

中華民國第四十五屆中小學科學展覽會  
作品說明書

---

高中組 數學科

040402

總站該設在哪裡--另類的費馬點研究

國立臺南女子高級中學

作者姓名：

高二 許瑋婷 高二 李兆甯 高一 李巧君  
高一 黃偉庭

指導老師：

廖婉雅 林榮男

中華民國第四十五屆中小學科學展覽會

作品說明書

科 別：數學

組 別：高中組

作品名稱：總站該設在哪裡？——另類的費馬點研究

關鍵詞：Simple Euclidean Distance、Quadratic Euclidean Distance、City-block Distance

編 號：

# 總站該設在哪裡？——另類的費馬點研究

## Abstract

The definition of "Fermat Point" is that a dot, which lies in a triangle, has the minimum distance to the three apexes. In other words, "Fermat Point" has the minimum distance to three dots which are not on the same line. In the broad sense, then, in a  $N$  polygon, a dot which has the minimum distance to the  $N$  apexes could be named "Fermat Point." But what if we link up the  $N$  apexes and find out that they cannot make a convex polygon?

The above is what we wish to fully discuss. Our inspiration comes from a paper on "Fermat Point." It just describes  $N$  convex polygon, so we think of putting the case to naturally polygon. The case may be that it is a concave polygon or part of the apexes which lies on the same line. We would not base our study on the conventional methods. Moreover, strictly defined, the repeated line segment will not be taken into account. That is, if the "Fermat Point" drops on the line with more than two dots on it, we just count the line segments except for the shorter line segments which were originally included in other studies.

According to the theorem, our conclusions are as follows:

1. If  $N$  points lie on the same line segment, then the "Fermat Point" can be any point on the line segment.
2. If  $(N-1)$  points are on the same line segment, then the "Fermat Point" is on the point which two lines join together. One is that the line segment, and the other is the one which passes the remaining point and perpendicular to the first line segment.
3. Now there are  $(M+N)$  points. Among them,  $M$  points will make a  $M$  jog-polygon. The others all drop in the polygon. As the diagram shown beneath, we know that the "Fermat Point" drops on the point which two lines join together. The two lines must pass as many points as possible.

## 摘要

所謂的「費馬點」是指三角形內到三頂點距離和最小的點。換言之，「費馬點」就是到平面上不共線三點距離和最小的點。因此，我們可定義，廣義的「費馬點」即是  $n$  多邊形內到各頂點距離和最小的點，亦即到平面上不共線  $n$  點距離和最小的點，但若平面上  $n$  點不能恰為  $n$  多邊形的頂點呢？

這就是我們所要討論的。由於我們的靈感來自一份關於「費馬點」的科展作品，所以我們想到，當平面上  $n$  點不能恰為  $n$  凸多邊形的頂點，甚或其中有一部分的點共線時，將不能以  $n$  邊形的方法來探討，但我們可以將之化為  $m$  邊形內  $(n-m)$  個點來討論。而更重要的是，我們增加了另一個限制，重複的線段將不被我們列入計算。亦即當所求點落在某一多點共線的線段上時，我們只計算該線段的總長，而不計其中重複的較短線段。

根據這個原則，我們試行證明平面上三點、四點、五點及六點的可能情況，期望能從中找出足以推廣至平面上  $n$  點的一般性。結果雖不完美，但我們總算差強人意的歸納出了下列結論：

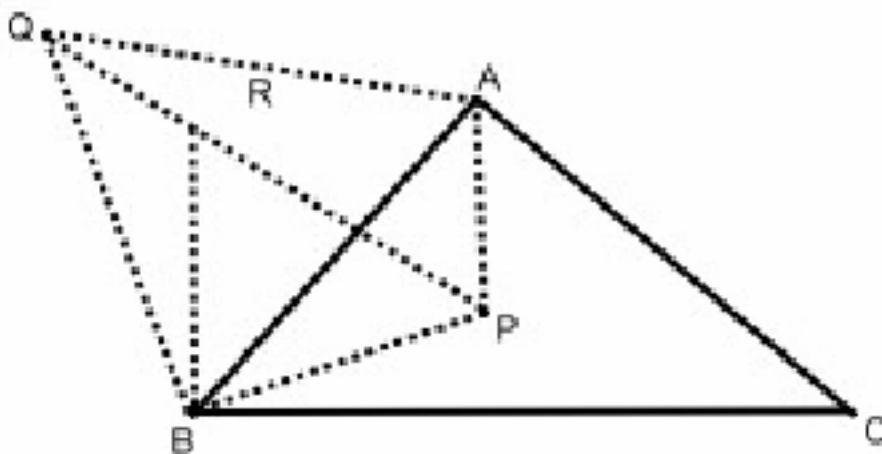
1. 若  $n$  點共線段，所求點可為所共線段上任一點。
2. 若  $(n-1)$  點共線段，則由該不共線點引一線與共線段垂直，其交點即為所求。
3. 若  $(n+m)$  個點中有  $m$  個點為一  $m$  多邊形的頂點，另外  $n$  個點落在該  $m$  多邊形內，則由兩個外頂點引直線盡可能通過最多點，該兩直線的交點即為所求。

前言：許久以前有一個小國家，和鄰國勢成水火。國王爲了應付遲早要發生的戰爭，修糧倉，建地下糧道，以確保戰時物資的供應。由於時間緊急，一郡只能建一個糧倉，再挖地下糧道通到各縣城。當時有某郡的太守下令將糧倉建在自己的家鄉——一個偏遠的小縣，使糧道總長極長。結果該郡的糧道尚未竣工，戰爭便已爆發。由於物資無法有效供應至各縣，人心離散。沒多久，該郡就被攻陷，太守也被俘虜，這時他才懊悔起來，但一切都爲時已晚……

研究目的：求出一點，使其到平面上給定點的距離和最小。但與一般多邊形內求到頂點距離和最小的點不同。由於多點共線所造成的重複線段將不被我們列入計算，亦即共線的點越多，所求出的距離和可能越小。

研究過程：

壹、我們先引關於費馬點的證明。

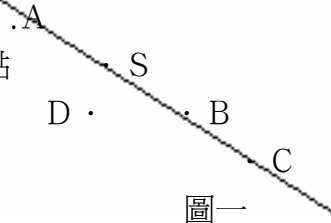


如圖，在 $\triangle ABC$ 中， $P$ 爲三角形內部一點  
 以 $PB$ 爲一邊，作正 $\triangle PBR$ ，以 $AB$ 爲一邊，作正 $\triangle ABQ$   
 連接 $QR$ ， $\triangle ABP \cong \triangle QBR$  (SAS)  $\rightarrow PA+PB+PC = RQ+PR+PC$   
 則當 $Q、R、P、C$ 四點共線時， $RQ+PR+PC$ 最小  
 即 $PA+PB+PC$ 最小  
 且此時 $\angle BPC = 180^\circ - \angle RPB = 120^\circ$   
 $\angle APB = \angle QRB = 180^\circ - \angle BRP = 120^\circ$   
 $\rightarrow \angle APC = 120^\circ$   
 $\therefore P$ 爲到相鄰兩頂點連線夾角 $120^\circ$ 的點

貳、接下來我們進入主題，先由平面上三點開始。平面上三點可分成兩種情形：

一、三點共線

如圖一，A、B、C 三點共線，則我們所求點（以下均以 S 代表）必可為任一落在兩端點所連線段上的點。



圖一

證明：設 D 為平面上一點，且 D 不屬於 AC

$\because SA+SB+SC$  中 SB 線段重複計算了一次，

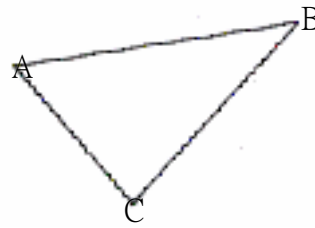
$\therefore$  我們將它去掉，改為  $SA+SC$

則由三角不等式，得  $DA+DC > AC = SA+SC \dots\dots\dots (1)$

又  $DB > 0 \dots\dots\dots (2)$        $(1) + (2)$   $DA+DB+DC > SA+SC$       得證

二、三點不共線

如圖二，A、B、C 三點不共線，則 S 即落在  $\triangle ABC$  的費馬點上，其證明引述上文中關於費馬點的證明，在此不再贅述。



圖二

參、下一步我們進入平面上四點，可分為三種情形。

一、四點共線

如圖三，A、B、C、D 四點共線，則 S 為 AC 上任一點。其證法同三點共線，需將多算的線段去除



圖三

二、四點為一凸四邊形四頂點

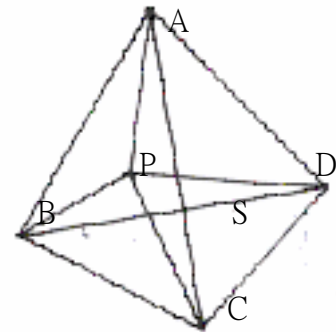
如圖四，A、B、C、D 為一四邊形的四個頂點，則 S 即為對角線 AC、BD 的交點。

證明：設 S 為對角線 AC、BD 的交點，P 為平面上異於 S 之一點

則由三角不等式，得  $PA+PC > AC \dots\dots\dots (1)$

且  $PB+PD > BD \dots\dots\dots (2)$

$(1) + (2)$        $PA+PB+PC+PD > AC+BD = SA+SC+SB+SD$       得證



圖四

三、三點為一三角形之三頂點，第四點落在三角形的內部或邊上

我們發現，這種情況有兩種可能結果

(一) 如圖五，F 為 $\triangle ABC$ 之費馬點，且 D 落在 FA 上，則 F 即為所求點 S

證明：設 Q 為 $\triangle ABC$ 內異於 F 之一點

$\because$  FD 屬於 FA  $\therefore$  FD 不列入計算

由費馬點性質，得  $QA+QB+QC > FA+FB+FC \cdots \cdots (1)$

又  $QD \geq 0 \cdots \cdots (2)$

(1) + (2)  $QA+QB+QC+QD > FA+FB+FC$  得證


(二) F 為 $\triangle ABC$ 之費馬點，但 D 不落在 FA 或 FB 或 FC 上，則 D 為所求點 S

證明：若 P 為  區域內一點，如圖六

則  $PA+PD \geq AD$  (等號成立  $\Leftrightarrow$  P 在 AD 上)  $\cdots \cdots (1)$

$PB+PC > DB+DC \cdots \cdots (2)$

(1) + (2)  $PA+PB+PC+PD > DA+DB+DC$ ，餘同理可證

若 Q 為  區域內異於 D 之一點，如圖六

令 BQ 與 AD 交於 R

則由  $QA+QD \geq AD$  (等號成立  $\Leftrightarrow$  Q 在 AD 上  $\Leftrightarrow$  Q=R)

且  $QB+QC = (RB+QR) + QC = RB + (QR+QC) \geq RB+RC$  (等號成立  $\Leftrightarrow$  Q 在 AD 上  $\Leftrightarrow$  Q=R)

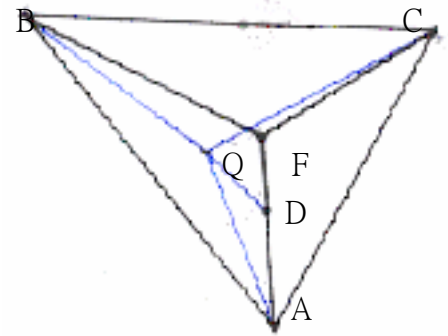
$\therefore QA+QB+QC+QD \geq RA+RB+RC+RD \cdots \cdots (1)$

又  $RA+RD=DA$  且  $RB+RC \geq DB+DC$  (等號成立  $\Leftrightarrow$  D=R)

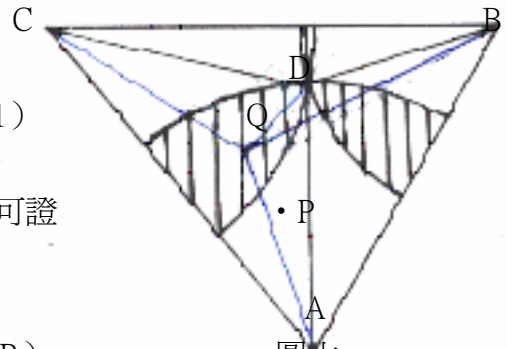
$\therefore RA+RB+RC+RD \geq DA+DB+DC \cdots \cdots (2)$

由 (1) . (2) 得  $QA+QB+QC+QD \geq DA+DB+DC$  (等號成立  $\Leftrightarrow$  Q=D) 但  $Q \neq D$

$\therefore QA+QB+QC+QD > DA+DB+DC$  得證



圖五



圖六

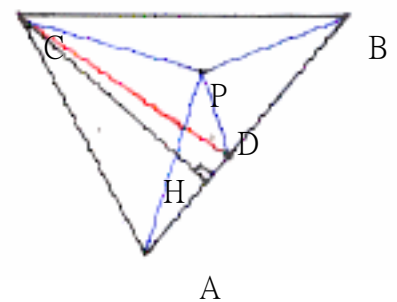
(三) D 落在 AB 上，如圖七，則作  $CH \perp AB$  於 H，H 即為所求 S；若  $\angle CAB > 90^\circ$ ，則 A 即為所求 S。

證明：設平面上異於 H 之一點 P，則

$PA+PB > AB \cdots \cdots (1)$

$PC+PD > CD > CH \cdots \cdots (2)$

(1) + (2)  $PA+PB+PC+PD > HA+HB+HC$  得證



圖七

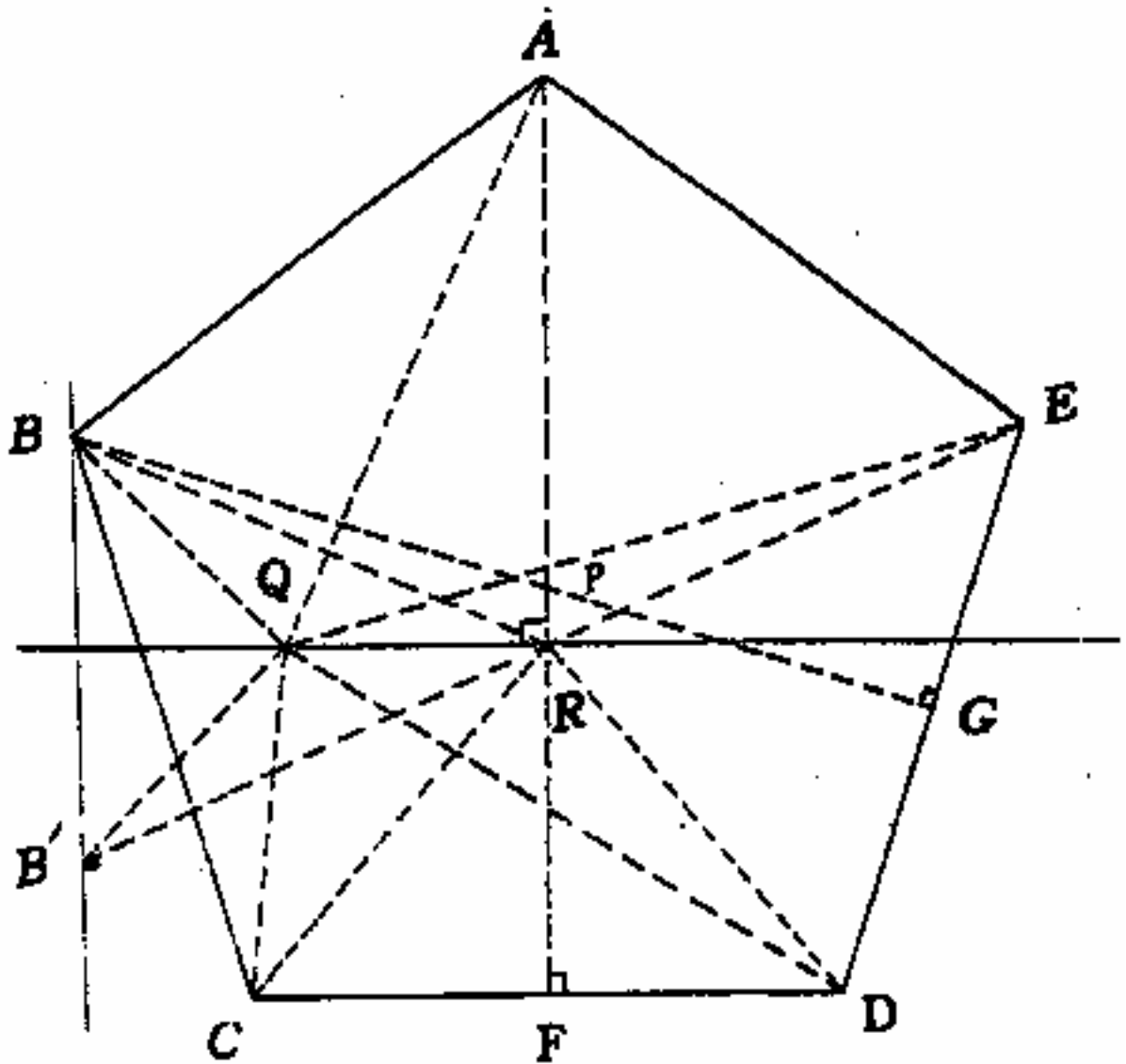
肆、由於目前尚不足以看出其一般性。所以接下來，我們探討平面上五點及六點的情形。

一、五點共線與六點共線，其結果同三點共線

$\therefore$  我們可推廣至 n 點共線  $\rightarrow$  S 均為所共線段上之任一點

二、五點為一凸五邊形之頂點，則 S 為到相鄰兩頂點夾角  $72^\circ$  的點

證明：我們引述第三十九屆科展台南區佳作「窮邇極微」中的證明如下



證明：如圖， $AF \perp CD$ ，假設  $Q$  不在  $AF$  上

過  $Q$  作  $L \parallel CD$  交  $AF$  於  $R$ ，連接  $BR$ 、 $CR$ 、 $DR$ 、 $ER$

作  $B$  關於  $L$  的對稱點  $B'$ ，連接  $B'Q$ 、 $B'R$

$\because B$ 、 $E$  關於  $AF$  對稱  $\therefore B'$ 、 $R$ 、 $E$  三點共線

$\rightarrow B'Q + QE > B'E = B'R + RE$

又  $BQ = B'Q$ ， $BR = B'R$   $\therefore BQ + QE > BR + RE$

同理可證  $CR + DR < CQ + DQ$  且  $AR < AQ$  ( $AR \perp QR$ )

$\therefore QA + QB + QC + QD + QE > RA + RB + RC + RD + RE$

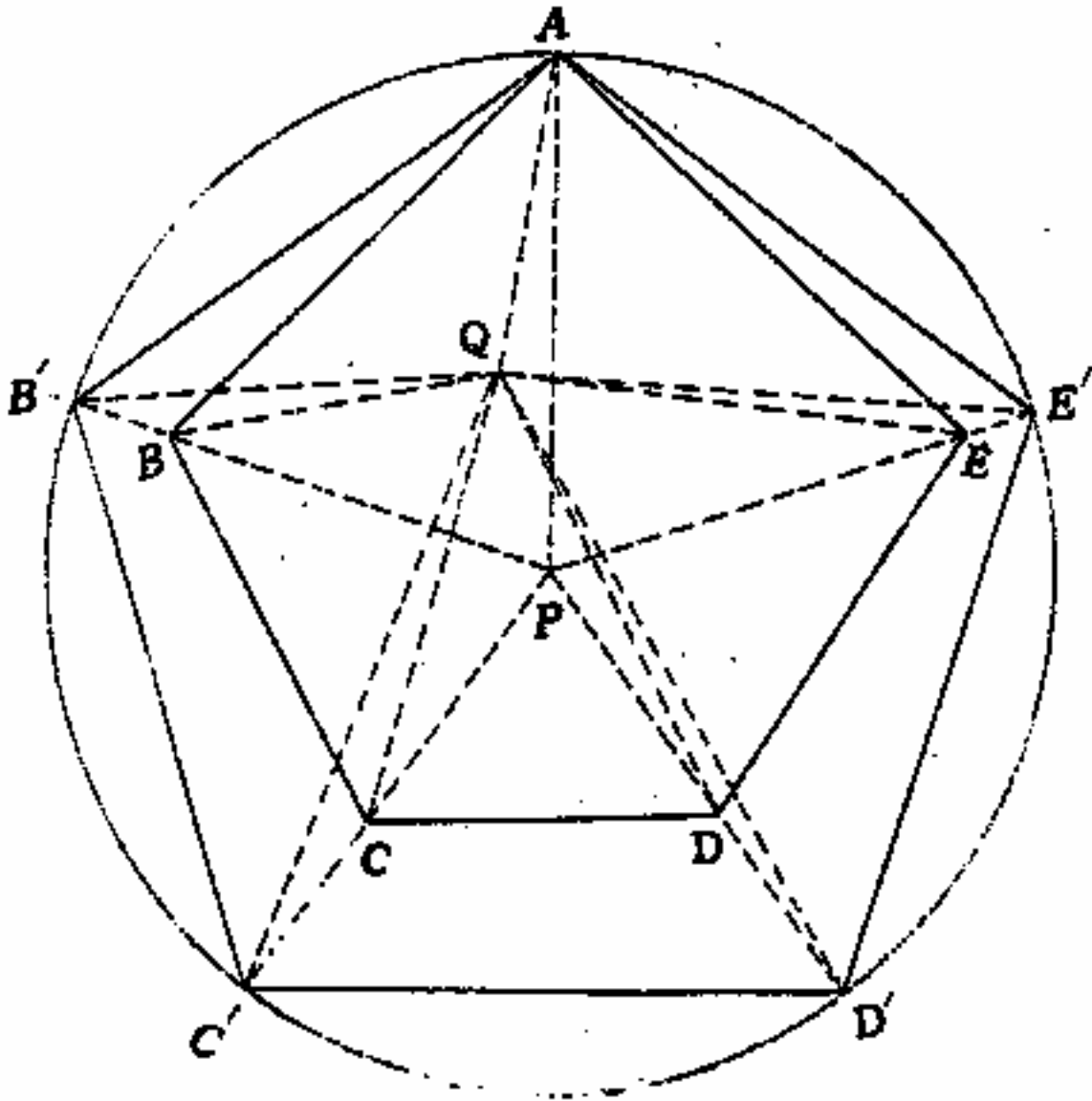


故欲尋找到五個頂點距離和最小的點，則此點必落在 AF 上

又設  $BG \perp DE$

同理此點必落在 BG 上

此點是 AF、BG 的交點即為外接圓圓心，故得證。



如圖，五邊形 ABCDE 中， $\angle APB = \angle BPC = \angle CPD = \angle DPE = \angle EPA = 72^\circ$

，Q 為五邊形內部異於 P 的任一點

求證： $PA + PB + PC + PD + PE < QA + QB + QC + QD + QE$

證明：如圖作五邊形  $AB'C'D'E'$ ，連接  $QB'$ ， $QC'$ ， $QD'$ ， $QE'$

則  $PA + PB + PC + PD + PE < QA + QB' + QC' + QD' + QE' \dots \dots \dots (1)$

又  $BB' > B'Q - BQ \rightarrow -BB' < -B'Q + BQ \dots \dots \dots (2)$

同理-CC' $\leq$ -CQ+CQ.....(3)

-DD' $\leq$ -D'Q+DQ.....(4)

-EE' $\leq$ -E'Q+EQ.....(5)

(1)+(2)+(3)+(4)+(5)

$\rightarrow$ PA+PB+PC+PD+PE  $\leq$  QA+QB+QC+QD+QE

故得證

故欲尋找到五個頂點距離和最小的點，則此點必落在 AF 上

又設 BG  $\perp$  DE

同理此點必落在 BG 上

$\therefore$ 此點為 AF、BG 的交點

又 AF、BG 的交點即為外接圓圓心，故得證

三、其中三點為一三角形的三頂點，另兩點

則落在該三角形內或邊上，則有下列情形：

(一) 如圖八，D、E 落在  $\triangle ABC$  內部，則 BD、CE 交點 S 即為所求

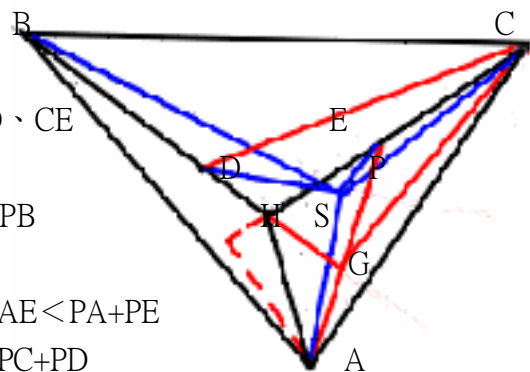
證明：設 P 為  $\triangle ABC$  內異於 S 之一點且 SB  $<$  PB

(亦可設 SC  $<$  PC)

過 A 作 AH  $\perp$  CE 於 H  $\therefore$ 由 SH  $<$  EH  $\rightarrow$  SA  $<$  AE  $<$  PA+PE

又作 CG  $\perp$  BD 於 G  $\therefore$ GS  $<$  GD  $\rightarrow$  SC  $<$  DC  $<$  PC+PD

由以上三式得 SA+SB+SC  $<$  PA+PB+PC+PD+PE 得證



圖八

(二) 如圖九，若 D、E 均落在 AB 上，則作

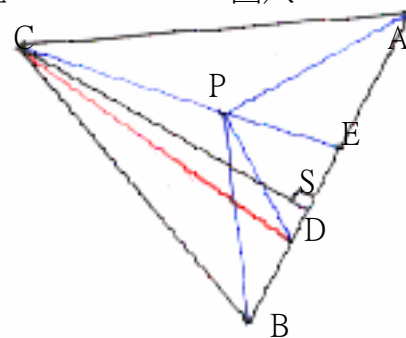
CS  $\perp$  AB 於 H，H 即為所求 S；又若  $\angle CBA > 90^\circ$

則 B 即為所求點 S

證明：設 P 為平面上異於 S 之一點，則由三角不等式

得 PA+PB  $>$  AB，PC+PD  $>$  CD  $>$  CS 且 PE  $>$  0

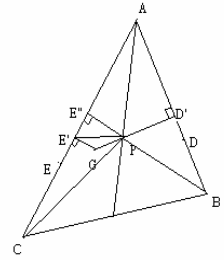
$\rightarrow$ PA+PB+PC+PD+PE  $>$  SA+SB+SC 得證



圖九

(三) 如圖，D 落在 AB 上 E 落在 AC 上則當  $\angle A > 49^\circ$  時，點 A 即為所求 S

證明：a. 在  $\triangle ABC$  內隨意取一點 G，作  $GD' \perp AB$ ，  
 $GE' \perp AC$ ，再作  $\angle A$  的分角線 L 交  $GD'$  於 P  
 則  $PG + GE' > PE' > PE''$



b. 設  $\angle A = 2\theta$ ， $1/2 \angle A = \theta$

$$AD' = AP \cos \theta = AE''，PD' = AP \sin \theta = PE''$$

$$AP + PD'' + PE'' - AD' - AE'' = AP (1 + 2 \sin \theta + 2 \cos \theta)$$

$$= AP \left[ 1 + \sqrt{2} \sin (\theta - 45^\circ) \right] > 0 \cdots 1$$

$$PB > D'B，PC > E''C \cdots \cdots 2$$

$$(1) + (2) \quad AB + AC = AD' + D'B + AE'' + E''B < PA + PS + PC + PD' + PE'' < PA + PB + PC + PD + PE < GA + GB + GC + GD + GE$$

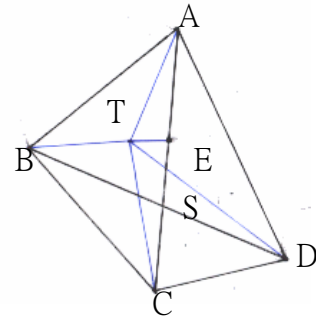
四、其中四點為一凸四邊形的四頂點，另一點落在該四邊形內或邊上，則有下列情形：

(一) 如圖十，E 落在對角線上，則對角線交點 S 即為所求

證明：設 T 為平面上異於 S 之一點，則

$$TA + TC > AC，TB + TD > BD \text{ 且 } TE \geq 0$$

$$\rightarrow TA + TB + TC + TD + TE > SA + SB + SC + SD \quad \text{得證}$$



圖十

(二) 如圖十一，E 不在對角線上，由於能力有限，故我們只給出 ABCD 為長方形及等腰梯形時的證明

證明：

1. 如圖十一之 1，F 為對角線交點，

S 為 AE 和 BD 交點，T 為 BE 和 AC 交點，且  $SF < TF$

$$\therefore d(S, AC) < d(T, BD) \text{ 且 } AC = BD$$

$$\therefore SA + SC < TB + TD \Rightarrow SA + SB + SC + SD < TA + TB + TC + TD$$

得證

則 S 為所求

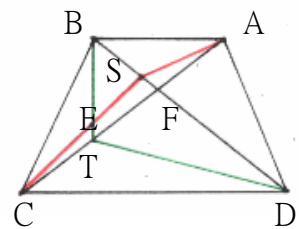
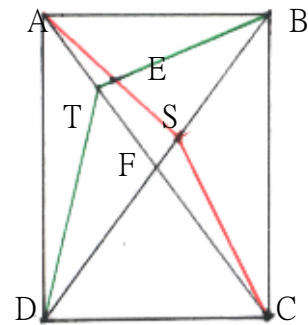
2. 如圖十一之 2，F 為對角線交點， $SF < TF$

S 為 CE 和 BD 交點，T 為 BE 和 AC 交點，且  $SF < TF$

$$\therefore d(S, AC) < d(T, BD) \text{ 且 } AC = BD$$

$$\therefore SA + SC < TB + TD \Rightarrow SA + SB + SC + SD < TA + TB + TC + TD$$

得證



圖十一

五、六點中五點共線，如圖十二，

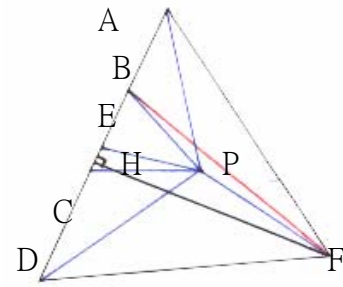
則作  $FH \perp AD$  於  $H$ ， $H$  即為所求；

若  $\angle FAD > 90^\circ$  則  $A$  即為所求。

證明：設  $P$  為平面上異於  $H$  之一點，則

$PA+PD > AD$ ， $PB+PF > FB > FH$  且  $PC+PE > 0$

$\therefore PA+PB+PC+PD+PE+PF > HA+HD+HF$  得證



圖十二

六、如圖十三，六點中有三點為一

三角形的三頂點，另三點則分別落在三角形的三邊上，形成一個較小的三角形。則若兩

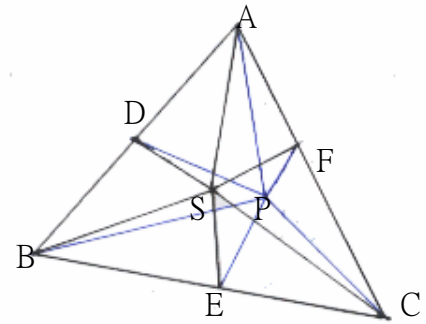
三角形的費馬點重合，該點  $S$  即為所求

證明：設  $P$  為平面上異於  $S$  之一點，則

$\therefore PA+PB+PC > SA+SB+SC$

且  $PD+PE+PF > SD+SE+SF$

$\therefore PA+PB+PC+PD+PE+PF > SA+SB+SC+SD+SE+SF$  得證



圖十三

七、如圖十四，六點中有三點為一三角形

的三頂點，另三點中兩點落在外頂點與費馬點的連線上，一點落在三角形內，則外部三角形的費馬點  $S$  即為所求

證明：設  $P$  為平面上異於  $S$  之一點

因  $S$  為外部三角形的費馬點

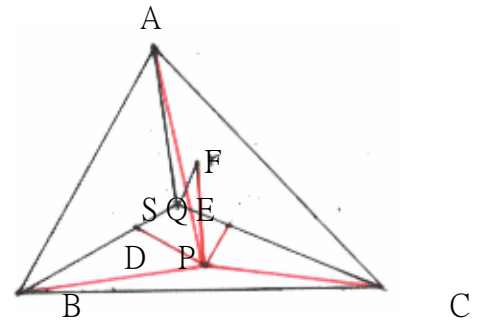
所以  $SA+SB+SC < PA+PB+PC \dots (1)$

因  $\angle BSC$  為  $120^\circ$   $\therefore SQ < DQ$

則  $SF < QF+SQ < QF+DQ < QF+(PD+PQ) < PF+PD \dots (2)$

$0 < PE \dots (3)$

$(1)+(2)+(3)$   $SA+SB+SC+SF < PA+PB+PC+PD+PE+PF$  得證



圖十四

八、如圖十五，六點中有四點為一凸四邊形

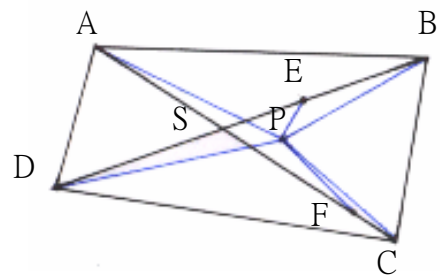
的四頂點，另兩點則落在對角線上，則對角線交點  $S$  即為所求

證明：設  $P$  為平面上異於  $S$  之一點，則

$PA+PC > AC$  且  $PB+PD > BD$

又  $PE+PF > 0$

$\therefore SA+SB+SC+SD < PA+PB+PC+PD+PE+PF$  得證



圖十五

九、如圖十六，六點中有四點為一凸四邊形的四頂點，另兩點中一點落在對角線上，則 CF 與 BD 交點 S 即為所求

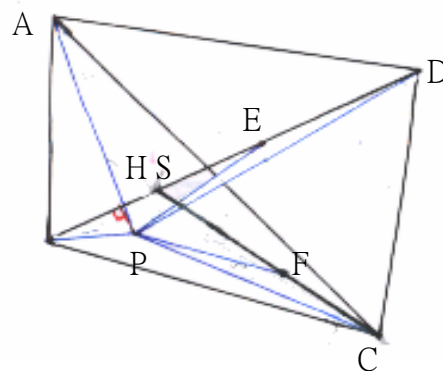
證明：設 P 為平面上異於 S 之一點，則  $PB+PD > BD$  且  $PA > SA$  (亦可設  $PC > SC$ )

作  $PS+PF+PC > SC$

又  $PE > PS \rightarrow PE+PF+PC > SC$

$\therefore \angle HSP > \angle HEP \therefore \cot \angle HSP < \cot \angle HEP$

$\therefore PA+PB+PC+PD+PE+PF > SA+SB+SC+SD+SF$  得證



圖十六

初步研究結果：

由平面上三至六點的討論，我們可大概得出如下結論：

1. 若 n 點共線段，所求點可為所共線段上任一點。
2. 若 (n-1) 點共線段，則由該不共線點引一線與共線段垂直，其交點即為所求。
3. 若 (n+m) 個點中有 m 個點為一 m 多邊形的頂點，另外 n 個點落在該 m 多邊形內，則由兩個外頂點引直線盡可能通過最多點，該兩直線的交點即為所求。

推廣：

壹、我們原來的特殊限制，雖然屬於創新的部分，但無形中也侷限了我們作品的發展。所以在推廣時，我們修改了研究方向，主要的修正如下：

- 一、去掉了「重複線段不計」的限制，而改為一般距離和的計算。
- 二、我們將原本由幾何方向探討，轉為代數思考，亦即將給定點座標化，以代數運算替代幾何作圖。
- 三、當我們得到基本結論後，將就以下三種距離和進行研究：

- (1) Simple Euclidean Distance
- (2) Quadratic Euclidean Distance
- (3) City-block Distance

貳、直線上 n 點的費馬點：

我們引用參考文獻 Equilibrium in multicandidate probabilistic spatial voting 的證明，可得如下結論：

一、 Simple Euclidean Distance：所求點為單位向量和=0 的點

(一) 將給定點依位置排序為  $x_1, x_2, \dots, x_n$ ，若 n 為奇數，則所求點 P 即為  $x_{\frac{n+1}{2}}$ ，若 n 為偶數，

則 P 為  $x_{\frac{n}{2}}$  與  $x_{\frac{n}{2}+1}$  之間任一點。→符合單位向量和=0。

(二) 由該結論可得三角形之費馬點到三頂點之兩兩夾角=120° 並非巧合，而是由拉密定理導出：三單位向量和=0，則三向量間必兩兩夾 120°。

(三) 此結果同時證明五邊形之費馬點到頂點的兩兩夾角=72° 乃是特例，其實只要單位向量和=0 即可。

二、 Quadratic Euclidean Distance：所求點為將給定點排在數線上時，各數的算術平均數。

證明：如圖， $S = \sum_{i=1}^n (x_i - z)^2$ ，極小化  $\frac{ds}{dz} = 0$

$$\Rightarrow \frac{ds}{dz} = \frac{d \sum_{i=1}^n (x_i - z)^2}{dz} = \sum_{i=1}^n 2(x_i - z)(-1)$$

$$\Rightarrow -2 \sum (x_i - z) = 0, \quad \sum (x_i - z) = 0$$

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n = nz, \quad z = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}$$

三、 City-block Distance：所求點為中位數。

證明：如圖， $S = \sum_{i=1}^n |x_i - z| = \sum_{i=1}^m (z - x_i) + \sum_{i=m+1}^n (x_i - z)$

$$\frac{ds}{dz} = \sum_{i=1}^m 1 + \sum_{i=m+1}^n (-1) = m + (n - m) = 2m - n = 0, \quad m = \frac{n}{2}$$

參考文獻：第三十九屆科學作品彙編。

Equilibrium in multicandidate probabilistic spatial voting

李毓佩，幾何的寶藏。

左銓如，初等解析幾何研究。

中華民國第四十五屆中小學科學展覽會  
評 語

---

高中組 數學科

040402

總站該設在哪裡--另類的費馬點研究

國立臺南女子高級中學

評語：

1. 結果尚有發展空間
2. 題材古典