

中華民國第四十五屆中小學科學展覽會
作品說明書

高中組 地球科學科

040510

以竿窺天談圭表

嘉義縣私立協同高級中學

作者姓名：

高三 張睿恩 高三 王筱涵 高三 黃家政
高三 龔志揚

指導老師：

翁啟訓

以竿窺天談圭表

壹、摘要：

參考學長們以屋簷為竿所做的竿影觀測，加上本身也對屋簷作了一年的竿影觀測，發現竿的影長有某種程度的規律性，但工欲善其事、必先利其器，因此在校園角落建造了一座標準圭表，繼續觀測了約一年半，終於得到了地球繞太陽是一個近似圓形的橢圓運動。

貳、研究動機：

想利用對標準圭表的竿影觀測，找出竿的影長隨季節之變化，並進而導出一公式，以方便全球各地設立圭表之參考。

參、研究目的：

證明一年四季中太陽垂直照射在地球上的緯度是在南北回歸線之間以類似簡諧運動的方式運行，並同時證明地球繞太陽是接近正圓的橢圓運行。

肆、研究器材與設備：

- 一、4 公尺高的標準圭表
- 二、L 尺

伍、研究步驟：

- 一、測量出標準圭表的竿高(400cm)。
- 二、自 92 年 9 月 3 日以來每隔 7~8 天觀測中天時間的影長，並紀錄之(中天時間表查自天文日曆)。
- 三、以竿長和影長換算成太陽在天球上的仰角及太陽垂直照射地球的緯度。
- 四、假設太陽每天垂直照射在地球上的緯度是在南北回歸線之間做簡諧運動，導出公式並算出理論值再與觀測值做比較。
- 五、計算出每個觀測日地球繞太陽公轉的角度改變量，求出公轉角速度。並由角速度之不同，探討出地球繞太陽的公轉為橢圓運行之證據。
- 六、對簡諧運動的公式，做些微修正，以期望理論值和觀測值更吻合，提高準確度。

陸、研究結果：

一、

竿影長度觀測表

竿高：400 公分

觀測緯度：23.533°

表(一)

日期	觀測竿影長(cm)	日期	觀測竿影長(cm)
92/9/3	113.6	93/7/19	17.1
92/9/9	130.8	93/7/30	33.8
92/9/15	147.6	93/8/4	42.7
92/9/22	170.2	93/8/10	54.6
92/9/29	193.0	93/8/16	67.6
92/10/6	215.8	93/8/22	81.7
92/10/14	244.6	93/8/30	102.6
92/10/20	265.6	93/9/13	142.7
92/10/27	290.7	93/9/20	164
92/11/4	319.1	93/9/25	179.9
92/11/10	339.8	93/10/4	209.8
92/11/18	366.2	93/10/12	237.5
92/11/25	385.6	93/10/18	258.8
92/12/1	400.2	93/10/28	294.6
92/12/8	413.5	93/11/1	308.7
92/12/15	421.6	93/11/8	334.2
92/12/22	424.6	93/11/15	356.8
92/12/29	421.5	93/11/22	377.3
93/1/5	413	93/11/29	395.6
93/1/13	397.9	93/12/6	409.2
93/1/21	376.9	93/12/13	418.9
93/1/28	355	93/12/20	423.2
93/2/10	309.1	93/12/21	423.3
93/2/16	287.5	93/12/27	421.1
93/2/23	262.1	94/1/6	408.8
93/3/1	236.5	94/1/17	384.4
93/3/8	212.9	94/1/24	364.6
93/3/15	188.5	94/1/29	348.5
93/3/19	175.8	94/2/6	321.1
93/3/20	172.6	94/2/15	288.2
93/3/22	165.8	94/2/23	259.8
93/4/2	131.4	94/3/7	216.9
93/4/5	122.9	94/3/16	186.0
93/4/12	103.5	94/3/25	156.5
93/4/19	85.2	94/4/9	111.9
93/4/26	68.3	94/4/18	87.8
93/5/3	52.8	94/4/25	70.7
93/5/10	39.1	94/5/2	55.0
93/5/17	27.2	94/5/9	41.0
93/5/18	25.7	94/5/16	28.8
93/5/25	16.2	94/5/23	17.9
93/5/31	9.0	94/6/1	8.2
93/7/12	9.1	94/6/6	3.9

二、觀測竿影換算成太陽垂直照射地球的緯度，公式(一)、(二)：

$$\left[\tan^{-1} \left(\frac{K}{L} \right) \right] - 0.25^\circ = M \quad \text{公式(一)}$$

(M: 太陽所在天球仰角角度；

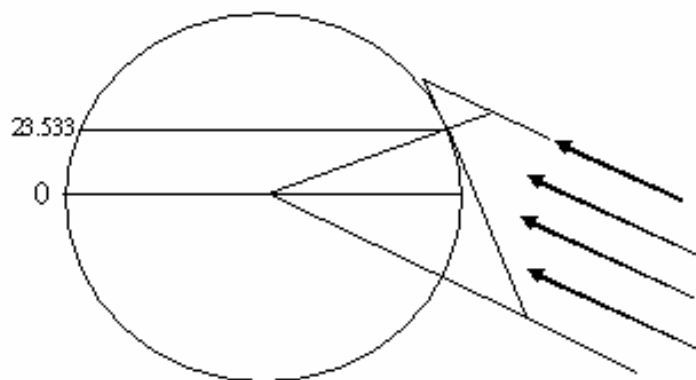
L: 中天時間竿影長；

K: 竿高 0.25° 為 1/2 太陽視角)

$$M - 66.467^\circ = N \quad \text{公式(二)}$$

(觀測緯度北緯 23.533°)

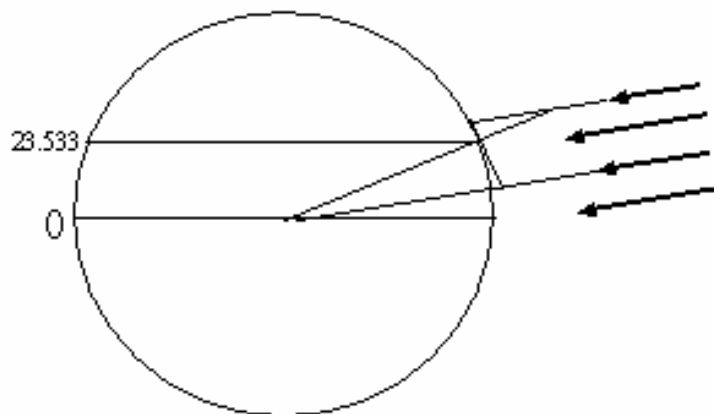
(N: 太陽垂直照射地球的緯度； N 為正值代表北緯， N 為負值代表南緯)



圖(一)

$$N + 23.533^\circ = 90 - M$$

$$M - 66.467^\circ = -N$$



圖(二)

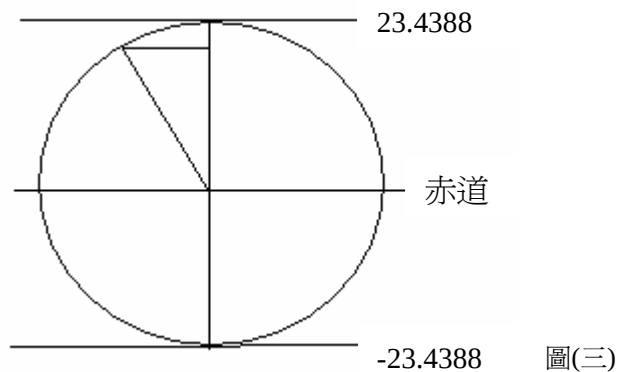
$$23.533^\circ - N = 90 - M$$

$$M - 66.467^\circ = N$$

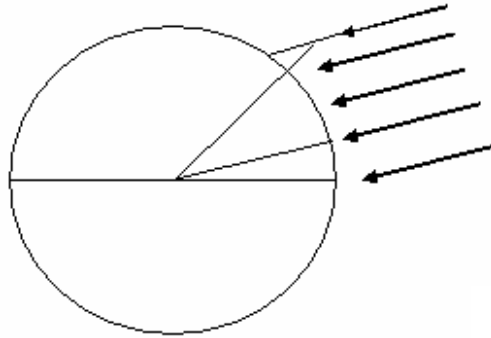
三、假設太陽垂直照射地球的緯度是以簡諧運動的方式在北回歸線(緯度 23.4388°) 和南回歸線(緯度 -23.4388°) 之間來回運動，我們可以取 23.4388° 為圓周運動的半徑而導出太陽垂直照射地球緯度的簡諧運動公式：(參考日本岩手縣水澤市的觀測所提供的資訊，2003 年的北回歸線緯度為 23.4388°)

$$N = 23.4388^{\circ} \times \cos\left(\frac{360^{\circ} \times n}{366}\right) \quad \begin{array}{l} n=1 \cdots 366 \\ n=1 \text{ 為 6 月 22 日} \\ n=2 \text{ 為 6 月 23 日以此類推} \end{array} \quad \text{公式(三)}$$

(N：太陽垂直照射地球的緯度)



四、利用公式(一)(二)反推，得另外公式(四)(五)。只要固定竿高，在不同緯度觀測(北緯為正，南緯為負)，即可算出整年之竿影長變化。



圖(四)

$$\theta = 90^\circ - (A - N) = \tan^{-1} \frac{K}{L} \quad \tan \theta = \frac{K}{L}$$

$$L = \frac{K}{\tan \theta} = \frac{K}{\tan[90^\circ - (A - N) + 0.25^\circ]} \quad \text{當 } A - N \geq 0 \quad (L \text{ 為正，竿影在北方}) \quad \text{公式(四)}$$

若 $90.25^\circ \geq 90^\circ - (A - N) + 0.25^\circ \geq 90^\circ$ 則 $L=0$ (無竿影)

$$L = \frac{K}{\tan \theta} = \frac{K}{\tan[90^\circ - (A - N) - 0.25^\circ]} \quad \text{當 } A - N \leq 0 \quad (L \text{ 為負，竿影在南方}) \quad \text{公式(五)}$$

若 $90^\circ \geq 90^\circ - (A - N) - 0.25^\circ \geq 89.75^\circ$ 則 $L=0$ (無竿影)

(K =竿高， L =預測竿影長， N =太陽垂直照射緯度， A =觀測緯度)

五、利用公式(三)(四)可預測一年中每天太陽垂直照射在地球上的緯度及在緯度 23.533°
以 400 公分為觀測竿時之中天時間竿影長度，如表(二)

表(二)

日期	n	太陽直射 緯度(N)	預測竿 影長(cm)	日期	n	太陽直射 緯度(N)	預測竿 影長(cm)	日期	n	太陽直射 緯度(N)	預測竿 影長(cm)
1/1	194	-23.02	418.65	2/1	225	-17.61	346.35	3/1	254	-8.08	243.80
1/2	195	-22.94	417.50	2/2	226	-17.34	343.09	3/2	255	-7.70	240.19
1/3	196	-22.86	416.25	2/3	227	-17.06	339.79	3/3	256	-7.32	236.58
1/4	197	-22.77	414.91	2/4	228	-16.79	336.46	3/4	257	-6.94	232.98
1/5	198	-22.67	413.47	2/5	229	-16.50	333.10	3/5	258	-6.55	229.40
1/6	199	-22.56	411.95	2/6	230	-16.21	329.70	3/6	259	-6.16	225.82
1/7	200	-22.45	410.33	2/7	231	-15.92	326.28	3/7	260	-5.77	222.25
1/8	201	-22.33	408.63	2/8	232	-15.62	322.84	3/8	261	-5.38	218.69
1/9	202	-22.20	406.84	2/9	233	-15.32	319.37	3/9	262	-4.99	215.15
1/10	203	-22.07	404.97	2/10	234	-15.01	315.88	3/10	263	-4.60	211.61
1/11	204	-21.93	403.01	2/11	235	-14.70	312.36	3/11	264	-4.20	208.09
1/12	205	-21.79	400.98	2/12	236	-14.39	308.83	3/12	265	-3.81	204.59
1/13	206	-21.64	398.86	2/13	237	-14.07	305.28	3/13	266	-3.41	201.10
1/14	207	-21.48	396.67	2/14	238	-13.74	301.72	3/14	267	-3.01	197.63
1/15	208	-21.31	394.40	2/15	239	-13.42	298.14	3/15	268	-2.61	194.17
1/16	209	-21.14	392.06	2/16	240	-13.08	294.56	3/16	269	-2.21	190.73
1/17	210	-20.97	389.65	2/17	241	-12.75	290.96	3/17	270	-1.81	187.30
1/18	211	-20.78	387.16	2/18	242	-12.41	287.35	3/18	271	-1.41	183.90
1/19	212	-20.59	384.61	2/19	243	-12.07	283.73	3/19	272	-1.01	180.51
1/20	213	-20.40	382.00	2/20	244	-11.72	280.11	3/20	273	-0.60	177.14
1/21	214	-20.20	379.32	2/21	245	-11.37	276.48	3/21	274	-0.20	173.79
1/22	215	-19.99	376.59	2/22	246	-11.02	272.85	3/22	275	0.20	170.46
1/23	216	-19.78	373.79	2/23	247	-10.66	269.21	3/23	276	0.60	167.16
1/24	217	-19.56	370.94	2/24	248	-10.30	265.58	3/24	277	1.01	163.87
1/25	218	-19.33	368.03	2/25	249	-9.94	261.94	3/25	278	1.41	160.60
1/26	219	-19.10	365.07	2/26	250	-9.57	258.31	3/26	279	1.81	157.36
1/27	220	-18.87	362.07	2/27	251	-9.20	254.68	3/27	280	2.21	154.13
1/28	220	-18.87	362.07	2/28	252	-8.83	251.05	3/28	281	2.61	150.93
1/29	222	-18.38	355.91	2/29	253	-8.46	247.42	3/29	282	3.01	147.75
1/30	223	-18.13	352.76					3/30	283	3.41	144.60
1/31	224	-17.87	349.58					3/31	284	3.81	141.47

日期	n	太陽直射 緯度(N)	預測竿 影長(cm)	日期	n	太陽直射 緯度(N)	預測竿 影長(cm)	日期	n	太陽直射 緯度(N)	預測竿 影長(cm)
4/1	285	4.20	138.36	5/1	315	15.01	58.13	6/1	346	22.07	8.46
4/2	286	4.60	135.28	5/2	316	15.32	55.94	6/2	347	22.20	7.54
4/3	287	4.99	132.22	5/3	317	15.62	53.79	6/3	348	22.33	6.66
4/4	288	5.38	129.19	5/4	318	15.92	51.68	6/4	349	22.45	5.83
4/5	289	5.77	126.19	5/5	319	16.21	49.60	6/5	350	22.56	5.05
4/6	290	6.16	123.20	5/6	320	16.50	47.56	6/6	351	22.67	4.31
4/7	291	6.55	120.25	5/7	321	16.79	45.55	6/7	352	22.77	3.62
4/8	292	6.94	117.32	5/8	322	17.06	43.59	6/8	353	22.86	2.97
4/9	293	7.32	114.42	5/9	323	17.34	41.66	6/9	354	22.94	2.37
4/10	294	7.70	111.55	5/10	324	17.61	39.77	6/10	355	23.02	1.82
4/11	295	8.08	108.70	5/11	325	17.87	37.91	6/11	356	23.09	1.32
4/12	296	8.46	105.89	5/12	326	18.13	36.10	6/12	357	23.16	0.86
4/13	297	8.83	103.10	5/13	327	18.38	34.32	6/13	358	23.22	0.45
4/14	298	9.20	100.34	5/14	328	18.63	32.58	6/14	359	23.27	0.09
4/15	299	9.57	97.60	5/15	329	18.87	30.89	6/15	360	23.31	0
4/16	300	9.94	94.90	5/16	330	19.10	29.23	6/16	361	23.35	0
4/17	301	10.30	92.23	5/17	331	19.33	27.62	6/17	362	23.38	0
4/18	302	10.66	89.59	5/18	332	19.56	26.04	6/18	363	23.41	0
4/19	303	11.02	86.98	5/19	333	19.78	24.51	6/19	364	23.42	0
4/20	304	11.37	84.39	5/20	334	19.99	23.01	6/20	365	23.44	0
4/21	305	11.72	81.84	5/21	335	20.20	21.56	6/21	366	23.44	0
4/22	306	12.07	79.32	5/22	336	20.40	20.16	6/22	1	23.44	0
4/23	307	12.41	76.84	5/23	337	20.59	18.79	6/23	2	23.42	0
4/24	308	12.75	74.38	5/24	338	20.78	17.47	6/24	3	23.41	0
4/25	309	13.08	71.96	5/25	339	20.97	16.19	6/25	4	23.38	0
4/26	310	13.42	69.57	5/26	340	21.14	14.95	6/26	5	23.35	0
4/27	311	13.74	67.21	5/27	341	21.31	13.76	6/27	6	23.31	0
4/28	312	14.07	64.89	5/28	342	21.48	12.61	6/28	7	23.27	0.09
4/29	313	14.39	62.60	5/29	343	21.64	11.51	6/29	8	23.22	0.45
4/30	314	14.70	60.35	5/30	344	21.79	10.45	6/30	9	23.16	0.86
				5/31	345	21.93	9.43				

日期	n	太陽直射 緯度(N)	預測竿 影長(cm)	日期	n	太陽直射 緯度(N)	預測竿 影長(cm)	日期	n	太陽直射 緯度(N)	預測竿 影長(cm)
7/1	10	23.09	1.32	8/1	41	17.87	37.91	9/1	72	7.70	111.55
7/2	11	23.02	1.82	8/2	42	17.61	39.77	9/2	73	7.32	114.42
7/3	12	22.94	2.37	8/3	43	17.34	41.66	9/3	74	6.94	117.32
7/4	13	22.86	2.97	8/4	44	17.06	43.59	9/4	75	6.55	120.25
7/5	14	22.77	3.62	8/5	45	16.79	45.55	9/5	76	6.16	123.20
7/6	15	22.67	4.31	8/6	46	16.50	47.56	9/6	77	5.77	126.19
7/7	16	22.56	5.05	8/7	47	16.21	49.60	9/7	78	5.38	129.19
7/8	17	22.45	5.83	8/8	48	15.92	51.68	9/8	79	4.99	132.22
7/9	18	22.33	6.66	8/9	49	15.62	53.79	9/9	80	4.60	135.28
7/10	19	22.20	7.54	8/10	50	15.32	55.94	9/10	81	4.20	138.36
7/11	20	22.07	8.46	8/11	51	15.01	58.13	9/11	82	3.81	141.47
7/12	21	21.93	9.43	8/12	52	14.70	60.35	9/12	83	3.41	144.60
7/13	22	21.79	10.45	8/13	53	14.39	62.60	9/13	84	3.01	147.75
7/14	23	21.64	11.51	8/14	54	14.07	64.89	9/14	85	2.61	150.93
7/15	24	21.48	12.61	8/15	55	13.74	67.21	9/15	86	2.21	154.13
7/16	25	21.31	13.76	8/16	56	13.42	69.57	9/16	87	1.81	157.36
7/17	26	21.14	14.95	8/17	57	13.08	71.96	9/17	88	1.41	160.60
7/18	27	20.97	16.19	8/18	58	12.75	74.38	9/18	89	1.01	163.87
7/19	28	20.78	17.47	8/19	59	12.41	76.84	9/19	90	0.60	167.16
7/20	29	20.59	18.79	8/20	60	12.07	79.32	9/20	91	0.20	170.46
7/21	30	20.40	20.16	8/21	61	11.72	81.84	9/21	92	-0.20	173.79
7/22	31	20.20	21.56	8/22	62	11.37	84.39	9/22	93	-0.60	177.14
7/23	32	19.99	23.01	8/23	63	11.02	86.98	9/23	94	-1.01	180.51
7/24	33	19.78	24.51	8/24	64	10.66	89.59	9/24	95	-1.41	183.90
7/25	34	19.56	26.04	8/25	65	10.30	92.23	9/25	96	-1.81	187.30
7/26	35	19.33	27.62	8/26	66	9.94	94.90	9/26	97	-2.21	190.73
7/27	36	19.10	29.23	8/27	67	9.57	97.60	9/27	98	-2.61	194.17
7/28	37	18.87	30.89	8/28	68	9.20	100.34	9/28	99	-3.01	197.63
7/29	38	18.63	32.58	8/29	69	8.83	103.10	9/29	100	-3.41	201.10
7/30	39	18.38	34.32	8/30	70	8.46	105.89	9/30	101	-3.81	204.59
7/31	40	18.13	36.10	8/31	71	8.08	108.70				

日期	n	太陽直射 緯度(N)	預測竿 影長(cm)	日期	n	太陽直射 緯度(N)	預測竿 影長(cm)	日期	n	太陽直射 緯度(N)	預測竿 影長(cm)
10/1	102	-4.20	208.09	11/1	133	-15.32	319.37	12/1	163	-22.07	404.97
10/2	103	-4.60	211.61	11/2	134	-15.62	322.84	12/2	164	-22.20	406.84
10/3	104	-4.99	215.15	11/3	135	-15.92	326.28	12/3	165	-22.33	408.63
10/4	105	-5.38	218.69	11/4	136	-16.21	329.70	12/4	166	-22.45	410.33
10/5	106	-5.77	222.25	11/5	137	-16.50	333.10	12/5	167	-22.56	411.95
10/6	107	-6.16	225.82	11/6	138	-16.79	336.46	12/6	168	-22.67	413.47
10/7	108	-6.55	229.40	11/7	139	-17.06	339.79	12/7	169	-22.77	414.91
10/8	109	-6.94	232.98	11/8	140	-17.34	343.09	12/8	170	-22.86	416.25
10/9	110	-7.32	236.58	11/9	141	-17.61	346.35	12/9	171	-22.94	417.50
10/10	111	-7.70	240.19	11/10	142	-17.87	349.58	12/10	172	-23.02	418.65
10/11	112	-8.08	243.80	11/11	143	-18.13	352.76	12/11	173	-23.09	419.71
10/12	113	-8.46	247.42	11/12	144	-18.38	355.91	12/12	174	-23.16	420.67
10/13	114	-8.83	251.05	11/13	145	-18.63	359.01	12/13	175	-23.22	421.53
10/14	115	-9.20	254.68	11/14	146	-18.87	362.07	12/14	176	-23.27	422.29
10/15	116	-9.57	258.31	11/15	147	-19.10	365.07	12/15	177	-23.31	422.95
10/16	117	-9.94	261.94	11/16	148	-19.33	368.03	12/16	178	-23.35	423.51
10/17	118	-10.30	265.58	11/17	149	-19.56	370.94	12/17	179	-23.38	423.97
10/18	119	-10.66	269.21	11/18	150	-19.78	373.79	12/18	180	-23.41	424.33
10/19	120	-11.02	272.85	11/19	151	-19.99	376.59	12/19	181	-23.42	424.59
10/20	121	-11.37	276.48	11/20	152	-20.20	379.32	12/20	182	-23.44	424.74
10/21	122	-11.72	280.11	11/21	153	-20.40	382.00	12/21	183	-23.44	424.79
10/22	123	-12.07	283.73	11/22	154	-20.59	384.61	12/22	184	-23.44	424.74
10/23	124	-12.41	287.35	11/23	155	-20.78	387.16	12/23	185	-23.42	424.59
10/24	125	-12.75	290.96	11/24	156	-20.97	389.65	12/24	186	-23.41	424.33
10/25	126	-13.08	294.56	11/25	157	-21.14	392.06	12/25	187	-23.38	423.97
10/26	127	-13.42	298.14	11/26	158	-21.31	394.40	12/26	188	-23.35	423.51
10/27	128	-13.74	301.72	11/27	159	-21.48	396.67	12/27	189	-23.31	422.95
10/28	129	-14.07	305.28	11/28	160	-21.64	398.86	12/28	190	-23.27	422.29
10/29	130	-14.39	308.83	11/29	161	-21.79	400.98	12/29	191	-23.22	421.53
10/30	131	-14.70	312.36	11/30	162	-21.93	403.01	12/30	192	-23.16	420.67
10/31	132	-15.01	315.88					12/31	193	-23.09	419.71

六、由表(一)及表(二)得表(三)

預測太陽垂直照射緯度及中天時間竿影長與觀測值比較表

(93.9.13 以後因主表基座小小塌陷，故竿高改為 398.65cm)

表(三)

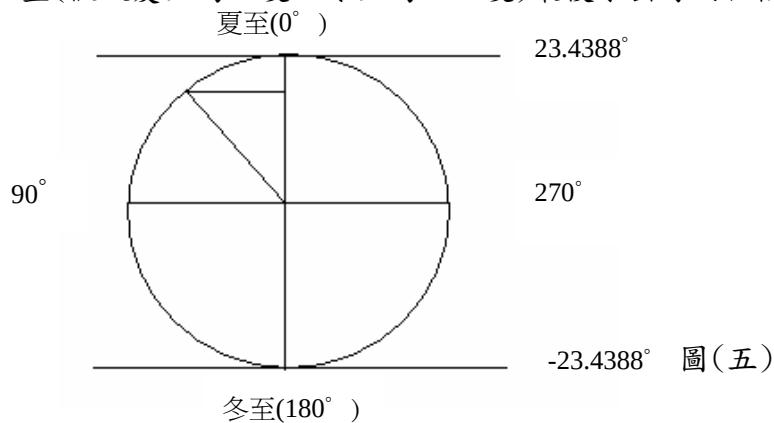
日期	竿高K(cm)	觀測緯度	觀測竿影長(cm)	預測竿影長(cm)	觀測太陽直射緯度(N)	預測太陽直射緯度(N)
92/9/3	400	23.533	113.6	117.32	7.4285	6.94
92/9/9	400	23.533	130.8	135.28	5.1753	4.60
92/9/15	400	23.533	147.6	154.13	3.0289	2.21
92/9/22	400	23.533	170.2	177.14	0.2332	-0.60
92/9/29	400	23.533	193	201.10	-2.4743	-3.41
92/10/6	400	23.533	215.8	225.82	-5.0639	-6.16
92/10/14	400	23.533	244.6	254.68	-8.1628	-9.20
92/10/20	400	23.533	265.6	276.48	-10.3012	-11.37
92/10/27	400	23.533	290.7	301.72	-12.7248	-13.74
92/11/4	400	23.533	319.1	329.70	-15.2981	-16.21
92/11/10	400	23.533	339.8	349.58	-17.0649	-17.87
92/11/18	400	23.533	366.2	373.79	-19.1911	-19.78
92/11/25	400	23.533	385.6	392.06	-20.6669	-21.14
92/12/1	400	23.533	400.2	404.97	-21.7313	-22.07
92/12/8	400	23.533	413.5	416.25	-22.6677	-22.86
92/12/15	400	23.533	421.6	422.95	-23.2230	-23.31
92/12/22	400	23.533	424.6	424.74	-23.4258	-23.44
92/12/29	400	23.533	421.5	421.53	-23.2162	-23.22
93/1/5	400	23.533	413	413.47	-22.6331	-23.02
93/1/13	400	23.533	397.9	398.86	-21.5662	-22.67
93/1/21	400	23.533	376.9	379.32	-20.0139	-21.64
93/1/28	400	23.533	355	362.07	-18.3061	-20.20
93/2/2	400	23.533	338.6	343.09	-16.9649	-18.87
93/2/10	400	23.533	310.5	315.88	-14.5374	-17.34
93/2/16	400	23.533	288.9	294.56	-12.5557	-15.01
93/2/23	400	23.533	263.5	269.21	-10.0919	-13.08
93/3/1	400	23.533	237.9	243.80	-7.4591	-10.66
93/3/8	400	23.533	212.9	218.69	-4.7411	-8.08
93/3/15	400	23.533	188.5	194.17	-1.9492	-5.38
93/3/19	400	23.533	175.8	180.51	0.7690	-2.61
93/3/20	400	23.533	172.6	177.14	5.0976	-1.01
93/3/22	400	23.533	165.8	170.46	7.4285	-0.60
93/4/5	400	23.533	122.9	126.19	6.2034	5.77

日期	竿高K(cm)	觀測緯度	觀測竿影長(cm)	預測竿影長(cm)	觀測太陽直射緯度(N)	預測太陽直射緯度(N)
93/4/12	400	23.533	103.5	105.89	8.7759	8.46
93/4/19	400	23.533	85.2	86.98	11.2587	11.02
93/4/26	400	23.533	68.3	69.57	13.5932	13.42
93/5/3	400	23.533	52.8	53.79	15.7634	15.62
93/5/10	400	23.533	39.1	39.77	17.7001	17.61
93/5/17	400	23.533	27.2	27.62	19.3929	19.33
93/5/18	400	23.533	25.7	26.04	19.6068	19.56
93/5/25	400	23.533	16.2	16.19	20.9638	20.97
93/5/31	400	23.533	9.0	9.43	21.9941	21.93
93/7/12	400	23.533	9.1	9.43	21.9797	21.93
93/7/19	400	23.533	17.1	17.47	20.8351	20.78
93/7/30	400	23.533	33.8	34.32	18.4530	18.38
93/8/4	400	23.533	42.7	43.59	17.1898	17.06
93/8/10	400	23.533	54.6	55.94	15.5102	15.32
93/8/16	400	23.533	67.6	69.57	13.6907	13.42
93/8/22	400	23.533	81.7	84.39	11.7391	11.37
93/8/30	400	23.533	102.6	105.89	8.8968	8.46
93/9/13	398.65	23.533	142.7	147.26	3.7000	3.01
93/9/20	398.65	23.533	164.0	169.89	1.0384	0.20
93/9/25	398.65	23.533	179.9	186.67	-0.8852	-1.81
93/10/4	398.65	23.533	209.8	217.95	-4.3491	-5.38
93/10/12	398.65	23.533	237.5	246.59	-7.3743	-8.46
93/10/18	398.65	23.533	258.8	268.31	-9.5795	-10.66
93/10/28	398.65	23.533	294.6	304.25	-13.0515	-14.07
93/11/1	398.65	23.533	308.7	318.29	-14.3402	-15.32
93/11/8	398.65	23.533	334.2	341.93	-16.5620	-17.34
93/11/15	398.65	23.533	356.8	363.84	-18.4180	-19.10
93/11/22	398.65	23.533	377.3	383.32	-20.0139	-20.59
93/11/29	398.65	23.533	395.6	399.62	-21.3712	-21.79
93/12/6	398.65	23.533	409.2	412.08	-22.3404	-22.67
93/12/13	398.65	23.533	418.9	420.11	-23.0118	-23.22
93/12/21	398.65	23.533	423.3	423.36	-23.3381	-23.44
93/12/27	398.65	23.533	421.1	421.52	-23.1890	-23.44
94/1/6	398.65	23.533	408.8	410.56	-22.3404	-22.56
94/1/17	398.65	23.533	384.4	388.33	-20.5777	-20.97
94/1/24	398.65	23.533	364.6	369.69	-19.0662	-19.56

日期	竿高K(cm)	觀測緯度	觀測竿影長(cm)	預測竿影長(cm)	觀測太陽直射緯度(N)	預測太陽直射緯度(N)
94/1/29	398.65	23.533	348.5	354.71	-17.7810	-18.38
94/2/6	398.65	23.533	321.1	328.59	-15.4728	-16.21
94/2/15	398.65	23.533	288.2	297.14	-12.4897	-13.42
94/2/23	398.65	23.533	259.8	268.31	-9.8093	-10.66
94/3/7	398.65	23.533	216.9	221.50	-5.2670	-5.77
94/3/16	398.65	23.533	186	190.08	-1.7296	-2.21
94/3/25	398.65	23.533	156.5	160.06	1.8493	1.41
94/4/9	398.65	23.533	111.9	114.04	7.6037	7.32
94/4/18	398.65	23.533	87.8	89.28	10.8623	10.66
94/4/25	398.65	23.533	70.7	71.72	13.2262	13.08
94/5/2	398.65	23.533	55	55.75	15.4277	15.32
94/5/9	398.65	23.533	41	41.52	17.4109	17.34
94/5/16	398.65	23.533	28.7	29.13	19.1652	19.10
94/5/23	398.65	23.533	17.9	18.73	20.7121	20.59
94/6/1	398.65	23.533	8.2	8.44	22.1046	22.07
94/6/6	398.65	23.533	3.9	4.29	22.7225	22.67

七、由表(三)可看出中天時間實際竿影觀測值與預測竿影理論值不吻合，而有 1~3

天的誤差。探討原因，發現是因為地球繞太陽的公轉不是正圓的等速運動，而是橢圓的變速運動之故。因此我們由實際的竿影觀測值反推算太陽直射之緯度，再反推算地球繞太陽的角位置(假設夏至為 0 度，冬至為 180 度)最後求出每兩個觀測日之間的角速度，



由 $\left[\tan^{-1} \left(\frac{K}{L} \right) \right] - 0.25^\circ = M$ 公式(一) (M: 太陽所在天球仰角角度
N: 太陽垂直照射地球時的緯度)

$M - 66.467^\circ = N$ 公式(二)

$\cos \theta = \frac{N}{23.4388}$ $\theta = \cos^{-1} \frac{N}{23.4388}$ 公式(六)

$\nu(\text{角速度}) = \frac{\Delta \theta}{\Delta t}$ 公式(七)

地球繞太陽的角速度觀測值

表(四)

日期	竿長 K(cm)	觀測緯度	觀測竿影長 L(cm)	實際觀側太陽 直射緯度(N)	仰角(M)	角位置 (θ)	角速度 (ν)
92/9/3	400	23.533	113.6	7.4285	74.141	71.5226	
92/9/9	400	23.533	130.8	5.1753	71.888	77.2441	0.9536
92/9/15	400	23.533	147.6	3.0289	69.742	82.5750	0.8885
92/9/22	400	23.533	170.2	0.2332	66.946	89.4298	0.9793
92/9/29	400	23.533	193.0	-2.4743	64.238	96.0597	0.9471
92/10/6	400	23.533	215.8	-5.0639	61.649	102.4769	0.9167
92/10/14	400	23.533	244.6	-8.1628	58.550	110.3809	0.9880
92/10/20	400	23.533	265.6	-10.3012	56.412	116.0715	0.9484
92/10/27	400	23.533	290.7	-12.7248	53.988	122.8809	0.9728
92/11/4	400	23.533	319.1	-15.2981	51.415	130.7442	0.9829
92/11/10	400	23.533	339.8	-17.0649	49.648	136.7242	0.9967
92/11/18	400	23.533	366.2	-19.1911	47.522	144.9624	1.0298
92/11/25	400	23.533	385.6	-20.6669	46.046	151.8528	0.9843
92/12/1	400	23.533	400.2	-21.7313	44.981	157.9951	1.0237
92/12/8	400	23.533	413.5	-22.6677	44.045	165.2628	1.0383
92/12/15	400	23.533	421.6	-23.2230	43.490	172.2185	0.9937
92/12/22	400	23.533	424.6	-23.4258	43.287	180.0000	1.1116
92/12/29	400	23.533	421.5	-23.2162	43.497	187.9030	1.1290
93/1/5	400	23.533	413.0	-22.6331	44.080	195.0665	1.0233
93/1/13	400	23.533	397.9	-21.5662	45.146	203.0583	0.9990
93/1/21	400	23.533	376.9	-20.0139	46.699	211.3639	1.0382
93/1/28	400	23.533	355.0	-18.3061	48.407	218.6464	1.0404
93/2/2	400	23.533	338.6	-16.9649	49.748	223.6312	0.9970
93/2/10	400	23.533	310.5	-14.5374	52.175	231.6672	1.0045
93/2/16	400	23.533	288.9	-12.5557	54.157	237.6100	0.9905
93/2/23	400	23.533	263.5	-10.0919	56.621	244.4967	0.9838
93/3/1	400	23.533	237.9	-7.4591	59.254	251.4437	0.9924
93/3/8	400	23.533	212.9	-4.7411	61.972	258.3298	0.9837
93/3/15	400	23.533	188.5	-1.9492	64.764	265.2298	0.9857
93/3/22	400	23.533	165.8	0.7690	67.482	271.8801	0.9500
93/4/5	400	23.533	122.9	6.2034	72.916	282.5615	0.9619
93/4/12	400	23.533	103.5	8.7759	75.489	285.3470	0.9488
93/4/19	400	23.533	85.2	11.2587	77.971	298.7079	0.9599
93/4/26	400	23.533	68.3	13.5932	80.306	305.4466	0.9627
93/5/3	400	23.533	52.8	15.7634	82.476	312.2631	0.9738

日期	竿長 K(cm)	觀測緯度	觀測竿影長 L(cm)	實際觀側太陽 直射緯度(N)	仰角(M)	角位置 (θ)	角速度 (ν)
93/5/10	400	23.533	39.1	17.7001	84.413	319.0395	0.9681
93/5/17	400	23.533	27.2	19.3929	86.106	325.8309	0.9702
93/5/18	400	23.533	25.7	19.6068	86.319	326.7734	0.9425
93/5/25	400	23.533	16.2	20.9638	87.676	333.4322	0.9512
93/5/31	400	23.533	9.0	21.9941	88.707	339.7782	1.0577
93/7/12	400	23.533	9.1	21.9797	88.692	339.6771	0.9653
93/7/19	400	23.533	17.1	20.8351	87.548	332.7372	0.9914
93/7/30	400	23.533	33.8	18.4530	85.166	321.9324	0.9823
93/8/4	400	23.533	42.7	17.1898	83.902	317.1712	0.9522
93/8/10	400	23.533	54.6	15.5102	82.223	311.4320	0.9565
93/8/16	400	23.533	67.6	13.6907	80.403	305.7396	0.9487
93/8/22	400	23.533	81.7	11.7391	78.452	300.0557	0.9473
93/8/30	400	23.533	102.6	8.8968	75.609	292.3074	0.9685
93/9/13	398.65	23.533	142.7	3.5878	70.300	278.8048	0.9645
93/9/20	398.65	23.533	164	0.9213	67.634	272.2527	0.9360
93/9/25	398.65	23.533	179.9	-1.0054	65.707	267.5416	0.9422
93/10/4	398.65	23.533	209.8	-4.4738	62.239	258.9964	0.9495
93/10/12	398.65	23.533	237.5	-7.5018	59.211	251.3334	0.9579
93/10/18	398.65	23.533	258.8	-9.7083	57.004	245.5313	0.9670
93/10/28	398.65	23.533	294.6	-13.1812	53.531	235.7804	0.9751
93/11/1	398.65	23.533	308.7	-14.4699	52.243	231.8773	0.9758
93/11/8	398.65	23.533	334.2	-16.6911	50.022	224.5928	1.0406
93/11/15	398.65	23.533	356.8	-18.5462	48.166	217.6965	0.9852
93/11/22	398.65	23.533	377.3	-20.1409	46.572	210.7621	0.9906
93/11/29	398.65	23.533	395.6	-21.4970	45.216	203.4866	1.0394
93/12/6	398.65	23.533	409.2	-22.4652	44.247	196.5720	0.9878
93/12/13	398.65	23.533	418.9	-23.1359	43.577	189.2216	1.0501
93/12/21	398.65	23.533	423.3	3.5878	70.300	278.8048	0.9645
93/12/27	398.65	23.533	421.1	-23.2857	43.427	186.5516	0.9148
94/1/6	398.65	23.533	408.8	-22.4372	44.275	196.8104	1.0259
94/1/17	398.65	23.533	384.4	-20.6744	46.038	208.1081	1.0271
94/1/24	398.65	23.533	364.6	-19.1626	47.550	215.1587	1.0072
94/1/29	398.65	23.533	348.5	-17.8770	48.836	220.2965	1.0275
94/2/6	398.65	23.533	321.1	-15.5673	51.145	228.3813	1.0106
94/2/15	398.65	23.533	288.2	-12.5817	54.131	237.5347	1.0170
94/2/23	398.65	23.533	259.8	-9.8093	56.903	245.2597	0.9656

日期	竿長 K(cm)	觀測緯度	觀測竿影長 L(cm)	實際觀側太陽 直射緯度(N)	仰角(M)	角位置 (θ)	角速度 (ν)
94/3/7	398.65	23.533	216.9	-5.2670	61.446	257.0140	0.9042
94/3/16	398.65	23.533	186.0	-1.7296	64.983	265.7683	0.9727
94/3/25	398.65	23.533	156.5	1.8493	68.562	274.5252	0.9730
4/9	398.65	23.533	111.9	7.6037	74.316	288.9296	0.9603
4/18	398.65	23.533	87.8	10.8623	77.575	297.6088	0.9643
4/25	398.65	23.533	70.7	13.2262	79.939	304.3529	0.9634
5/2	398.65	23.533	55	15.4277	82.140	311.1638	0.9730
5/9	398.65	23.533	41	17.4109	84.124	317.9727	0.9727
5/16	398.65	23.533	28.7	19.1652	85.878	324.8523	0.9828
5/23	398.65	23.533	17.9	20.7121	85.878	332.0877	1.0336
6/1	398.65	23.533	8.2	22.10463	87.425	340.5751	0.9430
6/6	398.65	23.533	3.9	22.72249	88.817	345.7986	1.0447

八、1. 求 93 年 5 月 17 日~5 月 18 日至 93 年 9 月 25 日~10 月 4 日之間的角速度之平均值，為

$$\nu_{\theta_1}=0.964(\text{角速度小於 } 1)$$

2. 求 92 年 10 月 27 日~11 月 4 日至 93 年 2 月 23 日~3 月 1 日之間的角速度之平均值，為

$$\nu_{\theta_2}=1.020(\text{角速度大於 } 1)$$

根據刻卜勒行星第二運動定律：等時間掃過等面積的理論，可知：

$$r_1^2 \nu_{\theta_1} = r_2^2 \nu_{\theta_2} \quad \frac{r_2}{r_1} = \sqrt{\frac{\nu_{\theta_1}}{\nu_{\theta_2}}} = \sqrt{\frac{0.964}{1.020}} = 0.972$$

由上面推算可知地球繞太陽的公轉是一個很接近正圓的橢圓運動，其近日點的距離與遠日點的距離比值為 0.965

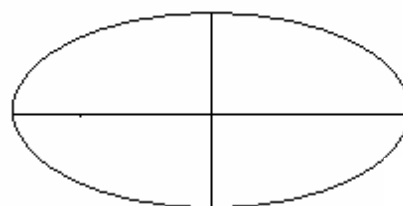
3. 離心率 e 之計算：

$$\text{平均軌道半徑} \quad a = (1 + 0.972) / 2 = 0.986$$

$$c = a - r_{\text{近}}$$

$$c = 0.986 - 0.972 = 0.014$$

$$\text{離心率} \quad e = c / a = 0.014 / 0.986 = 0.0142$$



圖(六)

$$n=1 \cdots 366$$

$n=1$ 為 6 月 22 日

$n=2$ 為 6 月 23 日以此類推

$$\text{九、由公式(三)} \quad N = 23.4388^\circ \times \cos\left(\frac{360^\circ \times n}{366}\right)$$

(N ：太陽垂直照射地球的緯度)

$$\text{公式(四)} \quad L = \frac{K}{\tan \theta} = \frac{K}{\tan[90^\circ - (A - N) + 0.25^\circ]} \quad \text{當 } A - N \geq 0$$

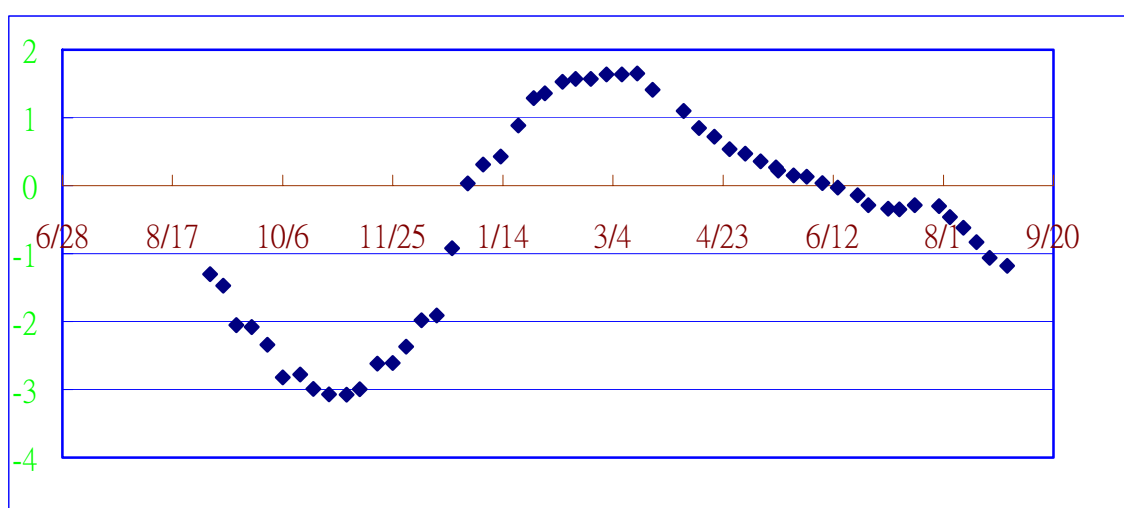
(L 為正，竿影在北方) 若 $90.25^\circ \geq 90^\circ - (A - N) + 0.25^\circ \geq 90^\circ$ 則 $L=0$ (無竿影)

所預測之竿影值與實際值有 1~3 天之誤差，我們把實際誤差值列於表(四)，並作成圖(七)

表(五)

日期	差值	日期	差值	日期	差值	日期	差值
9/3	-1.3	12/1	-2.367	3/8	1.636	6/7	0.04
9/9	-1.47	12/8	-1.98	3/15	1.65	6/14	-0.03
9/15	-2.05	12/15	-1.91	3/22	1.41	6/23	-0.14
9/22	-2.08	12/22	-0.92	4/5	1.1	6/28	-0.29
9/29	-2.34	12/29	0.032	4/12	0.85	7/7	-0.34
10/6	-2.82	1/5	0.31	4/19	0.72	7/12	-0.35
10/14	-2.78	1/13	0.43	4/26	0.54	7/19	-0.29
10/20	-2.99	1/21	0.885	5/3	0.47	7/30	-0.3
10/27	-3.071	1/28	1.289	5/10	0.36	8/4	-0.46
11/4	-3.076	2/2	1.357	5/17	0.27	8/10	-0.62
11/10	-2.997	2/10	1.528	5/18	0.22	8/16	-0.83
11/18	-2.62	2/16	1.569	5/25	0.15	8/22	-1.06
11/25	-2.61	2/23	1.57	5/31	0.13	8/30	-1.18
		3/1	1.635				

圖(七)



(上圖橫座標為日期，縱座標為誤差天數)

我們因而對公式(三)再次做了修正為

$$N = 23.4388^\circ \times \cos \left[\frac{360^\circ}{366} \times \left(n - 0.03n \sin \frac{360^\circ}{366} n \right) \right]$$

(6月22日~12月21日)

$n=1 \cdots 366$ 公式(八)

$n=1$ 為 6月22日

$n=2$ 為 6月23日以此類推

$$N = 23.4388^\circ \times \cos \left[\frac{360^\circ}{366} \times \left(n - 1.75 \sin \frac{360^\circ}{366} n \right) \right]$$

(12月22日~6月21日)

(N: 太陽垂直照射地球的緯度)

十、利用公式(三)(八)可正確預測一年中每天太陽垂直照射在地球上的緯度及在緯度 23.533° 上以 400 公分為觀測竿高時之中天時間竿影長度如表(五)

表(五)

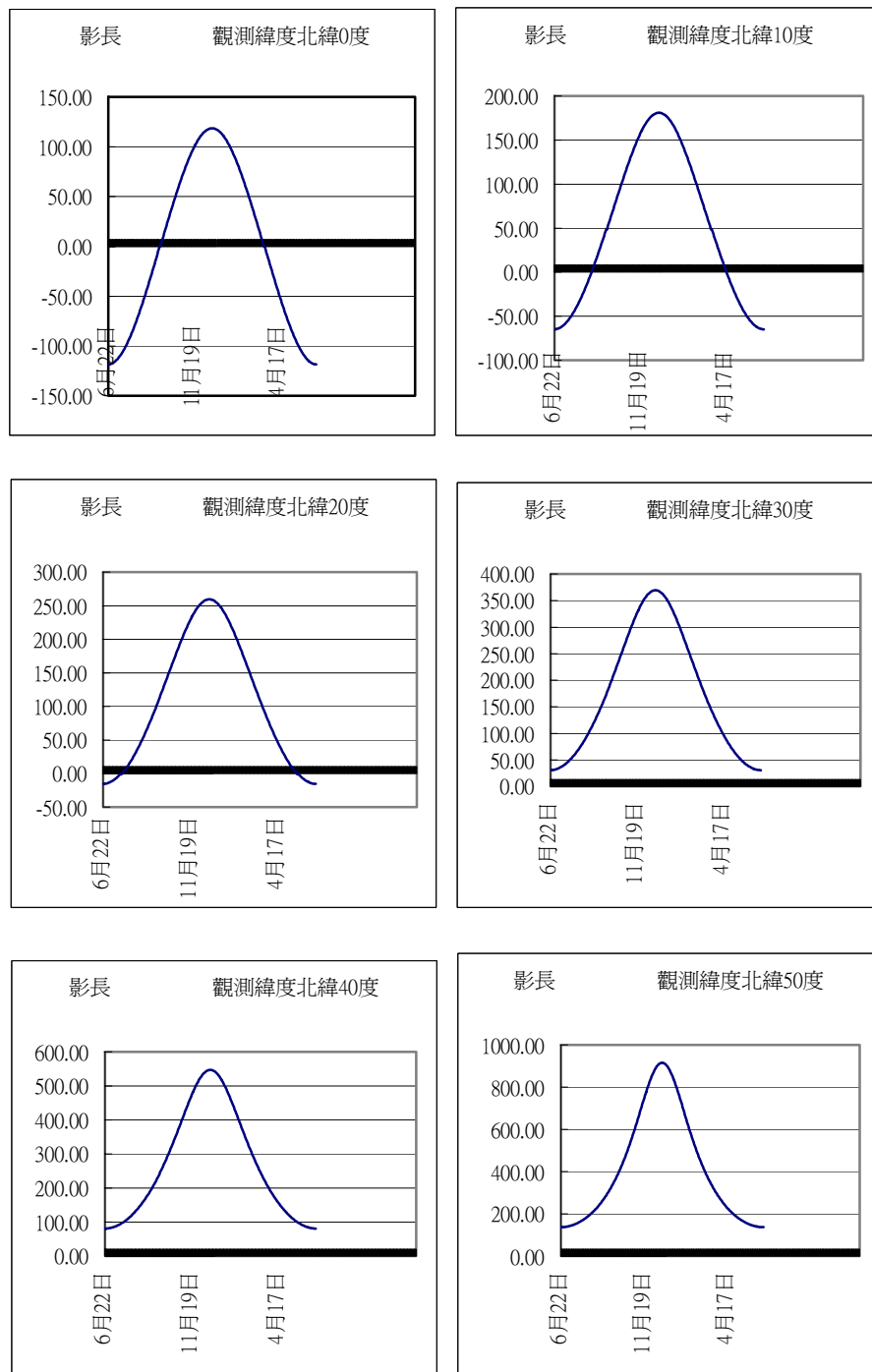
日期	n	太陽直射緯 度(N)	預測竿影長 (cm)	日期	n	太陽直射緯 度(N)	預測竿影長 (cm)	日期	n	太陽直射緯 度(N)	預測竿影長 (cm)
1/1	194	-23.00	418.38	2/1	225	-17.38	343.55	3/1	254	-7.62	239.39
1/2	195	-22.92	417.18	2/2	226	-17.10	340.21	3/2	255	-7.23	235.76
1/3	196	-22.83	415.87	2/3	227	-16.82	336.82	3/3	256	-6.85	232.14
1/4	197	-22.74	414.47	2/4	228	-16.53	333.41	3/4	257	-6.46	228.53
1/5	198	-22.63	412.98	2/5	229	-16.24	329.96	3/5	258	-6.07	224.93
1/6	199	-22.52	411.39	2/6	230	-15.94	326.49	3/6	259	-5.68	221.34
1/7	200	-22.40	409.71	2/7	231	-15.64	323.00	3/7	260	-5.28	217.77
1/8	201	-22.28	407.94	2/8	232	-15.33	319.47	3/8	261	-4.89	214.21
1/9	202	-22.15	406.07	2/9	233	-15.02	315.93	3/9	262	-4.49	210.66
1/10	203	-22.01	404.12	2/10	234	-14.70	312.37	3/10	263	-4.09	207.13
1/11	204	-21.87	402.09	2/11	235	-14.38	308.79	3/11	264	-3.69	203.62
1/12	205	-21.72	399.97	2/12	236	-14.06	305.19	3/12	265	-3.30	200.12
1/13	206	-21.56	397.77	2/13	237	-13.73	301.58	3/13	266	-2.90	196.64
1/14	207	-21.39	395.50	2/14	238	-13.40	297.95	3/14	267	-2.49	193.17
1/15	208	-21.22	393.14	2/15	239	-13.06	294.32	3/15	268	-2.09	189.73
1/16	209	-21.04	390.71	2/16	240	-12.72	290.67	3/16	269	-1.69	186.30
1/17	210	-20.86	388.21	2/17	241	-12.38	287.02	3/17	270	-1.29	182.89
1/18	211	-20.67	385.64	2/18	242	-12.03	283.36	3/18	271	-0.89	179.51
1/19	212	-20.47	383.00	2/19	243	-11.68	279.69	3/19	272	-0.48	176.14
1/20	213	-20.27	380.29	2/20	244	-11.32	276.02	3/20	273	-0.08	172.79
1/21	214	-20.06	377.53	2/21	245	-10.97	272.35	3/21	274	0.32	169.47
1/22	215	-19.85	374.70	2/22	246	-10.61	268.68	3/22	275	0.72	166.17
1/23	216	-19.62	371.81	2/23	247	-10.24	265.00	3/23	276	1.13	162.89
1/24	217	-19.40	368.86	2/24	248	-9.87	261.33	3/24	277	1.53	159.63
1/25	218	-19.16	365.86	2/25	249	-9.50	257.66	3/25	278	1.93	156.39
1/26	219	-18.93	362.81	2/26	250	-9.13	254.00	3/26	279	2.33	153.18
1/27	220	-18.68	359.71	2/27	251	-8.76	250.34	3/27	280	2.73	149.99
1/28	221	-18.43	356.57	2/28	252	-8.38	246.68	3/28	281	3.13	146.83
1/29	222	-18.18	353.38	2/29	253	-8.00	243.03	3/29	282	3.52	143.69
1/30	223	-17.91	350.14					3/30	283	3.92	140.58
1/31	224	-17.65	346.87					3/31	284	4.31	137.49

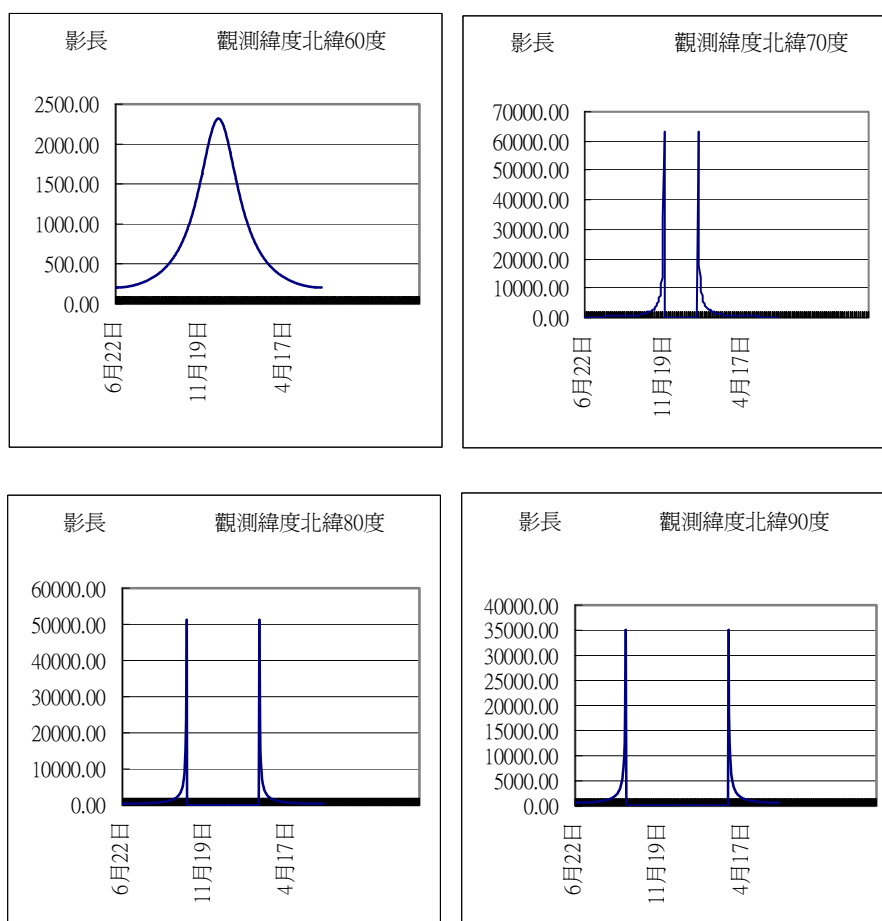
日期	n	太陽直射緯 度(N)	預測竿影長 (cm)	日期	n	太陽直射緯 度(N)	預測竿影長 (cm)	日期	n	太陽直射緯 度(N)	預測竿影長 (cm)
4/1	285	4.71	134.43	5/1	315	15.32	55.95	6/1	346	22.13	8.05
4/2	286	5.10	131.39	5/2	316	15.62	53.83	6/2	347	22.26	7.17
4/3	287	5.49	128.38	5/3	317	15.91	51.74	6/3	348	22.38	6.33
4/4	288	5.88	125.39	5/4	318	16.20	49.70	6/4	349	22.49	5.53
4/5	289	6.26	122.43	5/5	319	16.48	47.68	6/5	350	22.60	4.78
4/6	290	6.65	119.50	5/6	320	16.76	45.71	6/6	351	22.70	4.07
4/7	291	7.03	116.60	5/7	321	17.04	43.77	6/7	352	22.79	3.41
4/8	292	7.41	113.73	5/8	322	17.31	41.87	6/8	353	22.88	2.79
4/9	293	7.79	110.88	5/9	323	17.57	40.00	6/9	354	22.96	2.22
4/10	294	8.17	108.06	5/10	324	17.83	38.17	6/10	355	23.04	1.69
4/11	295	8.54	105.27	5/11	325	18.09	36.38	6/11	356	23.11	1.21
4/12	296	8.91	102.51	5/12	326	18.33	34.63	6/12	357	23.17	0.78
4/13	297	9.28	99.78	5/13	327	18.58	32.92	6/13	358	23.23	0.39
4/14	298	9.64	97.07	5/14	328	18.82	31.24	6/14	359	23.28	0.04
4/15	299	10.00	94.40	5/15	329	19.05	29.61	6/15	360	23.32	0
4/16	300	10.36	91.76	5/16	330	19.28	28.01	6/16	361	23.36	0
4/17	301	10.72	89.15	5/17	331	19.50	26.45	6/17	362	23.39	0
4/18	302	11.07	86.57	5/18	332	19.72	24.94	6/18	363	23.41	0
4/19	303	11.42	84.02	5/19	333	19.93	23.46	6/19	364	23.43	0
4/20	304	11.77	81.50	5/20	334	20.13	22.02	6/20	365	23.44	0
4/21	305	12.11	79.01	5/21	335	20.33	20.63	6/21	366	23.44	0
4/22	306	12.45	76.55	5/22	336	20.52	19.28	6/22	1	23.44	0
4/23	307	12.78	74.13	5/23	337	20.71	17.96	6/23	2	23.43	0
4/24	308	13.11	71.74	5/24	338	20.89	16.69	6/24	3	23.41	0
4/25	309	13.44	69.38	5/25	339	21.07	15.46	6/25	4	23.38	0
4/26	310	13.77	67.06	5/26	340	21.24	14.28	6/26	5	23.35	0
4/27	311	14.09	64.77	5/27	341	21.40	13.13	6/27	6	23.32	0
4/28	312	14.40	62.51	5/28	342	21.56	12.03	6/28	7	23.27	0.08
4/29	313	14.71	60.29	5/29	343	21.71	10.97	6/29	8	23.22	0.44
4/30	314	15.02	58.10	5/30	344	21.86	9.96	6/30	9	23.16	0.84
				5/31	345	22.00	8.98				

日期	n	太陽直射緯 度(N)	預測竿影長 (cm)	日期	n	太陽直射緯 度(N)	預測竿影長 (cm)	日期	n	太陽直射緯 度(N)	預測竿影長 (cm)
7/1	10	23.10	1.29	8/1	41	18.07	36.46	9/1	72	8.47	105.77
7/2	11	23.03	1.79	8/2	42	17.82	38.22	9/2	73	8.11	108.48
7/3	12	22.95	2.33	8/3	43	17.57	40.01	9/3	74	7.75	111.20
7/4	13	22.87	2.92	8/4	44	17.31	41.84	9/4	75	7.38	113.96
7/5	14	22.77	3.55	8/5	45	17.05	43.70	9/5	76	7.01	116.74
7/6	15	22.68	4.23	8/6	46	16.78	45.59	9/6	77	6.64	119.55
7/7	16	22.57	4.95	8/7	47	16.51	47.52	9/7	78	6.27	122.38
7/8	17	22.46	5.71	8/8	48	16.23	49.48	9/8	79	5.90	125.24
7/9	18	22.35	6.52	8/9	49	15.95	51.48	9/9	80	5.52	128.13
7/10	19	22.23	7.38	8/10	50	15.66	53.50	9/10	81	5.14	131.04
7/11	20	22.10	8.27	8/11	51	15.37	55.56	9/11	82	4.77	133.97
7/12	21	21.96	9.21	8/12	52	15.08	57.65	9/12	83	4.39	136.93
7/13	22	21.82	10.20	8/13	53	14.78	59.78	9/13	84	4.00	139.92
7/14	23	21.68	11.22	8/14	54	14.48	61.93	9/14	85	3.62	142.92
7/15	24	21.52	12.29	8/15	55	14.18	64.12	9/15	86	3.24	145.96
7/16	25	21.37	13.39	8/16	56	13.87	66.33	9/16	87	2.85	149.02
7/17	26	21.20	14.54	8/17	57	13.55	68.58	9/17	88	2.46	152.10
7/18	27	21.03	15.73	8/18	58	13.24	70.86	9/18	89	2.08	155.20
7/19	28	20.85	16.96	8/19	59	12.92	73.16	9/19	90	1.69	158.33
7/20	29	20.67	18.23	8/20	60	12.59	75.50	9/20	91	1.30	161.48
7/21	30	20.49	19.54	8/21	61	12.27	77.87	9/21	92	0.91	164.65
7/22	31	20.29	20.89	8/22	62	11.94	80.26	9/22	93	0.52	167.85
7/23	32	20.09	22.28	8/23	63	11.60	82.69	9/23	94	0.13	171.07
7/24	33	19.89	23.71	8/24	64	11.27	85.14	9/24	95	-0.26	174.31
7/25	34	19.68	25.17	8/25	65	10.93	87.62	9/25	96	-0.66	177.57
7/26	35	19.47	26.68	8/26	66	10.58	90.13	9/26	97	-1.05	180.86
7/27	36	19.25	28.22	8/27	67	10.24	92.67	9/27	98	-1.44	184.16
7/28	37	19.02	29.79	8/28	68	9.89	95.24	9/28	99	-1.83	187.49
7/29	38	18.79	31.41	8/29	69	9.54	97.83	9/29	100	-2.22	190.84
7/30	39	18.56	33.06	8/30	70	9.19	100.45	9/30	101	-2.61	194.20
7/31	40	18.32	34.74	8/31	71	8.83	103.10				

日期	n	太陽直射緯 度(N)	預測竿影長 (cm)	日期	n	太陽直射緯 度(N)	預測竿影長 (cm)	日期	n	太陽直射緯 度(N)	預測竿影長 (cm)
10/1	102	-3.01	197.59	11/1	133	-14.38	308.76	12/1	163	-21.84	401.71
10/2	103	-3.40	201.00	11/2	134	-14.70	312.37	12/2	164	-21.99	403.85
10/3	104	-3.79	204.42	11/3	135	-15.02	315.97	12/3	165	-22.14	405.91
10/4	105	-4.18	207.86	11/4	136	-15.34	319.55	12/4	166	-22.28	407.87
10/5	106	-4.56	211.32	11/5	137	-15.65	323.12	12/5	167	-22.41	409.73
10/6	107	-4.95	214.80	11/6	138	-15.95	326.66	12/6	168	-22.53	411.50
10/7	108	-5.34	218.30	11/7	139	-16.26	330.18	12/7	169	-22.64	413.17
10/8	109	-5.73	221.81	11/8	140	-16.55	333.68	12/8	170	-22.75	414.73
10/9	110	-6.11	225.33	11/9	141	-16.84	337.15	12/9	171	-22.85	416.19
10/10	111	-6.49	228.88	11/10	142	-17.13	340.60	12/10	172	-22.95	417.54
10/11	112	-6.88	232.43	11/11	143	-17.41	344.01	12/11	173	-23.03	418.78
10/12	113	-7.26	236.00	11/12	144	-17.69	347.39	12/12	174	-23.11	419.90
10/13	114	-7.64	239.58	11/13	145	-17.96	350.73	12/13	175	-23.18	420.92
10/14	115	-8.01	243.18	11/14	146	-18.23	354.03	12/14	176	-23.24	421.82
10/15	116	-8.39	246.78	11/15	147	-18.49	357.29	12/15	177	-23.29	422.60
10/16	117	-8.76	250.40	11/16	148	-18.74	360.51	12/16	178	-23.34	423.27
10/17	118	-9.13	254.02	11/17	149	-18.99	363.69	12/17	179	-23.37	423.82
10/18	119	-9.50	257.66	11/18	150	-19.24	366.81	12/18	180	-23.40	424.24
10/19	120	-9.87	261.30	11/19	151	-19.48	369.88	12/19	181	-23.42	424.55
10/20	121	-10.24	264.94	11/20	152	-19.71	372.90	12/20	182	-23.43	424.73
10/21	122	-10.60	268.60	11/21	153	-19.94	375.86	12/21	183	-23.44	424.79
10/22	123	-10.96	272.25	11/22	154	-20.16	378.76	12/22	184	-23.44	424.74
10/23	124	-11.31	275.91	11/23	155	-20.37	381.60	12/23	185	-23.42	424.58
10/24	125	-11.67	279.58	11/24	156	-20.58	384.38	12/24	186	-23.41	424.31
10/25	126	-12.02	283.24	11/25	157	-20.78	387.08	12/25	187	-23.38	423.94
10/26	127	-12.37	286.90	11/26	158	-20.97	389.71	12/26	188	-23.35	423.46
10/27	128	-12.71	290.56	11/27	159	-21.16	392.27	12/27	189	-23.31	422.87
10/28	129	-13.05	294.21	11/28	160	-21.34	394.75	12/28	190	-23.26	422.18
10/29	130	-13.39	297.86	11/29	161	-21.51	397.15	12/29	191	-23.21	421.38
10/30	131	-13.72	301.51	11/30	162	-21.68	399.47	12/30	192	-23.15	420.48
10/31	132	-14.06	305.14					12/31	193	-23.08	419.48

十一、利用公式(四)(五)(八)，固定竿長，帶入不同緯度(北緯為正，南緯為負)算出整年竿影長，並繪製圖表，其中橫座標為日期，縱座標為預測竿影長。(緯度七十度開始會出現中天仰角為負值的情況，以致竿影長為 0)





柒、討論：

- 一、本校建造圭表之位置因地層稍有傾斜滑動，以致地平面傾斜約 1 度左右，稍微影響觀測之準確度，為此我們設計了水平觀測儀，加以修正以便得到較可靠之實驗值。
- 二、北回歸線緯度之測量，在冬至較好觀測，因為在冬至時，觀測南回歸線之緯度值，比在夏至時觀測北回歸線之緯度值要準確。(冬至影長較大誤差較小)
- 三、假設太陽垂直照射在地球上的緯度值是在南北回歸線之間以簡諧運動的方式來回運動，結果與實際觀測值比較之下，自 6 月 22 日到 12 月 21 日，太陽南移的速度較慢，且在 11 月初大約慢 3 天，為最大值；而自 12 月 22 日到 6 月 21 日，太陽北移的速度較快，且在 3 月初大約快 1.6 天為最大值，準確度為 99%。

四、以 $N = 23.4388^\circ \times \cos \left[\frac{360^\circ}{366} \times \left(n - 0.03n \sin \frac{360^\circ n}{366} \right) \right]$ (6 月 22 日~12 月 21 日)

$$N = 23.4388^\circ \times \cos \left[\frac{360^\circ}{366} \times \left(n - 1.75 \sin \frac{360^\circ n}{366} \right) \right] \quad (12 \text{ 月 } 22 \text{ 日} \sim 6 \text{ 月 } 21 \text{ 日})$$

公式(八)

兩個公式解決了上述的誤差，讓理論值與實際值只有 0.8 天內之誤差，準確度提高為 99.7%，是一大突破。

五、因為近日點為元月 3 日，遠日點為 7 月 9 日，所以根據克卜勒的行星運動定律可知，在 7 月 9 日左右的日期，地球公轉速率較慢，累積下來以致於在 11 月初太陽南移的速度比簡諧運動的計算值慢了 3.1 天，為最大值。元月 3 日為近日點，以致在元月 3 日左右的日期，地球公轉速率較快，累積下來，在 3 月初太陽南移的速度比簡諧運動所計算之值快 1.6 天，為最大值。簡諧運動是以等速率圓周運動為基礎所探討的投影現象，而地球繞太陽是一個很接近正圓的橢圓運動，其離心率為 0.0167，所以必須在公式上加以修正以減少誤差。

六、由於太陽視角約為 0.5 度，以致在地球上會有約 0.5 度圓面積的無影帶，其直徑約為 $\frac{2\pi \times 6371(km)}{720} = 55.6(km)$ (地球的平均半徑為 6371km)

七、地球繞太陽的公轉是一個很接近正圓的橢圓運行，我們測出的近日點的日距與遠日點的日距比為 0.972 與實際值 0.967 吻合，我們測出的離心率為 0.0142 也與實際值吻合，趨近於零的離心率證明地球繞太陽的公轉是一個很接近正圓之橢圓運行。

捌、結論：

一、長期的竿影觀測，可窺見地球繞太陽的公轉是一個很接近正圓之橢圓運動，其離心率為 0.0167。

二、各地區的天文臺或學校設立日晷的多，而設立圭表的少，乃因圭表竿影之預測頗不容易。希望我們的實驗有助於天文教室圭表之推廣設立。

玖、參考資料及其他：

一、國立編譯館—高級中學地球科學第四冊

二、Newton6 —牛頓雜誌社

三、張惠民編—地球科學概論—民文書局

四、希瑟.庫柏，尼傑.漢貝斯特著—新世紀太空百科全書—貓頭鷹出版社

五、柏谷健二、山本淳之、大村誠。福山董、安成哲三譯—氣候變動的天文理論—冰河時代—古今書院。

六、台北市立天文科學教育館—天文年鑑 2004。

七、龍騰文化事業—科學新天地(2004 年 3 月 1 日)

中華民國第四十五屆中小學科學展覽會
評 語

高中組 地球科學科

040510

以竿窺天談圭表

嘉義縣私立協同高級中學

評語：

1. 長達 2~3 年之觀測，值得肯定。
2. 結論由 2~3 年之觀測，求得通式，誠屬難得。
3. 驗證公轉為橢圓形之假設與推論值得斟酌。