

中華民國第四十五屆中小學科學展覽會
作品說明書

高中組 數學科

040410

步步為營暗藏玄機

國立彰化高級中學

作者姓名：

高二 謝政佑 高二 蔡宜學 高二 吳依峻
高二 柯瑾諭

指導老師：

王聖輝

第四十五屆中小學科學展覽會
作品說明書

科 別：數學科

組 別：高中組

作品名稱：步步爲營暗藏玄機

關鍵詞：埋 地 雷、自 殺 區、掃 雷 環

編 號：

壹、摘要

對 $n \times n$ 正方形區域戰場及 $m \times n$ 長方形區域戰場埋地雷，找出能在戰場上埋地雷的最多個數，而使得士兵埋地雷時不會把自己困死。

我們藉由做出的數百張圖中做分析，發現可以將 $n \times n$ 圖形之 n 值分為 $6t$ 、 $1+6t$ 、 $2+6t$ 、 $3+6t$ 、 $4+6t$ 、 $5+6t$ ， $t \in \mathbb{N}$ 與特殊型 $2^s + 1$ ， $s \in \mathbb{N}$ 去討論；而在 $m \times n$ 圖形中，我們仍將 m 、 n 值分類去討論。最後整理其相關數據與規律性的畫法再加以分析，求得了在 $n \times n$ 和 $m \times n$ 情況的公式解和埋地雷的方法，並推廣至圓柱側邊討論。

貳、研究動機

2005 年台灣國際科展時我們研究了一個題目：在一塊矩形方格紙板中最多可以挑選幾個小方格，使得沿著這些小方格的二條對角線割開後，原正方形方格紙板不會分裂為二片或二片以上(即沒有小片紙板會從原正方形紙板中“掉下來”)？

研究這個問題時，我們討論 2 種情形：

- 一、在 $n \times n$ 的正方形紙板中，可切割之小方格數之極大值為何？切割方法為何？
 - 二、在 $m \times n$ 的長方形紙板中，可切割之小方格數之極大值為何？切割方法為何？
- 這次我們打算：

- 一、將情境加以改寫做討論：

戰爭爆發我方派士兵進入戰場埋地雷，聰明的士兵如何在戰場上埋下最多的地雷，但卻不會將自己困死在戰場上。

- 二、將之前所得一系列繁雜的相關公式做統整，找出”大一統”的公式和所對應的函數關係，並加以延伸討論。

叁、研究目的

- 一、改寫原題目加以研究討論。
- 二、將之前所得一系列繁雜的相關公式做統整，找出”大一統”的公式和所對應的函數關係。
- 三、以在平面四邊形中的方法為基礎，延伸至其他圖形加以研究討論。

伍、研究過程或方法

- 一、預備知識及符號說明

- (一) 將 $n \times n$ 方形戰場的位子按照圖 1 分區編號為 (i, j) ， $1 \leq i, j \leq n$ ；將 $m \times n$ 矩形戰場的位子按照圖 2 分區編號為 (i, j) ， $1 \leq i \leq m$ ， $1 \leq j \leq n$ 。

$(1,1)$	$(1,2)$	$\cdots$	$(1,n)$
$(2,1)$	$(2,2)$	$\cdots$	$(2,n)$
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
$(n,1)$	$(n,2)$	$\cdots$	(n,n)

圖 1

$(1,1)$	$(1,2)$	$\cdots$	$(1,n)$
$(2,1)$	$(2,2)$	$\cdots$	$(2,n)$
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
$(m,1)$	$(m,2)$	$\cdots$	(m,n)

圖 2

- (二) 埋地雷方式為在每一區內佈置地雷若有人踏入則引爆。
- (三) 自殺區：四周被地雷包圍的區域（圖 3）。
- (四) 埋地雷時的規則和注意事項（圖 4）：
1. 地雷不可埋在外圍的邊上以免作戰時進出戰場不便。
 2. 埋地雷的區域不可相連以免造成連環引爆而傷及我方人員。
- (五) 本文中“[X]”為高斯函數。
- (六) 定義掃雷環：做圖時，為了方便辨識哪裡需消去地雷，定義每一個掃雷環為移除一枚地雷的區域，且每一個掃雷環視為最多可控制三個自殺區（圖 5）。

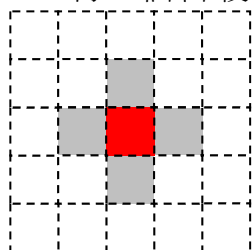


圖 3

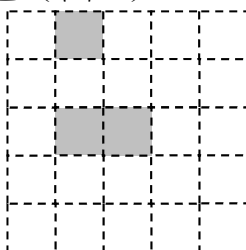


圖 4

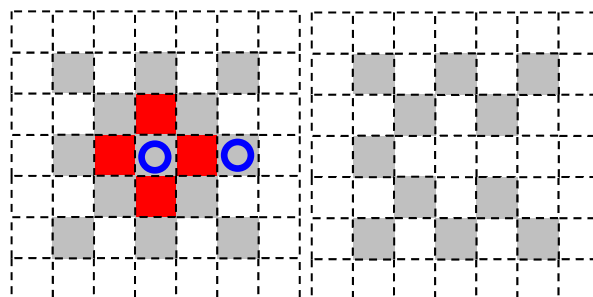


圖 5

- (七) 定義 B：不違反注意事項下可以埋下地雷的區域數； D：自殺區域數； S：掃雷環數； X：所求之地雷數，即為 $B - S$ 。
- (八) 各種埋地雷方式的圖形若經由旋轉(圖 6)、翻轉(圖 7)能互相重合者，則視為同一種圖形。

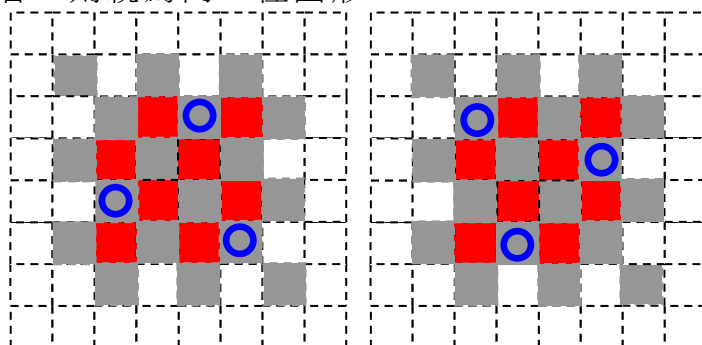


圖 6

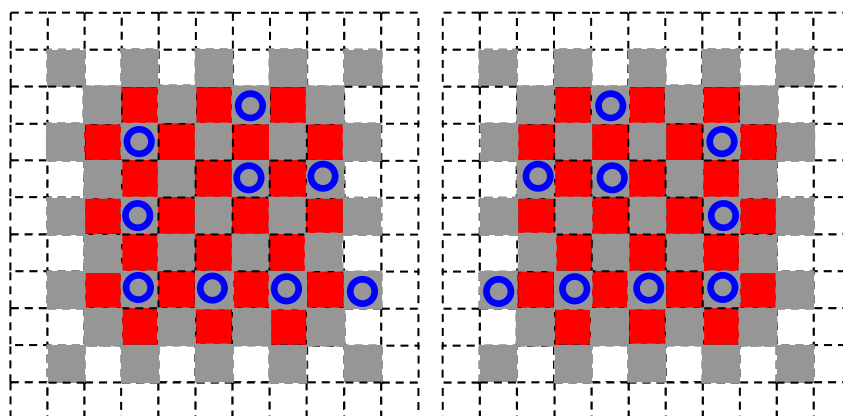


圖 7

二、解題想法

在不違反注意事項下，先將所有可以埋地雷的區域填滿灰色(圖 8、圖 9)，再一步步將填滿灰色的區域加以檢查，並判斷何處為該消去地雷的區域，最後再以歸納方法求出公式，並加以證明。

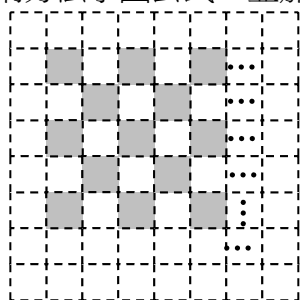


圖 8

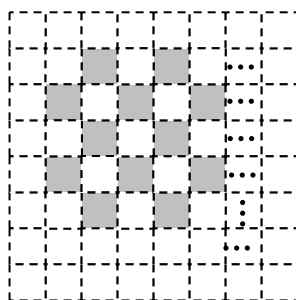


圖 9

三、 $n \times n$ 之方形戰場的埋地雷區域圖 (圖形請參見附錄)

(一) 開始討論前由圖中看出，在不違反到注意事項下有兩種埋地雷法：

1. 從左上角(2,2)開始埋地雷(圖 8)可求得在不違反到注意事項下，可

以埋下地雷的最多區域數為 $B = \frac{(n-2)^2}{2}$ ，當 $n=2k$ ， $k \in \mathbb{N}$ ；

$B = \frac{(n-2)^2 + 1}{2}$ ，當 $n=2k+1$ ， $k \in \mathbb{N}$ 。

2. 從左上角(3,2)開始埋地雷(圖 9)可求得在不違反到注意事項下，可

以埋下地雷的最多區域數為 $B = \frac{(n-2)^2}{2}$ ，當 $n=2k$ ， $k \in \mathbb{N}$ ；

$B = \frac{(n-2)^2 - 1}{2}$ ，當 $n=2k+1$ ， $k \in \mathbb{N}$ 。

因為 $\frac{(n-2)^2 + 1}{2}$ 恆大於 $\frac{(n-2)^2 - 1}{2}$ ，故作圖時，就以第 1 類型來做討論。

(二) 作圖觀察至 10×10 (圖 10~圖 19)

同樣地圖形都不只一種，但是在許多作圖法中，似乎感覺到某些圖形畫法有規律性，所以決定先將值求出後，再去找規律性畫法。

(三) 將 $n=2\sim 10$ 圖形所得的各個數據列表觀察 (表一)。

表一

圖形 邊長 n	個數	埋地雷的 區域數 (B)	自殺 區域數 (D)	掃雷環 數 (S)	題目所求 之地雷數 (X)
2		0	0	0	0
3		1	0	0	1
4		2	0	0	2
5		5	0	0	5
6		8	2	1	7
7		13	4	2	11
8		18	8	3	15
9		25	12	4	21
10		32	18	6	26
備註					$X=B-S$

列表後，埋地雷的區域數和自殺區域數間有下述的關係存在：

當 $n=2k$ ，其中 $k \geq 2$ ， $k \in \mathbb{N}$ 時，自殺區域數 D 與 $n=2(k+1)$ ，可埋地雷的區域數 B 相同 (表一虛線箭頭)；當 $n=2k+1$ ，其中 $k \geq 2$ ， $k \in \mathbb{N}$ 時，自殺區域數 D 與 $n=2(k+1)+1$ ，可埋地雷的區域數 $(B-1)$ 相同 (表一實線箭頭)。從這個地方，可以知道我們必須將邊長分為奇數、偶數兩類去討論，以方便研究。

(四) 公式推導

1. 當 $n=2k$ 時， $B = \frac{(n-2)^2}{2}$ 將 $n-2$ 代入 n

$$\text{得 } D = \frac{\{(n-2)-2\}^2}{2} = \frac{(n-4)^2}{2}$$

當 $n=2k+1$ 時， $B = \frac{(n-2)^2+1}{2}$ 將 $n-2$ 代入 n

$$\text{得 } D = \frac{\{(n-2)-2\}^2+1}{2} - 1 = \frac{(n-4)^2-1}{2}$$

2. 依照基本定義，每一個掃雷環視為最多可控制三個自殺區。

$$D=3h, h \in \mathbb{N} \text{ 時 } S = \frac{D}{3}; \quad D \neq 3h, h \in \mathbb{N} \text{ 時 } S = \left\lceil \frac{D}{3} \right\rceil + 1。$$

(五) 研究後的發現

在 $n \leq 10$ 時，要考慮的埋地雷區域太少，連帶自殺區域數也太少，而較易判斷何處該放置掃雷環，但是繼續做圖後，圖形並非如此單純，又發現些在 $n \leq 10$ 時沒有的變化 (圖 20~圖 29)。

至此，我們發現若依照基本定義：每一個掃雷環視為最多可控制三個自殺區，去處理問題，則作不出正確的圖。我們分析問題是出在需放上掃雷環的個數上：n=11、15、17 時，分別有 24、60、84 個自殺區，依照基本定義，則應只需 8、20、24 枚掃雷環，但是卻各需再多加一枚掃雷環；在 n=12、13、14、16、18、19、20 時，則依然符合基本定義，所以我們推論在 n 為奇數(n≥11)且自殺區域數(D)為 3 的倍數時，需放置的(S)可能會有需要再加 1 甚至是其他可能。將 n=11~20 圖形所得的各個數據列表觀察（表二）。

表二

個 邊長 _n	圖 形 數	埋地雷的 區域數 (B)	自殺 區域數 (D)	掃雷環 數 (S)	題目所求 之地雷數 (X)
11		41	24	9	32
12		50	32	11	39
13		60	40	14	46
14		72	50	17	55
15		85	60	21	64
16		98	72	24	74
17		113	84	29	84
18		128	98	33	95
19		145	112	38	107
20		162	128	43	119
備註					$X=B-S$

（六）數據分析

因為每放置一枚掃雷環最多可減少 3 個自殺區，所以將自殺區 Z 除以 3，依照其餘數分類，找出不同 n 值之間的關係（表三）。

表三

餘 0	9,10,11,15,16,17,21,22,23,27,28,29,33,34,35,39,40,41,45,46,47,...
餘 1	7,13,19,25,31,37,43,49,56,62,68,74,80,...
餘 2	6,8,12,14,18,20,24,26,30,32,36,38,42,44,48,50,...

按照餘數將 n 值加以分類後，從餘 1 的數據中，發現 n 值以差 6 的等差級數成長，我們將其他的數也依此規則加以細分為 6 組數據來討論（表四）。

由表四得知：不符合基本定義的 n 值為第四組與第六組的數據。

表四

第一組	第二組	第三組	第四組	第五組	第六組
餘 2	餘 1	餘 2	餘 0	餘 0	餘 0
6	7	8	9	10	11
12	13	14	15	16	17
18	19	20	21	22	23
24	25	26	27	28	29
30	31	32	33	34	35
36	37	38	39	40	41
42	43	44	45	46	47
48	49	50	51	52	53
54	55	56	57	58	59
60	61	62	63	64	65
66	67	68	69	70	71
72	73	74	75	76	77
78	79	80	81	82	83
84	85	86	87	88	89
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

我們再將第四組和第六組的數據作分析：

在第四組和第六組中，當 $n \leq 10$ 時，實際掃雷環數 = 推算掃雷環數；

當 $n \geq 11$ 時，實際掃雷環數 = (推算掃雷環數 + 1)。

(七) 一個有趣的例外

1. 5×5 的圖形可用 4 個 3×3 的圖形組合而成 (圖 30)。

2. 9×9 的圖形可用 4 個 5×5 的圖形組合而成 (圖 31)。

3. 17×17 的圖形可用 4 個 9×9 的圖形組合而成 (圖 32)。

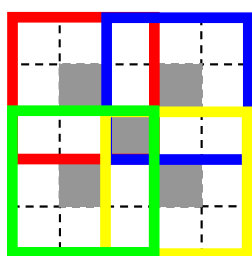


圖 30

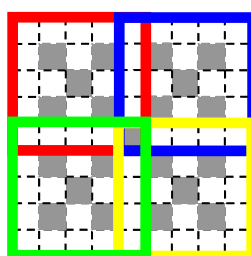


圖 31

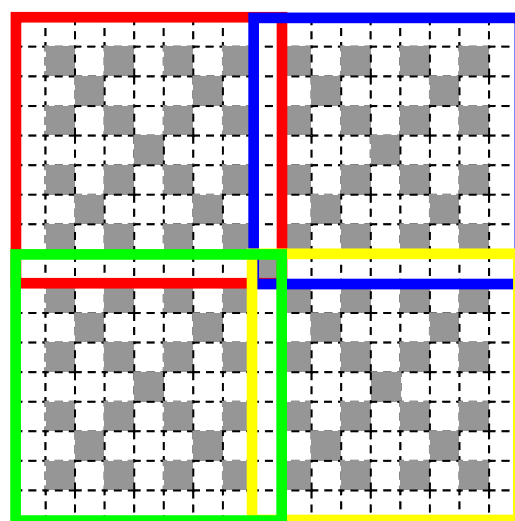
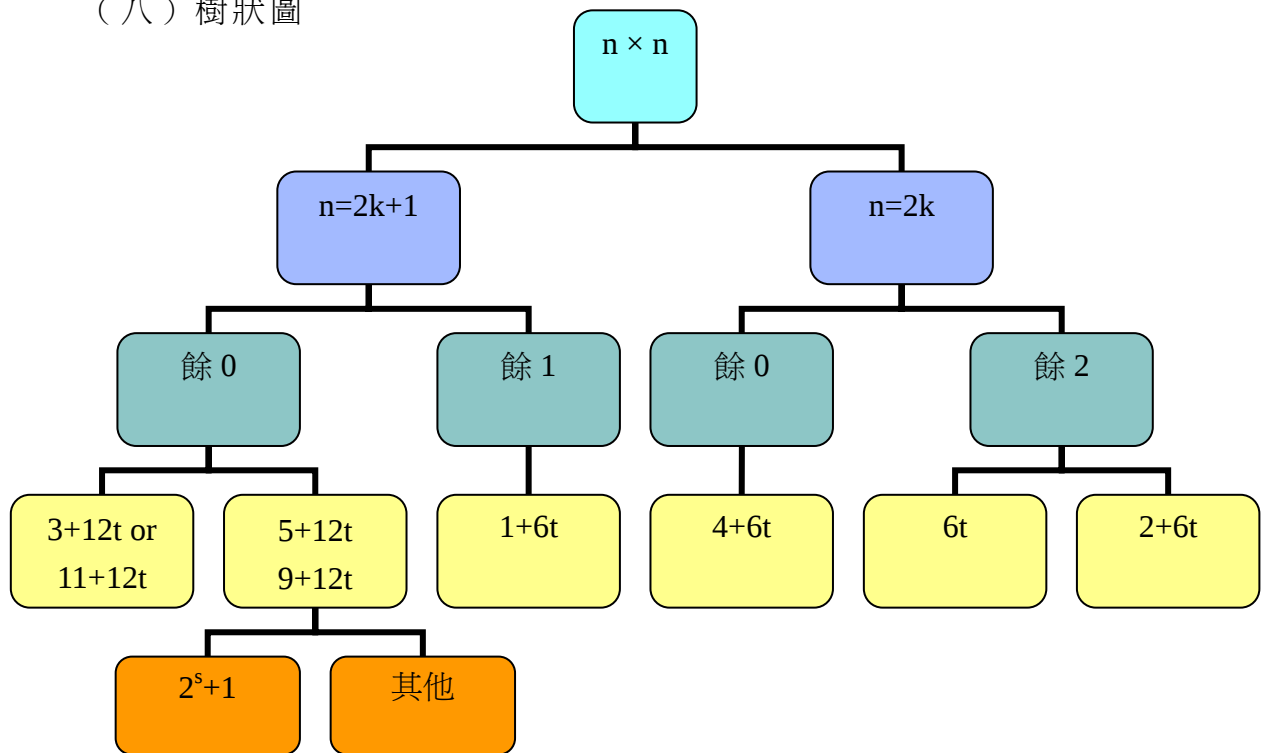


圖 32

觀察：5、9、17、33 均為 2^s+1 ， $s \in \mathbb{N}$ ，雖然 17 與 33 分別為第六組與第四組的數，但是實際掃雷環數卻等於推算掃雷環數，不需再加 1。

(八) 樹狀圖



圖例：
 自殺區數除以 3 數據間的關係，
 其中 $k \in \mathbb{N}$ ， $k \geq 3$ ， $t \in \mathbb{N}$ 。

圖 33

四、 $m \times n$ 之方形戰場（ m 列 n 行， $n > m$ ）的埋地雷區域圖（圖形請參見附錄）

(一) 作圖觀察

我們將邊長分為：偶數 $\times n$ 、奇數 $\times n$ ，經由大量作圖的方式，推出特定解，再從各項特定解中找出在偶數 $\times n$ 的情況的一般解。由於之前在討論 $n \times n$ 的情形中，我們發現圖形數據之間以 6 為等差級數成長，所以我們猜想，是不是在 $m \times n$ 的情形下，圖形之間的變化也是以 6 來變化，或是成一循環？

1. 在 m 為偶數的情況

(1) $6 \times n$ 之矩形戰場（圖 35~圖 40）

持續作圖，將數據列表（表八）：

表八

邊長 n	埋地雷區域數 (B)	自殺區域數 (D)	掃雷環數 (S)	題目所求之地雷數 (X)
7	10	3	1	9
8	12	4	2	10
9	14	5	2	12
10	16	6	2	14
11	18	7	3	15
12	20	8	3	17
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

(2) $8 \times n$ 之矩形戰場

持續作圖，將數據列表（表九）：

表九

邊長 n	埋地雷區域數 (B)	自殺區域數 (D)	掃雷環數 (S)	題目所求之地雷數 (X)
9	21	10	4	17
10	24	12	4	20
11	27	14	5	22
12	30	16	6	24
13	33	18	6	27
14	36	20	7	29
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

(3) $10 \times n$ 之矩形戰場

持續作圖，將數據列表（表十）：

表十

邊長 n	埋地雷區域數 (B)	自殺區域數 (D)	掃雷環數 (S)	題目所求之地雷數 (X)
11	36	21	7	29
12	40	24	8	32
13	44	27	9	35
14	48	30	10	38
15	52	33	11	41
16	56	36	12	44
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

(4) $12 \times n$ 之矩形戰場

持續作圖，將數據列表（表十一）：

表十一

邊長 n	埋地雷區域數 (B)	自殺區域數 (D)	掃雷環數 (S)	題目所求之地雷數 (X)
13	55	36	12	43
14	60	40	14	46
15	65	44	15	50
16	70	48	16	54
17	75	52	18	57
18	80	56	19	61
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

(5) $14 \times n$ 之矩形戰場

持續作圖，將數據列表（表十二）：

表十二

邊長 n	埋地雷區域數 (B)	自殺區域數 (D)	掃雷環數 (S)	題目所求之地雷數 (X)
15	78	55	19	59
16	84	60	20	64
17	90	65	22	68
18	96	70	24	72
19	102	75	25	77
20	108	80	27	81
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

(6) $16 \times n$ 之矩形戰場

持續作圖，將數據列表（表十三）：

表十三

邊長 n	埋地雷區域數 (B)	自殺區域數 (D)	掃雷環數 (S)	題目所求之地雷數 (X)
17	105	78	26	79
18	112	84	28	84
19	119	90	30	89
20	126	96	32	94
21	133	102	34	99
22	140	108	36	104
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

(7) 推出一般解

$$D = \left(\frac{m-2}{2} - 1 \right) (n-4) = \frac{(m-4)(n-4)}{2}$$

$$S = \left\lceil \frac{D+2}{3} \right\rceil, D \in \mathbb{N}.$$

$$\therefore X = \frac{(m-2)(n-2)}{2} - \left\lceil \frac{\frac{(m-4)(n-4)}{2} + 2}{3} \right\rceil, \text{ 其中 } m=2k, k \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}.$$

2. 在 m 為奇數的情況

(1) $3 \times n$ 之矩形戰場， $5 \times n$ 之矩形戰場（圖 41、圖 42）

此情況下較單純不多做討論。

(2) $7 \times n$ 之矩形戰場

持續作圖，將數據列表（表十六）：

表十六

邊長 n	埋地雷區域數 (B)	自殺區域數 (D)	掃雷環數 (S)	題目所求之地雷數 (X)
8	15	6	2	13
9	18	7	3	15
10	20	9	3	17
11	23	10	4	19
12	25	12	4	21
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

(3) $9 \times n$ 之矩形戰場（圖 43）

持續作圖，將數據列表（表十七）：

表十七

邊長 n	埋地雷區域數 (B)	自殺區域數 (D)	掃雷環數 (S)	題目所求之地雷數 (X)
10	28	15	5	23
11	32	17	6	26
12	35	20	7	28
13	39	22	8	31
14	42	25	9	33
15	46	27	9+1	36
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

(4) $11 \times n$ 之矩形戰場 (圖 44)

持續作圖，將數據列表 (表十八)：

表十八

邊長 n	埋地雷區域數 (B)	自殺區域數 (D)	掃雷環數 (S)	題目所求之地雷數 (X)
12	45	28	10	35
13	50	31	11	39
14	54	35	12	42
15	59	38	13	46
16	63	42	14	49
17	68	45	15+1	52
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

(5) $13 \times n$ 之矩形戰場

持續作圖，將數據列表 (表十九)：

表十九

邊長 n	埋地雷區域數 (B)	自殺區域數 (D)	掃雷環數 (S)	題目所求之地雷數 (X)
14	66	45	15	51
15	72	49	17	55
16	77	54	18	59
17	83	58	20	63
18	88	63	21	67
19	94	67	23	71
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

(6) $15 \times n$ 之矩形戰場 (圖 45)

持續作圖，將數據列表 (表二十)：

表二十

邊長 n	埋地雷區域數 (B)	自殺區域數 (D)	掃雷環數 (S)	題目所求之地雷數 (X)
16	91	66	22	69
17	98	71	24	74
18	104	77	26	78
19	111	82	28	83
20	117	88	30	87
21	124	93	31+1	92
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

(7) 17×n 之矩形戰場

持續作圖，將數據列表（表二十一）：

表二十一

邊長 n	埋地雷區域數 (B)	自殺區域數 (D)	掃雷環 數 (S)	題目所求 之地雷數 (X)
18	120	91	31	89
19	128	97	33	95
20	135	104	35	100
21	143	110	37	106
22	150	117	39	111
23	158	123	41+1	116
· : · :	· : · :	· : · :	· : · :	· : · :

(8) 一般解的推導

(A) 當 $n=2h$, $h \in \mathbb{N}$ 時

$$B = \frac{(m-2)(n-2)}{2}$$

$$D = \left(\frac{m-3}{2}\right)\left(\frac{n-4}{2}\right) + \left(\frac{m-3}{2} - 1\right)\left(\frac{n-4}{2}\right) = \frac{(m-4)(n-4)}{2}$$

$$S = \left\lceil \frac{D+2}{3} \right\rceil, D \in \mathbb{N}.$$

$$\therefore X = \frac{(m-2)(n-2)}{2} - \left\lceil \frac{\frac{(m-4)(n-4)}{2} + 2}{3} \right\rceil, \text{其中 } m=2k+1, k \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}.$$

(B) 當 $n=2h+1$, $h \in \mathbb{N}$ 時（不含特殊型）

$$B = \frac{(m-2)(n-2)+1}{2}$$

$$D = \left(\frac{m-3}{2}\right)\left(\frac{n-3}{2} - 1\right) + \left(\frac{m-3}{2} - 1\right)\left(\frac{n-3}{2}\right) = \frac{(m-4)(n-4)-1}{2}$$

$$S = \left\lceil \frac{D+2}{3} \right\rceil, D \in \mathbb{N}.$$

$$\therefore X = \frac{(m-2)(n-2)+1}{2} - \left\lceil \frac{\frac{(m-4)(n-4)-1}{2} + 2}{3} \right\rceil.$$

(C) 特殊型：當 $m=3+6t$ 或 $m=5+6t$ 而 $n=m+6h$, $t \in \mathbb{N}$, $h \in \mathbb{N}$ 時

$$\text{將 } m=3+6t \text{ 和 } n=m+6h=3+6(t+h) \text{ 代入公式 } D = \frac{(m-4)(n-4)-1}{2},$$

$$\text{可得 } D = \frac{(6t-1)(6(t+h)-1)-1}{2} = \frac{(6a+1)-1}{2} = 3a, a \in \mathbb{N};$$

$$\text{將 } m=5+6t \text{ 和 } n=m+6h=5+6(t+h) \text{ 代入公式 } D = \frac{(m-4)(n-4)-1}{2},$$

$$\text{可得 } D = \frac{(6t+1)(6(t+h)+1)-1}{2} = \frac{(6b+1)-1}{2} = 3b, b \in \mathbb{N};$$

即 D 恆為 3 的倍數。

按照前面 1 個掃雷環可控制 3 個自殺區的想法，

$$\text{掃雷環數 } S \text{ 應為 } \frac{\frac{(m-4)(n-4)-1}{2}}{3},$$

$$\text{但在此情形中實際掃雷環數 } S \text{ 卻為 } \frac{\frac{(m-4)(n-4)-1}{2}}{3} + 1,$$

$$\therefore X = B - S = \frac{(m-2)(n-2)+1}{2} - \left(\frac{\frac{(m-4)(n-4)-1}{2}}{3} + 1 \right).$$

五、規律性的埋地雷法

我們在作圖時也依照奇數、偶數及 2 的次方加 1 型分成三種畫法：

(一) 在 $n \times n$ 中， $n=2^s+1$ (3, 5, 9, 17, 33, ...) 時，圖形皆為 4 個前一圖形所組成的，且這些類型的圖形都是唯一的沒有其他形式，此一類型在前面以討論過，故在此不多做敘述。

(二) 在 $n \times n$ 中， n 為奇數時及在 $m \times n$ 中， m 為奇數時 (圖 46)：

我們必須將圖分為上下兩個部分來看：

1. 不論上半部的圖為如何，下半部的圖皆須為此種圖形，為了便於辨識，用黑線表示掃雷環控制的自殺區。
2. 在下半部的圖中，掃雷環放置的位置為 (4, m-3)、(6, m-3)、(8, m-3) … 依序向右作圖。
3. 上半部的圖中，掃雷環放置的位置則是由 (4, 4)、(4, 6)、(4, 8) … 及 (7, 3)、(7, 5)、(7, 7) 依序向下作圖，再從 (10, 4)、(10, 6)、(10, 8) … 及 (13, 3)、(13, 5)、(7, 7) … 繼續作圖，即 x 座標由 4 和 7 開始以差 6 的等差級數增加，而 y 作標則分別從 4 和 3 開始以差 2 的等差級數增加，並視圖形狀況而停止。

(三) 在 $n \times n$ 中， n 為偶數時及在 $m \times n$ 中， m 為偶數時 (圖 47)：

掃雷環放置的位置是由 (4, 4)、(4, 6)、(4, 8) … 及 (7, 3)、(7, 5)、(7, 7) 依序向下作圖，再從 (10, 4)、(10, 6)、(10, 8) … 及 (13, 3)、(13, 5)、(7, 7) … 繼續，即 x 座標由 4 和 7 開始以差 6 的等差級數增加，而 y 作標則分別從 4 和 3 開始以差 2 的等差級數增加，並視圖形狀況而停止。

六、對於特殊型要比推測多 1 個掃雷環的證明

(一) 特殊型的條件：

1. 邊長 n 為奇數。
2. 自殺區數 D 為 3 的倍數不妨令 $D=3P$, $P \in \mathbb{N}$ 。

(二) 正確解法的條件：

1. 整個戰場須由數個“通道”填滿。
2. 每個“通道”都必須要有“出口”。

(三) 說明：

一個綠色箭頭代表一個“通道”，黑色虛線表“出口”，黃線以上或以外的掃雷環都可以當作“出口”，即掃雷環坐標符合下式者可為“出口”：

$$\begin{cases} (x-(n-2))(x-2) \geq 0 \\ (y-(n-2))(y-2) \geq 0 \end{cases}, \text{ 其中 } x、y \text{ 分別表掃雷環之 } x \text{ 坐標和 } y \text{ 坐標，} n$$

表圖形之邊長，若一個“出口”獨立，則也算是一個“通道”。

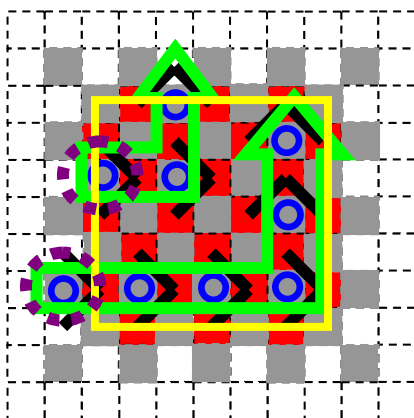


圖 48

由注意事項，我們知道至少需要 $\frac{D}{3}=P$ 個掃雷環，假設存在 $S=P$ 的情況，則每個掃雷環都恰控制 3 個空白方格且不互相重疊。(假設有存在控制的小方格重疊，或只能控制 <3 個空白方格的掃雷環，則必有 $P=\frac{D}{3}<S$ ，矛盾，故得證)

將所有需要放掃雷環的可能處作為頂點，則可得出圖 49 藍線構出控制的紅格與圖 50 的白格有一對一對應，故可以將紅格轉為白格，則掃雷環與其三個控制方格可變形為“虧格”(圖 51)。

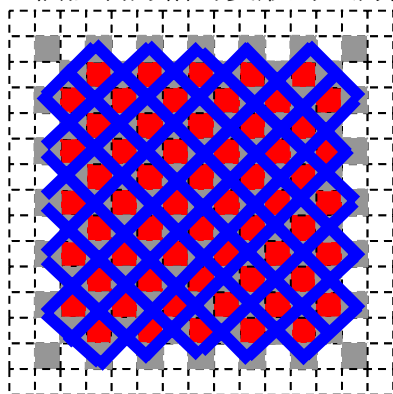


圖 49

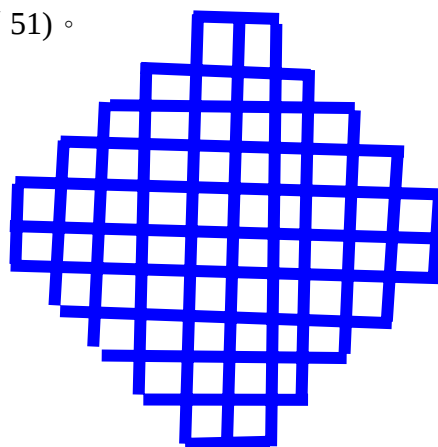


圖 50

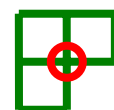
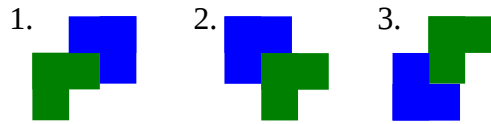


圖 51

而“通道”的形成在這種模型裡面可解釋為：
 後一個虧格的缺口要接著前一個虧格，而“通道虧格”為第一個虧格。

：後一個虧格，：前一個虧格

相接兩虧格只有以下三種連接法：



如果把他們放在圖 52 中並坐標化，我們發現以上三種連接法其掃雷環座標兩兩之間有一個性質：

若兩掃雷環坐標為 (x_1, y_1) , (x_2, y_2) ，則必有 $x_1 + y_1 = x_2 + y_2 \pmod{2}$ 。

因為整條“通道”上的虧格都用此三方法相接，所以對於同一通道有：
 $x_{\text{出口}} + y_{\text{出口}} = x + y \pmod{2} \cdots (a)$ ，其中 (x, y) 為通道上所有掃雷環的坐標， $(x_{\text{出口}}, y_{\text{出口}})$ 為出口虧格之坐標(圖 52 之黃虧格)。但因為邊長 n 為奇數，其形式必同圖 52，即上下左右之邊長皆為 2。

以紅色圈圈代表出口掃雷環所有可能放置的位置，則兩兩之間也存在
 $x_1 + y_1 = x_2 + y_2 \pmod{2} \cdots (b)$ 的關係，其中 $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ 表兩紅圈圈的坐標由性質 (a)、(b) 可以歸納出一個結論：

若存在 $S=P$ 個掃雷環使戰場成立，則有 $x_i + y_i = x_j + y_j \pmod{2}$, for
 $\forall i, j \in \{1, 2, 3, \dots, P\}$ ，其中 (x_k, y_k) 表第 k 個掃雷環坐標即所有戰場上掃雷環的 x 、 y 坐標和之奇偶必須相同，圖 53 表所有可能放掃雷環處。

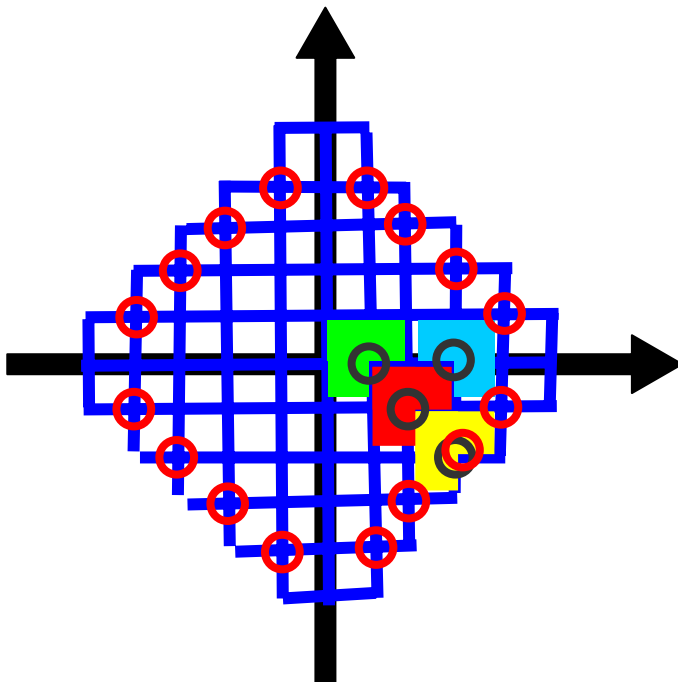


圖 52

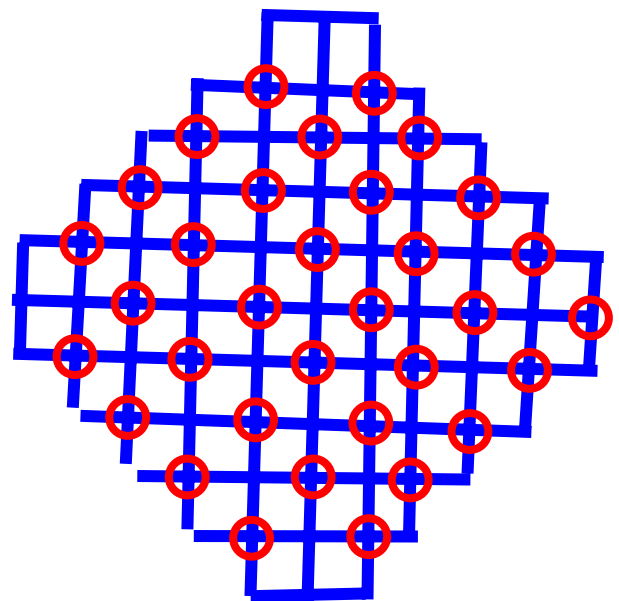


圖 53

我們稱圖 53 為 $L=10$ 之菱形圖， L 與 n 的關係為 $L=(n-5)$ ，根據已知 n 為奇數，亦知其頂邊長皆為 2，所以在特殊型中，其菱形圖必形如圖 54，注意圖中綠色方格，已知掃雷環只能放置於圖中紅圈處，若要將綠色方格都填滿，則虧格放法只能像圖右下方從頂邊沿斜邊相鄰放置這是“必然排法”，而我們可以看到其最下面一格“必然”無法放置，矛盾，所以假設 $S=P$ 的情況不存在。

得證此種特殊型至少需要 $S=P+1$ 個掃雷環。

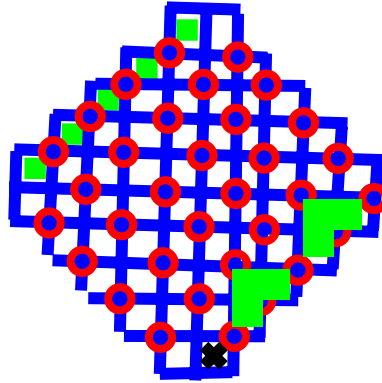


圖 54

上述證明的補條件：

由小方格數 D 為 3 的倍數可知：

$$\frac{(n-4)^2 - 1}{2} = 0 \pmod{3} \Leftrightarrow (n-4)^2 = 1 \pmod{6} \Leftrightarrow (n-4) = 1 \text{ or } 5 \pmod{6}$$

$$\Leftrightarrow (n-4) = 1 \text{ or } 5 \text{ or } 7 \text{ or } 11 \pmod{12} \cdots (c)。$$

$$\text{又 } L=(n-5)=2 \pmod{4} \Leftrightarrow (n-4)=3 \pmod{4}$$

$$\Leftrightarrow (n-4) = 3 \text{ or } 7 \text{ or } 11 \pmod{12} \cdots (d)。$$

由 (c)、(d) 可得：

$$(n-4) = 7 \text{ or } 11 \pmod{12} \Leftrightarrow n = 3 \text{ or } 11 \pmod{12}。$$

(三) 分析：

在 n 為奇數且自殺區數為 3 的倍數時可導出：

$$(n-4) = 1 \text{ or } 5 \pmod{6} \Leftrightarrow n = 5 \text{ or } 3 \pmod{6}，$$

若改以 12 為模，則生成 4 類：

$n = 3, 5, 9 \text{ or } 11 \pmod{12}$ ，其中 $n = 3 \text{ or } 11 \pmod{12}$ 類經證明為特殊形，掃雷環數要多一個但對於 $n = 5 \text{ or } 9 \pmod{12}$ 類，我們還沒證出來，而 $n = 2^s + 1$ 型就是在這一類當中，因為 $s > 2$ ，所以 $2^s + 1 = 1 \pmod{4} \Leftrightarrow 2^s + 1 = 1, 5, 9 \pmod{12}$ ，

但 $2^s = 1 \text{ or } 2 \pmod{3} \Leftrightarrow 2^s + 1 = 0 \text{ or } 2 \pmod{3}$ ，顯然 $2^s + 1 = 1 \pmod{12}$ 不合，可以得到：
 $2^s + 1 = 5, 9 \pmod{12}。$

在這一類中經觀察我們證明出 $2^s + 1$ 類的掃雷環數是不用再加 1 的，我們稱之為特殊型中的例外型但是除了這類之外的其他 n 值符合 $n = 5 \text{ or } 9 \pmod{12}$ 我們只猜測其掃雷環數無論如何必須再加 1 卻無法證明出來。

七、圓柱側面上的埋地雷

在做完平面四邊形的埋地雷後，我們決定將方格紙的兩邊接合起來形成一個沒有底面的圓柱，並嘗試在側面上埋地雷， $m \times n$ 表示高為 m 而底面圓周長為 n 的圓柱。

(一) 當 m 值為 3、4、5 時，由於情況特殊故在此暫不加以討論。

(二) 當 $m \in \mathbb{N}$ 而 $n=2h+1, h \in \mathbb{N}$ 時

由於 n 為奇數，所以原平面四邊形在圍成圓柱後其左右兩邊只有一邊可以埋上地雷，否則會違反注意事項中相鄰區域不能埋地雷的限制，即會有一行無法埋下任何地雷，實際可埋地雷的行數為 $(n-1)$ ，故此情況 $m \times n$ 與平面四邊形中 $m \times (n+1)$ 時的情況完全相同。代入原公式可得(亦可由平面四邊形中的推導方法求得)：

$$X = \frac{(m-2)((n+1)-2)}{2} - \left[\frac{\frac{(m-4)((n+1)-4)}{2} + 2}{3} \right],$$

$$\text{即 } X = \frac{(m-2)(n-1)}{2} - \left[\frac{\frac{(m-4)(n-3)}{2} + 2}{3} \right].$$

(三) 當 $m=2k+1, k \in \mathbb{N}$ 而 $n=2h, h \in \mathbb{N}$ 時

因為 n 為偶數，所以將原平面四邊形圍成圓柱後必須將其左右兩邊都埋上地雷，由於在另兩邊都埋上地雷後就只剩上下兩邊有空白區域可以讓內部相連而不會有自殺區產生，而由原平面四邊形 $m \times n$ 的情況中的規律性畫法可知， m 值為奇數時，圖形必須分為兩部份討論，因此若自殺區數為 3 的倍數，即 n 值為 $6t, t \in \mathbb{N}$ 時，在下半部份的圖中必會產生一個大的自殺區，所以就還要再增加一枚掃雷環才行，此即原平面中的特殊型。

由原來平面四邊形中的推導方法可求得其公式：

$$\text{非特殊型：} X = \frac{(m-2)n}{2} - \left[\frac{\frac{(m-4)n}{2} + 2}{3} \right],$$

$$\text{特殊型：} X = \frac{(m-2)n}{2} - \left(\frac{\frac{(m-4)n}{2}}{3} + 1 \right).$$

(四) 當 $m=2k, k \in \mathbb{N}$ 而 $n=2h, h \in \mathbb{N}$ 時

因為 n 為偶數，所以將原平面四邊形圍成圓柱後必須將其左右兩邊都埋上地雷，由於在另兩邊都埋上地雷後就只剩上下兩邊有空白區域可以讓內部相連而不會有自殺區產生，而由原平面四邊形

$m \times n$ 的情況中的規律性畫法可知， m 值為偶數時，圖形畫法不需分兩部份討論，而且其畫法是以上下兩邊為與外界相連的出口，故此情況中不會出現大的自殺區域，即沒有特殊型。

由原來平面四邊形中的推導方法可求得其公式：

$$X = \frac{(m-2)n}{2} - \left\lfloor \frac{\frac{(m-4)n}{2} + 2}{3} \right\rfloor。$$

陸、研究結果

一、在 $n \times n$ 之方格紙板中，我們求得可埋下地雷數之極大值：

(一) $n=2k, k \in \mathbb{N}$

$$X = \frac{(n-2)^2}{2} - \left\lfloor \frac{\frac{(n-4)^2}{2} + 2}{3} \right\rfloor。$$

(二) $n=2k+1, k \in \mathbb{N}$ (不含特殊型和例外型)

$$X = \frac{(n-2)^2 + 1}{2} - \left\lfloor \frac{\frac{(n-4)^2 - 1}{2} + 2}{3} \right\rfloor。$$

(三) 特殊型： $n=3+6t$ 或 $n=5+6t, t \in \mathbb{N}$ (不含例外型)

$$X = \frac{(n-2)^2 + 1}{2} - \left(\frac{\frac{(n-4)^2 - 1}{2}}{3} + 1 \right)，並證明。$$

(三) 例外型： $n=2^s + 1, s \in \mathbb{N}$

$$X = \frac{(n-2)^2 + 1}{2} - \frac{\frac{(n-4)^2 - 1}{2}}{3}。$$

二、在 $m \times n$ 之方格紙板中，我們求得可埋下地雷數之極大值：

(一) $m \times n=2k, k \in \mathbb{N}$

$$X = \frac{(m-2)(n-2)}{2} - \left\lfloor \frac{\frac{(m-4)(n-4)}{2} + 2}{3} \right\rfloor。$$

(二) $m \times n = 2k+1$, $k \in \mathbb{N}$

$$1. \text{ 非特殊型: } X = \frac{(m-2)(n-2)+1}{2} - \left[\frac{\frac{(m-4)(n-4)-1}{2} + 2}{3} \right]。$$

2. 特殊型: 當 $m=3+6t$ 或 $m=5+6t$ 而 $n=m+6h$, $t \in \mathbb{N}$, $h \in \mathbb{N}$ 時

$$X = \frac{(m-2)(n-2)+1}{2} - \left(\frac{\frac{(m-4)(n-4)-1}{2}}{3} + 1 \right)。$$

三、規律性的埋地雷法

(一) $n \times n$ 中, $n=2^s+1$ ($3, 5, 9, 17, 33, \dots$) 型。

(二) $n \times n$ 中, n 為奇數型及 $m \times n$ 中, m 為奇數型。

(三) $n \times n$ 中, n 為偶數型及 $m \times n$ 中, m 為偶數型。

四、圓柱側面上的埋地雷

(一) 當 $m \in \mathbb{N}$ 而 $n=2h+1$, $h \in \mathbb{N}$ 時

$$X = \frac{(m-2)(n-1)}{2} - \left[\frac{\frac{(m-4)(n-3)}{2} + 2}{3} \right]。$$

(二) 當 $m=2k+1$, $k \in \mathbb{N}$ 而 $n=2h$, $h \in \mathbb{N}$ 時

$$\text{非特殊型: } X = \frac{(m-2)n}{2} - \left[\frac{\frac{(m-4)n}{2} + 2}{3} \right],$$

$$\text{特殊型: } X = \frac{(m-2)n}{2} - \left(\frac{\frac{(m-4)n}{2}}{3} + 1 \right)。$$

(三) 當 $m=2k$, $k \in \mathbb{N}$ 而 $n=2h$, $h \in \mathbb{N}$ 時

$$X = \frac{(m-2)n}{2} - \left[\frac{\frac{(m-4)n}{2} + 2}{3} \right]。$$

柒、討論

從此研究中,我們將方塊切割轉換為平面中長方形和正方形的埋地雷情況來討論,以作圖方式求出相關數據、找出規律埋地雷方法,將其可以埋之地雷數算出,目前可利用所謂“暴力法”的方式來撰寫題目的解題程式,以檢驗研究出的圖形與數據正確與否,並因此可以窮舉法證明我們在這個研究上的正確性,但尚無法以數學方式加

以證明，而特殊型的證明方法也不夠完善，且在邊數變大的時候”暴力法”的問題就暴露了出來，造成需要很多的時間才能將程式跑完，目前，如何改善程式使電腦能更人性化的去判斷及減少耗時也是一項需完成的目標。進一步地，我們以平面四邊形中的埋地雷方法及規則為基礎，討論了圓柱側邊上的情形。接著，如果再將圓柱的兩個底接合起來成“甜甜圈”型，又是另一個可前進的方向。

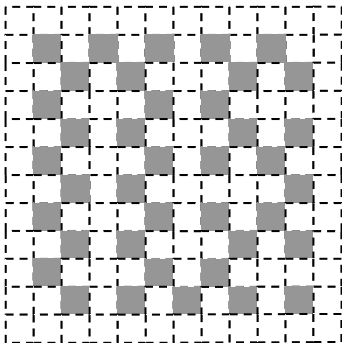
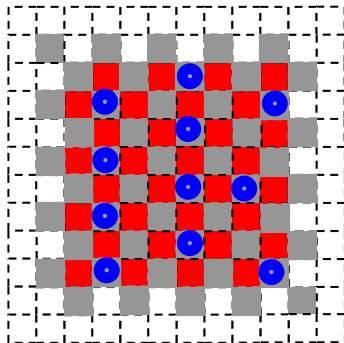
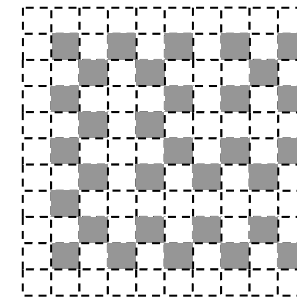
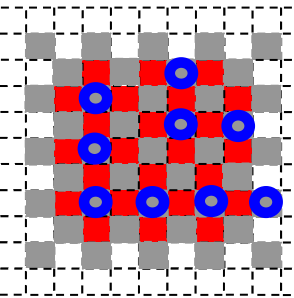
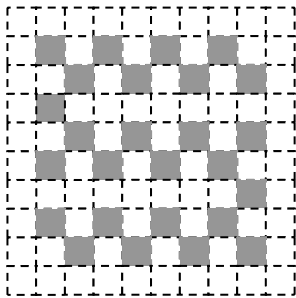
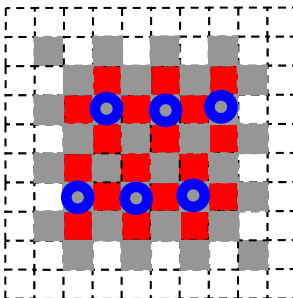
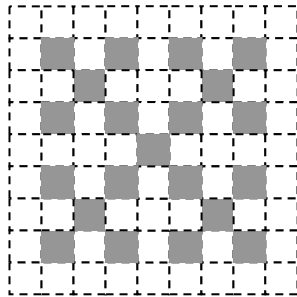
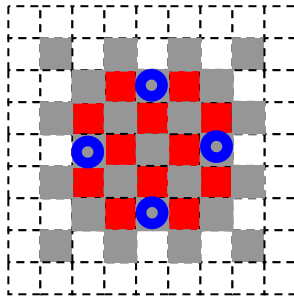
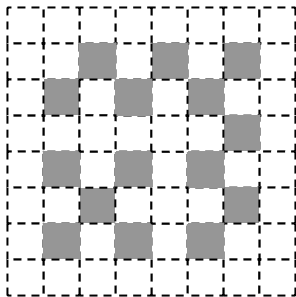
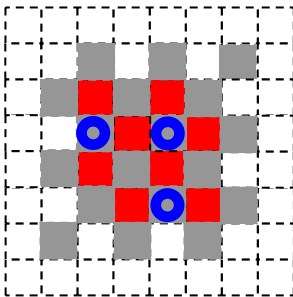
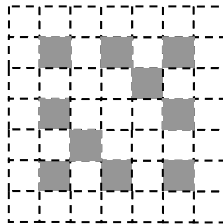
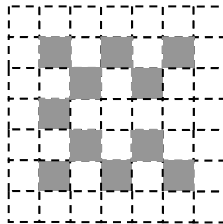
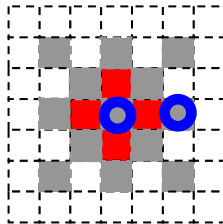
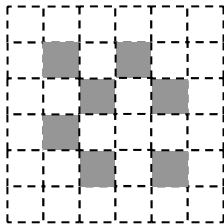
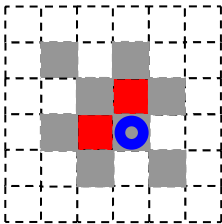
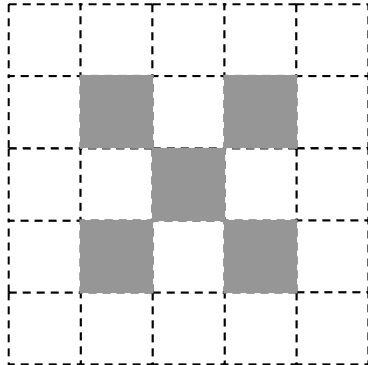
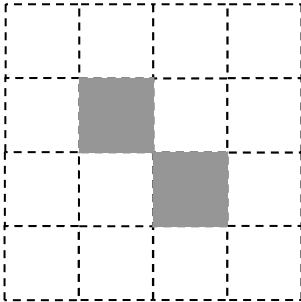
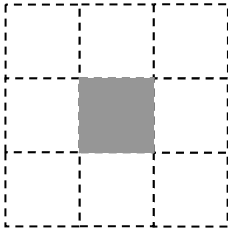
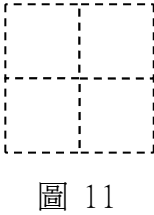
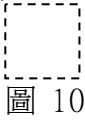
捌、結論

我們在這個研究中將方塊切割轉換為另一種情境來探討，藉由作圖發現圖形型式的多樣，推測出所有平面中 $n \times n$ 與 $m \times n$ 區域中埋地雷的相關數據，發現了圖形的規律性，並輔以程式加以配合所做出的圖抽絲剝繭，確定研究的正確性，也找出圖形的規律性並將觀察到的數據列出，進一步的統整公式，使其能有較完整統一的形式，進一步的推廣至圓柱側邊來探討，將數據整理後也推出了公式。

玖、參考資料及其他

- 一、2003 年環球城市數學競賽春季賽國中組試題高級卷第 5 題
- 二、呂亦翔、謝政佑 斬不斷理還亂一方塊切割 2005 年台灣國際科學展覽會
- 三、林福來、李恭晴、徐正梅、陳冒海、陳順宇 修訂版 高級中學數學第四冊 台南 南一出版社 P.81~P.103 中華民國九十四年二月

附錄



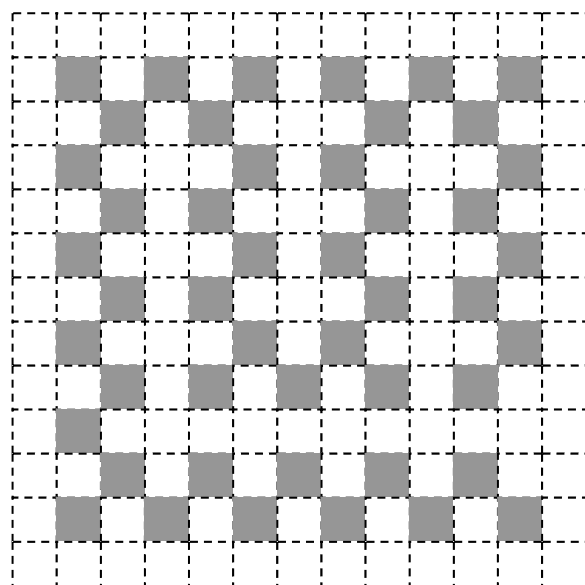
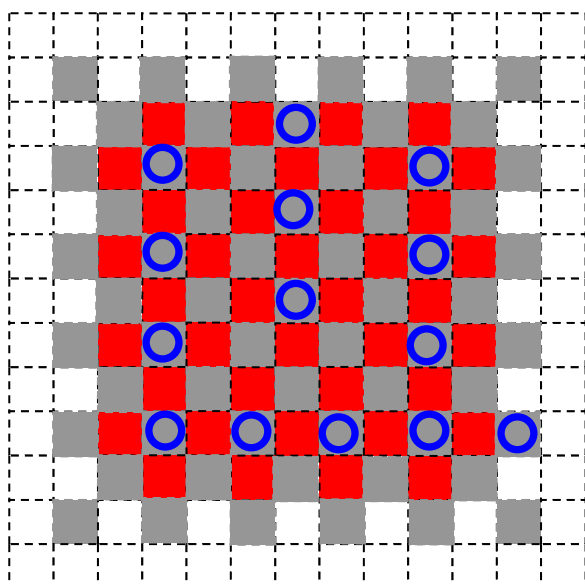


圖 22

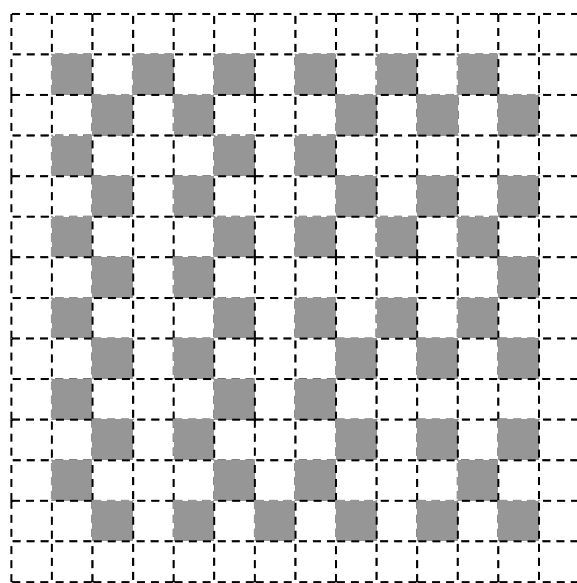
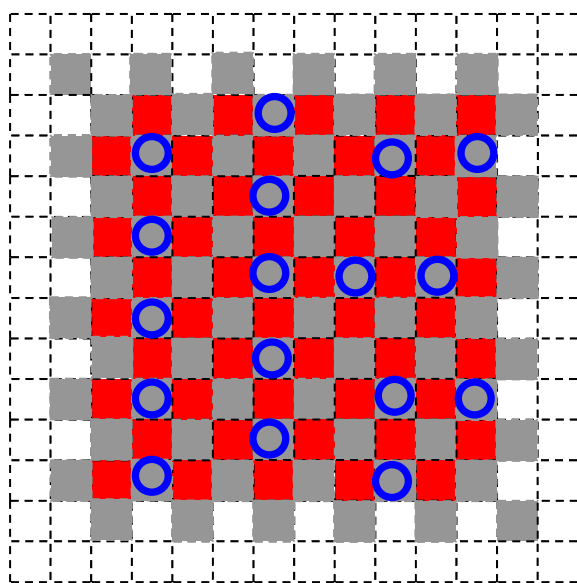


圖 23

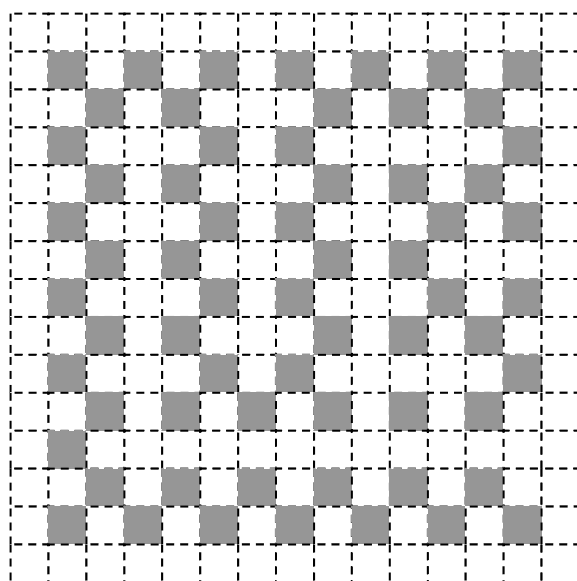
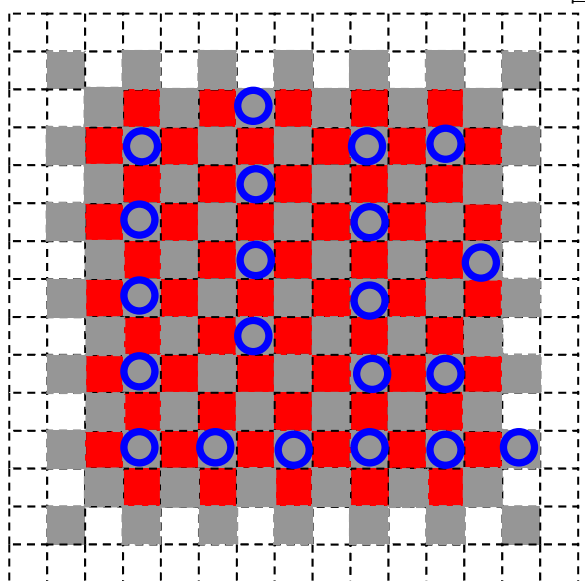


圖 24

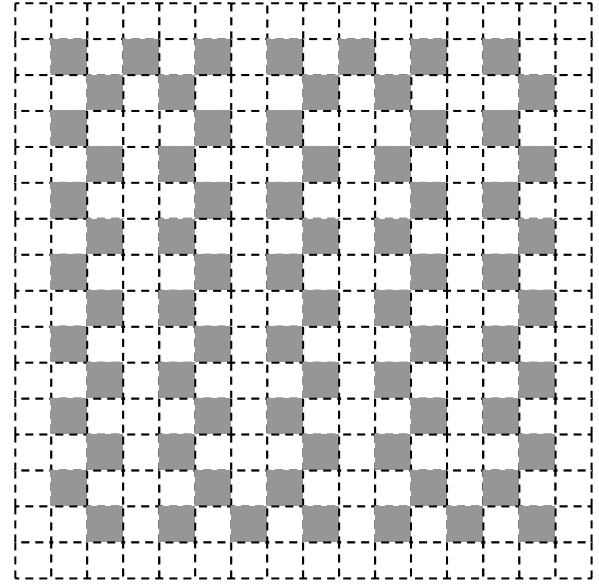
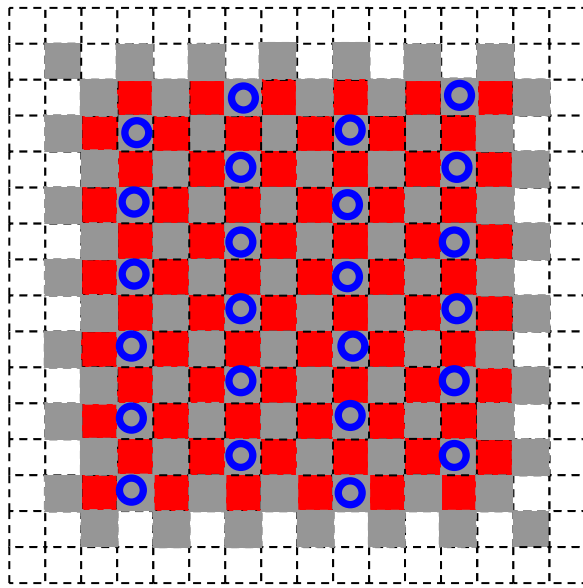


圖 25

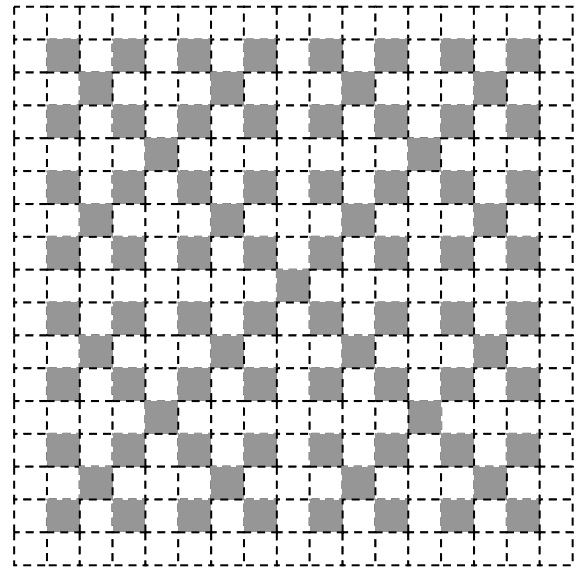
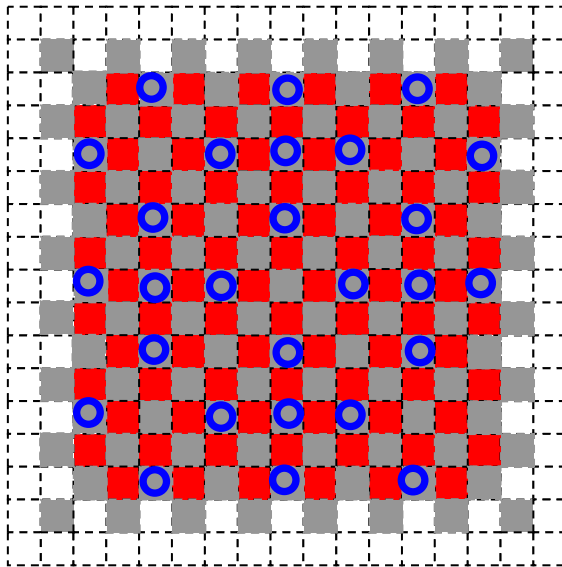


圖 26

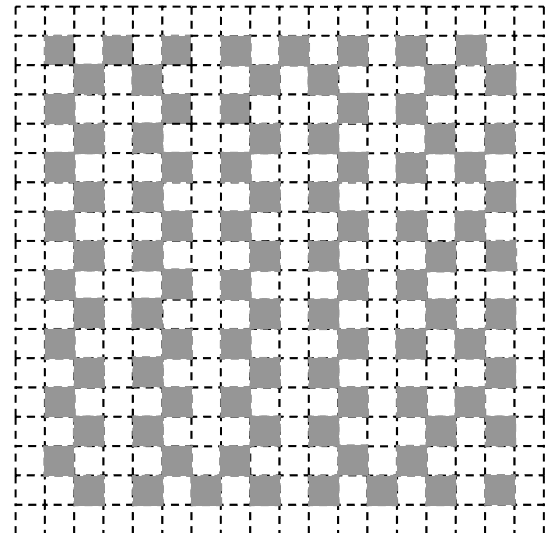
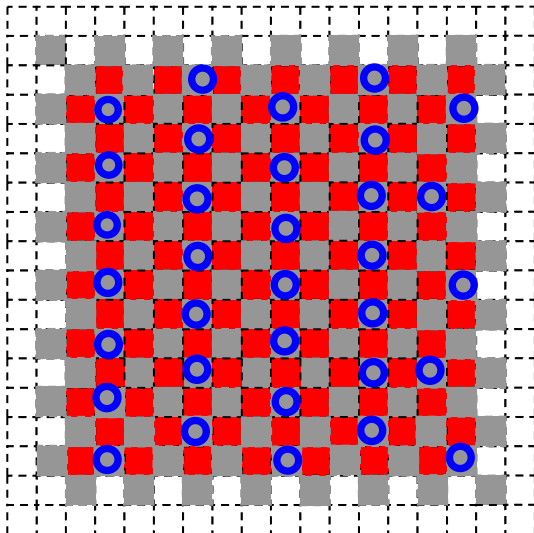


圖 27

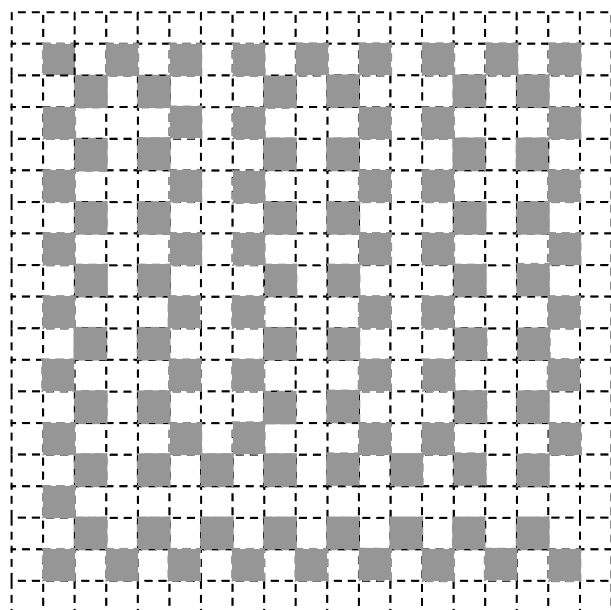
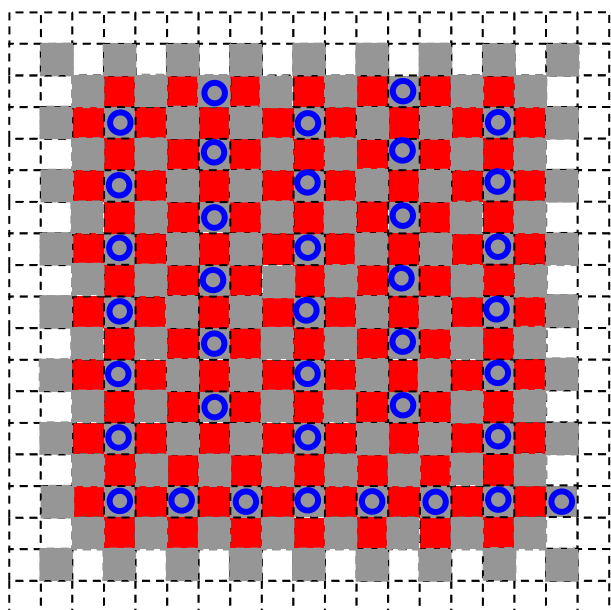


圖 28

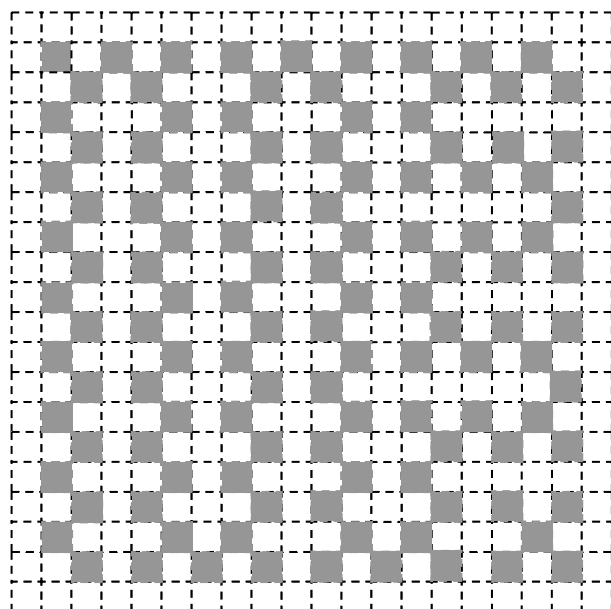
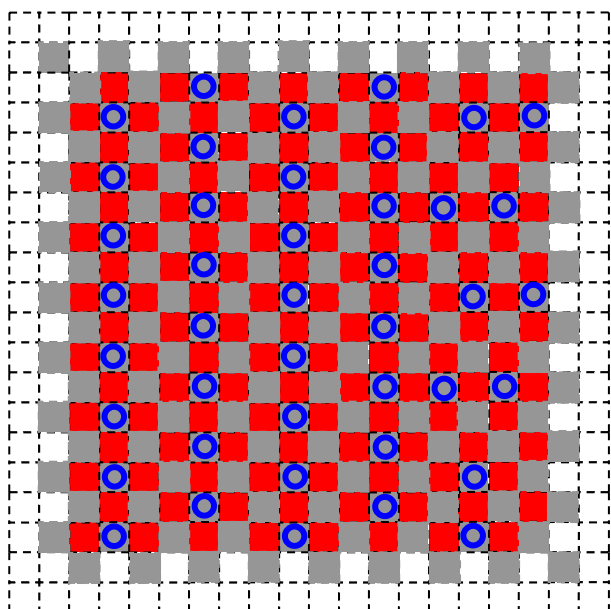


圖 29

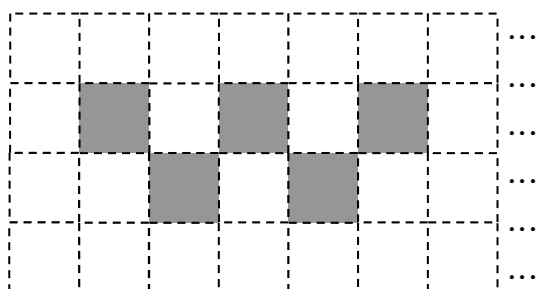


圖 34

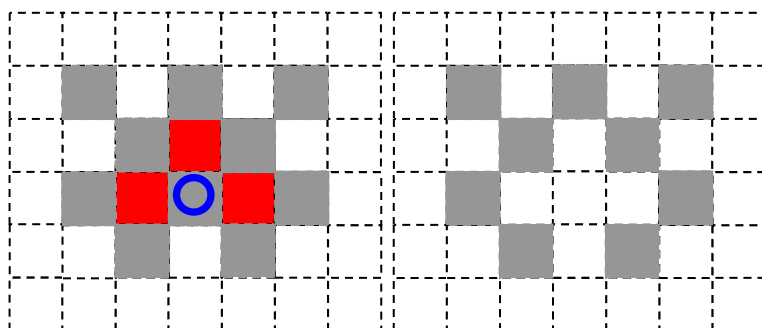


圖 35

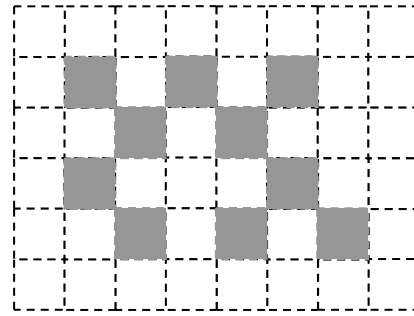
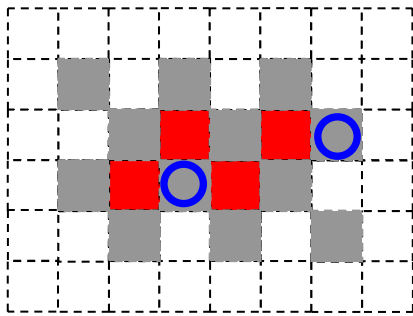


圖 36

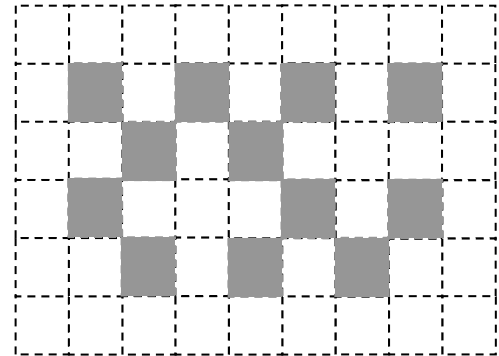
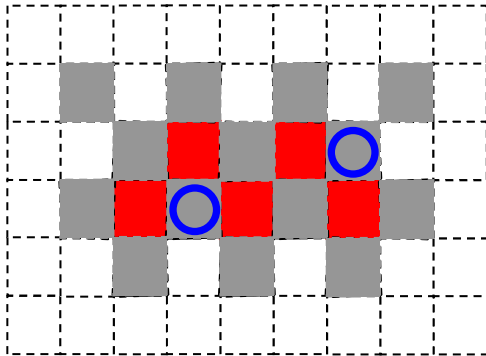


圖 37

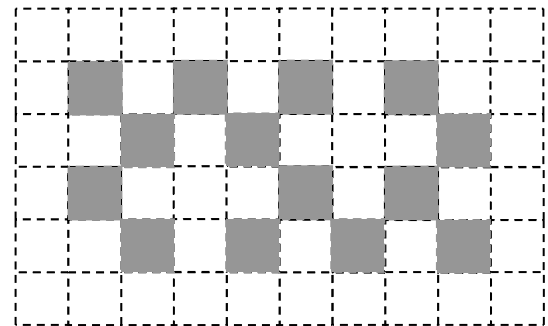
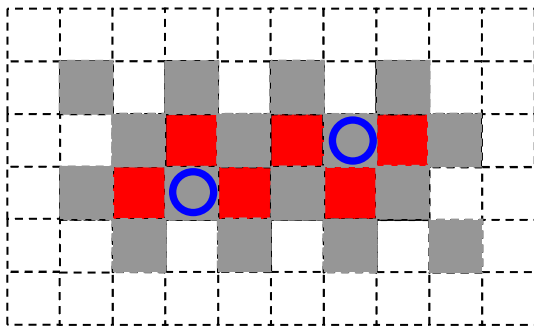


圖 38

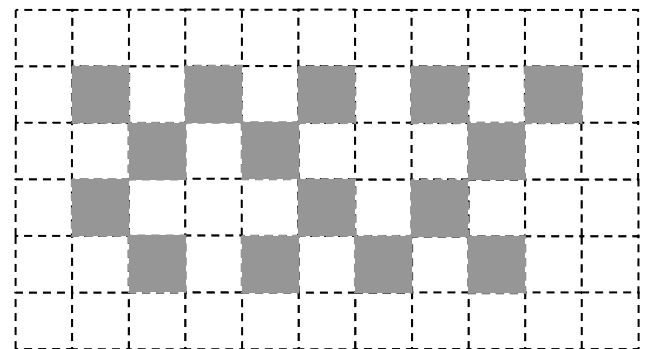
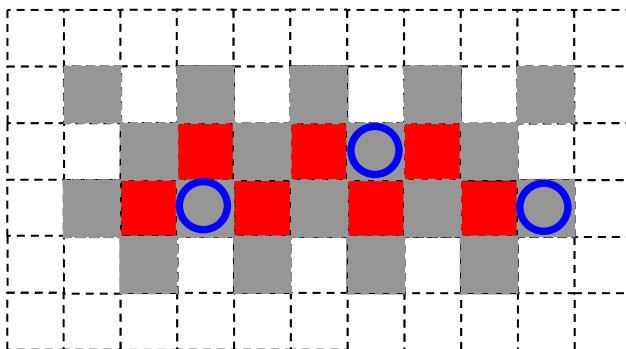


圖 39

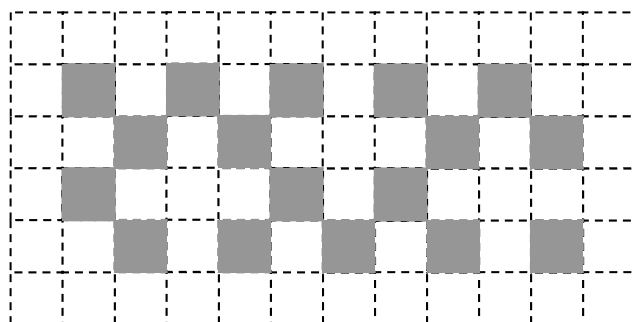
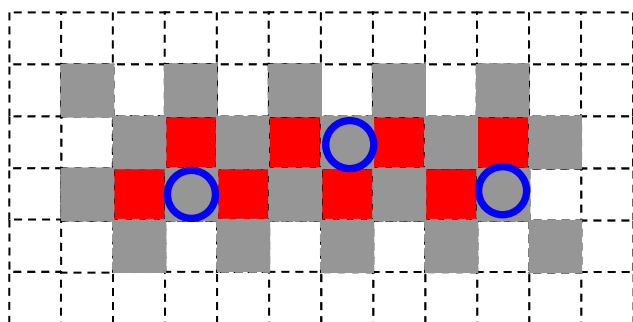


圖 40

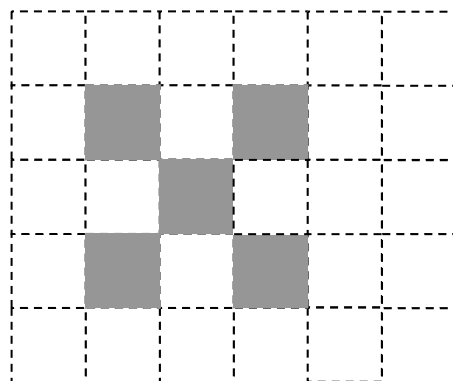
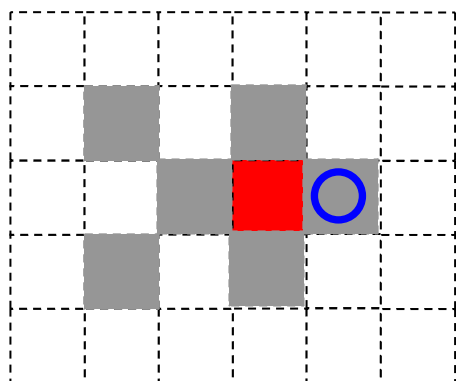


圖 41

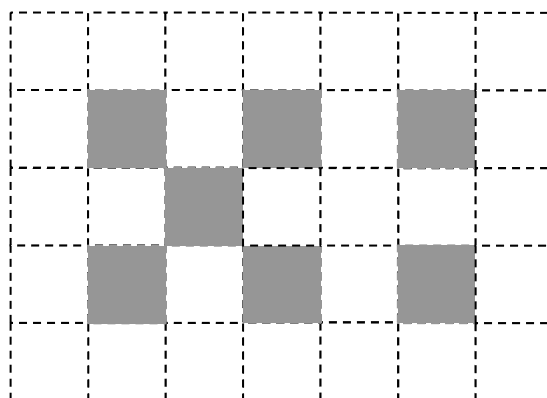
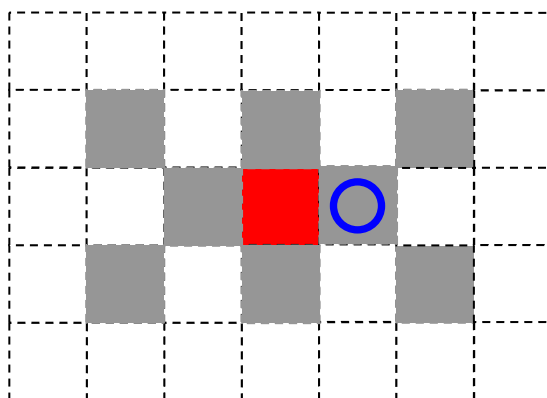


圖 42

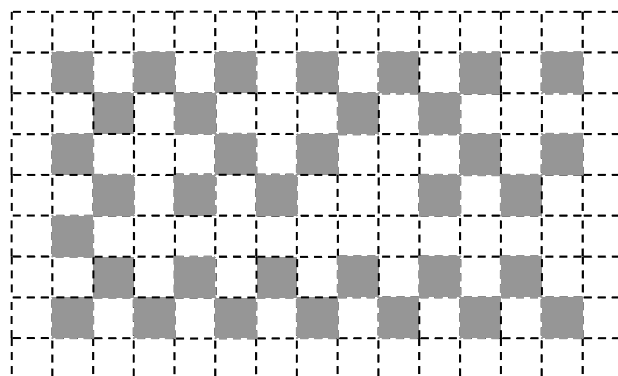
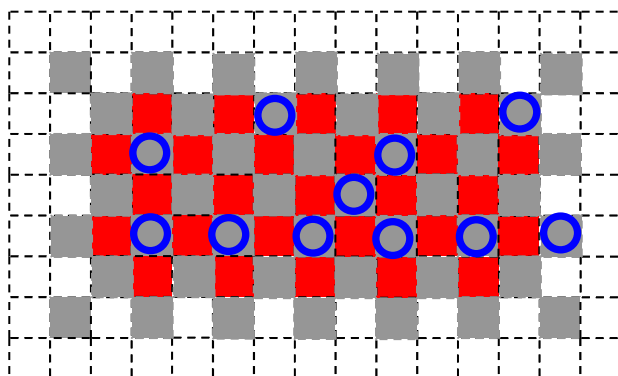


圖 43

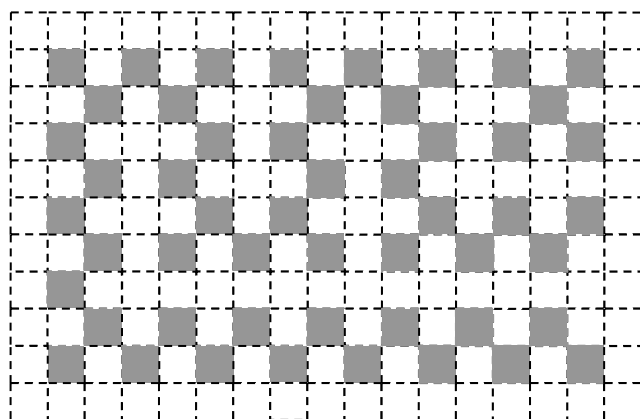
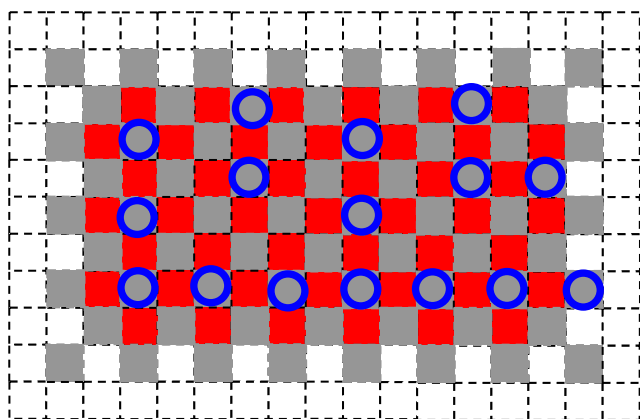


圖 44

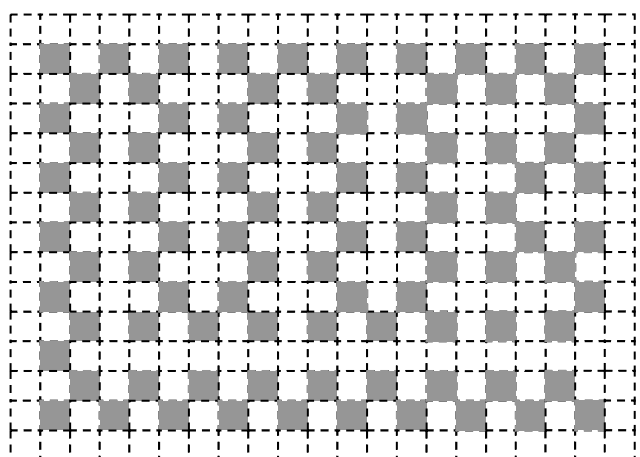
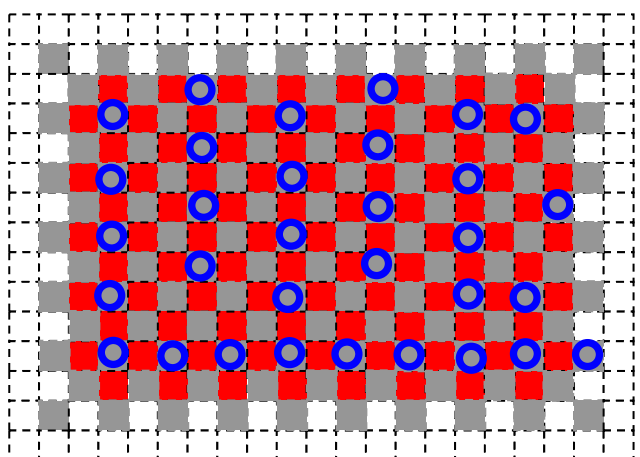


圖 45

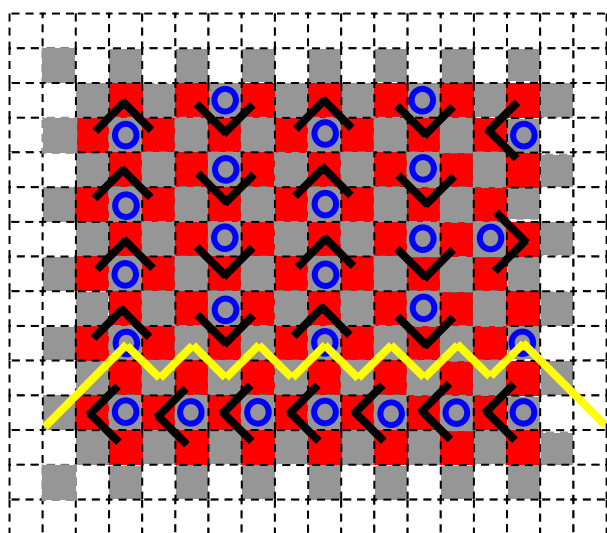


圖 46

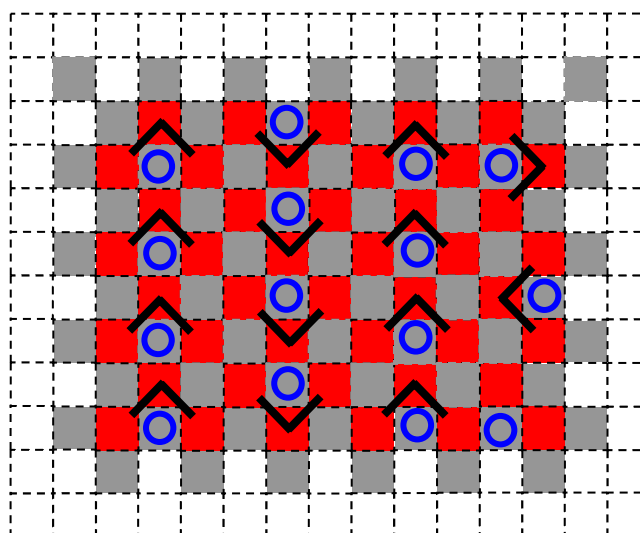


圖 47

中華民國第四十五屆中小學科學展覽會
評 語

高中組 數學科

040410

步步為營暗藏玄機

國立彰化高級中學

評語：

1. 小秘密：科展成功之道為小題大做。
2. 研究過程通常由特殊性進入一般性，本作品由簡單遊戲出發，並能透過觀察，歸納的過程，找出解決問題的方法。