L 型來拼拼看，可畫出最少的 68 個「x」。 而若利用四個 5x5 棋盤，也可以拼出最少的 68 個「x」。 $1 \times 8 - 4 = 6 \quad 8$ 四組 18 個「x」扣除 4 個重複的「x」

我們發現從棋盤 1x1、棋盤 2x2、..... 到棋盤 10x10 等分別所找到最少的「x」個數，具有以下規律性：

第一種是棋盤 2x2⇒棋盤 4x4⇒棋盤 8x8

由棋盤 2x2 組成的基本圖形為基礎，四個 2x2 棋盤即可組成棋盤 4x4，這樣的組合可以節省 1 個「x」數；而四個 4x4 棋盤即可組成棋盤 8x8，這樣的組合還可以節省 1 個「x」數。

第二種是棋盤 3x3⇒棋盤 6x6⇒棋盤 9x9

由棋盤 3x3 組成的基本圖形為基礎，四個 3x3 棋盤即可組成棋盤 6x6，這樣的組合可以節省 4 個「x」數，但外框的大正方形需再額外用 1 個「x」來阻擋；而 9 個 3x3 棋盤即可組成棋盤 9x9，這樣的組合還可以節省 8 個「x」數。

第三種是棋盤 5x5⇒棋盤 10x10 以及棋盤 7x7

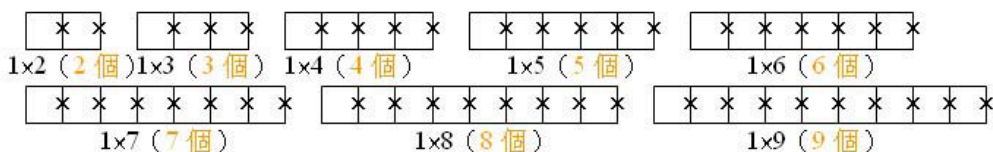
棋盤 5x5 可以藉由棋盤 4x4 基本圖形來發展而找出最少「x」數，而棋盤 7x7 可以藉由棋盤 4x4 或棋盤 5x5 基本圖形來發展而找出最少「x」數。另外棋盤 10x10 也可以用四個 5x5 棋盤來組合，如此一來可節省 4 個「x」數。

(二) 長方形棋盤

【基本想法】

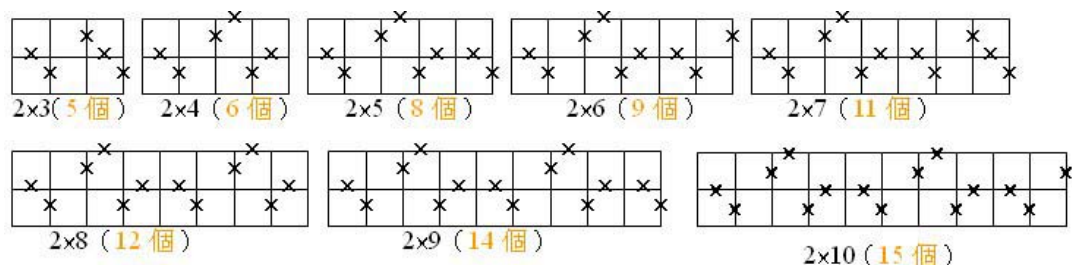
在長方形棋盤中阻擋長方形，想要得到最少的「x」數，三個方格必須共用二個「x」——也就是 L 型三方格，不過棋盤是長方形，所以我們決定以「固定寬邊，擴增長邊」的方式來做分類，也就是從棋盤 $1 \times n$ 、 $2 \times n$ 、 $3 \times n$（限於版面有限，僅呈現棋盤 $4 \times n$ （ n 在 10 以內），其餘請詳見附件）

1、棋盤 $1 \times n$ ($2 \leq n \leq 10$)

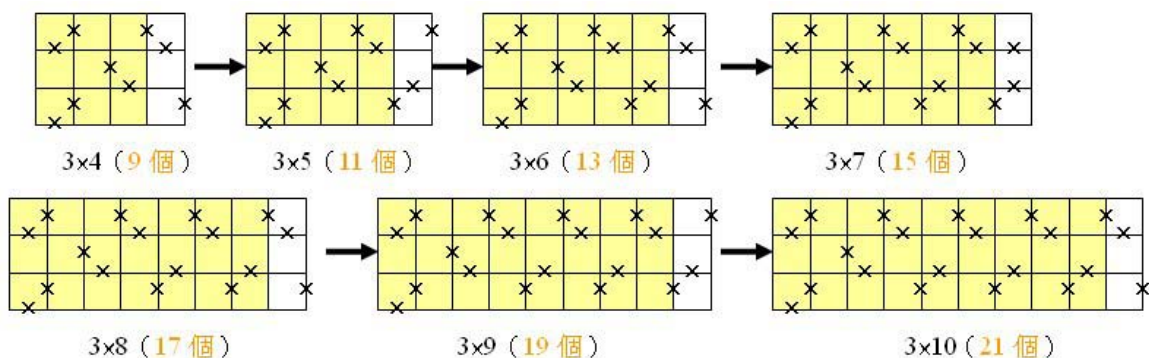


因為受限於圖形的限制，故「x」個數隨著長邊的累加，逐一增加個數。

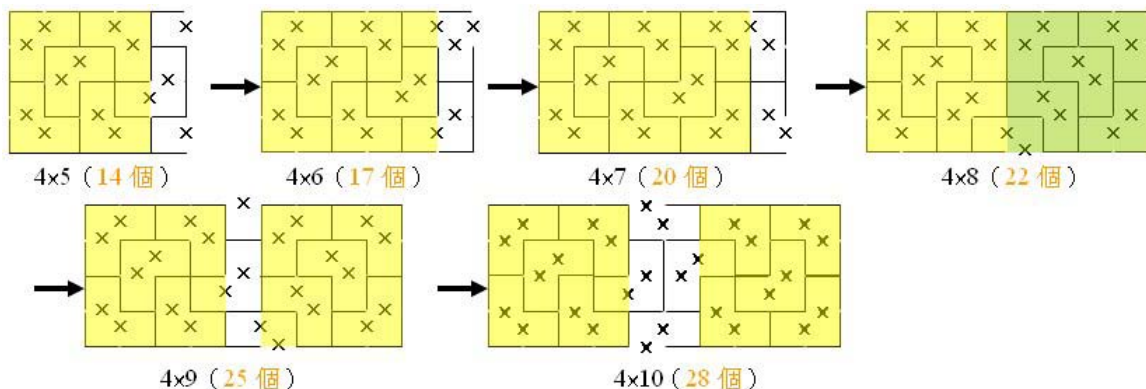
2、棋盤 $2 \times n$ ($3 \leq n \leq 10$)



3、棋盤 $3 \times n$ ($4 \leq n \leq 10$)



4、棋盤 $4 \times n$ ($5 \leq n \leq 10$)



5、其餘如棋盤 $5 \times n$ ($6 \leq n \leq 10$)、棋盤 $6 \times n$ ($7 \leq n \leq 10$)、棋盤 $7 \times n$ ($8 \leq n \leq 10$)、棋盤 $8 \times n$ ($9 \leq n \leq 10$)、棋盤 $9 \times n$ ($n = 10$) 等「 $\times$ 」號紀錄分布情形，因內容加複雜，請詳見附件紀錄。

6、彙整表格

我們將在正方形棋盤及長方形棋盤的阻擋長方形的最少「 $\times$ 」個數規律性予以彙整，分析整理邊長 $\times$ 邊長與最少的「 $\times$ 」個數的關係，整理在下表中：

邊長	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2		3	5	6	8	9	11	12	14	15
3			7	9	11	13	15	17	19	21
4				11	14	17	20	22	25	27
5					18	21	24	28	31	34
6						25	29	33	37	41
7							34	38	43	48
8								43	49	54
9									55	61
10										68



	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1 $(1 \times 1) \div 3 \times 2 + 1$	2 $(1 \times 2) \div 3 \times 2 + 2$	3 $(1 \times 3) \div 3 \times 2 + 1$	4 $(1 \times 4) \div 3 \times 2 + 2$	5 $(1 \times 5) \div 3 \times 2 + 3$	6 $(1 \times 6) \div 3 \times 2 + 2$	7 $(1 \times 7) \div 3 \times 2 + 3$	8 $(1 \times 8) \div 3 \times 2 + 2$	9 $(1 \times 9) \div 3 \times 2 + 3$	10 $(1 \times 10) \div 3 \times 2 + 3$
2		3 $(2 \times 2) \div 3 \times 2 + 1$	5 $(2 \times 3) \div 3 \times 2 + 1$	6 $(2 \times 4) \div 3 \times 2 + 2$	8 $(2 \times 5) \div 3 \times 2 + 2$	9 $(2 \times 6) \div 3 \times 2 + 1$	11 $(2 \times 7) \div 3 \times 2 + 3$	12 $(2 \times 8) \div 3 \times 2 + 2$	14 $(2 \times 9) \div 3 \times 2 + 2$	15 $(2 \times 10) \div 3 \times 2 + 3$
3			7 $(3 \times 3) \div 3 \times 2 + 1$	9 $(3 \times 4) \div 3 \times 2 + 1$	11 $(3 \times 5) \div 3 \times 2 + 1$	13 $(3 \times 6) \div 3 \times 2 + 1$	15 $(3 \times 7) \div 3 \times 2 + 1$	17 $(3 \times 8) \div 3 \times 2 + 1$	19 $(3 \times 9) \div 3 \times 2 + 1$	21 $(3 \times 10) \div 3 \times 2 + 1$
4				11 $(4 \times 4) \div 3 \times 2 + 1$	14 $(4 \times 5) \div 3 \times 2 + 2$	17 $(4 \times 6) \div 3 \times 2 + 1$	20 $(4 \times 7) \div 3 \times 2 + 2$	22 $(4 \times 8) \div 3 \times 2 + 2$	25 $(4 \times 9) \div 3 \times 2 + 1$	27 $(4 \times 10) \div 3 \times 2 + 1$
5					18 $(5 \times 5) \div 3 \times 2 + 2$	21 $(5 \times 6) \div 3 \times 2 + 1$	24 $(5 \times 7) \div 3 \times 2 + 2$	28 $(5 \times 8) \div 3 \times 2 + 1$	31 $(5 \times 9) \div 3 \times 2 + 2$	34 $(5 \times 10) \div 3 \times 2 + 1$
6						25 $(6 \times 6) \div 3 \times 2 + 1$	29 $(6 \times 7) \div 3 \times 2 + 1$	33 $(6 \times 8) \div 3 \times 2 + 1$	37 $(6 \times 9) \div 3 \times 2 + 1$	41 $(6 \times 10) \div 3 \times 2 + 1$
7							34 $(7 \times 7) \div 3 \times 2 + 2$	38 $(7 \times 8) \div 3 \times 2 + 2$	43 $(7 \times 9) \div 3 \times 2 + 1$	48 $(7 \times 10) \div 3 \times 2 + 2$
8								43 $(8 \times 8) \div 3 \times 2 + 1$	49 $(8 \times 9) \div 3 \times 2 + 1$	54 $(8 \times 10) \div 3 \times 2 + 2$
9									55 $(9 \times 9) \div 3 \times 2 + 1$	61 $(9 \times 10) \div 3 \times 2 + 1$
10										68 $(10 \times 10) \div 3 \times 2 + 2$

觀察上述二個表格中的資料，棋盤 $1 \times n$ ($2 \leq n \leq 10$) 受限於圖形限制的緣故，「x」個數隨著長邊的累加，逐一增加個數；而棋盤 $2 \times n$ ($3 \leq n \leq 10$) 也出現規律性 (2、3、缺 4、5、6、缺 7、8、9、缺 10、11、12、缺 13、14、15)。

而 $3 \times n$ ($4 \leq n \leq 10$) 以上棋盤所畫出的「x」個數，比較符合我們所推得的公式 $\lfloor \frac{\text{長} \times \text{寬}}{3} + 1 \rfloor$ 或 $\lfloor \frac{\text{長} \times \text{寬}}{3} + 2 \rfloor$ ，因為根據我們前面所推論三個方格的畫法是最為節省「x」個數的，而公式中加的 1 或 2 其實除以 3 以後的餘數



不過阻擋長方形看起來雖然有規律性，但目前我們只畫出長度值和寬度值在 10 以內；至於當我們想知道長度值和寬度值都在 10 以上或更大固定長 $\times$ 寬棋盤的最少「x」個數，目前是無法得知，因為涉及範圍較大、複雜，目前我們尚未找出。

柒、結論

從前項研究過程中，我們找出了某類型圖案所需拿掉最少的「x」，而這些「x」個數中隱藏著有趣的規律性，經過一番努力，我們找出了以下的規律性：(假設 n 為邊長)

一、阻擋正方形

我們利用兩個方格共用 1 個「x」的策略來阻擋，並以每次一層一層外框往外擴增的「回」字增加的方式為來尋找規律性。我們將阻擋正方形的棋盤邊長 $\times$ 邊長與最少的「x」個數的關係，整理在下表中：

邊長	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	1	1	2	2	3	3	4	4	5	5	6	6
2		3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
3			6	7	8	10	11	13	14	16	17	19
4				9	11	13	15	17	19	21	23	25
5					14	16	18	21	23	26	28	31
6						19	22	25	28	31	34	37
7							26	29	32	36	39	43
8								33	37	41	45	49
9									42	46	50	55
10										51	56	61
11											62	67
12												73

☞ 從上表中我們發現：

- 標示綠色框是邊長為 $1 \times n$ 棋盤 (n 為偶數) 所得最少「x」個數，符合公式 $1 \times n \div 2$ ；
- 標示紅底線是 $n \times n$ 棋盤 (n 為偶數) 所得最少「x」個數，符合公式 $n \times n \div 2 + 2$ ；
- 其餘的數字則是不同於上述兩種情形，其數值符合公式 $n \times m \div 2 + 1$ 。

二、阻擋正三角形

1. 利用兩個三角形必須共用一個「x」的策略來阻擋，而且當棋盤邊長逐一增加，所增加的最少「x」數的確有規律性的增加。我們將阻擋正三角形的棋盤邊長與最少的「x」個數的關係，整理在下面兩個表中：（假設 n 為邊長）

正三角形棋盤邊長	1	2	3	4	5	6		N
最少「x」個數	1	3	6	10	15	21		?
「x」個數差		2	3	4	5	6		

在正三角形棋盤上阻擋正三角形的最少的「x」個數公式為 $\frac{1}{2} \times (n+1) \times n$

2. 特殊棋盤 1 上阻擋正三角形，我們是以每次一層一層外框往外擴增的「回」字增加的方式為來尋找規律性。所找到的最少的「x」個數公式為 $3 \times n \times n$

特殊棋盤 1 邊長	1	2	3	4	5	6		N
最少「x」個數	3	12	27	48	75	108		?
	3x1	3x4	3x9	3x16	3x25	3x36		?
	3x1x1	3x2x2	3x3x3	3x4x4	3x5x5	3x6x6		3xnxn

三、阻擋正六邊形

1. 利用兩個方格共用 1 個「x」的策略來阻擋，並以每次一層一層外框往外擴增的「回」字增加的方式為來尋找規律性。將阻擋正六角形的棋盤邊長與最少的「x」個數的關係，整理在下面兩個表中：（假設 n 為邊長）

正六角形棋盤邊長	1	2	3	4	5	6		N
最少「x」個數	1	4	10	19	31	46		?
「x」個數差		3	6	9	12	15		?
		3x1	3x2	3x3	3x4	3x5		?

在正六邊形棋盤阻擋正六邊形的最少的「x」個數公式為 $1 + 3 \times \frac{1}{2} \times n \times (n-1)$

2. 在特殊圖形 2 上阻擋正六邊形比較複雜，必須拆成三組圖形來分析，利用兩個方格共用 1 個「x」的策略來阻擋，並以每次三層三層地往外擴增的「回」字增加的方式為來尋找規律性。以邊長 2 棋盤為例，每增加三層外圈，「x」數就呈現 9、18、27 的數列累加（而邊長 3 則以 12、21、30....增加「x」數；而邊長 4 則以 15、24、33....增加「x」數）。

- ❶ 邊長 2、5、8 的棋盤格，所得的最少「x」個數符合 $(n \times (n-1) \div 2 \times 3 - 1) + (n-2)$ ；
- ❷ 其餘除了邊長 $(k+2)$ 棋盤以外的棋盤圖形 $(k=0、1、2....)$ ，每個棋盤所得的最少「x」個數符合 $(n \times (n-1) \div 2 \times 3 + 1) + (n-2)$ ；

四、阻擋長方形

1.我們發現 L 型三方格的畫法是阻擋長方形的最佳畫法，而棋盤 1x1、棋盤 2x2、.....到棋盤 10x10 等分別所找到最少的「x」個數，具有以下的規律性：

(1) 第一種是棋盤 2x2⇒棋盤 4x4⇒棋盤 8x8

由棋盤 2x2 組成的基本圖形為基礎，四個 2x2 棋盤即可組成棋盤 4x4，這樣的組合可以節省 1 個「x」數；而四個 4x4 棋盤即可組成棋盤 8x8，這樣的組合還可以節省 1 個「x」數。

(2) 第二種是棋盤 3x3⇒棋盤 6x6⇒棋盤 9x9

由棋盤 3x3 組成的基本圖形為基礎，四個 3x3 棋盤即可組成棋盤 6x6，這樣的組合可以節省 4 個「x」數，但外框的大正方形需再額外用 1 個「x」來阻擋；而 9 個 3x3 棋盤即可組成棋盤 9x9，這樣的組合還可以節省 8 個「x」數。

(3) 第三種是棋盤 5x5⇒棋盤 10x10 以及棋盤 7x7

棋盤 5x5 可以藉由棋盤 4x4 基本圖形來發展而找出最少「x」數，而棋盤 7x7 可以藉由棋盤 4x4 或棋盤 5x5 基本圖形來發展而找出最少「x」數。另外棋盤 10x10 也可以用四個 5x5 棋盤來組合，如此一來可節省 4 個「x」數。

我們將阻擋長方形的棋盤邊長x邊長與最少的「x」個數的關係，整理在下表中：

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1 (1x1)÷3x2+1	2 (1x2)÷3x2+2	3 (1x3)÷3x2+1	4 (1x4)÷3x2+2	5 (1x5)÷3x2+3	6 (1x6)÷3x2+2	7 (1x7)÷3x2+3	8 (1x8)÷3x2+2	9 (1x9)÷3x2+3	10 (1x10)÷3x2+3
2		3 (2x2)÷3x2+1	5 (2x3)÷3x2+1	6 (2x4)÷3x2+2	8 (2x5)÷3x2+2	9 (2x6)÷3x2+1	11 (2x7)÷3x2+3	12 (2x8)÷3x2+2	14 (2x9)÷3x2+2	15 (2x10)÷3x2+3
3			7 (3x3)÷3x2+1	9 (3x4)÷3x2+1	11 (3x5)÷3x2+1	13 (3x6)÷3x2+1	15 (3x7)÷3x2+1	17 (3x8)÷3x2+1	19 (3x9)÷3x2+1	21 (3x10)÷3x2+1
4				11 (4x4)÷3x2+1	14 (4x5)÷3x2+2	17 (4x6)÷3x2+1	20 (4x7)÷3x2+2	22 (4x8)÷3x2+2	25 (4x9)÷3x2+1	27 (4x10)÷3x2+1
5					18 (5x5)÷3x2+2	21 (5x6)÷3x2+1	24 (5x7)÷3x2+2	28 (5x8)÷3x2+1	31 (5x9)÷3x2+2	34 (5x10)÷3x2+1
6						25 (6x6)÷3x2+1	29 (6x7)÷3x2+1	33 (6x8)÷3x2+1	37 (6x9)÷3x2+1	41 (6x10)÷3x2+1
7							34 (7x7)÷3x2+2	38 (7x8)÷3x2+2	43 (7x9)÷3x2+1	48 (7x10)÷3x2+2
8								43 (8x8)÷3x2+1	49 (8x9)÷3x2+1	54 (8x10)÷3x2+2
9									55 (9x9)÷3x2+1	61 (9x10)÷3x2+1
10										68 (10x10)÷3x2+2

觀察上表可知：(假設 n 為邊長)

- (1) 棋盤 $1 \times n$ ($2 \leq n \leq 10$) 受限於圖形限制,「 $\times$ 」個數隨著長邊累加而逐一增加。
- (2) 棋盤 $2 \times n$ ($3 \leq n \leq 10$) 出現特殊的規律性,例如:2、3、缺4、5、6、缺7、8、9、缺10、11、12、缺13、14、15)。
- (3) 棋盤 $3 \times n$ ($4 \leq n \leq 10$) ~ 棋盤 $10 \times n$ 的「 $\times$ 」個數,符合公式【 $\text{長} \times \text{寬} \div 3 \times 2 + 1$ 】或【 $\text{長} \times \text{寬} \div 3 \times 2 + 2$ 】,因為  三個方格的畫法是最為節省「 $\times$ 」個數的,而公式中加的1或2其實除以3後所得的餘數。
- (4) 長方形看起來雖然有規律性,但目前我們只畫出長度值、寬度值在10以內;至於當我們想知道長度值和寬度值都在10以上或更大固定長 $\times$ 寬棋盤的最少「 $\times$ 」個數,仍需要繼續努力,因為涉及範圍較大、複雜。

五、阻擋正三角形在安排「 $\times$ 」記號及尋找規律性時,是最簡單的;但在阻擋正六邊形安排「 $\times$ 」記號及尋找規律性時,是最困難的。

捌、心得與展望

- 一、這個實驗讓我們絞盡腦汁、費盡心思,半年來兩人分工合作,共同尋找刪除最少的邊長「 $\times$ 」個數,過程中充滿了挑戰性與趣味性,不過最後總算能找到美妙的規律性。
- 二、未來我們要繼續往邊長更多、更大的阻擋長方形探討及研究,將確實的公式找出來,以及朝向其他圖形的深入研究,例如阻擋平行四邊形、阻擋菱形等等,也期望各位評審前輩們能給予指教,使我們能對更深入、更完整地學習數學。
- 三、另外我們還發現一種新式的對弈遊戲——就是二人在有限個火柴棒以對弈的方式輪流將火柴棒置入特定正方形棋盤,但以不圍成正方形(或不能圍成長方形)為原則,若是不小心圍出正方形(長方形)則為輸家,如附件說明。

玖、參考資料

王登傳(民91)。數學遊戲大觀(第二集)。高雄:前程出版社。

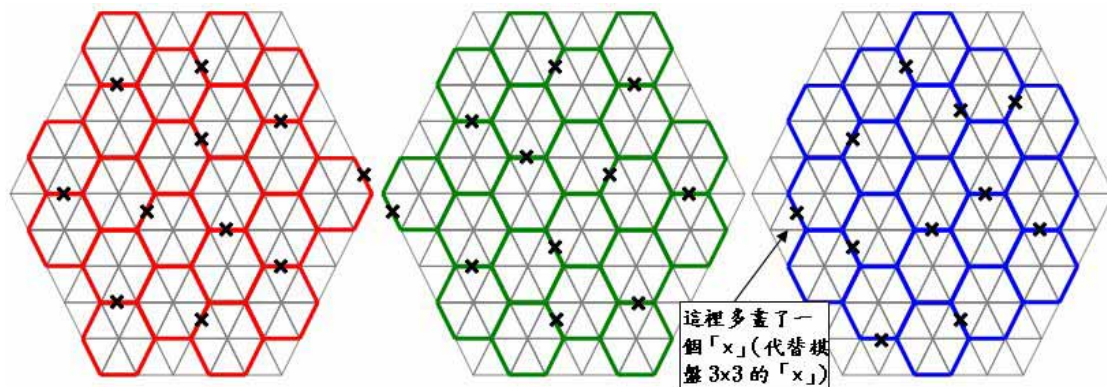
胡守仁譯(民95)。Bukard Polster。數學骨牌—歸納法。妙不可言的數學證明。台北市:天下遠見出版。

國立台灣科學教育館。中華民國第44屆中小學科學展覽優勝作品專輯。2003.06.1版。台北市。國立台灣科學教育館。中小學科學展覽高小組數學科全國第二名。『阻擋正多邊形』。

【附件一】在特殊棋盤 2 中阻擋正六邊形

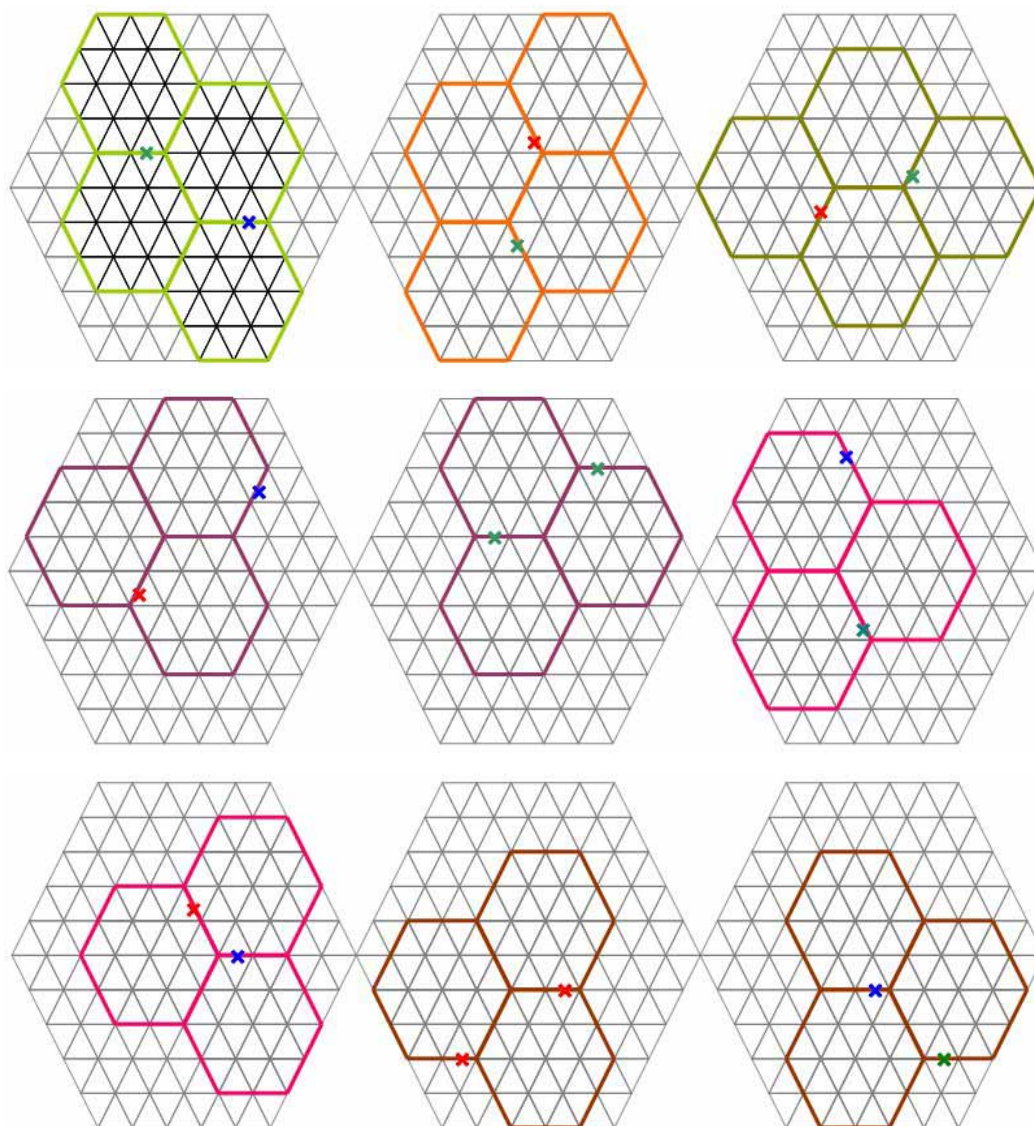
在特殊棋盤 2 阻擋正六邊形，每邊為 5 的棋盤，最少須畫 35 個「x」，如下圖。

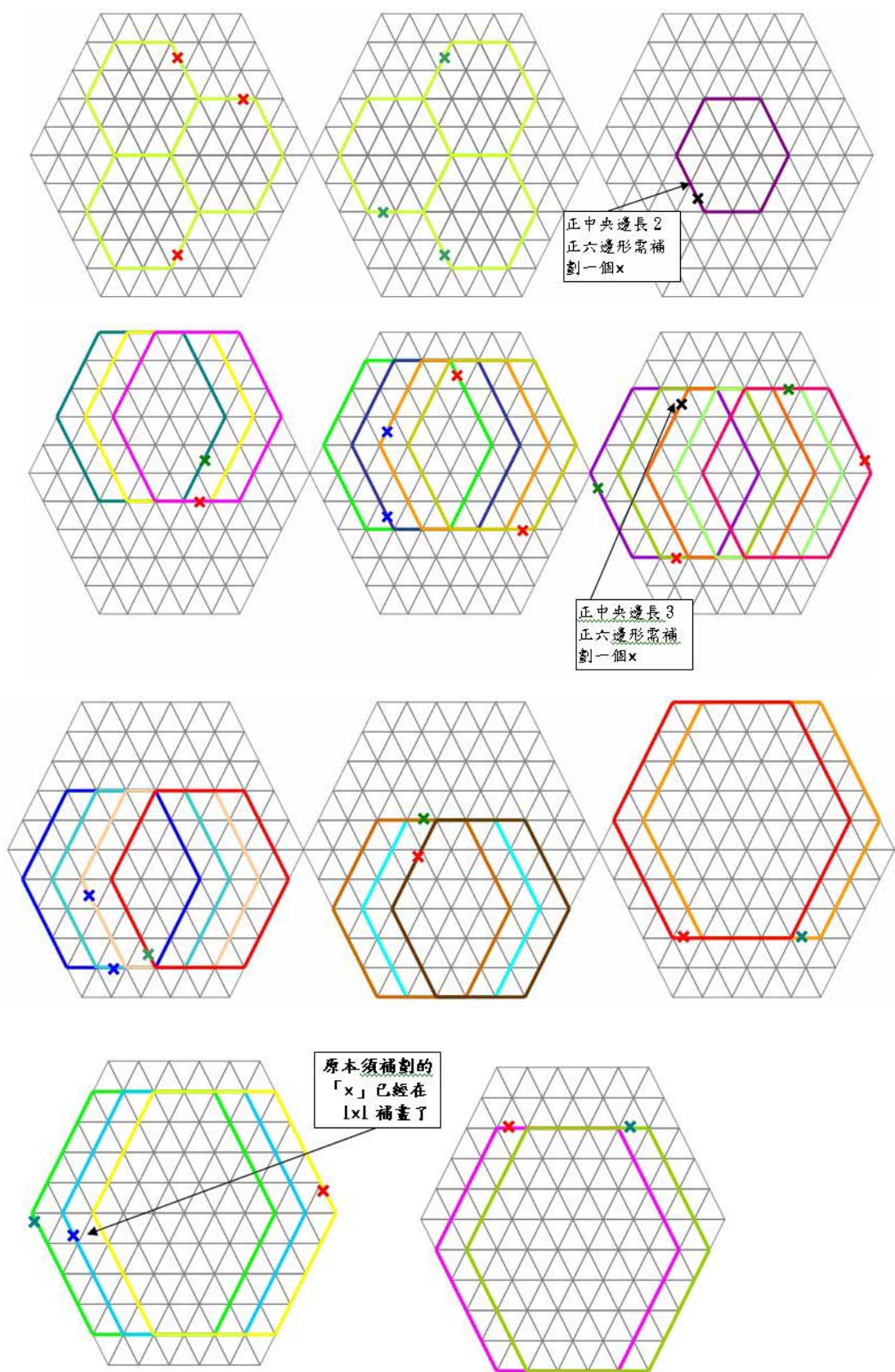
備



中

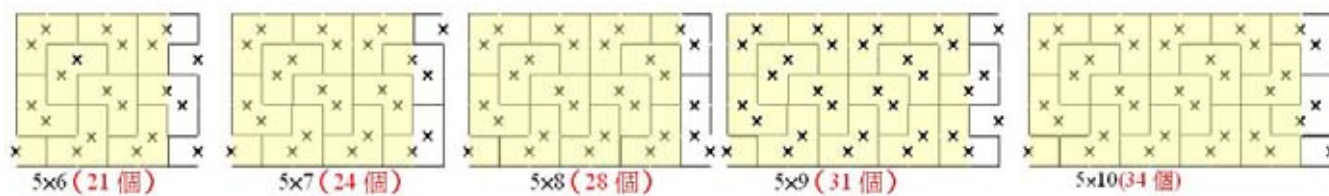
，應該只須畫出 10 個「x」，但因遷就紅色圖及綠色圖的位置，故藍色圖只得多畫 1 個「x」，但是並不影響整體總數，因為後來發現這裡所多出的 1 個「x」，其實就是補正中央邊長 3 正六邊形需的一個x。雖然是了許多次，尚未能找出完美的畫法，但每次畫出來的「x」總數和完美畫法的圖形相同。(我們仍在尋找完美的畫法中)



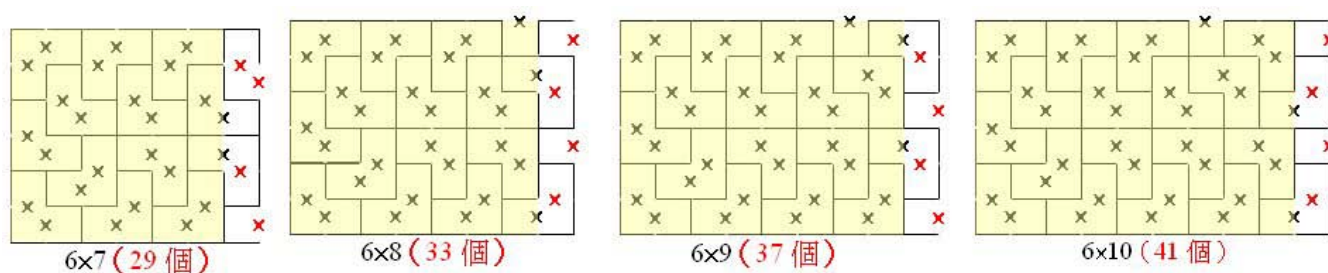


【附件二】長方形棋盤中阻擋長方形

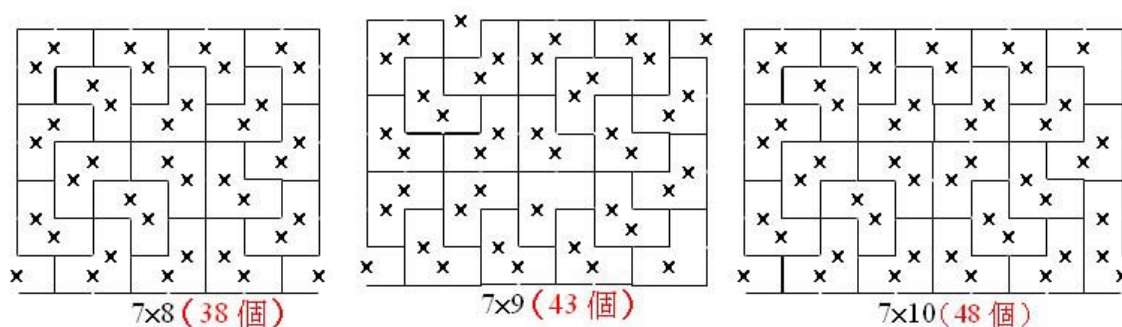
一、棋盤 $5 \times n$ ($6 \leq n \leq 10$)



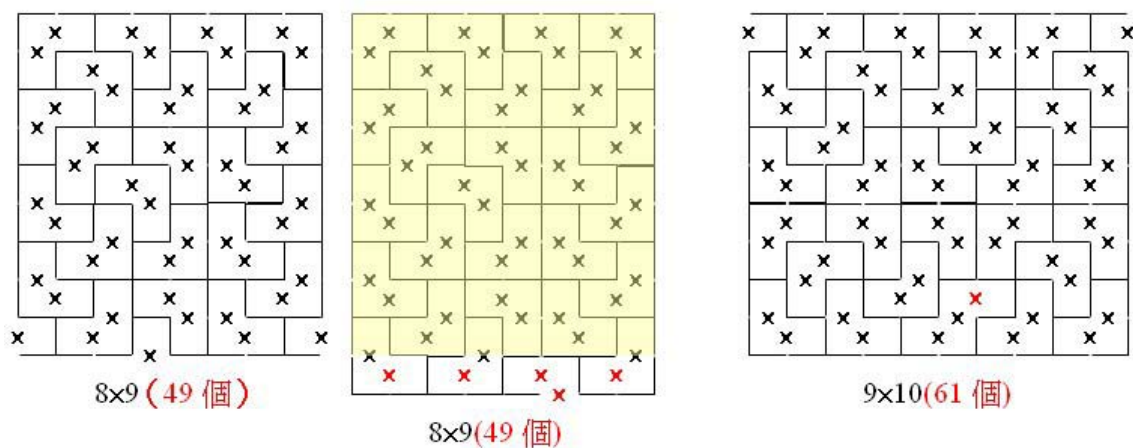
二、棋盤 $6 \times n$ ($7 \leq n \leq 10$)



三、棋盤 $7 \times n$ ($8 \leq n \leq 10$)



四、 $8 \times n$ 棋盤 ($9 \leq n \leq 10$) 及棋盤 $9 \times n$ ($n = 10$)



評語

080403 我拆!我拆!我拆拆拆!-拆除最少邊數以阻擋正多邊

形的研究

本主題延伸以往的問題，改變規則，並增加問題的複雜度(如將形狀改變、增列特殊棋盤的探討)，做了完整的分析。從尋找規律，假設驗證，將問題化繁為簡，解決問題能力頗佳。