

中華民國第四十五屆中小學科學展覽會
作品說明書

高中組 物理科

040106

一『探』究竟

國立屏東女子高級中學

作者姓名：

高一 蘇筱婷 高一 謝維容 高一 盧泉漣
高一 卿 媛

指導老師：

鄭偉文 吳英孝

壹、摘要

小磁鐵掉入垂直立好的中空金屬管中之後，下墜的時間遠大於在空氣中自由落下的時間，這現象並不陌生。本文以冷次定律(Len's law) 法拉第電磁感應定律(Faraday's law of induction) 為依據，定性說明小磁鐵在中空金屬管中很快達到終端速度 $\bar{v}_f$ ，即為『等速度』運動之外，還推導證明：小磁鐵的終端速度的大小 v_f 與小磁鐵的質量 m 成正比、與小磁鐵的磁偶極矩 M 的平方成反比、與金屬管半徑 a 的四次方成正比、與金屬管的電阻率 ρ 成正比、與金屬管的內外半徑之間的截面積 A 成反比，即 $v_f \propto \frac{\rho \cdot ma^4}{AM^2}$ ，此為本文的最大貢獻。

本文還設計實驗，實際量得小磁鐵在中空金屬管中的終端速度 $\bar{v}_f$ 確為等速度之外，還與真正理論值相比較，驗證理論推導的正確性。

貳、研究動機

從我們學到關於各種「力」的課程以來，最令同學們難以想像的要算是『超距力』了，像是磁力、靜電力和地心引力。很多人把它們引用在魔術上，就是因為這些看似『超能力』的無形之力，總是能看得大家目瞪口呆，直呼：「怪哉！怪哉！」。

這些『超距力』之中，磁力更是特別受到矚目，有一項眾人皆知的實驗-----小磁鐵掉入垂直立好的中空金屬管中之後，小磁鐵緩緩下降的現象，最令人嘖嘖稱奇。這看似簡單又神奇的磁力實驗，是冷次定律(Len's law)最好例證，大學聯考物理試題曾出現類似的問題；物理老師也最喜歡拿此簡單的實驗來示範說明，但往往『點到為止』-----因為實際操作該實驗之後，反而衍生更多的問題：為何小磁鐵在非磁性的金屬管中不會以自由落體的速度下落？小磁鐵在中空金屬管中是等速度運動嗎？如果是（或不是）的話，小磁鐵的速率又與哪些物理量有關呢？種種問題所引發的動機，讓我們迫不及待地想動手試試，揭開「磁力」神秘的面紗！

參、研究目的

一、推導出小磁鐵在中空金屬管中的終端速率關係式 $v_f = \frac{\rho \cdot mga^4}{cA\mu_0^2 M^2}$

二、設計實驗以驗證小磁鐵在中空金屬管中為等速度運動以及其速率關係式 $v_f \propto \frac{\rho \cdot ma^4}{AM^2}$

肆、器材

器材編號	器材名稱	規格	數量
001	銅管	內徑 11.00 mm、外徑 12.70 mm、長約 1 米	1 支
002	銅管	內徑 13.30 mm、外徑 16.00 mm、長約 1 米	1 支
003	銅管	內徑 17.00 mm、外徑 18.80 mm、長約 1 米	1 支
004	鋁管	內徑 13.00 mm、外徑 16.00 mm、長約 1 米	1 支
005	鋁管	內徑 16.00mm、外徑 19.15 mm、長約 1 米	1 支
006	微安培計	滿刻度 50uA	3 個
007	小磁鐵	圓柱體、球體、正方體、大小、質量不一	若干
008	漆包線	一般	數公尺
009	DV 攝影機	一般家用型、含腳架	1 台
010	影音編輯軟體	可執行慢動作播放、倒轉播放 時間軸可判讀至小數點第二位	1 套
011	電腦	可執行影音編輯軟體	1 台
012	電子磅秤	最小刻度 0.01 克	1 台
013	直尺	長 1 米及長 20 公分	各 1 支
014	鐵製支架 (含底座)	長約 1 米	3 支
015	游標尺	最小刻度 mm	1 支
016	木製夾子	一般	10 支
017	保麗龍	厚度 5 公分以上	數塊

伍、研究過程或方法

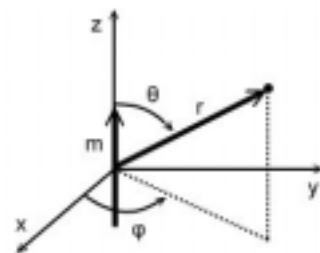
我們先探究小磁鐵在非磁性金屬管中的運動情形

首先，小磁鐵在非磁性金屬管內下墜後，經短暫時間 $\Delta t \approx 0$ ，即為等速度運動，此結果可經由底下理論推導得證：假設小磁鐵體積很小，以小磁鐵的位置為球座標的原點，若觀測點與小磁鐵場的距離為 r ，則小磁鐵在觀測點所建立的磁場強度

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} M \left(\frac{2\cos\theta}{r^3} \hat{r} + \frac{\sin\theta}{r^3} \hat{\theta} \right), \text{ 式中, } \mu_0 \text{ 為導磁率、} M \text{ 為小磁鐵}$$

的磁偶極矩、 $\hat{r}$ 及 $\hat{\theta}$ 是以小磁鐵的位置為球座標原點時的徑向方向與角度 θ ($\hat{r}$ 與 $\hat{z}$ 之間的夾角) 座標的單位向量，如圖一所示。對具磁性的小球體、圓柱體及正方體而言，其磁場強度均如上述的表示方式。

我們以小磁鐵磁極方向與非磁性金屬管中心軸平行的方式，將小磁鐵投入非磁性金屬管內之後，可將金屬管視為由無窮多個金屬線圈所組成，而每單一金屬線圈會因冷次定律 (Len's law)，產生感應電流，此感應電流所建立的磁場與小磁鐵產生的磁場交互作用使得小磁鐵受到向上的磁力 $\vec{F}_B$ ，因此可對抗 (阻止) 小磁鐵的運動。



圖一：小磁鐵在其周遭建立磁場強度為

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} M \left(\frac{2\cos\theta}{r^3} \hat{r} + \frac{\sin\theta}{r^3} \hat{\theta} \right)$$

在非磁性金屬管中，一開始小磁鐵受向下的重力 $m\bar{g}$ 以及向上的磁力 $\bar{F}_B$ 作用，且 $mg > F_B$ ，因此依牛頓第二運動定律 $\sum \bar{F} = m\bar{a}$ 得知， $a \neq 0 \Rightarrow v \uparrow$ ，因此小磁鐵的速率愈來愈大。

又由法拉第感應定律 (Faraday's law of induction) 得知：小磁鐵的速率愈大，則每一金屬線圈的磁通量 ϕ_B 的時變率 $\frac{d\phi_B}{dt}$ 愈大，所產生的感應電動勢 ε 及感應電流 i 也就愈大，進而使小磁鐵受到向上的磁力 $\bar{F}_B$ 愈來愈大，所以，小磁鐵在非磁性金屬管中經極短暫時間 $\Delta t \approx 0$ 之後，小磁鐵所受的合力 $\sum \bar{F} = m\bar{g} + \bar{F}_B = 0$ ，所以小磁鐵很快地達到終端速度，即等速度運動。

我們有興趣的是：小磁鐵的速率與哪些物理量相關？

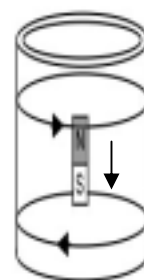
當小磁鐵達到等速時，小磁鐵所受的合力 $\sum \bar{F} = m\bar{g} + \bar{F}_B = 0$ ，所以 $mg = F_B$ ，由此式，可推得小磁鐵速率的關係式

我們假設現在以小磁鐵的 N 極朝上、 S 極的方向朝下的方式，將小磁鐵放入垂直立好的非磁性的金屬管中，由冷次定律 (Len's law) 得知，位於小磁鐵上方的金屬管部分，每一金屬線圈感應電流的方向，由金屬管頂朝金屬管中視之，其電流方向為逆時針方向，位於小磁鐵之下方的金屬管部分，每一金屬線圈感應電流的方向，由金屬管頂朝金屬管中視之，其電流方向為順時針方向，如圖二所示。

先考慮位於小磁鐵上方的金屬管部分，每單一金屬線圈所受小磁鐵的磁力 $\bar{f}_B = i \cdot \bar{l} \times \bar{B}$ ，式中 i 是非磁性金屬因小磁鐵在管中運動時產生的感應電流、 l 是金屬管的圓周長、 $\bar{B}$ 是小磁鐵在單一金屬線圈位置所建立的磁場。

依法拉第電磁感應定律 (Faraday's law of induction) 知，

$$\text{感應電流 } i = \frac{\varepsilon}{R} = \frac{\left| \frac{d\phi_B}{dt} \right|}{R} = \frac{\left| \frac{d(\oint \bar{B} \cdot d\bar{s})}{dt} \right|}{\rho \frac{l}{A}}, \text{ 式中 } \varepsilon \text{ 為單一金屬線圈所產生的感應}$$



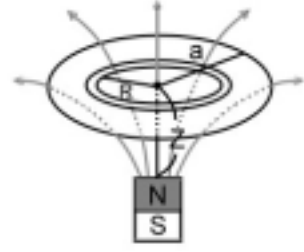
圖二：小磁鐵掉落時，金屬管中產生感應電流的方向不同

電動勢、 R 為單一金屬線圈之電阻、 ρ 為金屬管材質的電阻率、 A 為金屬管內外徑的截面積，

$\phi_B = \oint \bar{B} \cdot d\bar{s}$ 為某單一線圈的磁通量

$$\text{所以 } \bar{f}_B = i \cdot \bar{l} \times \bar{B} = \frac{A \cdot \left| \frac{d(\oint \bar{B} \cdot d\bar{s})}{dt} \right|}{\rho \cdot l} \cdot \bar{l} \times \bar{B} = \frac{A}{\rho} \left| \frac{d(\oint \bar{B} \cdot d\bar{s})}{dt} \right| \cdot \hat{\phi} \times \bar{B},$$

假設管半徑 a ，以小磁鐵的位置為座標原點，某單一線圈之位置如圖三所示，因此此單一金屬線圈的磁通量



圖三：環形面積為 $ds = 2\pi R dR$ ，通過此環形面積的磁通量為 $\vec{B} \cdot d\vec{s}$ ，積分後即可得單一線圈的磁通量

第二積分項，利用部分積分可得

$$= \frac{\mu_0}{2} M \int_{R=0}^{R=a} (R^2) \cdot \left(\frac{-3R dR}{(R^2 + z^2)^{5/2}} \right) = \frac{\mu_0}{2} M \left(R^2 \cdot \frac{1}{(R^2 + z^2)^{3/2}} \right) \Bigg|_{R=0}^{R=a} - \frac{\mu_0}{2} M \int_{R=0}^{R=a} \frac{2R dR}{(R^2 + z^2)^{3/2}}$$

$$\text{因此 } \phi_B = \frac{\mu_0}{2} M \frac{a^2}{(a^2 + z^2)^{3/2}}$$

$$\text{所以此單一金屬線圈的磁通量的時變率 } \frac{d\phi_B}{dt} = -\frac{3}{2} \mu_0 M \frac{a^2 z}{(a^2 + z^2)^{5/2}} \frac{dz}{dt}$$

因為小磁鐵在管內為等速度運動，因此 $v = \frac{dz}{dt}$ 為定值

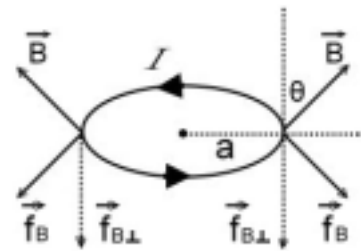
$$\text{所以單一金屬線圈的感應電動勢的量值為 } \varepsilon = \left| \frac{d\phi_B}{dt} \right| = \frac{3}{2} \mu_0 M \frac{a^2 z}{(a^2 + z^2)^{5/2}} v$$

將上式代入 $\vec{f}_B = \frac{A}{\rho} \left| \frac{d(\oint \vec{B} \cdot d\vec{s})}{dt} \right| \cdot \hat{\phi} \times \vec{B}$ ，可得單一金屬線圈所受到的磁力，即

$$\vec{f}_B = \frac{3}{2} \frac{A}{\rho} \mu_0 M \frac{a^2 z}{(a^2 + z^2)^{5/2}} v \cdot \hat{\phi} \times \vec{B} \text{，如圖四所示。}$$

而單一金屬線圈所受到的向下磁力 $\vec{f}_{B\perp}$ 如圖四所示為

$$\begin{aligned} \vec{f}_{B\perp} &= \frac{3}{2} \frac{A}{\rho} \mu_0 M v \frac{a^2 z}{(a^2 + z^2)^{5/2}} \cdot \frac{\mu_0 M}{4\pi} \cdot \frac{3az}{(a^2 + z^2)^{5/2}} (-\hat{k}) \\ &= \frac{9}{8\pi} \frac{A}{\rho} \mu_0^2 M^2 v \frac{a^3 z^2}{(a^2 + z^2)^5} (-\hat{k}) \end{aligned}$$



圖四：單一線圈所受到小磁鐵的磁力 $\vec{f}_B$ 與向下磁力 $\vec{f}_{B\perp}$ 之示意圖

假設金屬管長 $L \rightarrow \infty$ ，則位於小磁鐵上方的金屬管，因小磁鐵在管內運動之故所受的總磁力為

$$\vec{F}'_{Bup} = \int_{z=0}^{z=\infty} \vec{f}_{B\perp} dz = \int_{z=0}^{z=\infty} \frac{9}{8\pi} \frac{A}{\rho} \mu_0^2 M^2 v \frac{a^3 z^2}{(a^2 + z^2)^5} (-\hat{k}) dz = c' \frac{A \mu_0^2 M^2 v}{\rho \cdot a^4} (-\hat{k}) \text{，式中 } c' \text{ 為常數值}$$

同理，位於小磁鐵下方的金屬管部分，因小磁鐵在管內運動之故，所受的總磁力為

$$\bar{F}'_{Bdown} = \int_{z=0}^{z=-\infty} \left(\frac{9}{8\pi} \frac{A}{\rho} \mu_0^2 M^2 v \right) \frac{a^3 z^2}{(a^2 + z^2)^5} (-\hat{k}) dz = c' \frac{A \mu_0^2 M^2 v}{\rho \cdot a^4} (-\hat{k}), \text{ 式中 } c' \text{ 為常數值}$$

因此，整支金屬管，受到小磁鐵的總磁力

$$\bar{F}'_B = \bar{F}'_{Bup} + \bar{F}'_{Bdown} = 2c' \frac{A \mu_0^2 M^2 v}{\rho \cdot a^4} (-\hat{k}) = c \frac{A \mu_0^2 M^2 v}{\rho \cdot a^4} (-\hat{k})$$

又依牛頓第三運定律，小磁鐵在金屬管中運動，會受到金屬管的總磁力

$$\bar{F}_B = -\bar{F}'_B = c \frac{A \mu_0^2 M^2 v}{\rho \cdot a^4} (\hat{k})$$

因此當小磁鐵在金屬管中，所受合力大小為零時，即 $mg = F_B$ ，小磁鐵可達終端速度，也

就是等速度運動即 $mg = c \frac{A \mu_0^2 M^2}{\rho \cdot a^4} v_f \Rightarrow v_f = \frac{\rho \cdot m g a^4}{c A \mu_0^2 M^2}$

所以小磁鐵在金屬管內行經的距離為 d ，則所費時間 $t_f = \frac{d}{v_f} = \frac{cd A \mu_0^2 M^2}{\rho \cdot m g a^4}$

有了上述的理論為基礎，緊接著就可設計實驗進行驗證的工作，其實驗過程如下

一、測出小磁鐵的質量 m

(一)將已切割大小適量的保力龍置於電子秤上，測得保力龍質量 m_1

(二)將不同外型（球體狀、圓柱狀、正方體）不同質量的小磁鐵，以其極性方向垂直保力龍表面的方式塞入保力龍內，小磁鐵極性表面與保力龍面切齊，量得總質量 m_2 ，則小磁鐵的質量 $m = m_2 - m_1$

二、測出小磁鐵的磁偶極矩的比值 $M_1 : M_2 : M_3$ ：

(一)取一小磁鐵置於保力龍上方，其極性與保力龍內的小磁鐵互斥，且兩小磁鐵相距 5 公分，測得此時電子秤的數值為 m_3 ，則小磁鐵之間的磁力為 $F = (m_3 - m_2)g$

(二)因為兩小磁鐵之間的磁力為 $F = (m_3 - m_2)g \propto \frac{M_{\text{保力龍內}} \cdot M'_{\text{保力龍上方}}}{d^4}$ ，所以小磁鐵的磁偶極矩的比值 $M_1 : M_2 : M_3$ ：可由不同的 $(m_3 - m_2)$ 的比值得知



圖五：測量小磁鐵質量及小磁鐵之磁偶極矩的實驗裝置

三、測出小磁鐵在非磁性金屬管內經過的時間 t_f

(一)非磁性金屬管分別為鋁管及銅管

金屬管上，每相距 30 公分則取一定點，共取三點為分別 A、B、C

(二)A、B、C 這三點各纏繞漆包線數圈之後，漆包線外接微安培計



圖六：測量小磁鐵在金屬管內的終端速率之實驗裝置。左上圖為裝置側面，右上圖為裝置正面。

(三)以小磁鐵磁極方向與非磁性金屬管中心軸平行的方式，將小磁鐵投入垂直立好的非磁性金屬管內，當小磁鐵通過 A、B、C 三點位置時，微安培計指針會有些微偏動，此情形則以 DV 攝影機拍攝下來之後，再經由電腦影像播放軟體判讀小磁鐵經過 A、B、C 三點位置之時間 t_A 、 t_B 及 t_C

(四)行經 A、B 間之時間為 $t_{AB} = t_B - t_A$ 、行經 B、C 間之時間為 $t_{BC} = t_C - t_B$

(五)將實驗所得的終端速度 $v_f = (\frac{d_{AB}}{t_{AB}} + \frac{d_{BC}}{t_{BC}}) / 2$ 與理論值作比較

陸、研究結果

一、小磁鐵在中空金屬管中是否為等速度運動？

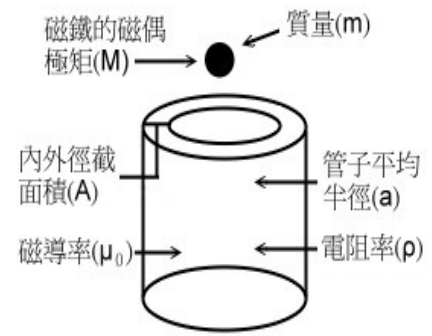
表一是不同的小磁鐵丟入同一支鋁管所得的平均速率，數據顯示，確為等速度運動。其餘實驗（丟入不同鋁管或銅管）數據請參閱附錄，結果均相同

磁鐵規格 (mm×mm)	磁鐵 質量 (克)	$t_A(s)$	$t_B(s)$	$t_C(s)$	$t_{AB}(s)$	$t_{BC}(s)$	$d(cm)$	v_{AB} (cm/s)	v_{BC} (cm/s)	$v_f = \frac{v_{AB} + v_{BC}}{2}$ (cm/s)
10*10 圓柱	5.62	16.33	19.00	21.73	2.67	2.73	30.00	11.24	10.99	11.11
		30.67	33.30	36.00	2.63	2.70	30.00	11.41	11.11	11.26
		39.63	42.33	45.03	2.70	2.70	30.00	11.11	11.11	11.11
		49.28	52.07	54.77	2.80	2.70	30.00	10.73	11.11	10.92
		8.37	11.17	13.93	2.80	2.76	30.00	10.71	10.87	10.79
平均速率										11.04
12*12 圓柱	9.93	52.17	56.53	60.9	4.36	4.37	30.00	6.88	6.86	6.87
		4.97	9.50	13.70	4.53	4.20	30.00	6.62	7.14	6.88
		21.93	26.17	30.46	4.24	4.29	30.00	7.08	6.99	7.03
		36.33	40.73	44.9	4.40	4.17	30.00	6.82	7.19	7.01
		51.33	55.9	60.13	4.57	4.23	30.00	6.56	7.09	6.83
平均速率										6.92
10*10 圓球	4.00	17.5	19.53	21.53	2.03	2.00	30.00	14.78	15.00	14.89
		25.9	27.93	30.16	2.03	2.23	30.00	14.78	13.45	14.12
		36.13	38.23	40.43	2.10	2.20	30.00	14.29	13.64	13.96
		44.83	47.01	49.03	2.18	2.02	30.00	13.78	14.85	14.32
		54.30	56.33	58.60	2.03	2.27	30.00	14.78	13.22	14.00
平均速率										14.26
8*8 正方體	3.71	29.33	31.17	33.00	1.84	1.83	30.00	16.30	16.39	16.35
		39.23	41.23	43.10	2.00	1.87	30.00	15.00	16.04	15.52
		48.20	50.13	52.10	1.93	1.97	30.00	15.54	15.23	15.39
		57.47	59.26	61.33	1.79	2.07	30.00	16.76	14.49	15.63
		7.23	9.03	10.7	1.80	1.67	30.00	16.67	17.96	17.32
平均速率										16.04

表一為不同小磁鐵丟入鋁管（內徑 13mm、外徑 16mm）之情形，每個小磁鐵在鋁管中很快地達到終端速度，其量值均不相同。

一、終端速率 v_f 與各變因之關係

依推導得知的終端速率 v_f 公式 $v_f \propto \frac{\rho \cdot m a^4}{AM^2}$ ，我們分三部份逐步探討、驗證，簡單示意圖如圖七。



圖七：本實驗主要探討小磁鐵的速率與各相關變因之關係

(一) 同一小磁鐵丟入同材質、但不同管徑的金屬管中：

此條件下， v_f 可簡化 $v_f \propto \frac{a^4}{A}$ ，表二為終端速率 v_f 實驗值與理論值之比較

小磁鐵規格	金屬材質	內徑 (mm)	外徑 (mm)	平均半徑 (mm)	內外徑間截面積 A 之比(mm)	電阻率 $\rho(\times 10^{-8})$ $\Omega \cdot m$	測得 v_f cm/s	測得 v_f 相對之 比值	理論 v_f $\frac{a^4}{A}$	理論 v_f 相對比 值	實驗誤 差百分 比%
10*10 圓柱體	銅	17.00	18.80	17.90	1.80	1.68	27.33	1	57034.76	1.00	
	銅	11.00	12.70	11.85	1.70	1.68	6.84	0.250274	11599.11	0.20	23.06
10*10 圓柱體	鋁	13.00	16.00	14.50	3.00	2.71	11.04	1	14735.02	1.00	
	鋁	16.00	19.15	17.58	3.15	2.71	20.87	1.890399	30288.01	2.06	8.03
12*12 圓柱	鋁	13.00	16.00	14.50	3.00	2.71	6.92	1	14735.02	1.00	
	鋁	16.00	19.15	17.58	3.15	2.71	13.9	2.008671	30288.01	2.06	2.28
8*8 圓柱體	銅	13.30	16.00	14.65	2.70	1.68	21.61	1	17060.30	1.00	
	銅	11.00	12.70	11.85	1.70	1.68	11.93	0.552059	11599.11	0.68	18.80
10*10 圓球	銅	13.30	16.00	14.65	2.70	1.68	17.25	1	17060.30	1.00	
	銅	11.00	12.70	11.85	1.70	1.68	8.38	0.485797	6904.23	0.40	20.04

表二：為同一小磁鐵丟入同材質、但不同管徑的金屬管中之情形，實驗誤差大都在 20% 以內以 10mm×10mm 圓柱體的小磁鐵丟入不同管徑的銅管為例：

所實驗測得終端速率 v_f 依序為 $27.33 \frac{cm}{s}$ 、 $6.84 \frac{cm}{s}$ ，

這兩個終端速率之比值為 $\frac{27.33}{27.33} : \frac{6.84}{27.33} \approx 1 : 0.250274$

而這兩個終端速率之理論值 $v_f \propto \frac{a^4}{A}$ 依序為

$$\frac{a_1^4}{A_1} = \frac{(17.90)^4}{1.80} \approx 57034.76, \quad \frac{a_2^4}{A_2} = \frac{(11.85)^4}{1.70} \approx 11599.11$$

這兩個終端速率之理論值之比值為 $\frac{57034.76}{57034.76} : \frac{11599.11}{57034.76} \approx 1 : 0.2$

因此，若以第一測量終端速率值為基準時，另一個的終端速率之誤差為

$$e = \frac{|v_{\text{測量}} - v_{\text{理論}}|}{v'_{\text{理論}}} \times 100\% = \frac{0.250274 - 0.2}{0.2} \times 100\% \approx 23.06\%$$

由表得知，有些實驗值之誤差大都在 20% 以內，應在可接受的範圍內，因此 $v_f \propto \frac{a^4}{A}$ 式子成立

(二) 同一小磁鐵丟入不同材質、不同管徑的金屬管中：

此條件下， v_f 簡化 $v_f \propto \frac{\rho \cdot a^4}{A}$ ，表三為終端速率 v_f 實驗值與理論值之比較

小磁鐵規格	金屬材質	內徑 (mm)	外徑 (mm)	平均半徑 (mm)	內外徑間截面積 A 之比值	電阻率 $\rho((\times 10^{-8}) \Omega \cdot m)$	測得 v_f cm/s	測得 v_f 相對之比值	理論 v_f $\frac{\rho \cdot a^4}{A}$	理論 v_f 相對比值	實驗誤差百分比 %
10*10 圓柱體	銅	17.00	18.80	17.90	1.80	1.68	27.33	1	95818.40	1.00	
	銅	11.00	12.70	11.85	1.70	1.68	6.84	0.250274	19486.50	0.20	23.06
	鋁	13.00	16.00	14.50	3.00	2.71	11.04	0.403952	39931.91	0.42	3.07
	鋁	16.00	19.15	17.58	3.15	2.71	20.87	0.76363	82080.51	0.86	10.86

表三：為同一小磁鐵丟入不同材質、不同管徑的金屬管中之情形，實驗誤差大都在 20% 以內

以 10mm×10mm 圓柱體的小磁鐵丟入不同材質、不同管徑的金屬管為例：

所實驗測得終端速率 v_f 依序為 $27.33 cm/s$ 、 $6.84 cm/s$ 、 $11.04 cm/s$ 、 $20.87 cm/s$ ，

這四個終端速率之比值為 $\frac{27.33}{27.33} : \frac{6.84}{27.33} : \frac{11.04}{27.33} : \frac{20.87}{27.33} \approx 1 : 0.250274 : 0.403952 : 0.76363$

而這四個終端速率之理論值 $v_f \propto \frac{\rho \cdot a^4}{A}$ 依序為

$$\frac{\rho_1 \cdot a_1^4}{A_1} = \frac{1.68 \cdot (17.90)^4}{1.80} \approx 95818.40, \quad \frac{\rho_2 \cdot a_2^4}{A_2} = \frac{1.68 \cdot (11.85)^4}{1.70} \approx 19486.50,$$

$$\frac{\rho_3 \cdot a_3^4}{A_3} = \frac{2.71(14.50)^4}{3.00} \approx 39931.91, \quad \frac{\rho_4 \cdot a_4^4}{A_4} = \frac{2.71(17.58)^4}{3.15} \approx 82080.51$$

這四個終端速率之理論值之比值為

$$\frac{95818.40}{95818.40} : \frac{19486.50}{95818.40} : \frac{39931.91}{95818.40} : \frac{82080.15}{95818.40} \approx 1 : 0.2 : 0.42 : 0.86$$

因此，若以第一測量終端速率值為基準時，其他三個的終端速率之誤差為

$$e = \frac{|v_{f\text{測量}} - v_{f\text{理論}}|}{v_{f\text{理論}}} \times 100\% = \frac{0.250274 - 0.2}{0.2} \times 100\% \approx 23.06\%$$

$$e' = \frac{|v'_{f\text{測量}} - v'_{f\text{理論}}|}{v'_{f\text{理論}}} \times 100\% = \frac{0.42 - 0.403952}{0.42} \times 100\% \approx 3.07\%$$

$$e'' = \frac{|v''_{f\text{測量}} - v''_{f\text{理論}}|}{v''_{f\text{理論}}} \times 100\% = \frac{0.86 - 0.76363}{0.86} \times 100\% \approx 10.86\%$$

由表得知，有些實驗值之誤差大都在 20% 以內，因此 $v_f \propto \frac{\rho \cdot a^4}{A}$ 式子成立

(三)不同的小磁鐵丟入同一材質、同管徑的金屬管中：

此條件下， v_f 簡化 $v_f \propto \frac{m}{M^2}$ ，即小磁鐵終端速率 v_f 與小磁鐵本身的質量成正比，與小磁鐵本身的磁偶極矩的平方成反比，表四為終端速率 v_f 實驗值與理論值之比較

金屬材質	內徑 (mm)	外徑 (mm)	磁鐵規格 mm×mm	磁鐵質量 (g)	磁鐵偶極矩比	測得 v_f	測得 v_f 相對比值	理論 $v_f \propto \frac{m}{M^2}$	理論 v_f 相對比值	實驗誤差百分比
鋁	13.00	16.00	10*10 圓柱	5.62	0.98	11.04	1.00	5.8043	1.00	
			12*12 圓柱	9.93	1.51	6.92	0.63	4.3782	0.75	16.90
			8*8 正方體	3.71	0.60	16.04	1.45	10.1695	1.75	17.08
鋁	16.00	19.15	10*10 圓柱	5.62	0.98	20.87	1.00	5.8043	0.99	
			10*10 正方體	7.38	1.27	16.25	0.78	4.5756	0.78	0
			12*12 圓柱	9.93	1.51	13.90	0.67	4.3782	0.75	11.16
銅	11.00	12.70	10*10 圓柱	5.62	0.98	6.84	1.00	5.8043	1.00	
			8*8 圓柱	2.86	0.50	11.93	1.74	11.4400	1.97	11.51
銅	17.00	18.80	10*10 圓柱	5.62	0.98	27.33	1.00	5.8043	0.99	
			10*10 正方體	7.38	1.27	20.70	0.76	4.5756	0.78	3.32
			12*12 圓柱	9.93	1.51	16.87	0.62	4.3782	0.75	17.66

表四：不同的小磁鐵丟入同一材質、同管徑的金屬管中之情形：實驗誤差不大，因此 $v_f \propto \frac{m}{M^2}$

以內徑、外徑分別為 13mm、16mm 的鋁管，放入不同小磁鐵為例：

所實驗測得終端速率 v_f 依序為 11.04 cm/s 、 6.92 cm/s 、 16.04 cm/s ，

這三個終端速率之比值為 $\frac{11.04}{11.04} : \frac{6.92}{11.04} : \frac{16.04}{11.04} \approx 1 : 0.63 : 1.45$

而這三個終端速率之理論值 $v_f \propto \frac{m}{M^2}$ 依序為

$$\frac{m_1}{M_1^2} = \frac{5.62}{(0.98)^2} \approx 5.8043, \quad \frac{m_2}{M_2^2} = \frac{5.93}{(1.51)^2} \approx 4.3782, \quad \frac{m_3}{M_3^2} = \frac{3.71}{(0.60)^2} \approx 10.1695,$$

這三個終端速率之理論值之比值為

$$\frac{5.8043}{5.8043} : \frac{4.3782}{5.8043} : \frac{10.1695}{5.8043} \approx 1 : 0.75 : 1.75 :$$

因此，若以第一測量終端速率值為基準時，其他兩個的終端速率之誤差為

$$e = \frac{|v_{f\text{測量}} - v_{f\text{理論}}|}{v_{f\text{理論}}} \times 100\% = \frac{0.75 - 0.63}{0.75} \times 100\% \approx 16.90\%$$

$$e' = \frac{|v'_{f\text{測量}} - v'_{f\text{理論}}|}{v'_{f\text{理論}}} \times 100\% = \frac{1.75 - 1.45}{1.75} \times 100\% \approx 17.08\%$$

(四)小結

綜合前三部分的實驗推論：

1.小磁鐵在中空金屬管中為等速度運動

2.同一小磁鐵丟入同材質、但不同管徑的金屬管中：實驗證得 $v_f \propto \frac{a^4}{A}$

3.同一小磁鐵丟入不同材質、不同管徑的金屬管中：實驗證得 $v_f \propto \frac{\rho \cdot a^4}{A}$

4.不同的小磁鐵丟入同一材質、同管徑的金屬管中：實驗證得 $v_f \propto \frac{m}{M^2}$

5.綜合各小實驗之結果 $v_f \propto \frac{\rho \cdot ma^4}{AM^2}$, 與理論值 $v_f = \frac{\rho \cdot mga^4}{cA\mu_0^2 M^2}$ 一致

6. v_f 與小磁鐵的形狀無關

柒、討論

一、實驗所得之終端速率 v_f 不大，再加上小磁鐵的體積甚小，因此空氣阻力可忽略不計。

二、小磁鐵在管中，偶而與管壁接觸，亦可忽略其阻力。

三、實驗所採用之金屬電阻率，為攝氏 20°C 時之電阻率。雖然實驗日期不同，溫度亦不同，但溫差不致改變太大，故採用攝氏 20°C 時之金屬電阻率，可忽略其誤差。

四、理論值 $v_f \propto a^4$ ，而我們實際使用的金屬管，均有其內徑及外徑，厚度不能忽略，我們取內外徑的平均值為 a ，我們試著將內徑或外徑視為 a ，比較結果仍以內外徑的平均值為 a 時最接近理論值。

五、理論值 v_f 與好幾個變因（ a 、 m 、 ρ 、 A 、 M ）有關，進行實驗時，照理應該固定其他四個變因，僅改變某一變因，以探討該某變因與 v_f 之關係，可是本實驗器材，不管是銅管或是鋁管，均無法找到符合上述之要求，如每支銅管或鋁管的內徑外徑間的厚度都不同，也很難找到內徑外徑間厚度很薄的銅管或鋁管。另外強力小磁鐵若要求外型一樣、質量一樣，但磁偶極矩強度不同，或者是要求外型一樣、磁偶極矩強度相同，但質量不同的情形，都很難，因此本實驗分析只好將數種變因合併一起考量，以探討這些變因與 v_f 之關係，所得之結果也令人十分滿意。

六、測量小磁鐵質量及小磁鐵的磁偶極矩的時候，我們將小磁鐵置於保麗龍上，目的是為了避免小磁鐵與電子磅秤之間可能不必要的干擾，除此之外，還兼具可將小磁鐵固定的功能。

七、測量小磁鐵磁偶極矩之比時，由於 $F \propto \frac{1}{d^4}$ ，可能視差，造成距離無法非常精確，還有較難確定兩磁鐵是否真的對準其質心，這些是造成誤差最主要的原因，因此我們設定兩磁鐵間的距離為 5 公分，以量取兩磁鐵間之斥力，所量結果與理論相比較，大都在可接受的誤差範圍。

捌、結論

長期以來，對於小磁鐵在非磁性金屬管中的運動行為模式，總是一知半解，本文從基本的電磁理論、微積分的積分技巧推導出小磁鐵速率的理論值為 $v_f = \frac{\rho \cdot m g a^4}{c A \mu_0^2 M^2}$ ，解除了眾人的長久的疑惑。所設計的實驗，簡易操作：以不同材質、不同口徑之管子（鋁管、銅管），與不同形狀、大小的小磁鐵進行比較。將實驗數據與理論數據比較後，其誤差值大都在合理範圍內，更驗證了理論的正確性----小磁鐵在非磁性金屬管中為等速度下降。

玖、參考資料及其他

- 一、林明瑞 高級中學物理課本（上）（再版）臺南市、南一書局。（90 頁、228 頁）（93 年 8 月）
- 二、林明瑞 高級中學物理課本（下）（再版）臺南市、南一書局。（3-9 頁）（93 年 2 月）
- 三、John A. Pelesko, Michael Cesky, and Sharon Huertas 2005.1 《Lenz ' s Law and Dimensional Analysis》, American Association of Physics Teacher January, Vol 73.No.1, p37~p39

拾、附錄

一、不同的小磁鐵丟入同一鋁管（內徑 16.00mm、外徑 19.15mm）所得的平均速率

磁鐵規格 (mm×mm)	磁鐵 質量 (克)	$t_A(s)$	$t_B(s)$	$t_C(s)$	$t_{AB}(s)$	$t_{BC}(s)$	$d(cm)$	v_{AB} (cm/s)	v_{BC} (cm/s)	v_f $= \frac{v_{AB} + v_{BC}}{2}$ (cm/s)
12*12 圓柱	9.93	16.45	18.50	20.67	2.05	2.17	30.00	14.63	13.82	14.23
		28.3	30.6	32.73	2.30	2.13	30.00	13.04	14.08	13.56
		39.83	41.97	44.13	2.14	2.16	30.00	14.02	13.89	13.95
		48.7	50.73	52.93	2.03	2.20	30.00	14.78	13.64	14.21
		59.1	61.33	63.53	2.23	2.20	30.00	13.45	13.64	13.54
平均速率										13.90
10*10 圓柱	5.62	41.4	42.87	44.27	1.47	1.40	30.00	20.41	21.43	20.92
		46.63	48.06	49.5	1.43	1.44	30.00	20.98	20.83	20.91
		51.83	53.27	54.73	1.44	1.46	30.00	20.83	20.55	20.69
		51.83	53.27	54.73	1.44	1.46	30.00	20.83	20.55	20.69
		58.13	59.53	60.97	1.40	1.44	30.00	21.43	20.83	21.13
平均速率										20.87
10*10 正方 體	7.38	51.36	53.33	55.1	1.97	1.77	30.00	15.23	16.95	16.09
		58.83	60.7	62.57	1.87	1.87	30.00	16.04	16.04	16.04
		12.8	14.57	16.47	1.77	1.90	30.00	16.95	15.79	16.37
		19.77	21.53	23.37	1.76	1.84	30.00	17.05	16.30	16.67
		26.63	28.46	30.37	1.83	1.91	30.00	16.39	15.71	16.05
平均速率										16.25

二、不同的小磁鐵丟入同一銅管（內徑 13.30mm、外徑 16.00mm）所得的平均速率

磁鐵規格 (mm×mm)	磁鐵 質量 (克)	$t_A(s)$	$t_B(s)$	$t_C(s)$	$t_{AB}(s)$	$t_{BC}(s)$	$d(cm)$	v_{AB} (cm/s)	v_{BC} (cm/s)	v_f $= \frac{v_{AB} + v_{BC}}{2}$ (cm/s)
10*10 圓柱	5.62	16.07	18.50	20.83	2.43	2.33	30.00	12.35	12.88	12.61
		26.2	28.57	31.07	2.37	2.50	30.00	12.66	12.00	12.33
		35.43	37.73	40.1	2.30	2.37	30.00	13.04	12.66	12.85
		44.8	47.2	49.5	2.40	2.30	30.00	12.50	13.04	12.77
		54.4	56.77	59.23	2.37	2.46	30.00	12.66	12.20	12.43
平均速率										12.60
12*12 圓柱	9.93	11.73	15.23	18.7	3.50	3.47	30.00	8.57	8.65	8.61
		25.33	28.97	32.43	3.64	3.46	30.00	8.24	8.67	8.46
		39	42.53	46.07	3.53	3.54	30.00	8.50	8.47	8.49
		52.4	56	59.57	3.60	3.57	30.00	8.33	8.40	8.37
		6.47	10.07	13.57	3.60	3.50	30.00	8.33	8.57	8.45
平均速率										8.47
8*8 圓柱體	2.86	32.9	34.3	35.77	1.40	1.47	30.00	21.43	20.41	20.92
		39.37	40.7	42.03	1.33	1.33	30.00	22.56	22.56	22.56
		45.83	47.17	48.6	1.34	1.43	30.00	22.39	20.98	21.68
		52.17	53.57	55	1.40	1.43	30.00	21.43	20.98	21.20
		58.83	60.17	61.6	1.34	1.43	30.00	22.39	20.98	21.68
平均速率										21.61
10*10 圓球	4.00	29.23	31	32.93	1.77	1.93	30.00	16.95	15.54	16.25
		36.63	38.4	39.9	1.77	1.50	30.00	16.95	20.00	18.47
		44.37	46.07	47.83	1.70	1.76	30.00	17.65	17.05	17.35
		51.67	53.43	55.07	1.76	1.64	30.00	17.05	18.29	17.67
		59.93	61.8	63.57	1.87	1.77	30.00	16.04	16.95	16.50
平均速率										17.25
10*10 圓柱	5.62	11.87	16.10	20.57	4.23	4.47	30.00	7.09	6.71	6.90
		23.6	28	32.47	4.40	4.47	30.00	6.82	6.71	6.76
		37.13	41.57	46	4.44	4.43	30.00	6.76	6.77	6.76
		49.87	54.17	58.6	4.30	4.43	30.00	6.98	6.77	6.87
		2.17	6.53	10.9	4.36	4.37	30.00	6.88	6.86	6.87
平均速率										6.84

三、不同的小磁鐵丟入同一銅管（內徑 11.00mm、外徑 12.7mm）所得的平均速率

磁鐵規格 (mm×mm)	磁鐵 質量 (克)	$t_A(s)$	$t_B(s)$	$t_C(s)$	$t_{AB}(s)$	$t_{BC}(s)$	$d(cm)$	v_{AB} (cm/s)	v_{BC} (cm/s)	v_f $= \frac{v_{AB} + v_{BC}}{2}$ (cm/s)
10*10 圓柱	5.62	11.87	16.10	20.57	4.23	4.47	30.00	7.09	6.71	6.90
		23.6	28	32.47	4.40	4.47	30.00	6.82	6.71	6.76
		37.13	41.57	46	4.44	4.43	30.00	6.76	6.77	6.76
		49.87	54.17	58.6	4.30	4.43	30.00	6.98	6.77	6.87
		2.17	6.53	10.9	4.36	4.37	30.00	6.88	6.86	6.87
平均速率										6.84
8*8 圓柱體	2.86	19.7	22.20	24.73	2.50	2.53	30.00	12.00	11.86	11.93
		27.6	30.07	32.63	2.47	2.56	30.00	12.15	11.72	11.93
		36.83	39.33	41.9	2.50	2.57	30.00	12.00	11.67	11.84
		45.77	48.23	50.93	2.46	2.70	30.00	12.20	11.11	11.65
		54.03	56.43	58.9	2.40	2.47	30.00	12.50	12.15	12.32
平均速率										11.93
10*10 球體	4.00	0.6	4.13	7.77	3.53	3.64	30.00	8.50	8.24	8.37
		11.37	14.9	18.5	3.53	3.60	30.00	8.50	8.33	8.42
		22.3	25.87	29.43	3.57	3.56	30.00	8.40	8.43	8.42
		33.03	36.6	40.2	3.57	3.60	30.00	8.40	8.33	8.37
		43.33	46.9	50.53	3.57	3.63	30.00	8.40	8.26	8.33
平均速率										8.93
8*8 球體	2.00	48.43	50.43	52.53	2.00	2.10	30.00	15.00	14.29	14.64
		55.4	57.37	59.43	1.97	2.06	30.00	15.23	14.56	14.90
		12.7	14.7	16.8	2.00	2.10	30.00	15.00	14.29	14.64
		19.77	21.8	23.83	2.03	2.03	30.00	14.78	14.78	14.78
		26.47	28.57	30.57	2.10	2.00	30.00	14.29	15.00	14.64
平均速率										14.72
6*6 正方體	1.62	18.83	20.27	21.83	1.44	1.56	30.00	20.83	19.23	20.03
		25	26.57	28.1	1.57	1.53	30.00	19.11	19.61	19.36
		31.7	33.2	34.67	1.50	1.47	30.00	20.00	20.41	20.20
		37.87	39.4	41.03	1.53	1.63	30.00	19.61	18.40	19.01
		4.13	5.67	7.2	1.54	1.53	30.00	19.48	19.61	19.54
平均速率										19.63

四、不同的小磁鐵丟入同一銅管（內徑 17.00mm、外徑 18.8mm）所得的平均速率

磁鐵規格 (mm×mm)	磁鐵 質量 (克)	$t_A(s)$	$t_B(s)$	$t_C(s)$	$t_{AB}(s)$	$t_{BC}(s)$	$d(cm)$	v_{AB} (cm/s)	v_{BC} (cm/s)	v_f $= \frac{v_{AB} + v_{BC}}{2}$ (cm/s)
12*12 圓柱	9.93	49.33	51.07	52.87	1.74	1.80	30.00	17.24	16.67	16.95
		55.8	57.53	59.4	1.73	1.87	30.00	17.34	16.04	16.69
		3.17	4.93	6.6	1.76	1.67	30.00	17.05	17.96	17.50
		9.97	11.7	13.57	1.73	1.87	30.00	17.34	16.04	16.69
		16.53	18.3	20.17	1.77	1.87	30.00	16.95	16.04	16.50
平均速率										16.87
10*10 圓柱 體	5.62	29.33	30.43	31.57	1.10	1.14	30.00	27.27	26.32	26.79
		34.73	35.8	36.93	1.07	1.13	30.00	28.04	26.55	27.29
		39.6	40.57	41.7	0.97	1.13	30.00	30.93	26.55	28.74
		44.53	45.6	46.74	1.07	1.14	30.00	28.04	26.32	27.18
		49.37	50.43	51.63	1.06	1.20	30.00	28.30	25.00	26.65
平均速率										27.33
10*10 正方 體	7.38	28.1	29.53	31.03	1.43	1.50	30.00	20.98	20.00	20.49
		59.73	61.17	62.6	1.44	1.43	30.00	20.83	20.98	20.91
		40.93	42.33	43.8	1.40	1.47	30.00	21.43	20.41	20.92
		47.6	49.06	50.5	1.46	1.44	30.00	20.55	20.83	20.69
		5.77	7.23	8.7	1.46	1.47	30.00	20.55	20.41	20.48
平均速率										20.70

中華民國第四十五屆中小學科學展覽會
評 語

高中組 物理科

040106

一『探』究竟

國立屏東女子高級中學

評語：

能從物理科學學習過程發掘問題，並利用手邊器材設計實驗實屬難能可貴，在改變管子的實驗中，未能對單項變因操作改變，造成討論失去焦點，宜對此問題改進或再修正這個實驗裝置。