

中華民國第四十五屆中小學科學展覽會
作品說明書

高中組 數學科

第二名

040415

化『錐』為『球』

國立科學工業園區實驗高級中學

作者姓名：

高二 王渝溥

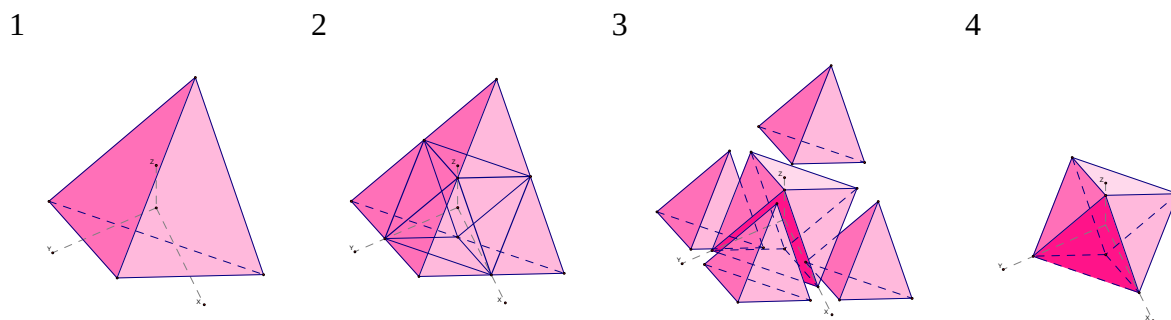
指導老師：

莊添丁 江宏元

化「錐」爲「球」？

一、摘要

正多面體有五種，而阿基米德多面體有 21 種之多，其中有些阿基米德多面體可以由正多面體切除「角」而產生；亦即把正多面體的每稜邊取中點後連線，然後去除各頂點的角。



以正四面體開始，截角可以得到正八面體，再截角可得 3,3,4,4 多面體。如果繼續截角，當步驟趨近於無限大時，會得到何種立體圖形？是球嗎？

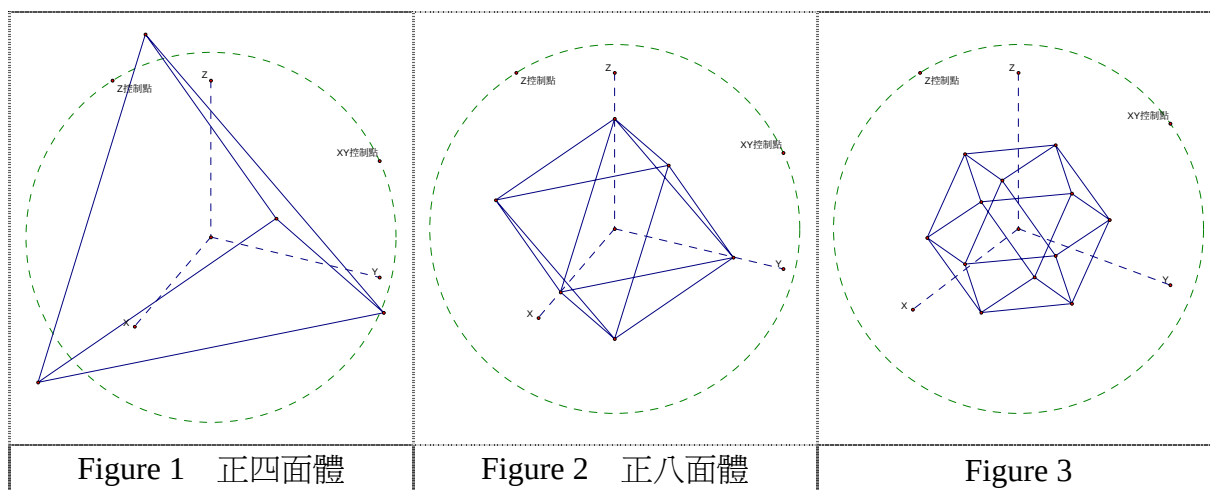
本研究先觀察此系列多面體的特性，以計算體積法、導出頂點之坐標來求得其極限值，但因體積變化無規律、頂點坐標有多餘解而無法直接求得結果。進而將此系列多面體投影於xy平面上，發現其具有 4×2^k 邊形的投影形狀，並且上下左右對稱。故將此投影形狀坐標化後，可求出各點之坐標，代入二次曲線一般式中，得拋物線，即極限之形狀並不是球。

二、研究動機：

日前看到一本介紹多面體的書，其中敘述正多面體有五種，另外有多種阿基米德多面體。而某些阿基米德多面體可以由正多面體的「角」截去而產生，例如 3,3,4,4-多面體是截盡角的正八面體等等。於是我想到一個問題，若把這樣的多面體繼續作截角的步驟，最後會趨近於何種形狀呢？是球嗎？能否證明其是否為球或其他形狀？假如以一個最簡單的多面體正四面體出發，是否可以得到一種球體的趨近方式呢？

三、研究目的：

將一正四面體(圖 1)的每稜邊取中點，並將相鄰邊的中點連線。以這些連線將此四面體的四個頂點各切下一個小四面體，如此可以得到正八面體(圖 2)。將此正八面體重複此動作，又可得到一種阿基米德多面體(圖 3)。依照如此規則作下去，最後會得到什麼圖形？



四、研究器材：

個人電腦(軟體：Microsoft Word、Microsoft Excel、Microsoft MathType、GSP 4.0、Mathematica)

A4 白紙、A4 方格紙、鉛筆、直尺、工程計算機

五、研究過程：

(一)觀察此系列多面體的頂點、面、稜邊數，並設法求出其一般式

觀察與推導：

1. 每一步驟皆將原多面體的一頂點「切掉」而變成面，而原多面體的面仍留下。
→故此系列第 n 步驟的多面體(以下用 P_n 代替，並令正四面體的 $n=0$)之面數等於 P_{n-1} 的頂點數加上 P_{n-1} 原有的面數。
2. 每一步驟皆取稜邊中點向四周連線使原稜邊變成頂點，而原多面體的稜邊蕩然無存。
→故 P_n 的頂點數等於 P_{n-1} 的稜邊數。
3. 依 (頂點數)+(面數)-2=(稜邊數) 定理，可求出新多面體的稜邊數。
4. 故此系列之多面體遵循下列遞迴公式：
[以 $v(n)$ 代表 P_n 的頂點數、 $f(n)$ 代表 P_n 的面數、 $e(n)$ 代表 P_n 的稜邊數]
※ $v(0)=4$ 、 $f(0)=4$ 、 $e(0)=6$ — 由正四面體定義
※ $v(n+1)=e(n)$ — 由 2.
※ $f(n+1)=v(n)+f(n)$ — 由 1.
※ $e(n)=v(n)+f(n)-2$ — 由 3.

可導出 $v(n)$ 、 $f(n)$ 、 $e(n)$ 的一般式，整理如表 1 所示：

Table 1 一系列多面體的頂點數、面數與稜邊數				
步驟數	名稱	頂點數 $v(n)$	面數 $f(n)$	稜邊數 $e(n)$
<u>0</u>	<u>正四面體</u>	<u>4</u>	<u>4</u>	<u>6</u>
1	正八面體	6	8	12
2	截盡角正八面體 (3-3-4-4 多面體)	12	14	24

3	(二十六面體)	24	26	48
4	(五十面體)	48	50	96
5	(九十八面體)	96	98	192
<u>$n(n > 0)$</u>		<u>3×2^n</u>	<u>$3 \times 2^n + 2$</u>	<u>$3 \times 2^{n+1}$</u>

討論：

1. 由以上觀察可得知此系列多面體之頂點數、稜邊數隨步驟數而呈等比數列增加。
2. 由此結果，此系列多面體可快速趨近於一極限，但因 $\lim_{n \rightarrow \infty} (a(n), b(n), c(n)) \rightarrow (\infty, \infty, \infty)$ 故無法直接求出極限之形狀。

(二)計算出前數種多面體的體積，並設法求出其一般式
觀察與推導：

1. 令正四面體的邊長=1 單位。

➔則因正四面體乃一錐體，體積= $\frac{1}{3} \times \text{底面積} \times \text{高}$

$$= \frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{2} \times 1 \times \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \times \sqrt{1^2 - \left(\frac{2}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} \right)^2} = \frac{1}{12} \sqrt{2}$$

2. 第一步驟恰截去四個邊長為 $\frac{1}{2}$ 的正四面體(各為原正四面體的 $\frac{1}{8}$)

➔故體積減為一半，即 $\frac{1}{24} \sqrt{2}$ 。

3. 第二步驟至第四步驟止，每個頂點切除之多面體皆全等，可設該正四面體的幾何中心為原點，為使邊長為 1，設四頂點坐標分別為

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{\sqrt{2}}{4} \right), \left(\frac{\sqrt{2}}{4}, -\frac{\sqrt{2}}{4}, -\frac{\sqrt{2}}{4} \right), \left(-\frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{\sqrt{2}}{4}, -\frac{\sqrt{2}}{4} \right), \left(-\frac{\sqrt{2}}{4}, -\frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{\sqrt{2}}{4} \right)$$

則新多面體的頂點可由中點公式求出，即可使用座標法及行列式求出體積：

➔每頂點切除一四角錐(圖 4)，體積=行列式值的 $\frac{1}{6}$ 。各步驟減少的四角錐體積及數量如表 2。

4. 第五步驟開始，因每個頂點切除之四角錐不全等、體積不同而難以計算。

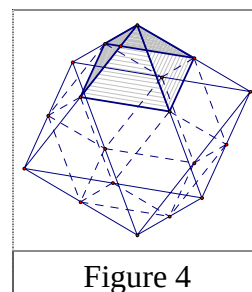


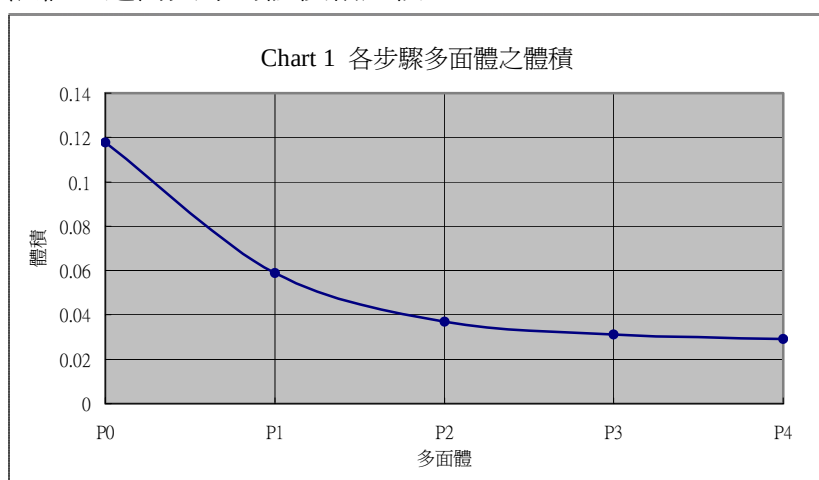
Figure 4

Table 2 各步驟多面體之體積與減少體積					
步驟數	體積	比前一多面體減少			
		一個三/四角錐體積	三/四角錐數	共減少體積	減少%
0	$\frac{1}{12} \sqrt{2}$				

1	$\frac{1}{24}\sqrt{2}$	$\frac{1}{96}\sqrt{2}$	4	$\frac{1}{24}\sqrt{2}$	50
2	$\frac{5}{192}\sqrt{2}$	$\frac{1}{384}\sqrt{2}$	6	$\frac{1}{64}\sqrt{2}$	37.5
3	$\frac{17}{768}\sqrt{2}$	$\frac{1}{3072}\sqrt{2}$	12	$\frac{1}{256}\sqrt{2}$	15
4	$\frac{127}{6144}\sqrt{2}$	$\frac{1}{16384}\sqrt{2}$	24	$\frac{3}{2048}\sqrt{2}$	6.6176

討論：

1. 體積的變化有迅速收斂的趨勢(圖表 1)，但無明顯的規律可循。故無法求出體積的極限值，進而與球的體積相比較。



2. 因此下一目標是試圖以代數法快速求出各頂點的坐標，再設法尋求一般式。

(三)尋找代數法求頂點坐標的一般式

觀察與推導：

1. 每稜邊的中點可以由兩個頂點座標的平均值來表示。
2. 欲求的是一個頂點與相鄰頂點的中點。但代數方法無法精確表示頂點的相鄰情形，仍須以圖輔助→故試圖以下二法求之：

甲、二點坐標平均，找「中點離多面體幾何中心距離最長」的組合。

乙、二點坐標平均，找「兩點距離最近的組合」並求中點。

※甲乙二法均依序取到頂點數≥理論頂點數為止。

3. 上二法在步驟 0~4 時殊途同歸。

→為方便計算，下表各步驟之坐標以逐步減半的單位表示。以正四面體的坐標

$(\frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{\sqrt{2}}{4}), (\frac{\sqrt{2}}{4}, -\frac{\sqrt{2}}{4}, -\frac{\sqrt{2}}{4}), (-\frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{\sqrt{2}}{4}, -\frac{\sqrt{2}}{4}), (-\frac{\sqrt{2}}{4}, -\frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{\sqrt{2}}{4})$ 可設為

$\{(0.5, 0.5, 0.5) (0.5, -0.5, -0.5) (-0.5, 0.5, -0.5) (-0.5, -0.5, 0.5)\} \times \frac{\sqrt{2}}{2}$ 。而各步驟的坐標即將前一步驟二坐標相加即可(見表 3)。

Table 3 以代數法求各多面體之頂點坐標					
步驟	組合	坐標	點數		倍數
0		(0.5,0.5,0.5) (0.5,-0.5,-0.5) (-0.5,0.5,-0.5) (-0.5,-0.5,0.5)	4		$\frac{\sqrt{2}}{2}$
1	1	(1,0,0) (-1,0,0) (0,1,0) (0,-1,0) (0,0,1) (0,0,-1)	6		$\frac{\sqrt{2}}{4}$
2	1	(1,1,0) (-1,-1,0) (1,-1,0) (-1,1,0) (1,0,1) (-1,0,-1) (1,0,-1) (-1,0,1) (0,1,1) (0,-1,-1) (0,1,-1) (0,-1,1)	12		$\frac{\sqrt{2}}{8}$
3	1	(2,1,1) (2,-1,-1) (2,1,-1) (2,-1,1) (1,2,1) (-1,2,-1) (1,2,-1) (-1,2,1) (1,1,2) (-1,-1,2) (1,-1,2) (-1,1,2) (-2,1,1) (-2,-1,-1) (-2,1,-1) (-2,-1,1) (1,-2,1) (-1,-2,1) (1,-2,-1) (-1,-2,-1) (1,1,-2) (-1,-1,-2) (1,-1,-2) (-1,1,-2)	24		$\frac{\sqrt{2}}{16}$
4	2	(3,3,2) (3,3,-2) (3,-3,2) (3,-3,-2) (-3,3,2) (-3,3,-2) (-3,-3,2) (-3,-3,-2) (3,2,3) (3,2,-3) (3,-2,3) (3,-2,-3) (-3,2,3) (-3,2,-3) (-3,-2,3) (-3,-2,-3) (2,3,3) (2,3,-3) (2,-3,3) (2,-3,-3) (-2,3,3) (-2,3,-3) (-2,-3,3) (-2,-3,-3)	24	48	$\frac{\sqrt{2}}{32}$
		(4,2,0) (4,-2,0) (-4,2,0) (-4,-2,0) (4,0,2) (4,0,-2) (-4,0,2) (-4,0,-2) (2,4,0) (2,-4,0) (-2,4,0) (-2,-4,0) (2,0,4) (2,0,-4) (-2,0,4) (-2,0,-4) (0,4,2) (0,4,-2) (0,-4,2) (0,-4,-2) (0,2,4) (0,2,-4) (0,-2,4) (0,-2,-4)	24		
5 甲法	3	(6,5,5) (6,5,-5) (6,-5,5) (6,-5,-5) (-6,5,5) (-6,5,-5) (-6,-5,5) (-6,-5,-5) (5,6,5) (5,6,-5) (5,-6,5) (5,-6,-5) (-5,6,5) (-5,6,-5) (-5,-6,5) (-5,-6,-5) (5,5,6) (5,5,-6) (5,-5,6) (5,-5,-6) (-5,5,6) (-5,5,-6) (-5,-5,6) (-5,-5,-6)	24	120	$\frac{\sqrt{2}}{64}$
		(7,5,2) (7,5,-2) (7,-5,2) (7,-5,-2) (-7,5,2) (-7,5,-2) (-7,-5,2) (-7,-5,-2) (7,2,5) (7,2,-5) (7,-2,5) (7,-2,-5) (-7,2,5) (-7,2,-5) (-7,-2,5) (-7,-2,-5) (5,7,2) (5,7,-2) (5,-7,2) (5,-7,-2) (-5,7,2) (-5,7,-2) (-5,-7,2) (-5,-7,-2) (5,2,7) (5,2,-7) (5,-2,7) (5,-2,-7) (-5,2,7) (-5,2,-7) (-5,-2,7) (-5,-2,-7) (2,7,5) (2,7,-5) (2,-7,5) (2,-7,-5) (-2,7,5) (-2,7,-5) (-2,-7,5) (-2,-7,-5) (2,5,7) (2,5,-7) (2,-5,7) (2,-5,-7) (-2,5,7) (-2,5,-7) (-2,-5,7) (-2,-5,-7)	48		
		(7,4,3) (7,4,-3) (7,-4,3) (7,-4,-3) (-7,4,3) (-7,4,-3) (-7,-4,3) (-7,-4,-3) (7,3,4) (7,3,-4) (7,-3,4) (7,-3,-4) (-7,3,4) (-7,3,-4) (-7,-3,4) (-7,-3,-4) (4,7,3) (4,7,-3) (4,-7,3) (4,-7,-3) (-4,7,3) (-4,7,-3) (-4,-7,3) (-4,-7,-3) (4,3,7) (4,3,-7) (4,-3,7) (4,-3,-7) (-4,3,7) (-4,3,-7) (-4,-3,7) (-4,-3,-7) (3,7,4) (3,7,-4) (3,-7,4) (3,-7,-4) (-3,7,4) (-3,7,-4) (-3,-7,4) (-3,-7,-4) (3,4,7) (3,4,-7) (3,-4,7) (3,-4,-7) (-3,4,7) (-3,4,-7) (-3,-4,7) (-3,-4,-7)	48		
5 乙法	4	(6,5,5) (6,5,-5) (6,-5,5) (6,-5,-5) (-6,5,5) (-6,5,-5) (-6,-5,5) (-6,-5,-5) (5,6,5) (5,6,-5) (5,-6,5) (5,-6,-5) (-5,6,5) (-5,6,-5) (-5,-6,5) (-5,-6,-5) (5,5,6) (5,5,-6) (5,-5,6) (5,-5,-6) (-5,5,6) (-5,5,-6) (-5,-5,6) (-5,-5,-6)	24	108	$\frac{\sqrt{2}}{64}$

		(8,2,2) (8,2,-2) (8,-2,2) (8,-2,-2) (-8,2,2) (-8,2,-2) (-8,-2,2) (-8,-2,-2) (2,8,2) (2,8,-2) (2,-8,2) (2,-8,-2) (-2,8,2) (-2,8,-2) (-2,-8,2) (-2,-8,-2) (2,2,8) (2,2,-8) (2,-2,8) (2,-2,-8) (-2,2,8) (-2,2,-8) (-2,-2,8) (-2,-2,-8)	24		
		(6,6,0) (-6,-6,0) (6,-6,0) (-6,6,0) (6,0,6) (-6,0,-6) (6,0,-6) (-6,0,6) (0,6,6) (0,-6,-6) (0,6,-6) (0,-6,6)	12		
		(7,5,2) (7,5,-2) (7,-5,2) (7,-5,-2) (-7,5,2) (-7,5,-2) (-7,-5,2) (-7,-5,-2) (7,2,5) (7,2,-5) (7,-2,5) (7,-2,-5) (-7,2,5) (-7,2,-5) (-7,-2,5) (-7,-2,-5) (5,7,2) (5,7,-2) (5,-7,2) (5,-7,-2) (-5,7,2) (-5,7,-2) (-5,-7,2) (-5,-7,-2) (5,2,7) (5,2,-7) (5,-2,7) (5,-2,-7) (-5,2,7) (-5,2,-7) (-5,-2,7) (-5,-2,-7) (2,7,5) (2,7,-5) (2,-7,5) (2,-7,-5) (-2,7,5) (-2,7,-5) (-2,-7,5) (-2,-7,-5) (2,5,7) (2,5,-7) (2,-5,7) (2,-5,-7) (-2,5,7) (-2,5,-7) (-2,-5,7) (-2,-5,-7)	48		
註：n=5 時只取到總組合數≥理論頂點數為止，未全部列出					

討論：

1. 前四步驟所找出的頂點座標皆是正確的，即符合實際多面體。
2. 當至步驟五時，有(6,5,5) (8,2,2) (6,6,0) (7,5,2) (7,3,4) (6,5,3)等組合為符合以上兩種方法的座標。
3. 然而，依甲方法找出的組合為(6,5,5) (7,5,2) (7,3,4)無法剛好湊齊 96 個頂點。若依乙方法找出的組合為(6,5,5) (8,2,2) (6,6,0) (7,5,2)也無法剛好湊齊 96 個頂點。以圖形來看，則只有(6,5,5) (8,2,2) (7,5,2)三種。以甲乙二法取交集，亦與實際情形不合。
4. 因此，新的多面體並非各稜邊中點所能圍出的最大體積，亦非以距離最近頂點的中點為新的頂點。
5. 由此可得知，使用代數方法可找出座標，但要去除多餘的解，仍要使用圖形輔助。

(四)觀察此系列多面體各面的特性

觀察與推導：

1. 因為起始圖形為正四面體(每頂點有三條稜邊)，故經過一步驟後增加 4 個三角形成為正八面體(每頂點有四條稜邊)，故以後的步驟皆只增加四邊形。
2. 從第二步驟後並不會增加三角形數量，故從 n=1 起每一步驟一定有 8 個三角形。
3. 因正三角形各邊中點連線形成之三角形恆為正三角形，故上述之 8 個三角形亦維持正三角形，分別位於正八面體八個三角形的方向(圖 5)。

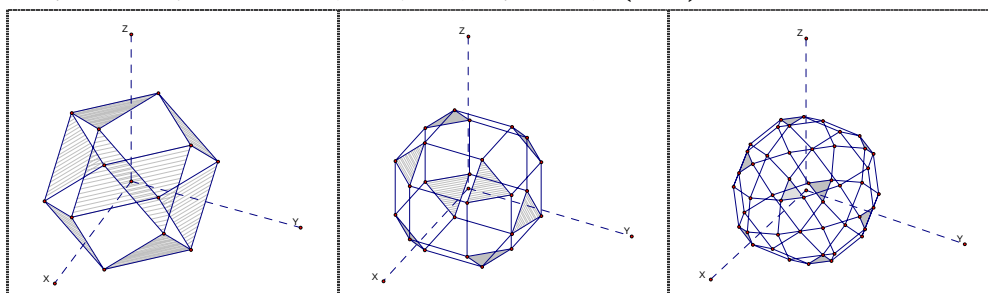


Figure 5-1 P_2 的三角形 Figure 5-2 P_3 的三角形 Figure 5-3 P_4 的三角形

4. 正八面體經第二步驟後，各頂點形成正方形，故有 6 個正方形。同上所述，從 $n=2$ 起各多面體(從第二步驟起)一定有 6 個正方形，分別位於正八面體六個頂點的位置(圖 6)。

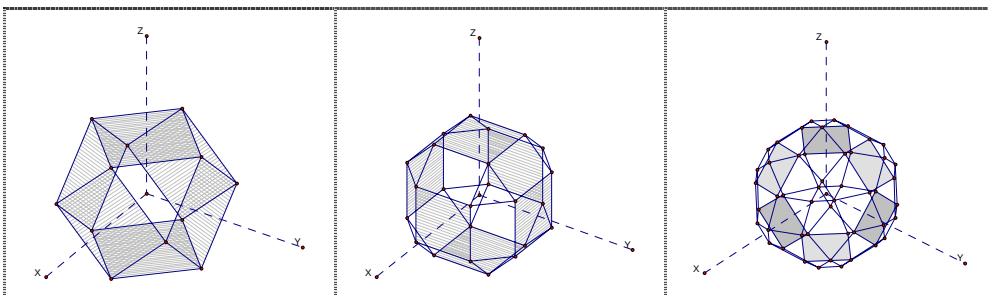
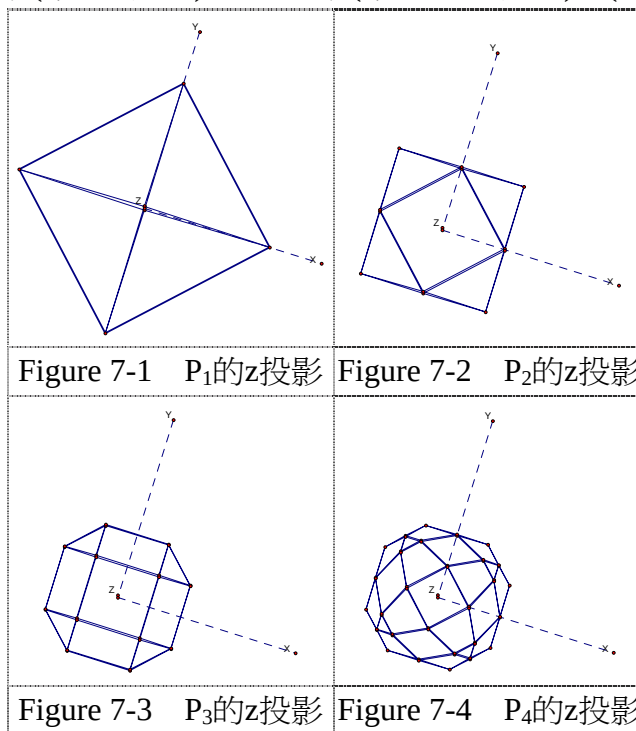


Figure 6-1 P_2 的正方形 Figure 6-2 P_3 的正方形 Figure 6-3 P_4 的正方形

5. 以正多面體中的正四面、六面及八面體為 P_0 ，皆可得到 3-3-4-4 阿基米得多面體。
6. 每步驟的多面體從 x, y, z 三方向投影皆相同，最外圍為四邊形(第 1,2 步驟)、八邊形(第 3,4 步驟)、16 邊形(第 5,6 步驟)... 2^{n+1} 邊形(第 $2n-1, 2n$ 步驟)。(圖 7)



7. 承上，每奇數($n \geq 3$)步驟所得的側面(xy, yz, xz 平面方向)皆為矩形以邊相連組成的環狀，而交會於正方形。每偶數步驟所得的側面皆為菱形以頂點相連組成的環狀，亦交會於正方形(圖 8)。此項發現可解釋上項投影為多邊形之現象。

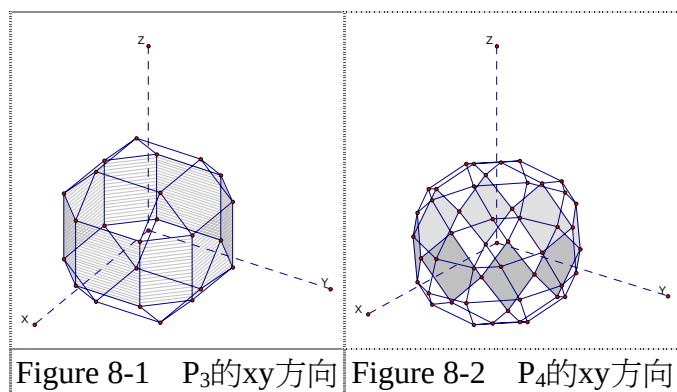


Figure 8-1 P_3 的xy方向

Figure 8-2 P_4 的xy方向

8. 此外，第 7 步驟的側面可視為三排四邊形以邊相連組成的環狀而只有中央一排全為矩形。第 8 步驟的側面可視為三排四邊形以頂點相連組成的環狀，中間穿插兩排四邊形，而只有中央一排全為菱形。

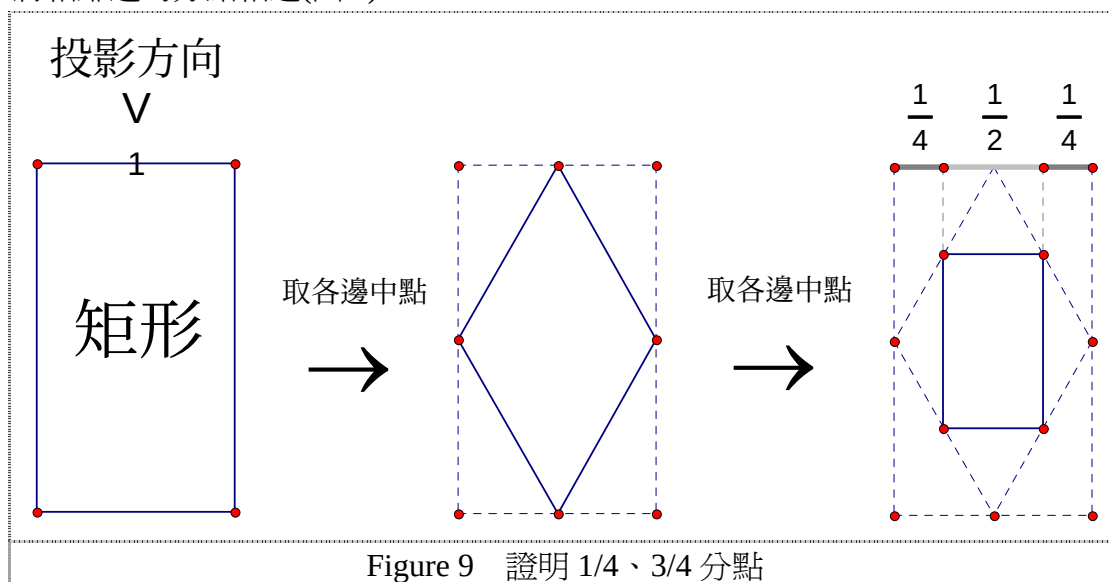
討論：

1. 每步驟的多面體從x,y,z三方向投影皆相同，且具有規律性(P_{2n-1} 、 P_{2n} 為 2^{n+1} 邊形， $n > 1$)。故可嘗試求出投影形狀的極限形狀，以間接討論多面體的極限形狀。
2. 以下過程皆就多面體的一軸方向投影討論之(三維→二維)。

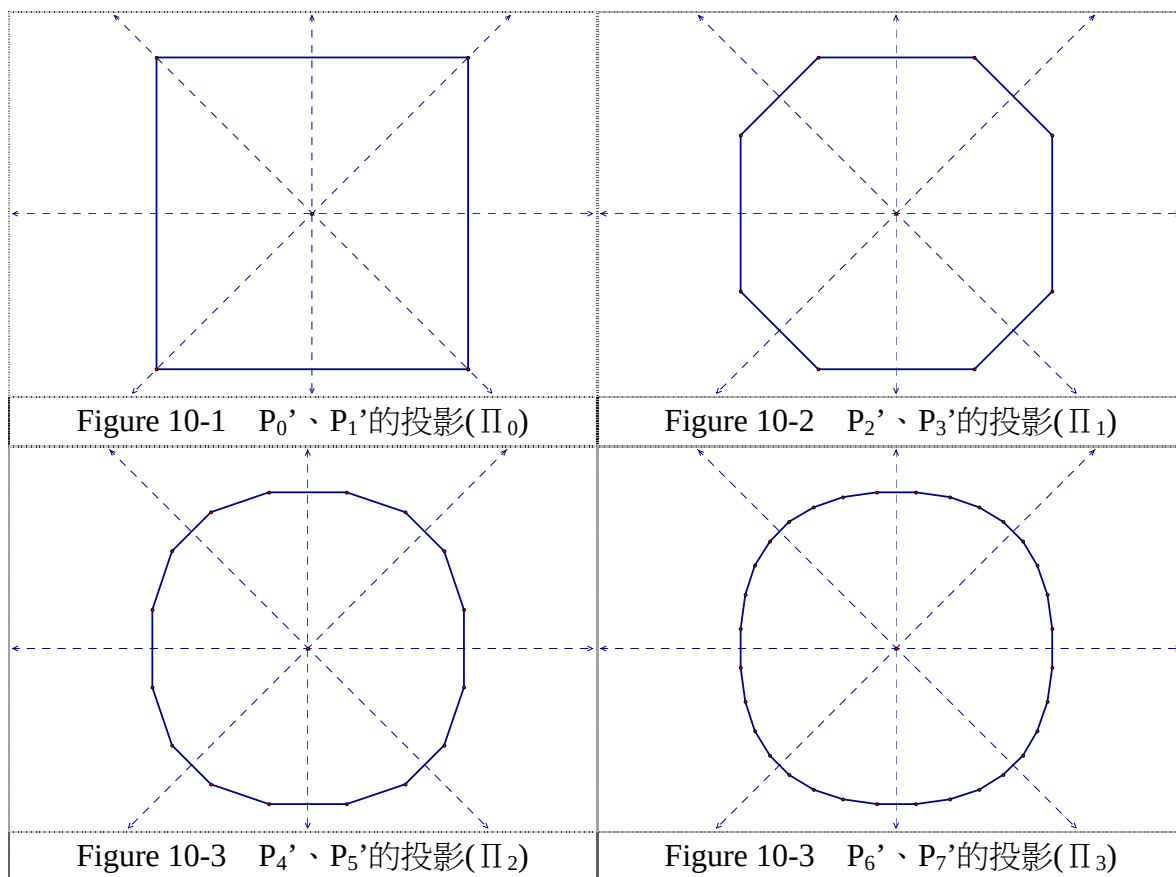
(五)藉由多面體在 x,y,z 其一軸方向的投影，討論其收斂性

觀察與推導：

1. 為求研究方便，可以正六面體為起始多面體(設為 P_0' ，則 $P_n' \equiv P_{n+1}$)，如此投影可由正方形開始。每經兩個步驟，便等同於將此正方形或矩形每邊分成 $\frac{1}{4}$ 、 $\frac{3}{4}$ 的分點，再將相鄰邊的分點相連(圖 9)：



2. 由以上結果，可由正方形開始(設為 Π_0)，以 $\frac{1}{4}$ 、 $\frac{3}{4}$ 分點，在平面上畫出此投影形狀可得 Π_1 、 $\Pi_2 \dots \Pi_n$ (圖 10)。由圖可見，此投影有 4 條對稱軸互成 45 度，以虛線表示：



3. 此投影圖形對稱，故只觀察右下角(第四象限)，可求出其每一邊的斜率(如表 4)：

Table 4 投影圖形之各邊斜率	
步驟數	每一線段斜率(新增者以方框表示)
0	$0, [\infty]$
1	$0, \boxed{1}, [\infty]$
2	$0, \boxed{\frac{1}{3}}, 1, \boxed{3}, [\infty]$
3	$0, \boxed{\frac{1}{7}}, \frac{1}{3}, \boxed{\frac{3}{5}}, 1, \boxed{\frac{5}{3}}, 3, \boxed{7}, [\infty]$
4	$0, \boxed{\frac{1}{15}}, \frac{1}{7}, \boxed{\frac{3}{13}}, \frac{1}{3}, \boxed{\frac{5}{11}}, \frac{3}{5}, \boxed{\frac{7}{9}}, 1, \boxed{\frac{9}{7}}, \frac{5}{3}, \boxed{\frac{11}{5}}, 3, \boxed{\frac{13}{3}}, 7, \boxed{15}, [\infty]$

4. 發現各新增的邊之斜率有以下規律，推導方式見 7~10：

$1 \rightarrow 1/3, 3/1 \rightarrow 1/7, 3/5, 5/3, 7/1 \rightarrow 1/15, 3/13, 5/11, 7/9, 9/7, 11/5, 13/3, 15/1 \rightarrow \dots$
 $\rightarrow 1/(2^n-1), 3/(2^n-3), \dots, (2^n-1)/1$

5. 若將所有邊之斜率「通分」至(分子)+(分母)=定值，可寫成以下形式(表 5)：

Table 5 投影圖形之各邊斜率(通分)		
步驟數	每一線段斜率	分子+分母
0	$\frac{0}{1}, \boxed{\frac{1}{0}}$	1

1	$\frac{0}{2}, \frac{1}{1}, \left[\frac{2}{0} \right]$	2
2	$\frac{0}{4}, \frac{1}{3}, \frac{2}{2}, \frac{3}{1}, \left[\frac{4}{0} \right]$	4
3	$\frac{0}{8}, \frac{1}{7}, \frac{2}{6}, \frac{3}{5}, \frac{4}{4}, \frac{5}{3}, \frac{6}{2}, \frac{7}{1}, \left[\frac{8}{0} \right]$	8
4	$\frac{0}{16}, \frac{1}{15}, \frac{2}{14}, \frac{3}{13}, \frac{4}{12}, \frac{5}{11}, \frac{6}{10}, \frac{7}{9}, \frac{8}{8}, \frac{9}{7}, \frac{10}{6}, \frac{11}{5}, \frac{12}{4}, \frac{13}{3}, \frac{14}{2}, \frac{15}{1}, \left[\frac{16}{0} \right]$	16
n	$\frac{0}{2^n}, \frac{1}{2^n-1}, \frac{2}{2^n-2}, \frac{3}{2^n-3}, \dots, \frac{2^{n-1}}{2^{n-1}}, \dots, \frac{2^n-3}{3}, \frac{2^n-2}{2}, \frac{2^n-1}{1}, \left[\frac{2^n}{0} \right]$	2ⁿ

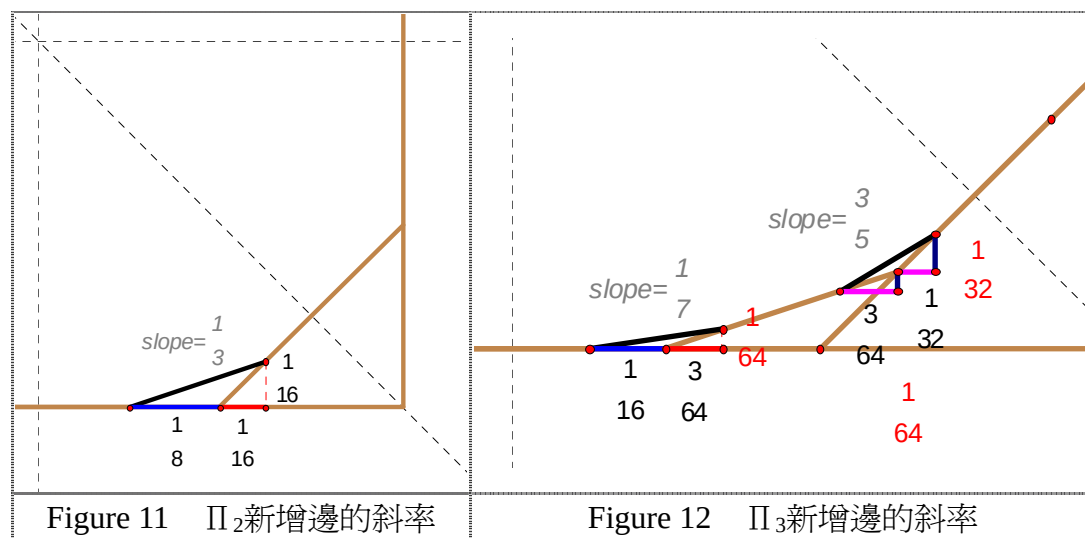
6. 因投影圖形有四條對稱軸，故可只討論圖形的八分之一，即右下角之 $0 \leq \text{斜率} \leq 1$ 的部分。

7. 步驟 1 時，因兩邊皆取四分之一分點，故新邊的斜率=1。

8. 步驟 2 新增邊的斜率(圖 11)：因原水平邊長= $\frac{1}{2}$ ，四等分後為 $\frac{1}{8}$ (藍色部分)，而斜率

=1 的一段在 x、y 軸投影長皆為 $\frac{1}{4}$ ，四等分後為 $\frac{1}{16}$ (紅色部分)。因此新增的邊(黑色)

之 x 距離= $\frac{1}{8} + \frac{1}{16} = \frac{3}{16}$ 、y 距離= $\frac{1}{16}$ ，斜率= $\frac{1}{16} \div \frac{3}{16} = \frac{1}{3}$



9. 步驟 3 新增邊的斜率(圖 12)：因原水平邊長= $\frac{1}{4}$ ，四等分後為 $\frac{1}{16}$ (藍色部分)，而斜率

= $\frac{1}{3}$ 的一段之 x 軸投影長為 $\frac{3}{16}$ ，四等分後為 $\frac{3}{64}$ ；y 軸投影長為 $\frac{1}{16}$ ，四等分後為 $\frac{1}{64}$ (紅

色部分)。故新增的第一條邊(黑色)之 x 距離= $\frac{1}{16} + \frac{3}{64} = \frac{7}{64}$ ；y 距離= $\frac{1}{64}$ ，斜率= $\frac{1}{64} \div$

$$\frac{7}{64} = \frac{1}{7} \text{。新增第二段斜率計算方式類似，可得斜率} = \frac{3}{5} \text{。}$$

10. 由以上觀察，每一步驟新增邊的斜率可由以下方法求出：

甲、 Π_n 新增第一條邊(最左者)之x距離(用 $X_{n,1}$ 代表) $= \frac{1}{4} \times (\Pi_{n-1}$ 水平邊長 $+ \Pi_{n-1}$ 第二條邊的x投影長)，即 $\frac{1}{4} \times (\frac{1}{2^{n-1}} + X_{n-1,2})$ ，而 $X_{n-1,2}$ 為 Π_{n-1} 第二條邊的x投影長，等於 $\frac{1}{4} \times (\frac{1}{2^{n-2}} + X_{n-2,2})$ ，依此類推，故可推得： $X_{n,1} = \frac{2^n - 1}{4^n}$ 。

乙、 Π_n 新增第一條邊(最左者)之y距離(用 $Y_{n,1}$ 代表) $= \frac{1}{4} \times (\Pi_{n-1}$ 第二條邊的y投影長)，即為 $Y_{n-1,1}$ 之四分之一。故可推得： $Y_{n,1} = \frac{1}{4^n}$ 。

丙、綜合甲、乙二結果，可推得 Π_n 新增第一條邊的斜率(用 $S_{n,1}$ 表示) $= Y_{n,1} \div X_{n,1} = \frac{1}{2^n - 1}$ 。

丁、同理可推得 $X_{n,m} = \frac{2^n - m}{4^n}$ 、 $Y_{n,m} = \frac{m}{4^n}$ ，斜率 $S_{n,m} = \frac{m}{2^n - m}$ 。

11. 可由各邊的x,y軸投影長度 $X_{n,m}$ 、 $Y_{n,m}$ ，求出各邊的長度(表 6)：

$$L_{n,m} = \sqrt{X_{n,m}^2 + Y_{n,m}^2} = \frac{\sqrt{(2^n - m)^2 + m^2}}{4^n} \quad (\text{只討論右下角之 } 1/8, \text{ 故 } 0 \leq m \leq 2^{n-1} + 1)$$

Table 6 各步驟投影之各邊長度	
步驟數	各邊長度
0	1
1	$\frac{\sqrt{2^2}}{4}, \frac{\sqrt{1^2 + 1^2}}{4}$
2	$\frac{\sqrt{4^2}}{4^2}, \frac{\sqrt{3^2 + 1^2}}{4^2}, \frac{\sqrt{2^2 + 2^2}}{4^2}$
3	$\frac{\sqrt{8^2}}{4^3}, \frac{\sqrt{7^2 + 1^2}}{4^3}, \frac{\sqrt{6^2 + 2^2}}{4^3}, \frac{\sqrt{5^2 + 3^2}}{4^3}, \frac{\sqrt{4^2 + 4^2}}{4^3}$
4	$\frac{\sqrt{16^2}}{4^4}, \frac{\sqrt{15^2 + 1^2}}{4^4}, \frac{\sqrt{14^2 + 2^2}}{4^4}, \frac{\sqrt{13^2 + 3^2}}{4^4}, \frac{\sqrt{12^2 + 4^2}}{4^4}, \frac{\sqrt{11^2 + 5^2}}{4^4}, \frac{\sqrt{10^2 + 6^2}}{4^4}, \frac{\sqrt{9^2 + 7^2}}{4^4}, \frac{\sqrt{8^2 + 8^2}}{4^4}$
n	$\frac{\sqrt{(2^n)^2}}{4^n}, \frac{\sqrt{(2^n - 1)^2 + 1^2}}{4^n}, \frac{\sqrt{(2^n - 2)^2 + 2^2}}{4^n}, \dots, \frac{\sqrt{(2^{n-1})^2 + (2^{n-1})^2}}{4^n}$

12. 以上的各邊長度可寫成另一種形式：

1

$$\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2^2}$$

$$\frac{1}{2^2}, \frac{\sqrt{3^2+1^2}}{2^4}, \frac{\sqrt{2}}{2^3}$$

$$\frac{1}{2^3}, \frac{\sqrt{7^2+1^2}}{2^6}, \frac{\sqrt{3^2+1^2}}{2^5}, \frac{\sqrt{5^2+3^2}}{2^6}, \frac{\sqrt{2}}{2^4}$$

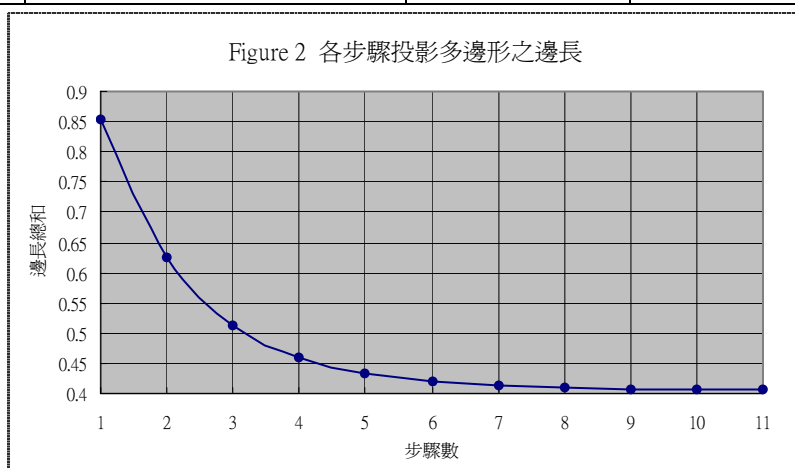
$$\frac{1}{2^4}, \frac{\sqrt{15^2+1^2}}{2^8}, \frac{\sqrt{7^2+1^2}}{2^7}, \frac{\sqrt{13^2+3^2}}{2^8}, \frac{\sqrt{3^2+1^2}}{2^6}, \frac{\sqrt{11^2+5^2}}{2^8}, \frac{\sqrt{5^2+3^2}}{2^7}, \frac{\sqrt{9^2+7^2}}{2^8}, \frac{\sqrt{2}}{2^5}$$

可見每個數列皆為前一個數列除以 2 後，兩兩隔開中間再加一新數所構成，與幾何方法的作法（取 $\frac{1}{4}$ 、 $\frac{3}{4}$ 分點連線）相符合。

討論：

1. 由以上的計算，可看出投影邊長之級數和快速收斂，以 Excel 計算結果如(表 7)、(圖表 2)。故此圖形之邊長應趨近於一特定數值而非零。
2. 以幾何觀點來看，無論切多少次，原正方形都仍留有一段，故最後多面體的 x,y,z 三方向直徑仍為 1。

Table 7 各步驟投影的右下角八分之一的邊長			
步驟數	邊長和	步驟數	邊長和
1	0.85 355 339	7	0.41 247 978
2	0.62 441 905	8	0.40 914 177
3	0.51 380 358	9	0.40 747 372
4	0.45 947 898	10	0.40 663 994
5	0.43 256 124	11	0.40 622 310
6	0.41 916 343	12	0.40 601 470



3. 若此圖形趨近於圓，上述邊長的和應趨近於 $\frac{\pi}{8} = 0.39269908$ ，然而觀察此極限應介於 0.405~0.406 之間，以目測法亦與圓有所不同(圖 13)。

4. 若該圖形為圓錐曲線，則不論取任五點，均應求得相同的 b, c, d, e, f 滿足 $x^2+by^2+cxy+dx+ey+f=0$ 。
5. 接下來的研究目標就在於設法證明其為圓錐曲線，並辨認其類型。

(六)討論投影形狀是否符合圓錐曲線

觀察與推導：

1. 前項研究已導出各邊的 x, y 投影距離，即

$$X_{n,m} = \frac{2^n - m}{4^n}, Y_{n,m} = \frac{m}{4^n}$$

故可以級數和來代表各點的坐標：

令右下角水平邊右邊的一點為 $p_{n,1}$ ，向右依序為 $p_{n,2}$ 、 $p_{n,3} \dots p_{n,k}$ 。

令水平邊之中點為原點 $(0,0)$ ，則 $p_{n,k} \left(\frac{2^n}{2 \cdot 4^n} + \sum_{m=1}^{k-1} \frac{2^n - m}{4^n}, \sum_{m=1}^{k-1} \frac{m}{4^n} \right)$ ，

$$\text{即 } p_{n,k} \left(\frac{(2k-1) \cdot 2^n - k(k-1)}{2 \cdot 4^n}, \frac{k(k-1)}{2 \cdot 4^n} \right)$$

2. 因至少五點才能決定圓錐曲線，故應從步驟三(Π_3)開始。可求出 $p_{3,1} \sim p_{3,5}$ 如(表 8)：

Table 8 $p_{3,1} \sim p_{3,5}$ 之坐標位置				
$p_{3,1}$	$p_{3,2}$	$p_{3,3}$	$p_{3,4}$	$p_{3,5}$
$\left(\frac{4}{64}, 0 \right)$	$\left(\frac{11}{64}, \frac{1}{64} \right)$	$\left(\frac{17}{64}, \frac{3}{64} \right)$	$\left(\frac{22}{64}, \frac{6}{64} \right)$	$\left(\frac{26}{64}, \frac{10}{64} \right)$

將此五點分別代入 $x^2+by^2+cxy+dx+ey+f=0$ 公式中，可得五式：

$$\begin{aligned} \frac{16}{4096} + 0b + 0c + \frac{4}{64}d + 0e + f &= 0 \\ \frac{121}{4096} + \frac{1}{4096}b + \frac{11}{4096}c + \frac{11}{64}d + \frac{1}{64}e + f &= 0 \\ \frac{289}{4096} + \frac{9}{4096}b + \frac{51}{4096}c + \frac{17}{64}d + \frac{3}{64}e + f &= 0 \\ \frac{484}{4096} + \frac{36}{4096}b + \frac{132}{4096}c + \frac{22}{64}d + \frac{6}{64}e + f &= 0 \\ \frac{676}{4096} + \frac{100}{4096}b + \frac{260}{4096}c + \frac{26}{64}d + \frac{10}{64}e + f &= 0 \end{aligned}$$

以Mathematica解之，得 $b=1$ 、 $c=2$ 、 $d=0$ 、 $e=-2$ 、 $f=-\frac{1}{256}$ 。即 $x^2+y^2+2xy-2y-\frac{1}{256}=0$

若取第六點 $p_{3,6} \left(\frac{29}{64}, \frac{15}{64} \right)$ 列式，以 $p_{3,2}$ 、 $p_{3,3}$ 、 $p_{3,4}$ 、 $p_{3,5}$ 、 $p_{3,6}$ 解聯立，可得相同的解。

3. 以步驟四(Π_4)的前五個點 $p_{4,1} \sim p_{4,6}$ 其坐標分別如(表 9)：

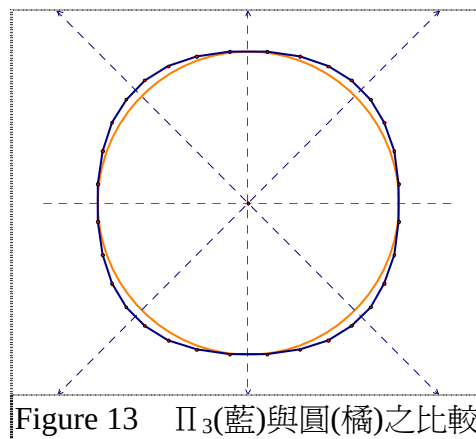


Figure 13 Π_3 (藍)與圓(橘)之比較

Table 9 $p_{4,1} \sim p_{4,6}$ 之坐標位置					
$p_{4,1}$	$p_{4,2}$	$p_{4,3}$	$p_{4,4}$	$p_{4,5}$	$p_{4,6}$
$\left(\frac{8}{256}, 0\right)$	$\left(\frac{23}{256}, \frac{1}{256}\right)$	$\left(\frac{37}{256}, \frac{3}{256}\right)$	$\left(\frac{50}{256}, \frac{6}{256}\right)$	$\left(\frac{62}{256}, \frac{10}{256}\right)$	$\left(\frac{73}{256}, \frac{15}{256}\right)$

取第一～五點及第二～六點分別解聯立，可得相同的解： $b=1$ 、 $c=2$ 、 $d=0$ 、 $e=-2$ 、 $f=\frac{-1}{1024}$

亦即 $x^2+y^2+2xy-2y-\frac{1}{1024}=0$ 。

討論：

由上述結果，可發現此曲線可能是一種拋物線，並滿足下列公式：

Π_n 的右下角的曲線符合方程式： $x^2+y^2+2xy-2y-\frac{1}{2^{2n+2}}=0$

(七)證明投影曲線的四分之一段趨近於拋物線

觀察與推導：

1. 上一項研究已導出各點坐標的一般式： $p_{n,k}\left(\frac{(2k-1) \cdot 2^n - k(k-1)}{2 \cdot 4^n}, \frac{k(k-1)}{2 \cdot 4^n}\right)$

現以任五點 $p_{n,k_1}, p_{n,k_2}, p_{n,k_3}, p_{n,k_4}, p_{n,k_5}$ 代入 $x^2+by^2+cxy+dx+ey+f=0$ 公式中可得五式：

$$y_1^2b + x_1y_1c + x_1d + y_1e + f = -x_1^2$$

$$y_2^2b + x_2y_2c + x_2d + y_2e + f = -x_2^2$$

$$y_3^2b + x_3y_3c + x_3d + y_3e + f = -x_3^2, \text{ 其中 } x_i, y_i \text{ 代表 } p_{n,k_i} \text{ 的坐標：}$$

$$y_4^2b + x_4y_4c + x_4d + y_4e + f = -x_4^2$$

$$y_5^2b + x_5y_5c + x_5d + y_5e + f = -x_5^2$$

$$y_i^2 = \left[\frac{k_i(k_i-1)}{2 \cdot 4^n} \right]^2 = \frac{k_i^2(k_i-1)^2}{2^{4n+2}}$$

$$x_iy_i = \frac{2^n \cdot (2k_i-1) - k_i(k_i-1)}{2 \cdot 4^n} \cdot \frac{k_i(k_i-1)}{2 \cdot 4^n} = \frac{2^n k_i(k_i-1)(2k_i-1) - k_i^2(k_i-1)^2}{2^{4n+2}}$$

$$x_i = \frac{2^n \cdot (2k_i-1) - k_i(k_i-1)}{2 \cdot 4^n} = \frac{2^n \cdot (2k_i-1) - k_i(k_i-1)}{2^{2n+1}}$$

$$y_i = \frac{k_i(k_i-1)}{2 \cdot 4^n} = \frac{k_i(k_i-1)}{2^{2n+1}}$$

$$-x_i^2 = -\left[\frac{2^n \cdot (2k_i-1) - k_i(k_i-1)}{2 \cdot 4^n} \right]^2 = \frac{-2^{2n} \cdot (2k_i-1)^2 + 2 \cdot 2^n \cdot k_i(k_i-1)(2k_i-1) - k_i^2(k_i-1)^2}{2^{4n+2}}$$

解得 $b=1$ 、 $c=2$ 、 $d=0$ 、 $e=-2$ 、 $f=-1/2^{2n+2}$ 。

討論：

1. 解出b、c、d、e皆與n無關，而f隨n增加而變小，且 $n \rightarrow \infty$ 時因 $2^{2n+2} \rightarrow \infty$ ，故 $f \rightarrow 0$ 。
2. 當 $n \rightarrow \infty$ 時， $b=1$ 、 $c=2$ 、 $d=0$ 、 $e=-2$ 、 $f=0$ 。亦即 $x^2+y^2+2xy-2y=0$ 。
3. 該方程式 xy 項係數不為零，故不是圓(圖 14)。

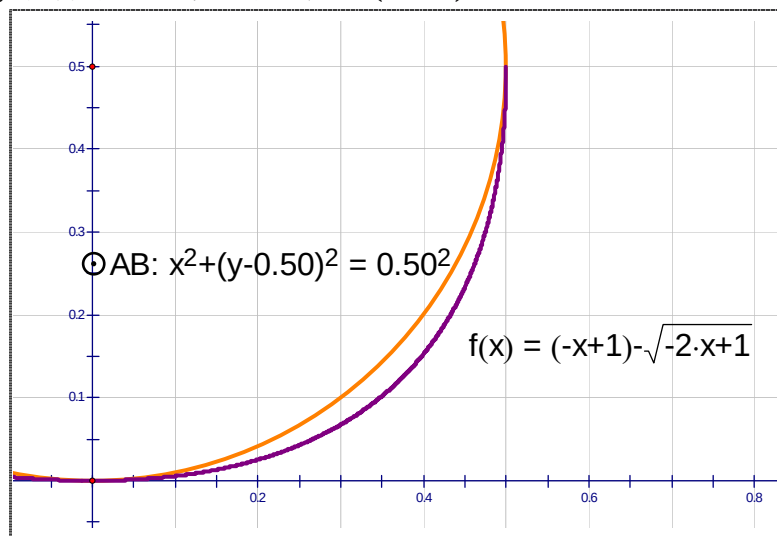


Figure 14 圓與 $x^2+y^2+2xy-2y=0$ 方程式之圖形比較

4. 將此方程式寫為標準式 $Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Fy+G=0$ ，則 $A=1$ 、 $B=1$ 、 $C=1$ 、 $D=0$ 、 $F=-1$ 、 $G=0$ ，代入判別式中(如下)可得其為拋物線(見附件三)：

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b & d \\ b & c & f \\ d & f & g \end{vmatrix} = -1, J = \begin{vmatrix} a & b \\ b & c \end{vmatrix} = 0$$

5. 以坐標變換方式，因該圖形之對稱軸與y軸夾 45 度角，可設 $x'=x+y$ ， $y'=-x+y$ 。

即 $x = \frac{x'-y'}{2}$ ， $y = \frac{x'+y'}{2}$ ，代入 $x^2+y^2+2xy-2y=0$ 中，

$$\left(\frac{x'-y'}{2}\right)^2 + \left(\frac{x'+y'}{2}\right)^2 + 2\left(\frac{x'-y'}{2}\right)\left(\frac{x'+y'}{2}\right) - 2\left(\frac{x'+y'}{2}\right) = 0$$

整理得： $y' = x'^2 - x$ ，確認其為拋物線(圖 15)。

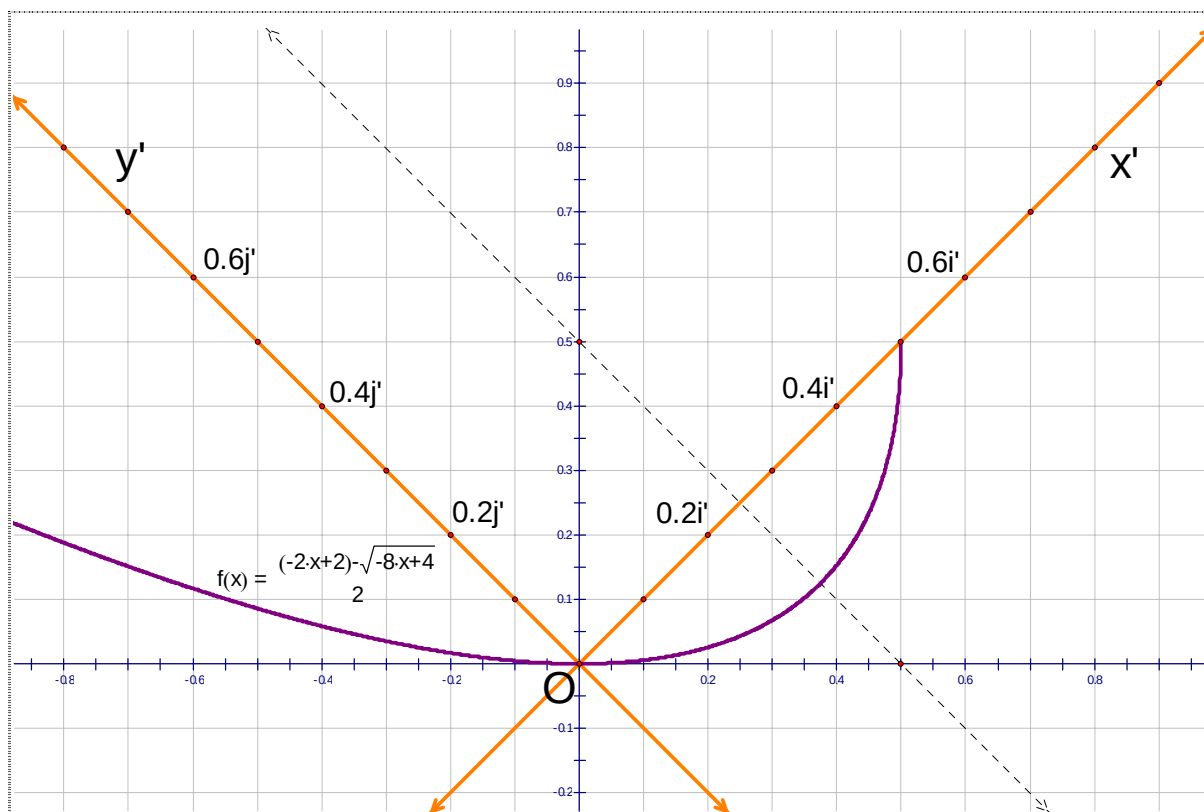


Figure 15 坐標軸轉換示意圖

6. 此方程式只討論投影的右下角，但四個方向之形狀相同，故此投影形狀為四段相同的拋物線所組成。
7. 承上，此系列立體之極限之 x, y, z 方向投影皆不是圓，故此系列立體的極限並非球。

六、結論：

1. 以正四面體之每稜邊取中點，並將相鄰邊的中點連線。以這些連線將此立體的頂點各切下一個小四面體，可得到正八面體；將此正八面體重複此動作，趨近於無限多次時，極限形狀並不是球，而會形成一 x 、 y 、 z 三軸方向投影皆為四條拋物線所組成的圖形。
2. 以正六面體、正八面體進行相同動作，也會得到上述結果。

七、參考資料：

<http://mathworld.wolfram.com/QuadraticCurve.html> (mathworld--二次曲線)

八、附錄：

證明 Π_n 的右下角的曲線符合方程式： $x^2 + y^2 + 2xy - 2y - \frac{1}{2^{2n+2}} = 0$ 的計算過程

以克拉碼公式解 Δ ，得：

$$\Delta = \begin{vmatrix} y_i^2 & x_i y_i & x_i & y_i & 1 \end{vmatrix}, i=1 \sim 5$$

$$\begin{aligned}
\Delta &= \left| \frac{k_i^2(k_i-1)^2}{2^{4n+2}} \quad \frac{2^n k_i(k_i-1)(2k_i-1) - k_i^2(k_i-1)^2}{2^{4n+2}} \quad \frac{2^n(2k_i-1) - k_i(k_i-1)}{2^{2n+1}} \quad \frac{k_i(k_i-1)}{2^{2n+1}} \quad 1 \right| \\
&= \frac{1}{2^{12n+6}} \left| k_i^2(k_i-1)^2 \quad 2^n k_i(k_i-1)(2k_i-1) - k_i^2(k_i-1)^2 \quad 2^n(2k_i-1) - k_i(k_i-1) \quad k_i(k_i-1) \quad 1 \right| \\
&\stackrel{\text{令}}{\Delta} \alpha_i = k_i, \beta_i = k_i - 1 \\
\Delta &= \frac{1}{2^{12n+6}} \left| \alpha_i^2 \beta_i^2 \quad 2^n \alpha_i \beta_i (\alpha_i + \beta_i) - \alpha_i^2 \beta_i^2 \quad 2^n(\alpha_i + \beta_i) - \alpha_i \beta_i \quad \alpha_i \beta_i \quad 1 \right| \\
&= \frac{1}{2^{12n+6}} \left| \alpha_i^2 \beta_i^2 \quad 2^n \alpha_i \beta_i (\alpha_i + \beta_i) \quad 2^n(\alpha_i + \beta_i) \quad \alpha_i \beta_i \quad 1 \right| \\
&= \frac{2^{2n}}{2^{12n+6}} \left| \alpha_i^2 \beta_i^2 \quad \alpha_i \beta_i (\alpha_i + \beta_i) \quad \alpha_i + \beta_i \quad \alpha_i \beta_i \quad 1 \right| \\
&= \frac{1}{2^{10n+6}} \left| \alpha_i^2 \beta_i^2 \quad \alpha_i \beta_i (\alpha_i + \beta_i) \quad \alpha_i + \beta_i \quad \alpha_i \beta_i \quad 1 \right| \\
\Delta_b &= \left| -x_i^2 \quad x_i y_i \quad x_i \quad y_i \quad 1 \right| \\
&= \left| \frac{-2^{2n} \cdot (2k_i-1)^2 + 2 \cdot 2^n \cdot k_i(k_i-1)(2k_i-1) - k_i^2(k_i-1)^2}{2^{4n+2}} \quad \frac{2^n k_i(k_i-1)(2k_i-1) - k_i^2(k_i-1)^2}{2^{4n+2}} \quad \frac{2^n \cdot (2k_i-1) - k_i(k_i-1)}{2^{2n+1}} \quad \frac{k_i(k_i-1)}{2^{2n+1}} \quad 1 \right| \\
&= \frac{1}{2^{12n+6}} \left| -2^{2n} \cdot (2k_i-1)^2 + 2 \cdot 2^n \cdot k_i(k_i-1)(2k_i-1) - k_i^2(k_i-1)^2 \quad 2^n k_i(k_i-1)(2k_i-1) - k_i^2(k_i-1)^2 \quad 2^n \cdot (2k_i-1) - k_i(k_i-1) \quad k_i(k_i-1) \quad 1 \right| \\
&= \frac{1}{2^{12n+6}} \left| -2^{2n}(\alpha_i + \beta_i)^2 + 2 \cdot 2^n \cdot \alpha_i \beta_i (\alpha_i + \beta_i) - \alpha_i^2 \beta_i^2 \quad 2^n \alpha_i \beta_i (\alpha_i + \beta_i) - \alpha_i^2 \beta_i^2 \quad 2^n(\alpha_i + \beta_i) - \alpha_i \beta_i \quad \alpha_i \beta_i \quad 1 \right| \\
&= \frac{1}{2^{12n+6}} \left| -2^{2n}(\alpha_i + \beta_i)^2 + 2^n \cdot \alpha_i \beta_i (\alpha_i + \beta_i) \quad 2^n \alpha_i \beta_i (\alpha_i + \beta_i) - \alpha_i^2 \beta_i^2 \quad 2^n(\alpha_i + \beta_i) \quad \alpha_i \beta_i \quad 1 \right| \\
&= \frac{2^{2n}}{2^{12n+6}} \left| -2^n(\alpha_i + \beta_i)^2 + \alpha_i \beta_i (\alpha_i + \beta_i) \quad 2^n \alpha_i \beta_i (\alpha_i + \beta_i) - \alpha_i^2 \beta_i^2 \quad \alpha_i + \beta_i \quad \alpha_i \beta_i \quad 1 \right| \\
&\text{又 } (\alpha_i + \beta_i)^2 = (2k_i-1)^2 = 4k_i^2 - 4k_i + 1 = 4k_i(k_i-1) + 1 = 4\alpha_i \beta_i + 1 \\
\Delta_b &= \frac{1}{2^{10n+6}} \left| -2^n(4\alpha_i \beta_i + 1) + \alpha_i \beta_i (\alpha_i + \beta_i) \quad 2^n \alpha_i \beta_i (\alpha_i + \beta_i) - \alpha_i^2 \beta_i^2 \quad \alpha_i + \beta_i \quad \alpha_i \beta_i \quad 1 \right| \\
&= \frac{1}{2^{10n+6}} \left| -2^n \cdot 4\alpha_i \beta_i - 2^n + \alpha_i \beta_i (\alpha_i + \beta_i) \quad 2^n \alpha_i \beta_i (\alpha_i + \beta_i) - \alpha_i^2 \beta_i^2 \quad \alpha_i + \beta_i \quad \alpha_i \beta_i \quad 1 \right| \\
&= \frac{1}{2^{10n+6}} \left| -2^n \cdot 4\alpha_i \beta_i + \alpha_i \beta_i (\alpha_i + \beta_i) \quad 2^n \alpha_i \beta_i (\alpha_i + \beta_i) - \alpha_i^2 \beta_i^2 \quad \alpha_i + \beta_i \quad \alpha_i \beta_i \quad 1 \right| \\
&= \frac{1}{2^{10n+6}} \left| \alpha_i \beta_i (\alpha_i + \beta_i) \quad 2^n \alpha_i \beta_i (\alpha_i + \beta_i) - \alpha_i^2 \beta_i^2 \quad \alpha_i + \beta_i \quad \alpha_i \beta_i \quad 1 \right| \\
&= \frac{1}{2^{10n+6}} \left| \alpha_i \beta_i (\alpha_i + \beta_i) \quad -\alpha_i^2 \beta_i^2 \quad \alpha_i + \beta_i \quad \alpha_i \beta_i \quad 1 \right| \\
&= \frac{1}{2^{10n+6}} \left| \alpha_i^2 \beta_i^2 \quad \alpha_i \beta_i (\alpha_i + \beta_i) \quad \alpha_i + \beta_i \quad \alpha_i \beta_i \quad 1 \right| \\
&= \Delta \\
b &= \frac{\Delta_b}{\Delta} = 1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Delta_c &= \begin{vmatrix} y_i^2 & -x_i^2 & x_i & y_i & 1 \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} \frac{k_i^2(k_i-1)^2}{2^{4n+2}} & \frac{-2^{2n} \cdot (2k_i-1)^2 + 2 \cdot 2^n \cdot k_i(k_i-1)(2k_i-1) - k_i^2(k_i-1)^2}{2^{4n+2}} & \frac{2^n \cdot (2k_i-1) - k_i(k_i-1)}{2^{2n+1}} & \frac{k_i(k_i-1)}{2^{2n+1}} & 1 \end{vmatrix} \\
&= \frac{1}{2^{12n+6}} \begin{vmatrix} k_i^2(k_i-1)^2 & -2^{2n} \cdot (2k_i-1)^2 + 2 \cdot 2^n \cdot k_i(k_i-1)(2k_i-1) - k_i^2(k_i-1)^2 & 2^n \cdot (2k_i-1) - k_i(k_i-1) & k_i(k_i-1) & 1 \end{vmatrix} \\
&= \frac{1}{2^{12n+6}} \begin{vmatrix} \alpha_i^2 \beta_i^2 & -2^{2n} \cdot (\alpha_i + \beta_i)^2 + 2 \cdot 2^n \cdot \alpha_i \beta_i (\alpha_i + \beta_i) - \alpha_i^2 \beta_i^2 & 2^n (\alpha_i + \beta_i) - \alpha_i \beta_i & \alpha_i \beta_i & 1 \end{vmatrix} \\
&= \frac{1}{2^{12n+6}} \begin{vmatrix} \alpha_i^2 \beta_i^2 & -2^{2n} \cdot (\alpha_i + \beta_i)^2 + 2 \cdot 2^n \cdot \alpha_i \beta_i (\alpha_i + \beta_i) & 2^n (\alpha_i + \beta_i) & \alpha_i \beta_i & 1 \end{vmatrix} \\
&= \frac{2^{2n}}{2^{12n+6}} \begin{vmatrix} \alpha_i^2 \beta_i^2 & -2^n \cdot (\alpha_i + \beta_i)^2 + 2 \cdot \alpha_i \beta_i (\alpha_i + \beta_i) & \alpha_i + \beta_i & \alpha_i \beta_i & 1 \end{vmatrix} \\
&= \frac{1}{2^{10n+6}} \begin{vmatrix} \alpha_i^2 \beta_i^2 & -2^n \cdot (4\alpha_i \beta_i + 1) + 2 \cdot \alpha_i \beta_i (\alpha_i + \beta_i) & \alpha_i + \beta_i & \alpha_i \beta_i & 1 \end{vmatrix} \\
&= \frac{1}{2^{10n+6}} \begin{vmatrix} \alpha_i^2 \beta_i^2 & -2^n \cdot 4\alpha_i \beta_i - 2^n + 2 \cdot \alpha_i \beta_i (\alpha_i + \beta_i) & \alpha_i + \beta_i & \alpha_i \beta_i & 1 \end{vmatrix} \\
&= \frac{1}{2^{10n+6}} \begin{vmatrix} \alpha_i^2 \beta_i^2 & -2^n \cdot 4\alpha_i \beta_i + 2 \cdot \alpha_i \beta_i (\alpha_i + \beta_i) & \alpha_i + \beta_i & \alpha_i \beta_i & 1 \end{vmatrix} \\
&= \frac{1}{2^{10n+6}} \begin{vmatrix} \alpha_i^2 \beta_i^2 & 2 \cdot \alpha_i \beta_i (\alpha_i + \beta_i) & \alpha_i + \beta_i & \alpha_i \beta_i & 1 \end{vmatrix} \\
&= 2\Delta
\end{aligned}$$

$$c = \frac{\Delta_c}{\Delta} = 2$$

$$\begin{aligned}
\Delta_d &= \begin{vmatrix} y_i^2 & x_i y_i & -x_i^2 & y_i & 1 \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} \frac{k_i^2(k_i-1)^2}{2^{4n+2}} & \frac{2^n k_i(k_i-1)(2k_i-1) - k_i^2(k_i-1)^2}{2^{4n+2}} & \frac{-2^{2n} \cdot (2k_i-1)^2 + 2 \cdot 2^n \cdot k_i(k_i-1)(2k_i-1) - k_i^2(k_i-1)^2}{2^{4n+2}} & \frac{k_i(k_i-1)}{2^{2n+1}} & 1 \end{vmatrix} \\
&= \frac{1}{2^{14n+7}} \begin{vmatrix} k_i^2(k_i-1)^2 & 2^n k_i(k_i-1)(2k_i-1) - k_i^2(k_i-1)^2 & -2^{2n} \cdot (2k_i-1)^2 + 2 \cdot 2^n \cdot k_i(k_i-1)(2k_i-1) - k_i^2(k_i-1)^2 & k_i(k_i-1) & 1 \end{vmatrix} \\
&= \frac{1}{2^{14n+7}} \begin{vmatrix} \alpha_i^2 \beta_i^2 & 2^n \alpha_i \beta_i (\alpha_i + \beta_i) - \alpha_i^2 \beta_i^2 & -2^{2n} (\alpha_i + \beta_i)^2 + 2 \cdot 2^n \alpha_i \beta_i (\alpha_i + \beta_i) - \alpha_i^2 \beta_i^2 & \alpha_i \beta_i & 1 \end{vmatrix} \\
&= \frac{1}{2^{14n+7}} \begin{vmatrix} \alpha_i^2 \beta_i^2 & 2^n \alpha_i \beta_i (\alpha_i + \beta_i) & -2^{2n} (\alpha_i + \beta_i)^2 + 2 \cdot 2^n \alpha_i \beta_i (\alpha_i + \beta_i) & \alpha_i \beta_i & 1 \end{vmatrix} \\
&= \frac{2^{2n}}{2^{14n+7}} \begin{vmatrix} \alpha_i^2 \beta_i^2 & \alpha_i \beta_i (\alpha_i + \beta_i) & -2^n (\alpha_i + \beta_i)^2 + 2 \cdot \alpha_i \beta_i (\alpha_i + \beta_i) & \alpha_i \beta_i & 1 \end{vmatrix} \\
&= \frac{1}{2^{12n+7}} \begin{vmatrix} \alpha_i^2 \beta_i^2 & \alpha_i \beta_i (\alpha_i + \beta_i) & -2^n (\alpha_i + \beta_i)^2 & \alpha_i \beta_i & 1 \end{vmatrix} \\
&= \frac{2^n}{2^{12n+7}} \begin{vmatrix} \alpha_i^2 \beta_i^2 & \alpha_i \beta_i (\alpha_i + \beta_i) & -(\alpha_i + \beta_i)^2 & \alpha_i \beta_i & 1 \end{vmatrix} \\
&= \frac{1}{2^{11n+7}} \begin{vmatrix} \alpha_i^2 \beta_i^2 & \alpha_i \beta_i (\alpha_i + \beta_i) & -(4\alpha_i \beta_i + 1) & \alpha_i \beta_i & 1 \end{vmatrix} \\
&= \frac{1}{2^{11n+7}} \begin{vmatrix} \alpha_i^2 \beta_i^2 & \alpha_i \beta_i (\alpha_i + \beta_i) & -4\alpha_i \beta_i - 1 & \alpha_i \beta_i & 1 \end{vmatrix} \\
&= \frac{1}{2^{11n+7}} \begin{vmatrix} \alpha_i^2 \beta_i^2 & \alpha_i \beta_i (\alpha_i + \beta_i) & -4\alpha_i \beta_i & \alpha_i \beta_i & 1 \end{vmatrix} \\
&= 0
\end{aligned}$$

$$d = \frac{\Delta_d}{\Delta} = 0$$

$$e = \frac{\Delta_e}{\Delta} = -2$$

$$f = \frac{\Delta_f}{\Lambda} = \frac{-1}{2^{2n+2}}$$

中華民國第四十五屆中小學科學展覽會
評 語

高中組 數學科

第二名

040415

化『錐』為『球』

國立科學工業園區實驗高級中學

評語：

1. 作者周詳的策劃，使本研究得到戲劇性的結果。
2. 作者巧妙的將立體幾何問題化為平面問題可圈可點。