

中華民國第四十六屆中小學科學展覽會  
作品說明書

---

國小組 數學科

第三名

080402

柏拉圖的天空－正多面體展開圖之研究

學校名稱： 臺北市大安區私立復興國民小學

|        |       |
|--------|-------|
| 作者：    | 指導老師： |
| 小六 鄭凱元 | 張慎    |
| 小六 徐婉慈 | 張彩帆   |
| 小六 賴睿加 |       |
| 小六 王若瑄 |       |
| 小六 林揚凱 |       |
| 小六 林妤倩 |       |

關 鍵 詞：展開圖、正多面體、模式

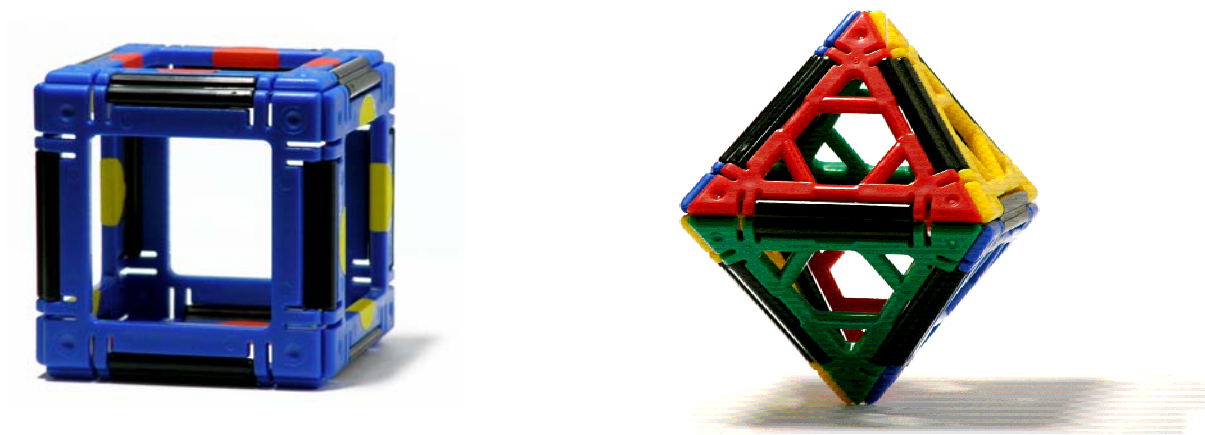
# 作品名稱：柏拉圖的天空—正多面體展開圖之研究

## 摘要

柏拉圖時代就被發現的五個正多面體，一直吸引著人們的好奇心。它們經常出現在國小的教科書以及一般補充教材上，不過通常都是利用它們來介紹尤拉公式，對於另一個令人感到興趣的問題——“展開圖”的介紹卻不是很詳盡。在我們的研究中，對於正六面體與正八面體，我們找出了一組簡單、易記的模式，來判斷某個平面圖是否為正六面體或正八面體的展開圖，同時我們也找出了一個利用基本模式，就能產生所有正六面體與正八面體的展開圖的方法。

## 壹、研究動機

有一次數學課時，老師要求我們用卡紙試著製作出一個骰子，我們發現，如果要折出骰子，必須先畫出正六面體的展開圖，有趣的是，每個同學所畫出來的展開圖都不太一樣，我們必須用紙剪出各自畫出的展開圖，才能判斷是否可以折成正六面體。在五年級數學課本的「柱體與錐體」單元中，我們學過立體圖形與平面展開圖的關係。我們希望能找出方法，不必靠實際剪出展開圖，就能判斷什麼才是正六面體的正确展開圖，並試著找出所有正六面體的展開圖。同時，嘗試將這套方法延伸到正八面體展開圖的研究上。



## 貳、研究目的

- 一、尋找正六面體的基本拆解模式。
- 二、利用基本拆解模式來測試所有可能的正六面體展開圖——“三十五個六連方”，我們發現僅有十一個“六連方”能組成正六面體，這個結果與舊的研究一樣。
- 三、根據正六面體的研究結果，我們嘗試將本方法運用在正八面體展開圖的研究上，並獲得相當良好的結果。

## 參、研究設備及器材

正方形智慧片、正三角形智慧片。



## 肆、研究過程或方法

- 一、正多面體的特徵：

本研究的第一個課題是正多面體有哪些共同的特性？

第一項共同的特性就是我們所知道的尤拉公式：

$$\text{頂點的數目} + \text{面的數目} - \text{邊的數目} = 2$$

不過這個特性對於展開圖的研究並沒有太大的幫助。

第二個共同的特性就是除了正四面體之外，每一個面在空間上都有一個與它自己平行的面，我們簡稱為『對面』。正六面體有三組對面，正八面體、正十二面體、正二十面體分別具有四、六、十組的『對面』。『對面』的概念是

我們這個研究的基礎，利用『對面』在展開圖上的相關位置，我們找出了正六面體與正八面體的基本「拆解模式」。

## 二、正六面體的拆解模式：

在這個實驗中，我們希望了解正六面體的某一組『對面』在展開圖上的相對位置。我們利用六個正方形的智慧片組成一個正六面體來作為研究的輔助工具。

首先先選定某一組對面，我們發現要將這組對面從正六面體上拆解下來的方法共有以下四種模式：

- (一)、模式一：『對面』之間隔著另一個面。
- (二)、模式二：『對面』之間隔著另兩個連續的面。
- (三)、模式三：『對面』之間隔著另三個連續的面。
- (四)、模式四：『對面』之間隔著另四個連續的面。

這四種模式在展開圖中的相對關係如圖 1-1a ~ 1-1d 所示：

模式一：



圖 1-1a

模式二：

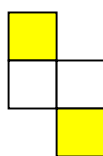


圖 1-1b

模式三：

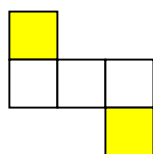


圖 1-1c

模式四：

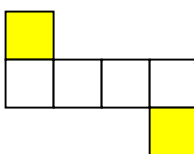


圖 1-1d

其中兩個實心的方形  代表同一組對面，空心的方形  代表正六面體上的其他的面。我們稱以上的四組模式為正六面體的四個基本『拆解模式』。

由於正六面體有三組對面，因此在一個正六面體的展開圖中，應該剛好可以找到三個基本『拆解模式』，否則該圖將無法組成正六面體。

## 三、六連方的測試

我們知道，正六面體的展開圖必定是由六連方(六個相連的正方形)所組成，根據參考資料四所得到的結果，我們發現六連方共有三十五個，而正六面體的展開圖一定包含在這些六連方中，於是我們試著利用模式測試的方法來檢驗六連方是否能組成正六面體，測試方式如下：

例一：圖 3-1 是否能形成正六面體

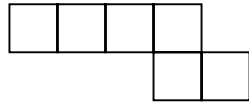


圖 3-1

測試過程：

(一)在這個六連方中，我們發現到它存在基本模式一的對面，我們先將這組正方形塗上同一種顏色，如圖 3-2 所示

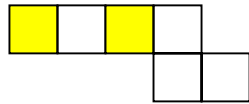


圖 3-2

(二)接著，我們又發現剩下的四個正方形也存在一個基本模式一的對面，我們再將這組正方形塗上另一種顏色，如圖 3-3 所示



圖 3-3

(三)這時我們發現剩下的兩個正方形不符合任何模式，所以圖 3-1 不是正六面體的展開圖。

例二：圖 3-4 是否能形成正六面體

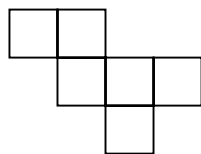


圖 3-4

測試過程：

(一)在這個連方中，我們找到一個基本模式二的圖形，我們先將這組正方形塗上同一種顏色，如圖 3-5 所示

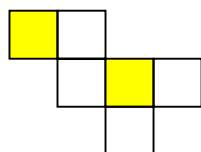


圖 3-5

(二)接著，我們又在剩下的四個正方形中找到一個基本模式一的圖形，我們再將這組正方形塗上另一種顏色，如圖 3-6 所示

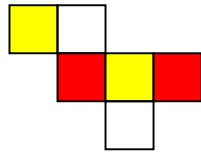


圖 3-6

(三)剩下的兩個正方形是模式二，我們將它們塗上另一種顏色，如圖 3-7 所示。

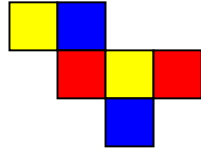
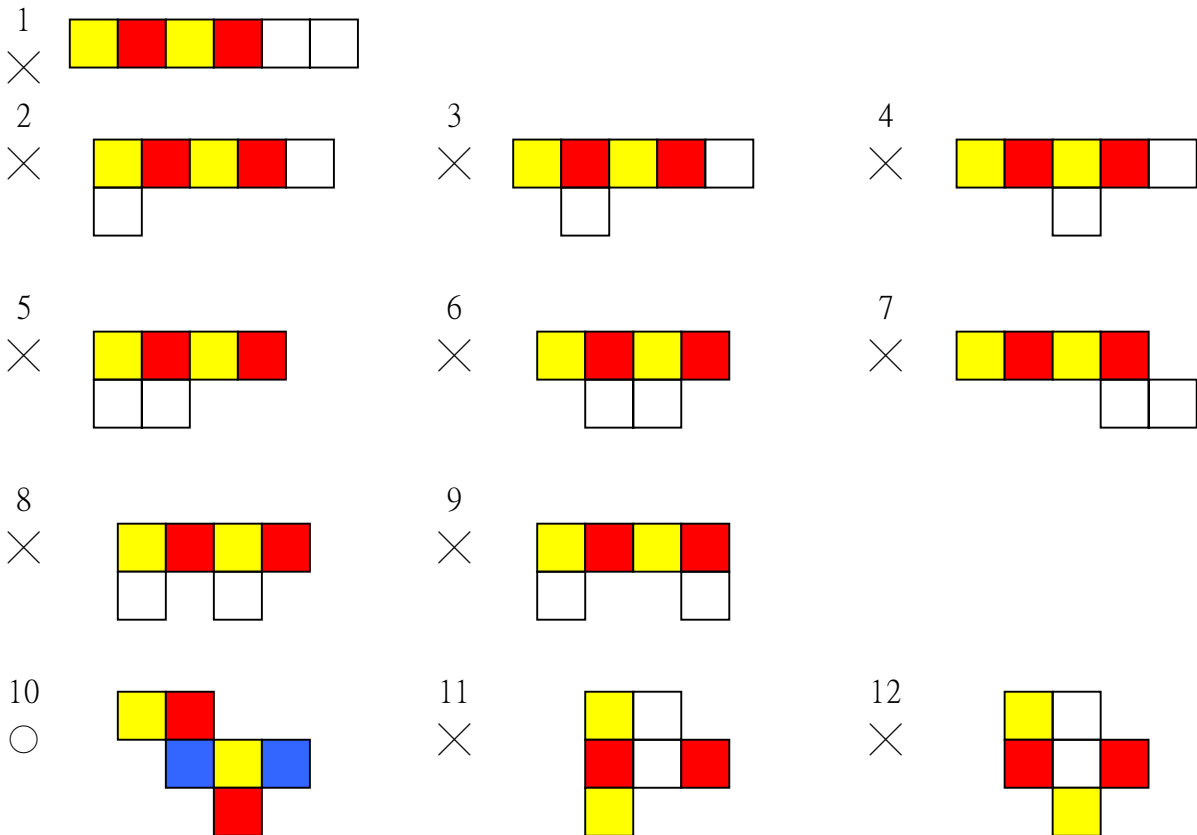


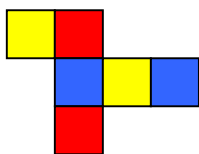
圖 3-7

(四)根據前面的測試結果，圖 3-4 擁有 3 組基本的模式，因此我們確定它是一個正六面體的展開圖。

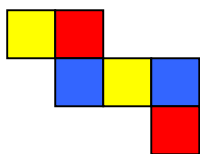
根據這個測試方法，我們開始做所有六連方的測試，測試結果如下圖所示：



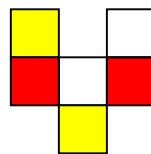
13  
○



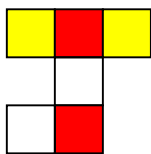
14  
○



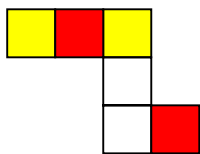
15  
×



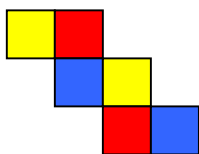
16  
×



17  
×



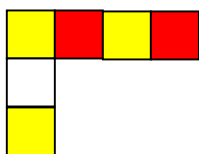
18  
○



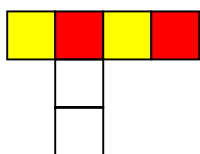
19  
×



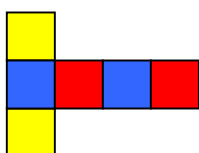
20  
×



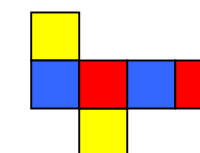
21  
○



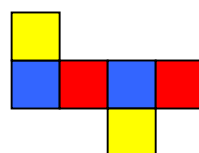
22  
○



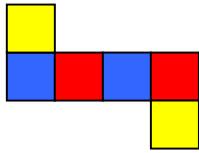
23  
○



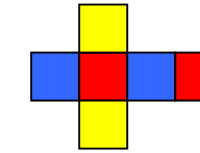
24  
○



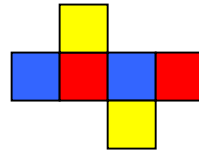
25  
○



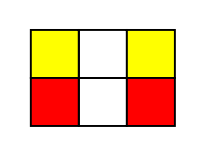
26  
○



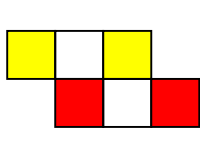
27  
×



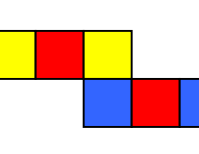
28  
×



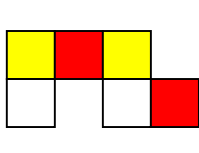
29  
○



30  
×



31  
×



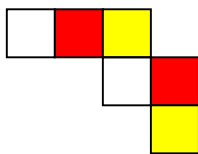
32  
×



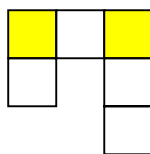
33  
×



34  
×



35  
×



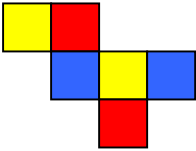
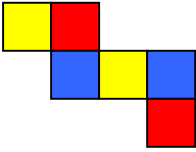
在本測試中，我們發現三十五個六連方中僅有編號為 10、13、14、18、21、22、23、24、25、26、29 的連方能夠通過我們的測試，也就是說只有這十一個連方才能組成正六面體。這個實驗的結果與參考資料四所得到的結果一致，這也證明了我們的想法是可行的。

#### 四、利用基本模式找出所有正六面體的展開圖

在這個小節中，我們將介紹如何利用已知的四種基本模式，來產生所有正六面體展開圖的方法。

##### (一)、展開圖的『基本模式表示法』

在本報告中，我們利用一組數字來當作展開圖的表示法，這幾個數字分別代表著在展開圖中所找到的基本模式，同時為了強調基本模式表示法的唯一性質，我們必須將這些數字由大到小依序排列。例如：在編號 14 的六連方中存在基本模式 1、2、3，因此編號 14 號的連方的基本模式表示法就是(3,2,1)；而編號 10 的連方的基本模式表示法是(2,2,1)。

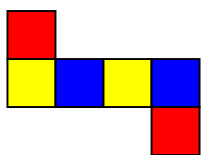
| 六連方                                                                                       | 基本模式表示法 |
|-------------------------------------------------------------------------------------------|---------|
| 10<br> | (2,2,1) |
| 14<br> | (3,2,1) |

##### (二)、展開圖的模式產生原理

由於構成基本模式的連方數目  $\leq$  展開圖的連方數目，因此我們只要小心  
的在基本模式上增加正方形，就可以找到所有由基本模式組合而成的展開圖。  
以下我們將以正六面體為例，來介紹如何利用基本模式產生所有的展開圖。

1. 模式四：

由於模式四已經擁有六個正方形，因此模式四所產生的展開圖只有(4,1,1)這一種型式。



2. 模式三：

模式三有五個正方形，這五個正方形包含了模式一與模式三，另一個模式還不知道，因此我們將這個展開圖的模式表示法暫定為  $(3, X, 1)$ ，其中， $X$  介於 1 與 3 之間。

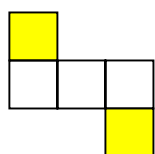


圖 2-1

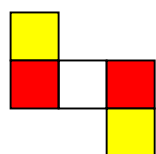


圖 2-2

(1) 當  $X = 3$  時無解。

(2) 當  $X = 2$  時，我們發現模式三可以生成以下兩個展開圖，不過，我們發現這兩個展開圖經過旋轉後會重疊在一起，因此應當視為同一種展開圖。



其中以虛線表示的方形 ，代表被附加上去的正方形。

(3) 當  $X = 1$  時，可以得到以下這兩個展開圖，經過旋轉後，這兩個連方也會重疊在一起，因此它們也應該視為同一種展開圖。



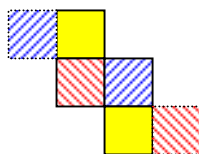
因此模式三會產生  $(3,2,1)$  及  $(3,1,1)$  這兩類展開圖，而產生的展開圖總數為 2。

所有包含模式三以上的展開圖應該在本階段全部產生完畢。

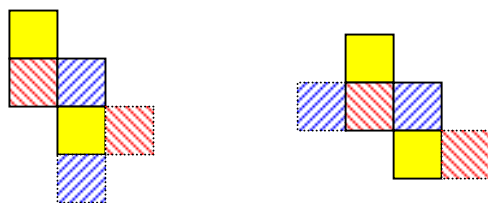
### 3. 模式二：

模式二有四個正方形，這四個正方形僅含有模式二，另兩個模式還不知道，因此我們將這個展開圖的模式表示法暫定為  $(2,X,Y)$ ，其中， $X$  介於 1 與 2 之間， $Y$  必須小於或等於  $X$ 。因此由模式二所產生的展開圖只有  $(2,2,2)$ 、 $(2,2,1)$  及  $(2,1,1)$  等三類基本模式表示法。

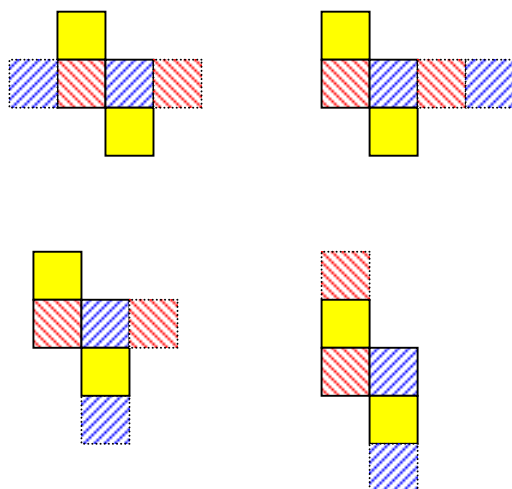
(1) 基本模式表示法為  $(2,2,2)$  的展開圖只有一種，如下圖所示



(2) 基本模式表示法為  $(2,2,1)$  的展開圖，如下圖所示，由於這兩個圖經過旋轉後會重疊在一起，因此應被視為同一種展開圖。



(3) 基本模式表示法為  $(2,1,1)$  的展開圖，在扣除掉旋轉後相同的六連方後，一共有四種不同的展開圖



因此模式二會生成(2,2,2)、(2,2,1)、(2,1,1)這三類共六個不同的展開圖，在這個階段中，所有包含模式二以上的展開圖都已經被找出來了。

#### 4. 模式一：

基本模式一由三個正方形所組成，不能再包含其他模式，另兩個模式未定，但根據我們的展開圖產生原則，包含模式二以上的展開圖都已經在前面的階段中產生完畢，因此在這個階段中我們僅需考慮(1,1,1)的展開圖模式即可。

經過簡單的推理，我們發現模式(1,1,1)的展開圖僅有以下兩個



利用本節所介紹的展開圖模式產生原理，我們從四個基本模式推演出 11 個展開圖，所得到的結果與第三節的結果互相符合，證明了這個展開圖模式產生原理的實用性。在下節中我們將應用這個展開圖模式產生原理來找出正八面體的所有展開圖。

### 五、正八面體的展開圖研究

在研究完正六面體展開圖的特性之後，我們發現可以利用類似的方法來找出正八面體所有的展開圖，以下是我們的研究步驟。

#### (一)、正八面體的特性

正八面體共有八個面，每一個面都是由大小相同的正三角形所組成，共有四組兩兩互相平行的『對面』。

#### (二)、尋找正八面體的基本模式：

在三角形智慧片的輔助之下，我們發現要將某組對面從正八面體上拆解下來的方法只有以下三種模式：

1. 模式一：『對面』之間隔著另兩個連續的面。
2. 模式二：『對面』之間隔著另四個連續的面。
3. 模式三：『對面』之間隔著另六個連續的面。

這四種模式在展開圖中的相對關係如圖 5-1a ~ 5-1c 所示：

模式一：

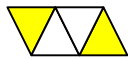


圖 5-1a

模式二：

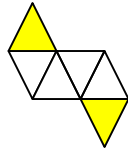


圖 5-1b

模式三：

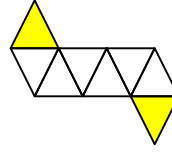


圖 5-1c

(二)如何利用基本模式來測試圖形是否為正八面體的展開圖

判斷一個圖形是否為正八面體的展開圖僅需兩個基本原則

1. 所有的圖形必須含有八個大小相同的正三角形，且每一個三角形至少需與另一個三角形相鄰(包含一個共同的邊)。
2. 能夠從這八個正三角形中找出四個正八面體的基本模式。

以下我們將以兩個例子來說明正八面體展開圖的測試原則

例一：判斷圖 5-2 是否為正八面體的展開圖

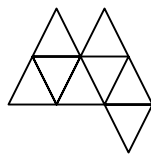
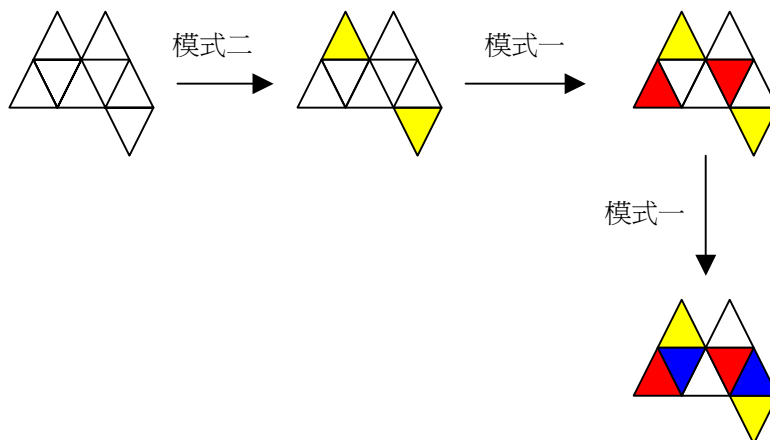


圖 5-2

測試步驟：

1. 圖 5-2 符合基本原則 1
2. 尋找模式，並在可符合模式的三角形上塗上相同的顏色，過程如下



3. 我們發現只能從圖 5-2 找出三個基本模式，因此圖 5-2 不是正八面體的展開圖

例二：判斷圖 5-3 是否為正八面體的展開圖

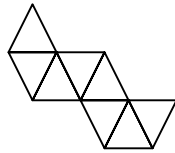
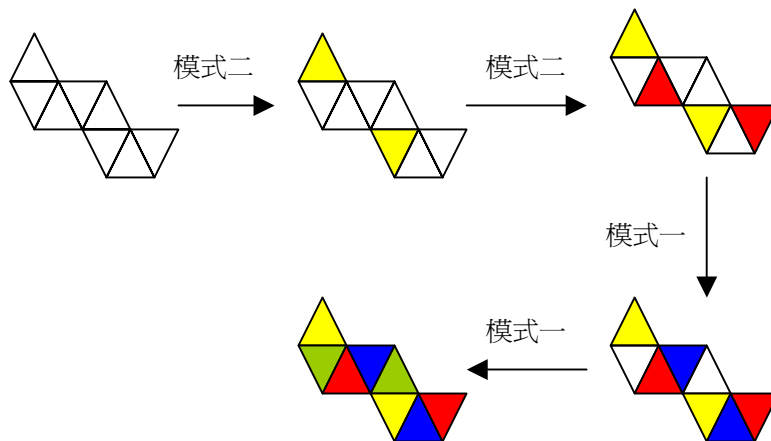


圖 5-3

測試步驟：

1. 圖 5-3 符合基本原則 1
2. 尋找模式，並在可符合模式的三角形上塗上相圖的顏色，過程如下



3. 我們發現可以從圖 5-3 找出四個基本模式，因此圖 5-3 是正八面體的展開圖，而且它的基本模式表示法為(2,2,1,1)

### (三)利用基本模式來產生展開圖

接下來，我們將運用正六面體的模式產生法來找出所有的正八面體展開圖。產生的原則是從變化最少的模式開始。

#### 1. 模式三：

模式三已經擁有八個正三角形，而且都已經被定位了，因此它只能產生下列的展開圖

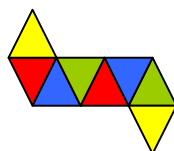


圖 5-4

這個展開圖的基本模式表示法為(3,1,1,1)，所有包含模式三的展開圖都會在這個階段產生完畢。

## 2. 模式二

模式二擁有六個正三角形，因此我們可以適當的安排另兩個三角形的位置而形成一個正八面體的展開圖，由於包含模式三的展開圖已經在上個階段產生完畢，因此模式二所能產生的展開圖，其基本模式表示法僅有以下幾種  $(2,2,2,2)$ 、 $(2,2,2,1)$ 、 $(2,2,1,1)$ 、 $(2,1,1,1)$ ，詳述如下：

- (1) 基本模式表示法為  $(2,2,2,2)$  型者：無解
- (2) 基本模式表示法為  $(2,2,2,1)$  型者：無解
- (3) 基本模式表示法為  $(2,2,1,1)$  型者，僅包含圖 5-5 這一種展開圖

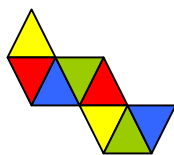


圖 5-5

- (4) 基本模式表示法為  $(2,1,1,1)$  型者，僅包含圖 5-6a ~ 5-6d 這四種展開圖

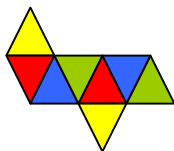


圖 5-6a

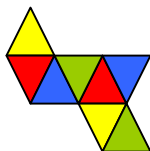


圖 5-6b

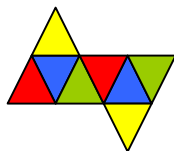


圖 5-6c

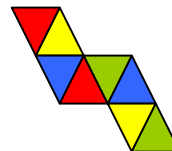


圖 5-6d

模式二共可產生  $(2,2,1,1)$  及  $(2,1,1,1)$  兩類共五種展開圖。

### 3. 模式一：

模式一擁有四個正三角形，因此我們可以適當的安排另外四個三角形的位置而形成一個正八面體的展開圖，由於包含模式二、三的展開圖已經在上個階段產生完畢，因此模式一所能產生展開圖的基本模式表示法僅有(1,1,1,1)這個類型，經過一些基本的推理並去除重疊的類型之後，我們得到了圖 5-7a ~ 圖 5-7e 的五種展開圖

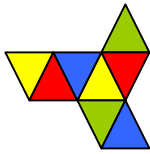


圖 5-7a

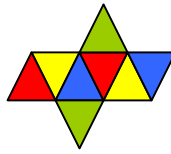


圖 5-7b

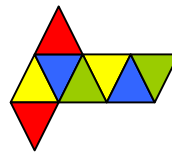


圖 5-7c

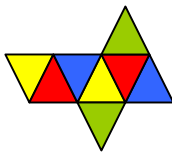


圖 5-7d

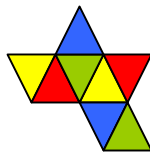
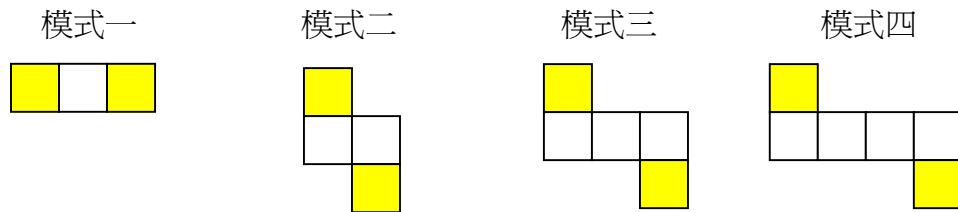


圖 5-7e

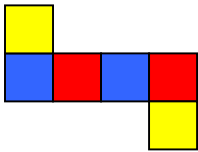
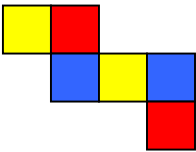
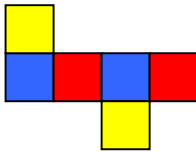
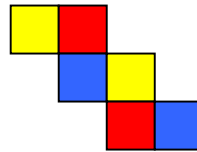
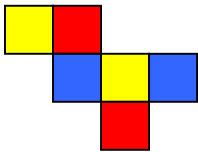
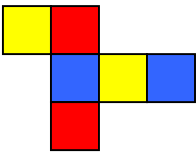
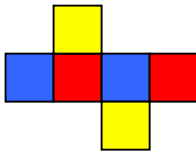
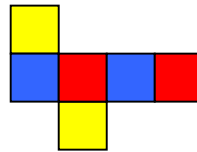
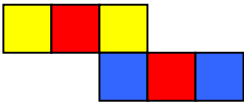
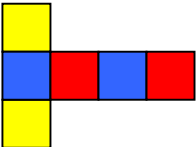
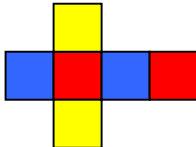
因此，正八面體恰有 11 種展開圖。

## 伍、研究結果

一、我們發現正六面體的對面在展開圖的相對位置僅有以下四種，我們將它們稱為正六面體展開圖的四種基本模式。

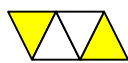


二、我們分別利用模式測試法以及模式產生法找出了正六面體的十一種展開圖

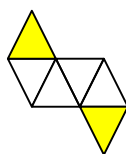
|                                                                                     |                                                                                     |                                                                                     |                                                                                       |
|-------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------|
| (4,1,1)                                                                             | (3,2,1)                                                                             | (3,1,1)                                                                             | (2,2,2)                                                                               |
|   |   |   |   |
| (2,2,1)                                                                             | (2,1,1)                                                                             | (2,1,1)                                                                             | (2,1,1)                                                                               |
|  |  |  |  |
| (2,1,1)                                                                             | (1,1,1)                                                                             | (1,1,1)                                                                             |                                                                                       |
|  |  |  |                                                                                       |

三、我們發現正八面體的對面在展開圖的相對位置僅有以下三種，我們將它們稱為正八面體展開圖的三種基本模式。

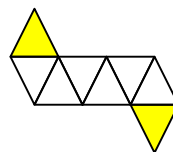
模式一



模式二



模式三



四、利用模式產生法，我們找出了正八面體的十一種展開圖，詳列如下：

|           |           |           |           |
|-----------|-----------|-----------|-----------|
| (3,1,1,1) | (2,2,1,1) | (2,1,1,1) | (2,1,1,1) |
|           |           |           |           |

|           |           |           |           |
|-----------|-----------|-----------|-----------|
| (2,1,1,1) | (2,1,1,1) | (1,1,1,1) | (1,1,1,1) |
|           |           |           |           |

|           |           |           |  |
|-----------|-----------|-----------|--|
| (1,1,1,1) | (1,1,1,1) | (1,1,1,1) |  |
|           |           |           |  |

## 陸、討論

一、是否可用相同的方法找出正四面體的基本拆解模式，並推演出所有展開圖？

不行。因為正四面體並沒有兩兩互相平行的『對面』關係，因此不適用基本模式法則。而且正四面體的展開圖數目少，容易判斷，一眼就可以看出是否為正確的展開圖，因此並不需要化簡為繁，再去發展基本模式。

二、在正六面體的基本模式中，為何兩個對面之間不能包含五個以上的正方形？

因為一組『對面』有兩個面，如果中間隔五個面的話，就必須要有七〈二加五〉個面，但是正六面體只有六個面，所以對面之間不能相隔五個面。

三、在正八面體的基本模式中，為何都是隔偶數個面？

如果兩個目標平面中間只隔一個面的話，那麼這兩個目標平面就會不平行，並且形成一個三角錐，這樣就無法在空間上形成一組『對面』，如果隔兩個面的話，目標平面就會互相平行，成為一組對面，以此類推，隔三個面或隔五個面，也都無法形成『對面』的關係。只有隔二、四、六個面的話才能成為基本模式。

## 柒、結論

在本研究中，我們找出了正六面體的四種基本拆解模式，根據這四種基本模式，我們可以很輕易的判斷一個六連方是否可以組成正六面體。與參考資料四所提出的方法比較，我們的方法具有以下特點：

一、簡易性：

不需要繁複的轉換步驟，只需記憶四個簡單的基本模式就可以判斷一個六連方是否為正六面體的展開圖。

二、一般性：

我們提出的基本拆解模式為除了正四面體以外、各個正多面體的基本特性，因此這個研究方法可以套用在其他正多面體的分析上。在此次研究中，我們將這種方法運用在正六面體與正八面體上，並獲得相當良好的成果，我們將利用本方法，繼續從事正十二面體與正二十面體的研究。

三、易教易學：

我們嘗試將基本拆解模式介紹給其他同學，由於簡單易懂，多數同學都能夠在短時間內學會本方法，並具備判斷一個六連方是否為正六面體展開圖的能力。因此，本研究報告對於正六面體展開圖的教學應可提供不少助益。

同時，根據我們所作的網路文獻調查顯示，我們的研究是目前完整列舉出所有正八面體展開圖的報告，因此，對於未來正八面體的研究或教學，本報告深具參考價值。

## 捌、參考資料及其他

- 一、翰林出版事業教科書編撰委員會（民 94）。柱體與錐體。國民小學數學課本第九冊（修訂一版）。台南市：翰林出版事業股份有限公司。
- 二、南一書局教科書編撰委員會（民 94）。柱體 錐體。國民小學數學課本第十冊。台南市：南一書局。
- 三、南一書局教科書編撰委員會（民 94）。形體的性質。國民小學數學課本第十一冊。台南市：南一書局。
- 四、屏東縣立明正國民中學。正立方體的展開圖（民 93）。中華民國第四十四屆中小學科學展覽會數學科國中組作品。
- 五、吳順德（民 93）。骰子遊戲。台北縣：九鼎影音圖書出版社。

## 評語

080402 柏拉圖的天空-正多面體展開圖之研究

本作品先從正六面體出發，發展出幾種基本模式。依此建構出幾種基本表式法，結果很完整。依此經驗進而研究正八面體圖的展開模式。同時正四面體也有詳盡的研究成果。