

中華民國第四十五屆中小學科學展覽會
作品說明書

高中組 數學科

第一名

040421

哇！好多的 1、2、3！——外觀數列

臺北市立第一女子高級中學

作者姓名：

高二 李安 高二 許瀨文 高二 陳怡安

指導老師：

許秀聰 王嘉慶

中華民國第四十五屆中小學科學展覽會
作品說明書

科別：數學科

組別：高中組

作品名稱：哇！好多的 1、2、3！——外觀數列

關鍵詞：裂縫、重複性、一般性

編號：

目錄

摘要	1
壹、研究動機	1
貳、研究目的	1
參、研究設備及器材	1
肆、研究過程與方法	1
一、基本性質與組成	2
二、分析數列	3
三、一般性	9
四、非1始之外觀數列	14
伍、研究結果	21
陸、討論	23
柒、結論	24
捌、參考資料及其他	25
附件	26

摘要

「外觀數列(The Look and Say sequence)」為依照外觀產生下一列的數列，第一列為「1」，第二列則描述第一列「1個1」而為「11」，第三列「21」，第四列「1211」，依此類推。本研究針對外觀數列的各項數學性質作研究探討，並由此推導出外觀數列的一般式，即給定第n列就可知道該列的內容。

壹、研究動機

閒暇時翻閱《數字的異想世界》(Pickover 著)一書，其中一個作者稱為「怪獸數列」的主題吸引了我們的注意力。「怪獸數列」的標準名稱是「外觀數列」(Look and say sequence)，它是因根據外觀產生下一列而得名。舉例來說，此數列的首項為1，唸做「1個1」，因此第二項便為「11」，唸做「2個1」，故第三項是「21」，接下來是「1211」、「111221」……依此類推。雖然乍看之下這個數列不像會具有什麼數學特性，我們還是認為如此將語言和數字作結合，是相當有趣的想法。然而當我們仔細閱讀書本內容，才發現外觀數列其實有著許多驚人的數學性質，比如每一列的數字位數呈指數成長、數列中絕對不會出現4或是333、1,2,3的個數會趨近固定比例等等。我們覺得這個數列非常有意思，也想看看它和我們在高一下學期第三章「數列與級數」中所認識的數列有什麼關係，因此決定對它作更深入的探討研究。

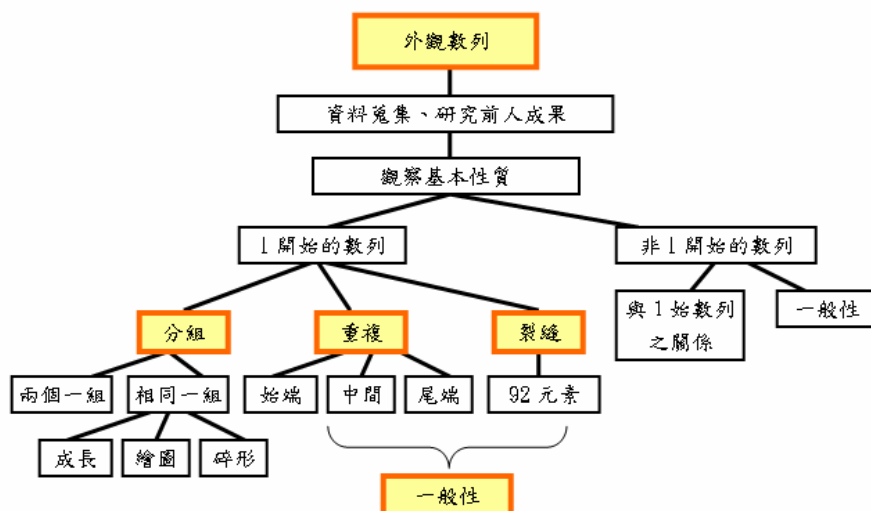
貳、研究目的

- 一、觀察外觀數列的各種數學性質
- 二、用各種方式分析並解釋所觀察到的數學性質
- 三、藉由所觀察到的性質，進而推導出外觀數列之一般項

參、研究設備及器材

頭腦、紙、筆、電腦、電腦軟體 (Microsoft Word、Excel、Frontpage)

肆、研究過程與方法



一、基本性質與組成

（一）回答書中問題

首先，我們要針對作者書中提到但沒有說明的問題做解釋。

「數列裡的最大數是3(即不會有4以上的數字),是否可能證明3-3-3絕對不會出現？」

這可以藉由「上推」的方法解釋。若有出現4，則表示上一列的數列中有出現4個一樣的數字，以41為例，上一列應是1111，再上一列應該為11，但依照外觀數列的規則，11應該被形容為「21」，而不是「1111」，也就是說不會有1111的出現，當然也不會有4的出現，而4以上的數字也可用一樣的方法上推來證明。

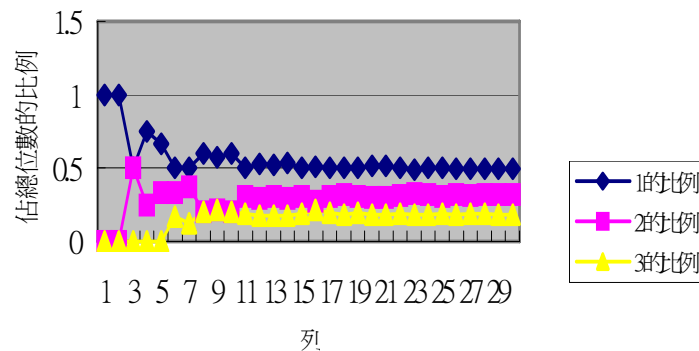
至於為何不會出現333，以3331為例，代表上一列為「333111」，注意其中又出現了333，再上推一次，依然會產生333，也就是說，要產生333，必須數列的開頭即有333，但這跟實際不符合，因此是不會出現的。

（二）1,2,3分別個數

書中寫道：「如果你仔細研究這個數列，就會發現裡面絕大多數都是1，至於2和3則較少見。從第六列到第二十七列，約有百分之五十的數項為1，百分之三十為2，百分之二十為3。」

我們利用Excel來計算1,2,3分別個數、佔整列總位數的百分比，如【附件一】。

我們將這些資料繪成統計圖，如下【表一】，發現大約從第十二列開始，1,2,3分別佔總位數的百分比逐漸趨於固定，1約佔50%，2約佔31%，3約佔19%。



【表一】1,2,3分別佔總位數的百分比

（三）總位數

由外觀上觀察，會發現外觀數列的成長非常快速，並近似一個指數函數。

Pickover在《數字的異想世界》中指出：「根據康威和蓋伊合著的《數字書》(The Book of Numbers)所述，這個數列的第n項之位數與下面數字約成正比：

$$(1.3035772690342693912570991121525518907307025046594)^n$$

在數學網站Mathworld中找到的【參考資料二】寫道，此指數函數為

$$\text{第 } n \text{ 列總位數} = C\lambda^n$$

其中 $C=1.567\dots$ ， $\lambda=1.30357726\dots$ ， λ 稱為康威常數(Conway's Constant)。關於康威常數，詳見【參考資料三】。

二、分析數列

爲了找到一般項，我們希望縮小研究單位，把數列分割成可以獨立研究的單位，由這些小單位產生一般項。

(一) 分組

1. 兩個一組

以第七列「13112221」爲例，將其分成 13 11 22 21 共四組。

這種分組方式的意義在於，外觀數列是種描述上一行的數列，13 11 22 21 這四組可視爲在描述上一列有「1個3」、「1個1」、「2個2」、「2個1」，也就是「量詞」和「名詞」的不同，且二個一組，並不會影響數列呈指數成長的性質（∵組數=個數÷2）。由於已經證明書中所提到的：「不會出現 333」，因此實際上在二個一數的分類中，不會有 33（描述上一行有 3個3），總共只有 8 組：11、12、13、21、22、23、31、32。

不過，採取這種分組方式有個很大的缺點，那就是電腦沒有辦法幫我們分好，因此必須採取紙上作業。在這種分組方法中我們確實有發現一些規律，然而礙於大量處理的困難，我們尚無法把它實際運用到外觀數列中，仍待改良。

我們之後也會針對「兩個一組」始的外觀數列做討論，詳見「非 1 始之外觀數列」。

2. 相同的一組

另一種分組方式，則是「相鄰的相同數字一組」。以第七列「13112221」爲例，可將其分成 1 3 11 222 1 共五組。

這種分組方式可分出 1、11、111、2、22、222、3、33 共八組。此分組方式的優點在於，當數列要產生下一列時，不同組之間是不會互相影響的，可降低研究上的複雜性，但是所產生的下一列並無法維持「相同一組」的分組方式，反而變爲「二個一組」，例：11 2 3 的下一列會產生 21 12 13，因此無法直接採用這種分組方式來研究產生規律。

相同一組成長率

分組之後，我們想知道各組之間的關係，及分組前後數列有什麼不同，因此做了以下的統計，分成「各組」和「相同數字一起（1,11,111 加在一起）」兩部分。我們驚訝的發現，分組之後各組的成長率仍維持在 1.3...左右，而各組數佔總組數的比例也漸漸趨向固定，詳細的統計數據請參考【附件二】及【附件三】。

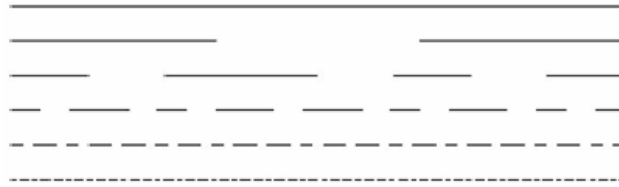
由於開始的幾列成長並不穩定，因此「各組成長率」是由第十九列開始統計，「佔總組百分比」由第十二列開始統計，「同數字成長率」和「同數佔總組百分比」由第十列開始統計。統計結果如下【表二】：

組別	1	11	111	2	22	222	3	33	全部
各組成長率	1.3075	1.3090	1.3249	1.3229	1.3579	1.3036	1.3115	1.4061	1.3108
佔總組百分比	14.10%	20.76%	7.16%	20.86%	6.92%	4.13%	23.71%	2.36%	100%
同數成長率	1.2991			1.3453			1.3034		1.3108
佔同組百分比	42.46%			31.37%			26.17%		100%

【表二】相同一組統計數據

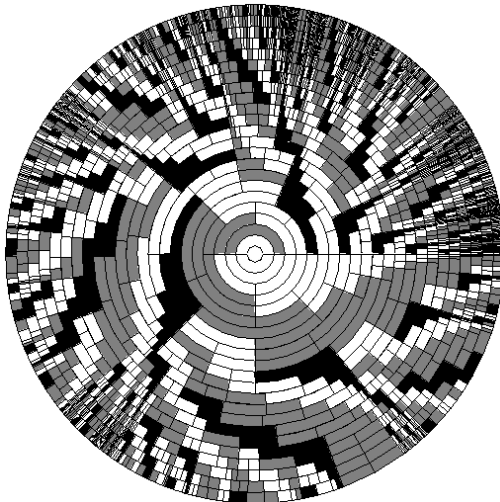
碎形

除了我們研究的外觀數列之外，還有另外一個稱為「Ana」的數列，其產生和外觀數列有異曲同工之妙。這個數列由「a」起始，第二列用英文描述第一列：an a（一個 a），因此是「ana」；第三列再描述第二列：an a, an n, an a，因此是「anaannana」，依此類推。（關於此數列相關的研究，請見【參考資料八】。）這個數列可以用碎形的方式畫出，用黑色表示 a、白色表示 n，就可得到如下的【圖一】：



【圖一】 Ana 數列的碎型圖

能把數字轉化為碎形，實在是相當有趣的連結！因此我們也想試試外觀數列是否能構成碎形。研究碎形的結構，可以更了解數列的組成，進而達到找出一般項的終極目標。例



如著名的 Koch Curve【參考資料七】即可用 L-system【參考資料四】來表示，研究它的 L-system 演化規則就相當於研究碎形的圖形本身。如果能將外觀數列以類似的方式表示，那麼就可以研究它的產生規律，加以推展。

然而碎形最強調的是「自身相似性」，我們的外觀數列雖並非沒有自身相似性，但卻過於複雜，而難以直接構成規則簡單的碎形，也無法直接以 L-system 或類似的系統加以表示。因此我們必須改良 L-system 等表示法，或將數列加以變化，找出可能的模式。

然而碎形最強調的是「自身相似性」，我們的外觀數列雖並非沒有自身相似性，但卻過於複雜，而難以直接構成規則簡單的碎形，也無法直接以 L-system 或類似的系統加以表示。因此我們必須改良 L-system 等表示法，或將數列加以變化，找出可能的模式。

【圖二】外觀數列的環狀碎型圖 我們在 Mario Hilgemeier 於 1997 年發表有關外觀數列的一篇文章【參考資料六】中看到如上的【圖二】。

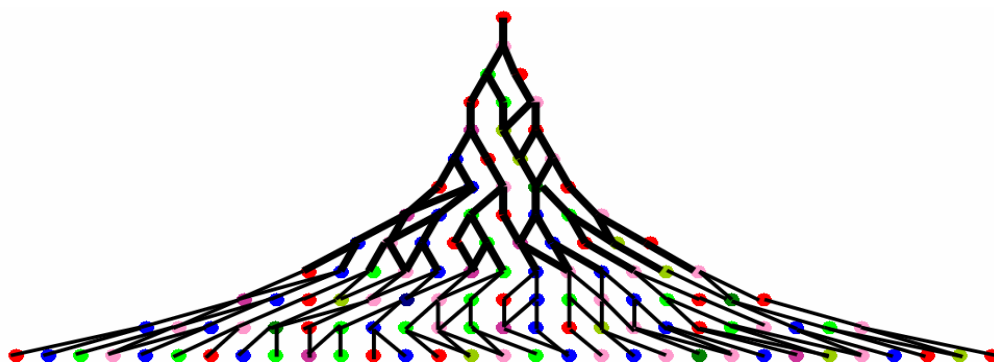
這張圖是依照數列本身畫成的，白色代表 1、灰色代表 2、黑色代表 3。最內圈的是第一列，往外則是它所產生的數字。每串數字產生的另一串數字就直接等分它所佔的比例——舉例來說，222→32，此時 32 就直接由 222 所在的圓周向外畫。

這個看起來像太陽的圖騰雖然仍有些複雜，但頗有「不斷細分」和「自身相似」的感覺，可算是一種製造碎形的方式。

後來我們有幸能和 Hilgemeier 先生連絡上，他是一個德國的電機工程師，對於我們的來信相當熱心地回覆，給了我們很大的幫助。一次在我們詢問他有關碎形畫法時，他的回覆是：第一種就是用他上圖這樣的畫法；第二種是利用 Conway 的 92 元素畫樹狀圖（後面會再提到 Conway 及他的研究）；第三種則要靠我們自己想了！

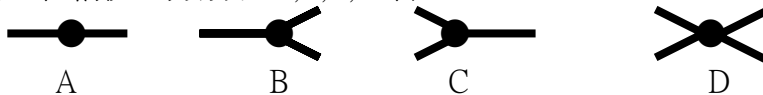
晝夜苦思的結果，我們想到了另一種畫法，這必須借助「相同數字一組」的分組方式。把每一列的分組依序排出，為方便繪圖將其置中，再將一組產生下一列哪組連起來。舉例來說，第四列 1 2 11 → 111 22 1，其中第四列的 1 產生第五列 111 中的前 2 個 1，便將其連到 111 這組；而 2 產生的 12，分別是第五列 111 中最後一個 1 和後面 22 的第一個 2，便

將2連到111和22兩組。依此類推，便得到如【圖三】的樹狀圖：



【圖三】相同一組樹狀圖

其中每個點代表一個「相同數字」的組，原始的圖來自(2)相同的一組的圖。這些點可能有四種情況，分別以A,B,C,D名之：



例如1前面只可能有一根樹枝，而產生11也只有一個樹枝向外連出，因此屬於A；而33則可能由3YYY → 133Y產生，此情況屬於D。下表是分析各組分別屬於何者的結果：

【表三】樹狀圖的各種情況

1	A	2	B	3	B
11	B 或 D	22	A 或 C	33	D
111	D	222	D		

其中B,D兩種都會連出去2根樹枝，而A,C則只會連出1根。由此可以推算出第n列和第n+1列之間的樹枝數 $= (A_n + C_n) \times 1 + (B_n + D_n) \times 2 = \text{總 } n \times 2 - (A_n + C_n) \times 1$ ，其中 A_n 表第n列中屬於A的組之個數。這個情況下 $(A_n + C_n)$ 就是這一系列中1和22的組數。

又因為A,B前面都是1根樹枝，而C,D前面是兩根樹枝，故也可以由第n+1列推算出第n列和第n+1列之間的樹枝數 $= (A_n + B_n) \times 1 + (C_n + D_n) \times 2$ 。不過這種分法比較複雜，因為有些組可能是B或D，不容易區分開來，因此由第n列推應該比較容易的。

有趣的是，前十幾列中，第n和n+1列之間的樹枝數，約等於這兩列的組數相加，誤差在10之內；不過到了第20列之後誤差就越來越大。這究竟是巧合還是有其他數學解釋？我們尚在研究中。

此數狀圖，雖無法直接呈現出一般性，但卻提供了另一看外觀數列的觀點，值得參考。

(二) 重複性

1. 首端重複性

仔細觀察每一直行，以第一行為例，可觀察到從第四列「1」的起，和第五列的「1」、第六列的「3」，再之後的第七~九列、十~十二列……，不斷的重複出現，有每三個一循環的重複性。【圖四】列出了由首端對齊的數列有重複性的部份。

3.中間無重複性部分

```

1
11
21
1211
111221
312211
13112221
1113213211
31131211131221
13211311123113112211
11131221133112132113212221
3113112221232112111312211312113211
1321132132111213122112311311222113111221131221
111312211312111312311211131122211213211321322113312221133112211
311311222113111231131112132112311321322112111312211312111322212311322113
132113213221133112132113311211131221121321131211132221123113112221131112
111312211312111322212321121113122123211231131122211211131221131112311332
311311222113111231133211121312211231131122111213122112132113213221123113
132113213221133112132123123112111311222112132113212231121113112221121113
111312211312111322212321121113121112131112132112311321322112111312211312
311311222113111231133211121312211231131112311211133112111312211213211312

```

【圖六】外觀數列的重複性

首端重複部分和尾端重複部分之間還存在一塊無重複性的區域，如【圖六】白色部分。

(三) 裂縫

1.裂縫理論

所謂「裂縫」，就是兩個數字間不會互相影響，所產生的下一列之後也皆不會互相影響，意即可以視為兩大個互相不影響的數列。

將1、2、3三個數字兩兩配對的組合共有九種，可證明出只有由23開始演化會產生裂縫證明：

```

      23
     1213
    11121113
    31123113
   132112132113
  11131221121113122113

```

特例：有一種方式可以製造出破壞三循環的組合。

舉例：

```

      23111
     121331
    1112112311
   311221121321
  132122211211131211

```

同理可證23222。

先討論3，可以發現由3開頭而演化的數，前面可以自成三循環，最重要的是，這個循環第一個數字只有1和3，所以只要在前面加一個不為1或3的數，也就是2，它

組方式來看，第一種情形為 12 33，已經證明過用兩個一組的分組方式不會有 33 這種組合，因此不會發生；第二種情形為 23 31，其實也不可能發生，這可使用上推法來解釋：2331 的上一列應為 33111，同樣以兩個一組的分組方式來看，不可能發生 33 11 1，若是 3 31 11 的情形，則 31 11 的部分上一列應為 1111，而我們在「基本性質與組成」中的「回答書中問題」部分中已經證明過，不會出現 1111 這種情形。

由 2 開始演化的外觀數列最後一位一定都是 2，在演化過程中可以看出，23 間必為一裂縫，但也會發生 21 的情形，以下列出 21 之間為裂縫的所有情形：

2	1	B	C
---	---	---	---

（這裡只取 2 後面接 3 位數字來討論，是因外觀數列不會出現 4，因此不用考慮後 4 位以上的數字所影響的情形）

因第一位 2 之後不能再出現 2，因此可分為兩種情形：

(1) $1 \neq B, B \neq C$ ，有 2123、2132、2131

$B \neq C$ 的原因為，由 2 1BB 繼續演化下去的話，會產生 1112 212B，彼此之間會互相影響，因此不是一裂縫。且不會有 2121 的組合，由兩個一組的方式來看，21 21 的上一列為 1111，不可能出現；而 X2 12 1 的上一列為「X 個 2、1 個 2……」，在產生下一列時應該會合併敘述，因此不會發生。

(2) $1=B=C$ ，有 2111

至於 2123、2132、2131、2111 這四種裂縫的來源和 23 有沒有關係？我們回到外觀數列的本身去尋找，發現數列中第一個出現的裂縫為 2132，接著為 2111，然後產生 23，這三組間不斷的循環。而 2131，在數列中是由第 18 列出現，由兩個一組的方式分組為 2 13 1，其上一列一定有 23，因此其來源為 23；2123 則在第 12 列第一次出現，其後產生 2111 → 23 → ……，不斷循環。

最後證明在 3 之後放任何數都不會影響其演化：

2 31	2 32
12 1311	12 1312
1112 111321	1112 11131112
3112 31131211	3112 31133112
132112 13211311221	132112 1321232112
1113122112 1113122113312211	1113122112 111312111213122112
再繼續演化下去依舊不會破壞三個一循環的性質	再繼續演化下去依舊不會破壞三個一循環的性質

以下為其他數字分組的證明：

1 2	3 1	(非為 2123、2132、2131、2111 的情形下)
11 12	13 11	
3112	1113 21	2 1
證明了 12、11 不可能為裂縫，13 同理，只是將第一列的 2 換為 3。	3113 1211	12 11
	132113 111221	1112 21
	111312211 3 3 12211	312211
	3113112221 23 112221	證明了 21、22 不可能是

<p>接著製造 2 後面接 2，使之後演化的數列第一位有 2，嘗試製造裂縫：</p> <p style="text-align: center;">1 221 11 2211 21 2221 1211 3211 111221 1 1 31221</p> <p>依然非為一裂縫</p>	<p>證明了 31、32、33 不可能是裂縫。</p>	<p>裂縫。</p>
---	-----------------------------	------------

因此得出一個結論：當 23 後方不為 3 個一樣的數字時，即可視為一裂縫；此外還有 2123、2132、2131、2111 四種裂縫，彼此間存在著演化關係。

2. 康威的 92 元素

我們研究裂縫最重要的目的就是將數列分割成互不影響的數個部分，當我們證明完所有裂縫可能出現的情形之後，上網查資料發現了康威有做一項相關研究，想法同樣為裂縫（splits）的概念，他將數列分成了 92 個長短不一的單位，稱之為元素（elements），並以化學週期表之 92 個元素來命名。他認為整個外觀數列都可由這 92 個元素組成。此外，康威所定的 92 個元素，彼此之間也有著演化的規律。有關康威的研究，請見【參考資料六】。

這份研究證實了我們有關於裂縫的想法是正確的，雖然康威已經列出了構成數列的最基本元素，但我們還是可以加以利用，參考其演化規則來找出數列的一般項。

三、一般性

要找出一般性，必須同時利用所觀察到的重複性以及裂縫分割出元素的概念。

（一）首端重複區塊中的一般性

1. 首端重複性的解釋

擷取出數列首端重複區塊（如 p.7【圖六】粉紅色部分），得到【圖七】。

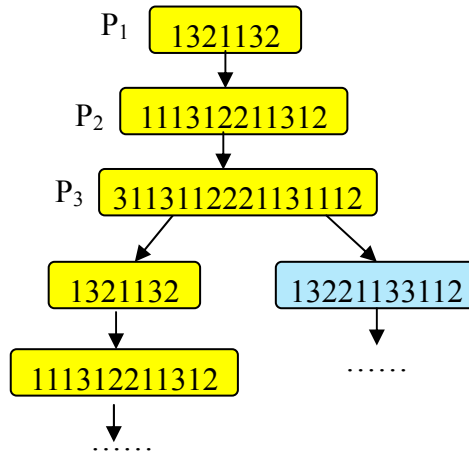
```

01 1
02 11
03 21
04 1211
05 111221
06 312211
07 13112221
08 1113213211
09 31131211131221
10 132113111123113112211
11 11131221133112132113212221
12 3113112221232112111312211312113211
13 13211321321111213122112311311222113111221131221
14 1113122113121113112221121321132132211331222113112211
15 31131122211311123113111213211231132132211211131221131211132221
16 13211321322113311213211331121113122112132113121113222112311311
17 11131221131211132221232112111312212321123113112221121113122113
18 31131122211311123113321112131221123113112211213122112132113211321
19 1321132132211331121321231231121113112221121321123113211231132132211211
20 11131221131211132221232112111312111213111213211231132132211211
21 31131122211311123113321112131221123113111231121113311211131221
22 13211321322113311213212312311211131122211213211331121321123123
23 11131221131211132221232112111312111213111213211231132132211211
24 31131122211311123113321112131221123113111231121113311211131221

```

【圖七】首端重複一般性

圖中黃色部分為每列中第一個完整元素，由第十三列的 1321132 開始，演化情形如下：



【表四】首端一般性演化說明

如【表四】所示，「1321132」、「1113122211312」、「3113112221131112」三元素彼此之間會不斷循環，無論從其中哪一個開始，經過三次演化之後都會再出現自己。為了一般性的討論方便，我們將它們作如下的命名——這裡 P 是取 primary(首位)的第一個字母：

$P_1=1321132$
 $P_2=1113122211312$
 $P_3=3113112221131112$

由此可知，第十三、十六、十九、 \dots 、 $3t+1$ ($t=4,5,6\dots$)列的第一個元素都是 P_1 ，第十四、十七、二十、 \dots 、 $3t+2$ ($t=4,5,6\dots$)列的第一個元素都是 P_2 ，第十五、十八、二十一、 \dots 、 $3t+3$ ($t=4,5,6\dots$)列的第一個元素都是 P_3 ，因此我們令列數 $n \equiv k \pmod{3}$ ， $k=1,2,3$ ，就可以確定這一系列的第一個元素為 P_k 。

由 P_3 繼續演化下去，會產生 P_1 以及「13221133112」這個元素，由於 $P_1 \rightarrow P_2 \rightarrow P_3 \rightarrow P_1$ 的三循環現象一直持續，所以第十六、十九、 \dots 、 $3t+1$ 列的第二個元素都會出現「13221133112」。為了討論方便，分別將它們作以下的命名——這裡 S 是取 secondary(次位)的第一個字母：

$S_1=13221133112$
 $S_2=11132221232112$
 $S_3=311332111213122112$

由於第十九、二十二、 \dots 、 $3t+1$ 列的第二個元素都為 S_1 ，因此皆會出現同樣演化的情形（如紫色部分、綠色部分）。這即是重複性產生的解釋——因每一列的第一個完整元素有三循環現象，使由 P_1 之後所演化出的數列有三循環的重複性。

2. 首端重複區塊中的一般性

我們另外將元素演化的規律定義如下：

$f^x(S_k)$ ： S_k 演化 x 次

其中可知道 $f^0(S_1)=S_1$ ， $f^1(S_1)=S_2$ ， $f^2(S_1)=S_3$ 。

看元素之間的演化關係，【圖七】中所標示出的四種顏色，每一種顏色之間皆為裂縫，也就是說，彼此之間的演化不受干擾：

第十三列的第一個元素 P_1 (黃色部分)，演化成第十四列的 P_2 ，再演化成第十五列的 P_3 ，後又演化回自己 P_1 ，演化情形皆在黃色部分。

第十六列的第二個元素 S_1 (藍色部分)，到了第十七列演化成爲 S_2 (藍色部分)，第十八列演化成爲 S_3 (藍色部分)，到了第十九列演化出的「132123123112111311222112」是 S_1 經演化 3 次的結果，因此我們將它記爲 $f^3(S_1)$ ；同樣的，第二十列的藍色部分，是 S_1 演化四次，也就是 S_2 演化三次的結果，我們將它記爲 $f^3(S_2)$ ，而第二十一列的藍色部分是 S_3 演化三次結果，所以記爲 $f^3(S_3)$ 。

由於重複性的三循環現象，我們可將上述藍色部分元素演化的規律向下平移三列至粉紅色部分，或向下平移六列至淺綠色部分，依然會發生一樣的演化情形。

結合了上述重複性以及裂縫的想法，我們可以將首端重複區塊的每一列都用一般式表示出來。以第十九列爲例：

19 132113213221133112132123123112111311222112132113

因 $19 \equiv 1 \pmod{3}$ ，所以第十九列的首端重複部分元素依次爲 P_1 (黃色部分)、 S_1 (粉紅色部分)、 $f^3(S_1)$ (藍色部分，由第十六列藍色部分 S_1 演化三次而來)，其後的每一列中的元素都有一樣的排列次序：

$$P_k + f^0(S_k) + f^3(S_k) + f^6(S_k) + \dots + f^x(S_k), x=0, 3, 6, \dots$$

這裡的「+」指的並非加法，而是將得到的數字串依順序排列。

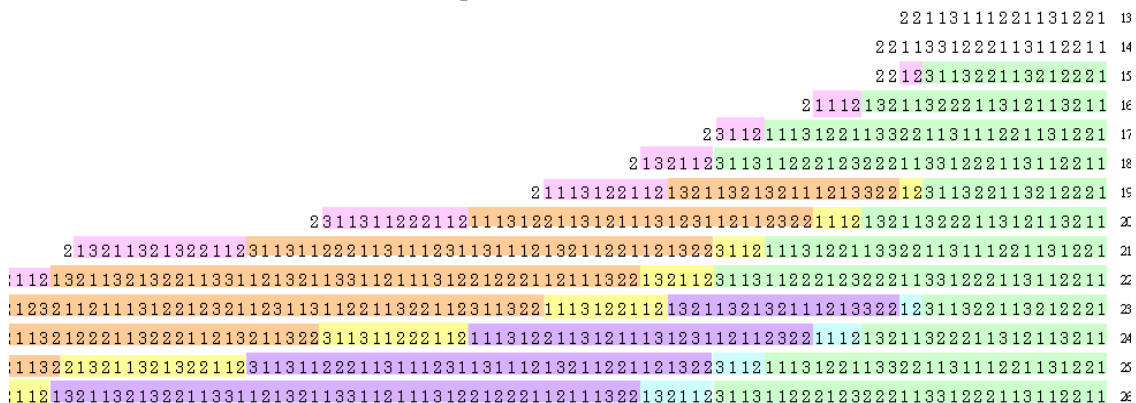
其中，第十六列~十八列的一般式爲 $P_k + f^0(S_k)$ ，第十九列~二十一列的一般式爲 $P_k + f^0(S_k) + f^3(S_k)$ ，第二十二列~二十四列的一般式爲 $P_k + f^0(S_k) + f^3(S_k) + f^6(S_k)$ ，以此類推，可以找到 $x = \left\lfloor \frac{n-16}{3} \right\rfloor \times 3$ 。因此導出了首端重複區塊中第 n 列的一般性通式：

$$P_k + \sum_{i=0}^{\left\lfloor \frac{n-16}{3} \right\rfloor \times 3} f^i(S_k), n \geq 16$$

(二) 尾端重複區塊中的一般性

1. 尾端重複性的解釋

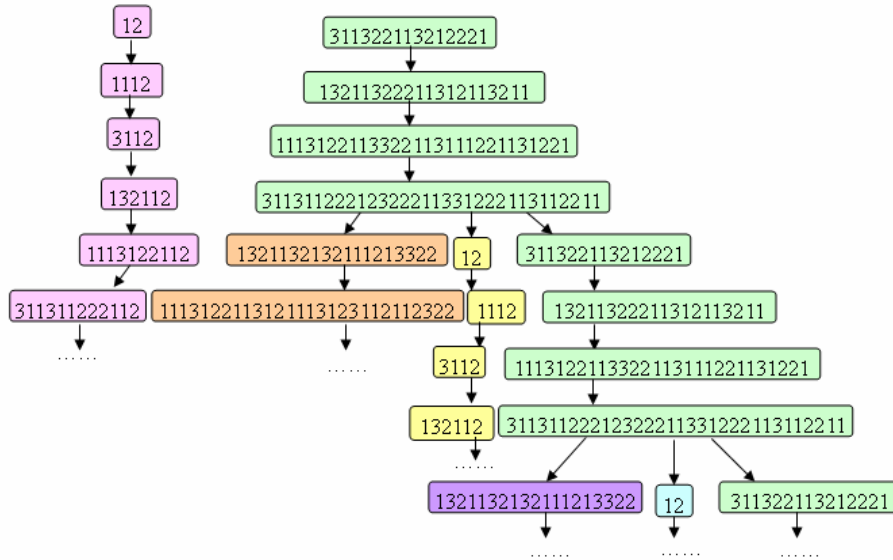
擷取出數列尾端重複區塊 (如 p.7【圖六】淺藍色部分)，並向右對齊，得到【圖八】。



【圖八】尾端重複一般性

和首端重複用同樣的概念，但因尾端重複性較爲複雜，所以要由第十五列由尾端數來

第一個完整元素「311322113212221」及第二個「12」開始，演化情形如下：



【表五】尾端一般性演化說明

定義淺綠色部分如下：(由於 $15 \equiv 3 \pmod{4}$ ，故定義第 15 列的綠色部分為 P'_3)

$P'_3=311322113212221$
 $P'_4=13211322211312113211$
 $P'_1=1113122113322113111221131221$
 $P'_2=31131122212322211331222113112211$
 演化關係： $P'_3 \rightarrow P'_4 \rightarrow P'_1 \rightarrow P'_2 \rightarrow P'_3$

如圖所示， $P'_3 \rightarrow P'_4 \rightarrow P'_1 \rightarrow P'_2 \rightarrow P'_3$ 四個元素彼此之間會不斷循環，無論從其中哪一個開始，經過四次演化之後都會再出現自己。

由 P'_2 繼續演化，會產生橘色和黃色的部分，定義黃色部分如下：

$S_{A3}=12$
 $S_{A4}=1112$
 $S_{A1}=3112$
 $S_{A2}=132112$
 演化關係： $S_{A3} \rightarrow S_{A4} \rightarrow S_{A1} \rightarrow S_{A2}$

定義橘色部分如下：

$S_{B3}=1321132132111213322$
 $S_{B4}=1113122113121113123112112322$
 $S_{B1}=31131122211311123113111213211221121322$
 $S_{B2}=132113213221133112132113311211131221222112111322$
 演化關係： $S_{B3} \rightarrow S_{B4} \rightarrow S_{B1} \rightarrow S_{B2}$

【圖十】p 始數列首端一般性元素（紅色劃線區塊為首端重複區塊）

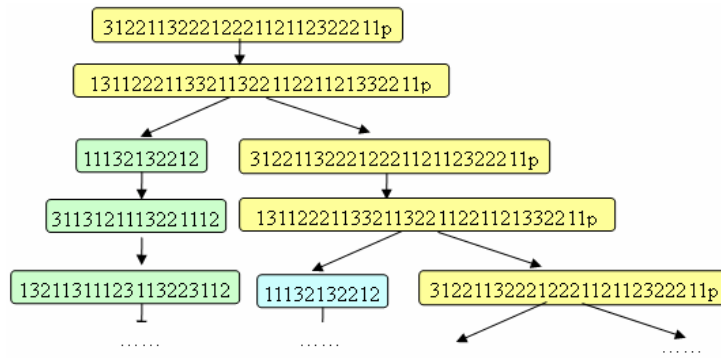
尾端

擷取出 p 始數列數列尾端重複區塊，得到【圖十一】。



【圖十一】p 始數列尾端一般性元素

圖中的黃色部分為每一列中的由尾端數來的第一個完整元素，由第十九列的 31221132221222112112322211p 開始，演化情形如下：



如圖所示，黃色部分中二個元素彼此之間會不斷循環。將它們作如下的命名：

$$Q_1=31221132221222112112322211p$$

$$Q_2=1311222113321132211221121332211p$$

演化關係： $Q_2 \rightarrow Q_1 \rightarrow Q_2$

由 Q_2 繼續演化下去，會產生 Q_1 及綠色部分，定義如下：

$$T_1=11132132212$$

$$T_2=3113121113221112$$

演化關係： $T_1 \rightarrow T_2$

由於 $Q_2 \rightarrow Q_1 \rightarrow Q_2$ 不斷二循環，因此圖中綠色、藍色、粉紅色等部分都會相同，此為 p 始尾端的二循環現象。以第二十三列為例：

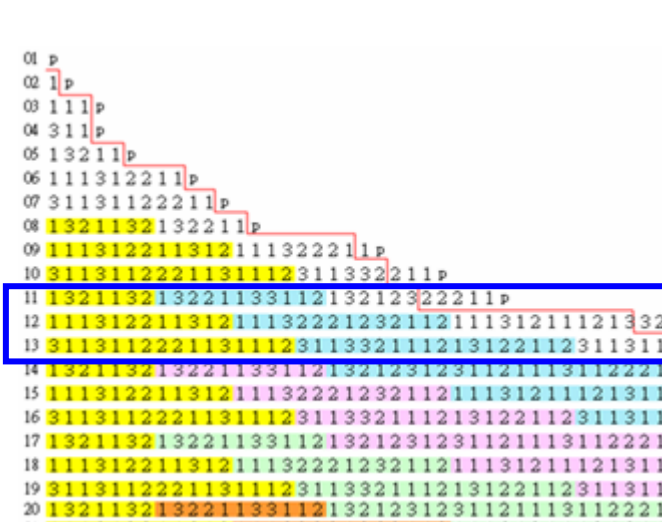
21113122112132113111231132231121113213221231221132221222112112322211p 23

因 $23 \equiv 1 \pmod{2}$ ，所以第二十三列的尾端重複部分元素由尾端開始排列依次為 Q_1 （黃色部分）、 T_1 （藍色部分）、 $f^2(T_1)$ （綠色部分，由第二十一列綠色部分 T_1 演化兩次而來），其後的每一列中的元素都有一樣的排列次序： $(n \equiv m \pmod{2})$

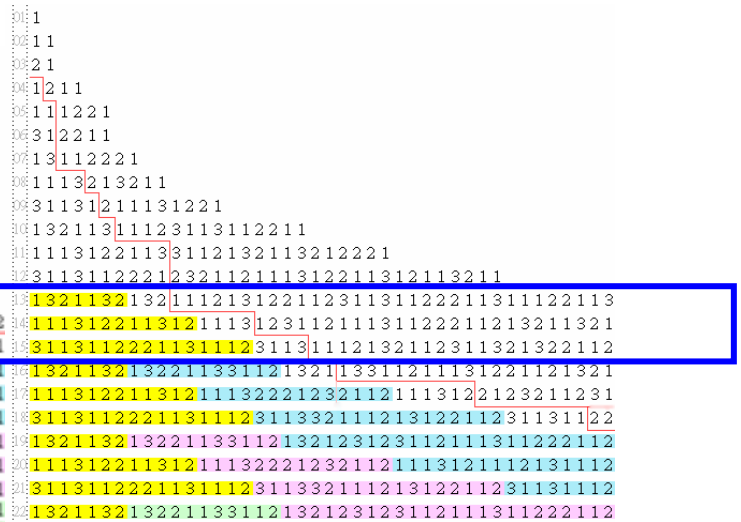
$$f^x(T_m) + \dots + f^4(T_m) + f^2(T_m) + f^0(T_m) + Q_m, \quad x=0,2,4,\dots$$

這裡的「+」指的並非加法，而是將得到的數字串依順序排列。

其中，第十九列、二十列的一般式為 $f^0(T_m) + Q_m$ ，第二十一列、二十二列的一般式為 $f^2(T_m) + f^0(T_m) + Q_m$ ，第二十三列、二十四列的一般式為 $f^4(T_m) + f^2(T_m) + f^0(T_m) + Q_m$ ，以此類推，



【圖十】p 始數列首端一般性元素

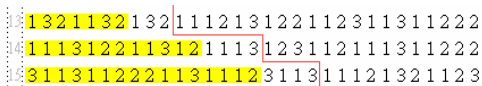


【圖七】1 始數列首端重複區塊

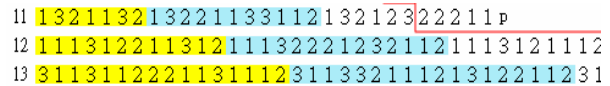
如此一來，【圖十】中 p 始的粉紅色部分便會和【圖七】中 1 始的藍色部分相疊（如深藍色框框標示部分），p 始的淺綠色部分則會對到 1 始的粉紅色部分，依此類推。那麼 p 始的藍色部分便超出了 1 首端重複元素的範圍。

接下來就要解釋為什麼 1,p 相疊之相同區塊會和 1 首端重複區塊相同。如上兩圖所示，p-08,p-09,p-10 重疊後分別對到 1-10,1-11,1-12，其相同的部分如【圖七】紅色所標示。（【圖十】的紅色是 p 始數列本身首端重複部份，與目前討論無關。）

如果把 1 始的第四列（1-04）和 p 始的第二列（p-02）對齊，即 1-n 會對到 p-(n-2)，則 1 始的第一組黃色一般性元素（1-13,1-14,1-15）事實上並不會對到 p 始的第一組黃色元素，而會對到其第二組黃色元素（p-11,p-12,p-13）。簡言之，p 始的黃色元素會比 1 始的早一個循環。

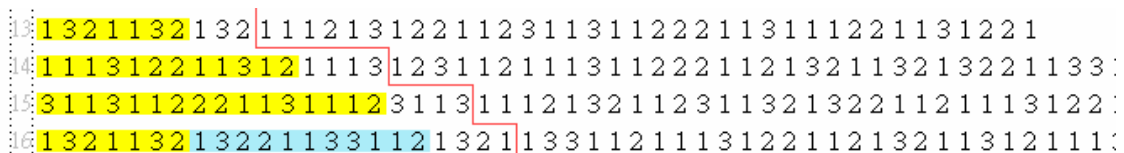


【圖十三-1】1-13,1-14,1-15



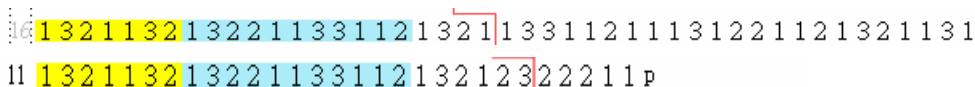
【圖十三-2】p-11,p-12,p-13

再看 1 始數列本身的重複性，如【圖十四】。比較 1-13 和 1-16，他們相同的部分也就是 1-13 的首端重複區塊（1321132132）。



【圖十四】比較 1-13 與 1-16 相同部分

最後看【圖十五】的 p-11 和 1-16，可發現這兩列的黃色加藍色部分是完全相同的。



【圖十五】比較 1-16 和 p-11

而這裡的黃色和藍色兩部分加在一起，比 1-13 的首端重複區塊（紅線內範圍）還要長，也就是可以涵蓋它。因此，

由於 1-16 黃+藍 = p-11 黃+藍 > 1-13 紅線內範圍
 所以 1-16 和 1-13 相同部份 = p-11 和 1-13 相同部份
 （1 始首端重複區塊） （1,p 相疊相同區塊）

這便可以說明為什麼 1,p 相疊之相同區塊會和 1 始首端重複區塊完全一模一樣了。

（二）兩個一組始

做完 1 始和 p 始的外觀數列，我們便想試試以分組方法中「兩個一組」開始的外觀數列。「兩個一組」的分法共有八組：11、12、13、21、22、23、31、32。

由於 1 始外觀數列的前幾列為 1,11,21,1211,⋯，故以「11」和「21」兩組開始的外觀數列，和 1 始的外觀數列除數列的標號不同之外，其實是一樣的。

而 2 始的數列前幾列為 2,12,1112,⋯，所以「12」始的外觀數列和 2 始的也只在列數的標號，後續演化情形是一樣的。同理 3 始的前幾列為 3,13,1113,⋯，故「13」始和 3 始也有此情況。以「12」和「13」兩者為首列的外觀數列持續發展，皆會和 p 始的外觀數列演化情形相同（只有最尾端的 p 不同）。

「22」持續演化下去還是 22，每一列都是一模一樣的。

前面裂縫理論有提到，「23」中間即是會出現一個裂縫，2 和 3 繼續演化互不干擾，因此「23」始的數列可以視為一個「2 始數列」和一個「3 始數列」並在一起，同時演化。

在看過 11、12、13、21、22、23 的情況後，我們緊接著研究「31」始、「32」始的數列。

1. 31 始之外觀數列一般性

```

01. 31
02. 1311
03. 111321
04. 31131211
05. 132113111221
06. 1113122113312211
07. 311311222123112221
08. 1321132132111213213211
09. 111312211312111312311211131211131221
10. 311311222113111231131112132112311311123113112211
11. 132113213221133112132113311211131221121321133112132113212221
12. 111312211312111322212321121113122123211231131122211211131221232112111312211312113211
13. 31131122211311123113321112131221123113112211121312211213211321322112311311221112131221131122113112211
14. 132113213221133112132123123112111311222112132113212231121113122113121132221121321132122311211131122211
15. 11131221131211132221232112111312111213111213211231132132211211131221131211221321123113112221131112311331
16. 3113112221131112311332111213122112311311123112111331121113122112132113121113222112311311222113111221121321121331
17. 1321132132211331121321231231121113112221121321133112132112312321123113112221121113122113111231133221121321132132211
18. 1113122113121113222123211211131211121311121321123113213221121113122123211211131221121311121312211213211321322112311
19. 3113112221131112311332111213122112311311123112111331121113122112132113121113222112311311221112131221123113112221121
20. 1321132132211331121321231231121113112221121321133112132112312321123113112221121113122113111231133221121321132122311
21. 1113122113121113222123211211131211121311121321123113213221121113122123211211131221121311121312211213211321322112311

```

【圖十六】31 始數列首端一般性元素（紅色劃線區塊為首端重複區塊）

31 始的數列首端有三循環的重複現象，如圖紅線內的範圍。由此也可找出一般性元素，定義如下：

$$\begin{aligned}
 P_3 &= 111312211312 \\
 P_1 &= 3113112221131112 \\
 P_2 &= 132113213221133112 \\
 S_3 &= 11132221232112 \\
 S_1 &= 311332111213122112 \\
 S_2 &= 132123123112111311222112
 \end{aligned}$$

根據與之前1始類似的方法，可推出第n列的一般性通式如下：

$$P_k + \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n-9}{3} \rfloor \times 3} f^i(S_k), \quad n \geq 9, \quad n \equiv k \pmod{3}$$



【圖十七】31 始數列尾端一般性元素（紅色劃線區塊為尾端重複區塊）

31 始數列的尾端重複為四循環，如紅線標示範圍。一般性元素定義如下：

$$\begin{aligned}
 P'_3 &= 311322113212221 \\
 P'_4 &= 13211322211312113211 \\
 P'_1 &= 1113122113322113111221131221 \\
 P'_2 &= 31131122212322211331222113112211 \\
 S'_3 &= 132113213211121332212 \\
 S'_4 &= 11131221131211131231121123221112 \\
 S'_1 &= 311311222113111231131112132112211213223112 \\
 S'_2 &= 132113213221133112132113311211131221222112111322132112
 \end{aligned}$$

可推出第n列的一般性通式如下：

$$f^x(S'_r) + f^{x-4}(S'_r) + \dots + f^4(S'_r) + f^0(S'_r) + P'_r, \quad x = \left\lfloor \frac{n-15}{4} \right\rfloor \times 4, \quad n \geq 15, \quad n \equiv r \pmod{4}$$

擷取 31 始數列的第 15 列如下：

111312211312111322212321121113121112131112132112311321322112111312211312112213211231132132211211131221

1312111322212311322113212221

故定義中央序列 M 如下，並可推導出第 n 列一般性：

$$M=111312211312112213211231132132211231131122211311123113322112$$

$$1113122113121122132112311321322112111312211312111322212$$

第 n 列中央無重複部分 = $f^{n-15}(M)$, $n \geq 15$

2. 32 始之外觀數列一般性

```

01.32
02.1312
03.11131112
04.31133112
05.1321232112
06.111312111213122112
07.311311123112111311222112
08.1321133112132112311321322112
09.111312212321121113122112132113121113222112
10.31131122111213122112311311222112111312211311123113322112
11.13211321223112111311222112132113213221123113112221133112132123222112
12.1113122113121122132112311321322112111312211312111322211213211321232112111312
13.31131122211311122122111312211213211312111322211231131122211311123113322112111312
14.13211321322113312211223113112221121113122113111231133221121321132132211331121321
15.1113122113121132221231122212213211321322112311311222113311213212322211211131221
16.311311222113111231133211121321321221113122113121113222112132113213221232112111312
17.13211321322113311213212312311211131211131221223113112221131112311332211211131221
18.11131221131211132221232112111312111213111213211231131112311311221122132113213221
19.31131122211311123113321112131221123113111231121113311211131221121321133112132113
20.13211321322113311213212312311211131122211213211331121321123123211231131122211211
21.11131221131211132221232112111312111213111213211231132132211211131221232112111312
22.31131122211311123113321112131221123113111231121113311211131221121321131211132221
23.13211321322113311213212312311211131122211213211331121321123123211231131122211211
24.11131221131211132221232112111312111213111213211231132132211211131221232112111312
25.31131122211311123113321112131221123113111231121113311211131221121321131211132221
    
```

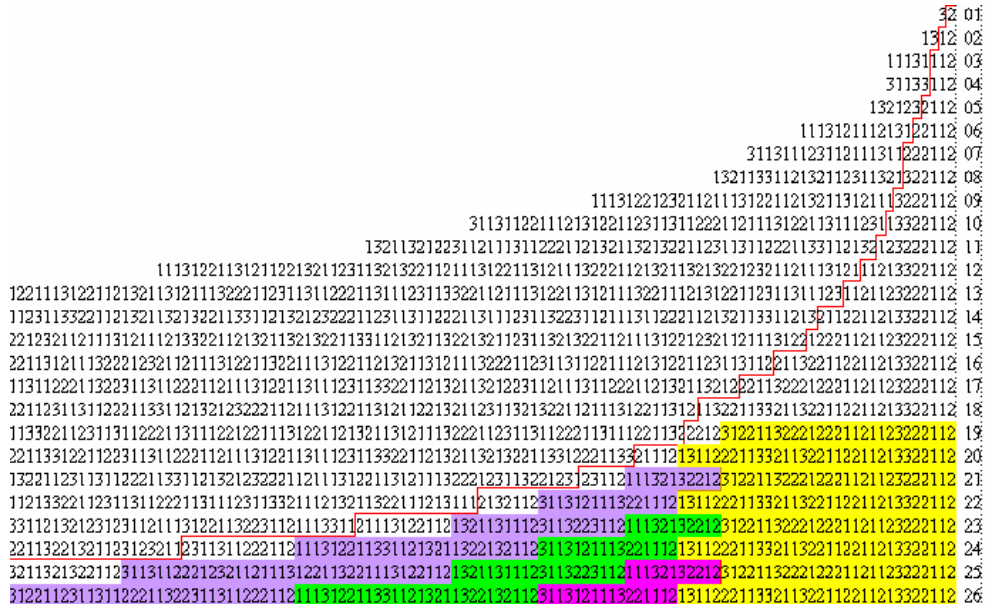
【圖十八】32 始數列首端一般性元素（紅色劃線區塊為首端重複區塊）

32 始的數列首端有三循環的重複現象，如圖紅線內的範圍。由此也可找出一般性元素，定義如下：

$P_2=1321132$	$S_2=13221133112$
$P_3=111312211312$	$S_3=11132221232112$
$P_1=3113112221131112$	$S_1=311332111213122112$

根據與之前 1 始類似的方法，可推出第 n 列的一般性通式如下：

$$P_k + \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n-14}{3} \rfloor \times 3} f^i(S_k), \quad n \geq 14, \quad n \equiv k \pmod{3}$$



【圖十九】32 始數列尾端一般性元素（紅色劃線區塊為尾端重複區塊）
32 始數列的尾端重複為二循環，如紅線標示範圍。一般性元素定義如下：

$$P'_1 = 312211322212221121123222112 \quad S'_1 = 11132132212$$

$$P'_2 = 13112221133211322112211213322112 \quad S'_2 = 3113121113221112$$

可推出第 n 列的一般性通式如下：

$$f^x(S'_r) + f^{x-2}(S'_r) + \dots + f^2(S'_r) + f^0(S'_r) + P'_r, \quad x = \left\lfloor \frac{n-19}{2} \right\rfloor \times 2, \quad n \geq 19, \quad n \equiv r \pmod{2}$$

擷取 32 始數列的第 19 列如下：

31131122211311123113321112131221123113111231121113311211131221121321133112132113
 21222122111312211312111322212321121113121112133221121321132132211331121321132213
 2112311321322112111312212321121113122112112322211231131122211311123113321112
 13122112311311123112111331121113122112132113121113222112311311221112131221123113
 11221132211221121332211211131221131211132221232112111312111213111213211231132132
 21121113122113121113222113221113122113121113222112132113213221232112111312111213
 32211231131122211311122122111312211213211312111322211231131122211311122113222123
 12211322212221121123222112

故定義中央序列 M 如下，並可推導出第 n 列一般性：

$$M = 3113111231121113311211131221121321133112132113212221221113122113121113222123211211131211121332211213211321322113311213211322132112311321322112111312212321121113122122211211232221123113112221131112311332111213122112311123112111331121113122112132113112211121312211231131122113221122112133221121113122113222123211211131211121312211231131122113221122112133221121113122113222123211211131221131211132221121321132132212321121113121112133221123113112221131112212211131221121321131211132221123113112221131112211322212$$

第 n 列中央無重複部分 = $f^{n-19}(M)$ ， $n \geq 19$

附帶一提，前述分組方法分爲「兩個一組」和「相同一組」，而這兩者是有對應關係的，如下表：

1 → 11	22 → 22
11 → 21	222 → 32
111 → 31	3 → 13
2 → 12	33 → 23

因此，「相同一組」爲開頭的外觀數列和「兩個一組」始的數列，基本上是相同的。

伍、研究結果

一、基本性質

- (一) 外觀數列由 1,2,3 組成，最多是 111（三個 1）或 222（三個 2），不會出現 333，也不會出現 4。
- (二) 外觀數列的總位數呈指數成長，第 n 列的總位數約爲 $C\lambda^n$ ，其中 $C=1.567\dots$ ， $\lambda=1.30357726\dots$ ， λ 稱爲康威常數(Conway's Constant)。意即各列與前一列的總位數比約爲 1.3 \dots 。
- (三) 各列中，1,2,3 佔總位數的比例會趨於固定，1 約佔 50%，2 約佔 31%，3 約佔 19%。

二、分組

- (一) 當採取「相同一組」的分組方式時，各組數成長率接近 1.3 \dots ，總組數成長率亦接近 1.3 \dots 。
- (二) 各組佔總組數的比例會趨於固定，其數值請見下方表格。
- (三) 相同數字組成的組（例：1,11,111）合在一起算，其成長速率約爲 1.3 \dots 。
- (四) 相同數字組成的組，其佔總組數的比例會趨於固定。

組別	1	11	111	2	22	222	3	33	全部
各組成長率	1.3075	1.3090	1.3249	1.3229	1.3579	1.3036	1.3115	1.4061	1.3108
佔總組百分比	14.10%	20.76%	7.16%	20.86%	6.92%	4.13%	23.71%	2.36%	100%
同數成長率	1.2991			1.3453			1.3034		1.3108
佔同組百分比	42.46%			31.37%			26.17%		100%

- (五) 以相同一組的產生所化成的樹狀圖，其樹枝數約成 1.3 \dots 的指數成長。
- (六) 在第 1~20 列中，兩列之間的樹枝數約等於兩列組數的和。

三、重複性

- (一) 首端對齊的外觀數列，每隔 3 列的首端相同，具有三循環的重複性。
- (二) 首端具重複性的部分隨列數增加而增長，推測以 1.3 \dots 的速率指數成長。
- (三) 尾端對齊的外觀數列，每隔 4 列的尾端相同，具有四循環的重複性。
- (四) 尾端具重複性的部分隨列數增加而增長，推測以 1.3 \dots 的速率指數成長。

四、裂縫

- (一) 在裂縫兩邊的數字串，演化時分別獨立，不會相互影響。
- (二) 凡出現 23，只要不是 23111 或 23222，則在 2 和 3 中間必有一裂縫；另外還有 2123、2132、2131、2111 四種，彼此之間有演化關係。
- (三) 從裂縫分割，則外觀數列共可被切割出 92 種數字串，稱為康威的 92 元素(Conway's 92 elements)。

五、一般性

- (一) 要找出一般性，必須同時利用所觀察到的重復性以及裂縫分割出元素的概念。

- (二) 首端重復區塊第 n 列的一般性通式 $P_{k+\sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n-16}{3} \rfloor \times 3} f^i(S_k)$ ， $n \geq 16$ 。

- (三) 尾端重復區塊第 n 列的一般性通式

$$f^x(S_{Ar}) + f^{x-4}(S_{Br}) + f^{x-4}(S_{Ar}) + \cdots + f^4(S_{Br}) + f^4(S_{Ar}) + f^0(S_{Br}) + f^0(S_{Ar}) + P_r, x = \left\lfloor \frac{n-15}{4} \right\rfloor \times 4, n \geq 15$$

- (四) 中央無重復區塊第 n 列的一般性： $f^{n-15}(M)$ ， $n \geq 15$

六、非 1 始之外觀數列

- (一) 以 $p(p \in N, 2 \leq p \leq 9)$ 開始的外觀數列，除了在最尾端的 p 之外，其組成同樣為 1,2,3，不會出現 333，也不會出現 4。
- (二) 以 $p(p \in N, 2 \leq p \leq 9)$ 開始的所有外觀數列，除了在最尾端的 p 之外，其組成皆相同。
- (三) $1, p$ 相疊現象：以 $p(p \in N, 2 \leq p \leq 9)$ 開始的外觀數列，有一部分跟以 1 開始的數列相同，其相同的部分剛好就是以 1 開始的數列具有重復性的部分。
- (四) 兩個一組始之外觀數列中，11、21 始和 1 始數列是一樣的；12、13 始和 p 始數列相同；22 始的外觀數列每一列皆為 22；23 始之外觀數列可分成兩個 p 始數列；31、32 始的外觀數列也可分別找到一般性。

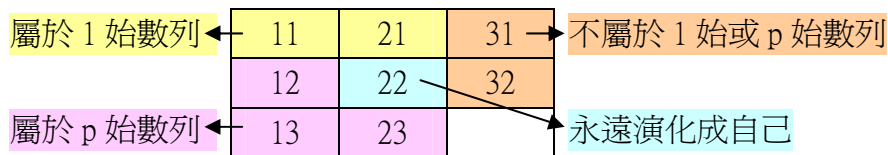
七、 p 始數列的一般性

- (一) 首端重復區塊第 n 列的一般性通式 $P_{k+\sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n-11}{3} \rfloor \times 3} f^i(S_k)$ ， $n \geq 11$ 。

- (二) 尾端重復區塊第 n 列的一般性通式 $f^x(T_m) + \cdots + f^4(T_m) + f^2(T_m) + f^0(T_m) + Q_m, x = \left\lfloor \frac{n-19}{2} \right\rfloor \times 2, n \geq 19$

- (三) 中央無重復區塊第 n 列的一般性： $f^{n-19}(M')$ ， $n \geq 19$

八、兩個一組始之外觀數列



陸、討論

一、各研究方法的比較

研究過程中，我們採取分組與碎形、重複性和 Conway 的 92 元素等方法。

分組與碎形的優點在於它能夠有效的轉化數列，將其分成較小的幾種數字組，或以圖像化的方式呈現。然而外觀數列很不容易研究的一點，在於它產生下一列的時候，並非每組數字互不干擾地產生各自的子代，而是左右相鄰的數字組會相互影響，這就是所謂的「與上下文相關 (context-sensitive)」。因此，分組或碎形產生下一列的方法就變得十分複雜。

92 元素可以有效的克服與上下文相關的問題，因為它是由裂縫分組，每個元素產生子代時是相互獨立的；然而其缺點是元素多達 92 個，以矩陣表示其演化規則時成為 92x92 的矩陣，頗為龐大，研究起來相當吃力。所幸在電腦的協助之下，矩陣的運算可以用程式代勞，因此能利用 92 元素的產生規則研究諸如為何 123 成比例，或為何數列呈指數成長等數量上的問題。

至於重複性，比較強調各列數字間相同的部分，與數列的產生方法並無直接關係。然而經過觀察與比較，發現具有重複性的部分，除了也呈指數成長外，並無明顯的規律性，結合了分組或 92 元素後也是如此。不過從重複性的結果，我們至少可以知道第 n 列的開頭部分是什麼——只要看它除以 3 於多少，再找和她同餘的幾列就可以了，它們的開頭會一樣。尾端也可以知道，不過是除以 4，同餘的尾端會相同。

綜合而言，各種研究方法皆有其優點，也有無法克服之處，因此必須加以改良並靈活地綜合運用，以幫助研究。

二、神奇的比例——1.3...

外觀數列的總位數成長比例約是 $C\lambda$ ，其中 $C=1.567\dots$ ， $\lambda=1.30357726\dots$ ， λ 稱為康威常數 (Conway's Constant)，這是在 Conway 的著述中提出的。

在我們後來一連串的研究中， $\lambda=1.3\dots$ 的這個比例不斷出現，除了總位數的成長比例之外，1,2,3 分別的各數也是以乘 1.3... 的速率成長，這和它們在數列中佔固定比例 (1 約佔 50%，2 佔 30%，3 佔 20%) 密切相關。「相同數字一組」時，總組數成長率以及各組個別的成长率都是 1.3...；以相同數字一組畫成樹狀圖，樹枝的成长率也是 1.3...。始端重複區域的總位數和尾端重複的總位數，各列之間的比例是 1.3...。還有以 p 開始的外觀數列，猜猜它的成長比率是多少？沒錯，也是 1.3...。

許多部份都呈現相同的比例，其背後的意涵是，無論數列如何的變化——只算 1,2 或 3、分組、畫成樹狀圖、只看重複、甚至換個數字開頭，它們之前都存有一定的關聯性，在呈現的面貌上也許有所不同，然而產生的方式還是一樣的。

三、外觀數列的一般項

我們研究的終極目標就是要找到外觀數列的一般性。起初以為有這麼多規律，一定很容易歸納出一般性；然而深入研究之後才發現，其實不合規律的地方更多，並沒有那麼簡單。討論（一）也提到我們所運用的許多分析方法，而一般性則用到重複性和裂縫的概念。

其實我們做出的一般性，和當初預期的不太一樣——並不是給列數 n ，就直接可以知道整列是什麼，而是必須拆成始端、中間和尾端三個部分，分別再用「外觀數列的產生方式」（Conway 康威稱此產生方式為 "Audioactive Decay"）演化若干次，最後合在一起才得到這個第 n 列。不過想來這也是合理的，畢竟這麼長的一個數列，不可能憑空得到。

雖然使用一般性，和直接由上一列產生外觀數列，同樣都需要用到 Audioactive Decay，但是此一般性的價值在於能使運算更迅速——用一列幾萬位的數列放到產生器去跑，常常還沒得到結果，電腦就先當了；分成始端、中間和尾端，雖然必須做三次，但每個序列都較短，可以產生得更迅速。此外，這三個部分可以視為獨立的區塊，各有其特殊的性質，產生時彼此之間也互不干擾，這更有利於外觀數列性質的觀察與研究。

最重要的是，一般性打破了外觀數列「必須要知道上一列才能產生下一列」的限制，變成「知道第 n 列的幾個一般性元素就可以產生整列」，把「由上至下」的產生化成「始端由左而右」與「尾端由右而左」的產生。想知道第 n 列，再也不必辛辛苦苦地從 1 開始了！

柒、結論

打從在書上發現外觀數列起，我們就對外觀數列印象深刻。它的產生規則是「自我描述」，可以說巧妙的結合了語言和數學。仔細觀察，又可以發現有 1,2,3、總位數指數成長、1,2,3 比例趨於固定等有趣的數學性質，相當令我們驚奇。之後為了找出一般性，我們透過分組、重複性、裂縫等不同的手法，對數列進行仔細的分析及研究；爲了要使用這些方法，我們也必須充實許多先備知識，例如統計、碎形和電腦程式的編寫等等。雖然並非每個方法都能領我們找到一般性，然而從中也發現了不少有趣的性質與現象，讓我們對外觀數列有更深入的認識，進而引出更多的想法。最後的一般性，則是綜合了裂縫的概念與重複的現象才找到的。在了解 1 始外觀數列後，我們又進一步推展到 p 始的外觀數列，這部分由於有 1 始的基礎，因此研究起來較為得心應手。

雖然我們已經可以寫出一般性的通式，然而還有許多地方是我們必須繼續思考研究的，包括用更簡潔的方式表示一般性，以及運用這個一般性通式解釋外觀數列的基本性質等等，甚至將外觀數列應用到生活上。往後，我們將更致力於發掘外觀數列其他未知的面貌，盼望也能從中獲益良多。

捌、參考資料及其他

- 【參考資料一】Clifford A. Pickover 著，蔡承志 楊台勇 譯（民 92 年 4 月 5 日）。怪獸數列。載於商周出版，數字的異想世界（第 55 章）。
- 【參考資料二】Eric W. Weisstein. (1999) Look and Say sequence. Mathworld. Retrieved November 11, 2004, from <http://mathworld.wolfram.com/LookandSaySequence.html>
- 【參考資料三】Eric W. Weisstein. (1999) Conway's Constant. Mathworld. Retrieved November 11,

2004, from <http://mathworld.wolfram.com/ConwaysConstant.html>

- 【參考資料四】Eric W. Weisstein. (1999) L-system. Retrieved December 29, 2004, from <http://mathworld.wolfram.com/LindenmayerSystem.html>
- 【參考資料五】Henry Bottomley () A JavaScript function written by Henry Bottomley for extending the sequence. Retrieved November 11, 2004, from <http://www.btinternet.com/~se16/js/looknsay.htm>
- 【參考資料六】Henry Bottomley. © Copyright 1994 Mario Hilgemeier. "One Metaphor Fits All": A Fractal Voyage With Conway's Audioactive Decay. Retrieved January 23, 2005, from <http://www.btinternet.com/~se16/mhi/index.htm>
- 【參考資料七】Jacobov Bulaevsky. (Last Updated: Sunday, 14-Mar-1999 03:35:39 GMT.無日期) Koch Curve. Retrieved January 14, from <http://ejad.best.vwh.net/java/fractals/koch.shtml>
- 【參考資料八】JOSEPH L.PE (2003) ANA'S GOLDEN FRACTAL. Retrieved October 30, from <http://www.geocities.com/SoHo/Exhibit/8033/anagoldenfractal/anagoldenfractal.pdf>
- 【參考資料九】The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences. (無日期) Retrieved December 23, 2004, from <http://www.research.att.com/~njas/sequences/>

【附件一】：1,2,3 分別個數、佔整列總位數的百分比（配合 p.2）

列	總個數	1 的個數	1 的個數比	2 的個數	2 的個數比	3 的個數	3 的個數比
1	1	1	100.00000%	0	0.00000%	0	0.00000%
2	2	2	100.00000%	0	0.00000%	0	0.00000%
3	2	1	50.00000%	1	50.00000%	0	0.00000%
4	4	3	75.00000%	1	25.00000%	0	0.00000%
5	6	4	66.66667%	2	33.33333%	0	0.00000%
6	6	3	50.00000%	2	33.33333%	1	16.66667%
7	8	4	50.00000%	3	37.50000%	1	12.50000%
8	10	6	60.00000%	2	20.00000%	2	20.00000%
9	14	8	57.14286%	3	21.42857%	3	21.42857%
10	20	12	60.00000%	4	20.00000%	4	20.00000%
11	26	13	50.00000%	8	30.76923%	5	19.23077%
12	34	18	52.94118%	10	29.41176%	6	17.64706%
13	46	24	52.17391%	14	30.43478%	8	17.39130%
14	62	33	53.22581%	18	29.03226%	11	17.74194%
15	78	39	50.00000%	24	30.76923%	15	19.23077%
16	102	52	50.98039%	28	27.45098%	22	21.56863%
17	134	67	50.00000%	41	30.59701%	26	19.40299%
18	176	88	50.00000%	56	31.81818%	32	18.18182%
19	226	113	50.00000%	69	30.53097%	44	19.46903%
20	302	155	51.32450%	91	30.13245%	56	18.54305%
21	408	211	51.71569%	123	30.14706%	74	18.13725%
22	528	264	50.00000%	164	31.06061%	100	18.93939%
23	678	331	48.82006%	221	32.59587%	126	18.58407%
24	904	455	50.33186%	286	31.63717%	163	18.03097%
25	1182	596	50.42301%	366	30.96447%	220	18.61252%
26	1540	762	49.48052%	494	32.07792%	284	18.44156%
27	2012	1000	49.70179%	636	31.61034%	376	18.68787%
28	2606	1288	49.42441%	832	31.92632%	486	18.64927%
29	3410	1688	49.50147%	1095	32.11144%	627	18.38710%
30	4462	2222	49.79830%	1423	31.89153%	817	18.31017%
31	5808	2884	49.65565%	1847	31.80096%	1077	18.54339%
32	7586	3754	49.48590%	2440	32.16451%	1392	18.34959%
33	9898	4915	49.65650%	3154	31.86502%	1829	18.47848%

【附件二】：相同一組成長率（配合 p.3）

	成長比率								
平均	1.3108	1.3075	1.3090	1.3249	1.3229	1.3579	1.3036	1.3115	1.4061
列	總成長比率	1 成長比率	11 成長比率	111 成長比率	2 成長比率	22 成長比率	222 成長比率	3 成長比率	33 成長比率
1									
2	1	0							
3	2		0						
4	1.5	1			1				
5	1	1	0		0				
6	1.333333333	1		0		1			
7	1.25	2	1			0		1	
8	1.4	0.5	1				0	2	
9	1.428571429	3	1	1	0.5			1.5	
10	1.3	0.333333333	4	1	2	1		1.333333333	
11	1.307692308	4	0.75	1	1.5	1		0.75	
12	1.352941176	0.75	2	1	1.666666667	1	1	2	0
13	1.347826087	2	1	2	1	3	1	1.333333333	
14	1.258064516	1	1.5	1.5	1.2	1	2	1.125	
15	1.307692308	1.166666667	1.111111111	1.333333333	1.5	1	1.5	1.666666667	0
16	1.31372549	1.142857143	1.6	1	1.666666667	0.666666667	1	1.066666667	
17	1.313432836	1.75	1	1.75	1.133333333	4.5	0.666666667	1.25	1
18	1.284090909	1.142857143	1.5	1.142857143	1.352941176	0.666666667	3.5	1.3	1
19	1.336283186	1.4375	1.125	1.5	1.565217391	1.5	0.714285714	1.307692308	1.666666667
20	1.350993377	1.217391304	1.518518519	1.25	1.361111111	1.333333333	1.2	1.470588235	0.6
21	1.294117647	1.285714286	1.292682927	1.533333333	1.102040816	1.75	1.5	1.24	2
22	1.284090909	1.222222222	1.396226415	1.043478261	1.314814815	1.142857143	1.666666667	1.193548387	2.166666667
23	1.333333333	1.454545455	1.216216216	1.208333333	1.408450704	1.458333333	1.133333333	1.459459459	0.692307692
24	1.307522124	1.296875	1.333333333	1.517241379	1.31	1.057142857	1.588235294	1.25	1.555555556
25	1.302876481	1.21686747	1.325	1.340909091	1.251908397	1.675675676	0.962962963	1.318518519	1.5
26	1.306493506	1.326732673	1.314465409	1.186440678	1.31097561	1.161290323	1.730769231	1.337078652	1.095238095
27	1.295228628	1.335820896	1.253588517	1.414285714	1.306976744	1.319444444	1.222222222	1.210084034	1.913043478
28	1.308518803	1.251396648	1.354961832	1.191919192	1.327402135	1.326315789	1.254545455	1.368055556	1.045454545
29	1.308504399	1.383928571	1.273239437	1.338983051	1.300268097	1.325396825	1.333333333	1.28680203	1.304347826
30	1.301658449	1.261290323	1.305309735	1.373417722	1.315463918	1.245508982	1.336956522	1.295857988	1.333333333

【附件三】：各組佔總組數的比例（配合 p.3）

		各組個數比							
平均		14.10%	20.76%	7.16%	20.86%	6.92%	4.13%	23.71%	2.36%
列	總組數	1 的比	11 的比	111 的比	2 的比	22 的比	222 的比	3 的比	33 的比
1	1	100.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%
2	1	0.00%	100.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%
3	2	50.00%	0.00%	0.00%	50.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%
4	3	33.33%	33.33%	0.00%	33.33%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%
5	3	33.33%	0.00%	33.33%	0.00%	33.33%	0.00%	0.00%	0.00%
6	4	25.00%	25.00%	0.00%	0.00%	25.00%	0.00%	25.00%	0.00%
7	5	40.00%	20.00%	0.00%	0.00%	0.00%	20.00%	20.00%	0.00%
8	7	14.29%	14.29%	14.29%	28.57%	0.00%	0.00%	28.57%	0.00%
9	10	30.00%	10.00%	10.00%	10.00%	10.00%	0.00%	30.00%	0.00%
10	13	7.69%	30.77%	7.69%	15.38%	7.69%	0.00%	30.77%	0.00%
11	17	23.53%	17.65%	5.88%	17.65%	5.88%	5.88%	17.65%	5.88%
12	23	13.04%	26.09%	4.35%	21.74%	4.35%	4.35%	26.09%	0.00%
13	31	19.35%	19.35%	6.45%	16.13%	9.68%	3.23%	25.81%	0.00%
14	39	15.38%	23.08%	7.69%	15.38%	7.69%	5.13%	23.08%	2.56%
15	51	13.73%	19.61%	7.84%	17.65%	5.88%	5.88%	29.41%	0.00%
16	67	11.94%	23.88%	5.97%	22.39%	2.99%	4.48%	23.88%	4.48%
17	88	15.91%	18.18%	7.95%	19.32%	10.23%	2.27%	22.73%	3.41%
18	113	14.16%	21.24%	7.08%	20.35%	5.31%	6.19%	23.01%	2.65%
19	151	15.23%	17.88%	7.95%	23.84%	5.96%	3.31%	22.52%	3.31%
20	204	13.73%	20.10%	7.35%	24.02%	5.88%	2.94%	24.51%	1.47%
21	264	13.64%	20.08%	8.71%	20.45%	7.95%	3.41%	23.48%	2.27%
22	339	12.98%	21.83%	7.08%	20.94%	7.08%	4.42%	21.83%	3.83%
23	452	14.16%	19.91%	6.42%	22.12%	7.74%	3.76%	23.89%	1.99%
24	591	14.04%	20.30%	7.45%	22.17%	6.26%	4.57%	22.84%	2.37%
25	770	13.12%	20.65%	7.66%	21.30%	8.05%	3.38%	23.12%	2.73%
26	1006	13.32%	20.78%	6.96%	21.37%	7.16%	4.47%	23.66%	2.29%
27	1303	13.74%	20.11%	7.60%	21.57%	7.29%	4.22%	22.10%	3.38%
28	1705	13.14%	20.82%	6.92%	21.88%	7.39%	4.05%	23.11%	2.70%
29	2231	13.90%	20.26%	7.08%	21.74%	7.49%	4.12%	22.73%	2.69%
30	2904	13.46%	20.32%	7.47%	21.97%	7.16%	4.24%	22.62%	2.75%

【附件四】：首端重複統計數據
(配合 p.6)

列	總個數	比例
1	0	
2	0	
3	0	
4	0	
5	2	1
6	2	1
7	2	2
8	4	1
9	4	1.5
10	6	1.666667
11	10	1
12	10	1
13	10	1.6
14	16	1.25
15	20	1.1
16	22	1.454545
17	32	1.25
18	40	1.2
19	48	1.416667
20	68	1.323529
21	90	1.222222
22	110	1.4
23	154	1.350649
24	208	1.230769
25	256	1.351563
26	346	1.381503
27	478	1.213389
28	580	1.331034
29	772	1.326425
30	1024	1.279297
31	1310	1.314504
32	1722	1.315912
33	2266	1.291262

【附件五】：尾端重複統計數據
(配合 p.7)

列	總個數	比例
1	0	
2	2	1
3	2	1
4	2	2
5	4	1
6	4	1
7	4	1
8	4	1.5
9	6	1.333333
10	8	1.25
11	10	1.2
12	12	1.333333
13	16	1.125
14	18	1
15	18	1.333333
16	24	1.333333
17	32	1.1875
18	38	1.210526
19	46	1.391304
20	64	1.3125

中華民國第四十五屆中小學科學展覽會
評 語

高中組 數學科

第一名

040421

哇！好多的 1、2、3！——外觀數列

臺北市立第一女子高級中學

評語：

1. 問題十分新鮮有趣，也極富挑戰性，並能發現一般性之結果。
2. 透過圖表加強了二維視覺的呈現。
3. 參考資料上不宜註明 Copyright 字眼。