

中華民國第四十五屆中小學科學展覽會
作品說明書

高中組 物理科

佳作

040105

模擬衛星對地運動

國立新莊高級中學

作者姓名：

高二 葉柏彥 高二 羅日彥 高二 魏志強
高二 陳建宏

指導老師：

吳原旭 韓幼青

中華民國第四十五屆中小學科學展覽會
作品說明書

模擬衛星對地運動

關鍵詞：人造衛星、相對運動、福爾摩沙衛星

科別：物理科

組別：高中組

目次

壹、摘要.....	P 01
貳、研究動機.....	P 01
參、研究目的.....	P 01
肆、研究設備及器材.....	P 01
伍、研究過程.....	P 02
陸、結果與分析.....	P 05
柒、討論.....	P 26
捌、結論.....	P 28
玖、參考資料.....	P 29

模擬衛星對地運動

壹、摘要：

本實驗設計一個模擬衛星裝置，記錄運行中的衛星投影在自轉地球上的軌跡，以相對運動之概念加以分析，尋找影響軌跡的變因。並以實驗找出的變因為參數，設計電腦模擬動畫，模擬各種不同的軌跡與實際測量結果對照。應用實驗歸納出來公式驗證福爾摩沙衛星的數據。

貳、研究動機：

高二課程中提到人造衛星的軌道速度等問題，引起我們的興趣。於是設計了繞地球運行的光筆模擬人造衛星，光點的軌跡便是人造衛星對地運動的軌跡，於是我們的研究就展開了。

參、研究目的：

- 一、模擬人造衛星繞地公轉，以了解衛星投影在地面之軌跡。
- 二、以相對運動的觀點，分析衛星對地運動軌跡的特性。
- 三、了解衛星傾斜角、角速度等變因與衛星對地運動之關係。
- 四、將測量結果與理論分析作比對，以驗證本實驗裝置所測的結果。
- 五、由實驗歸納出的變因為參數，設計電腦程式模擬衛星對地運動之軌跡。
- 六、比對並了解福爾摩沙衛星之特性。

肆、研究設備及器材：

器材	規格	數量
自轉地球儀	半徑 15.12cm 轉速 4.5rpm	1 個
DV 錄影機	SONY DTR-CRV-60	1 部
直流馬達	60W 1800 rpm	1 部
減速齒輪組	75：1	1 組
調速器	無段式	1 個
筆記型電腦	IBM	4 部
檯燈	17W	4 具
雷射光筆	一般	3 支
鐵球	舊教材動量守衡實驗配件	4 個
鉛錘	自由落體實驗配件	1 個
支架.角鋼.木板		若干
作圖軟體	VISIO、GSP4.00	1 套
水準儀	力桌實驗配件	1 個

表(一)

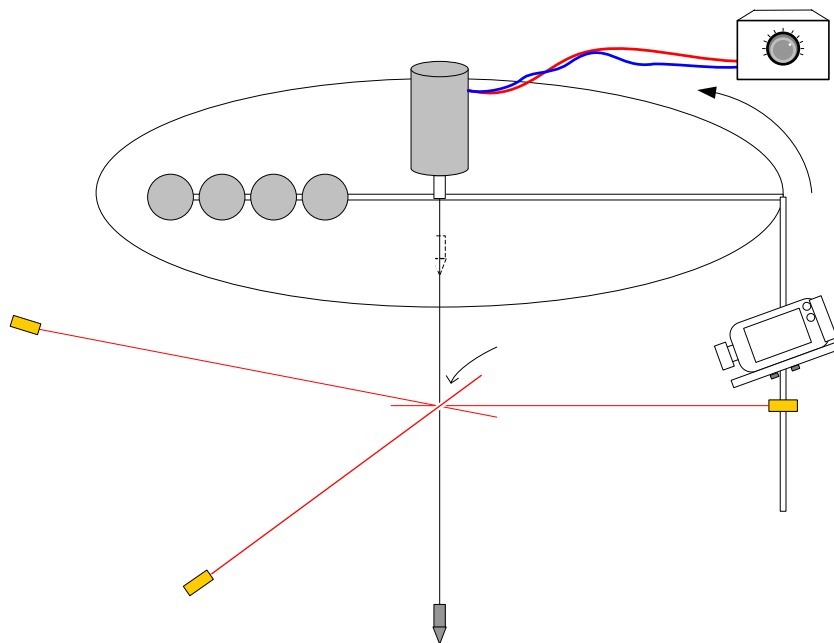
伍、研究過程：

一、實驗裝置的構想：

人造衛星進入公轉軌道後，通常便以等速率繞著地心作圓周運動，如果想研究地面上的觀察者所看到的衛星運動，有兩種模擬方式，一種是使地球靜止，但是要模擬衛星運動軌跡必須要把一些假想力(離心力、科氏力)加到衛星上。如此設計的衛星軌道就太複雜了。所以我們決定選擇第二種方式，那就是跳到太空去看地球與衛星，而以光筆代替衛星，讓地球自轉，衛星以圓軌道繞地心做公轉運動，以錄影機記錄光點軌跡的經緯度值。

二、裝置的架設：

- (一)、將減速後的馬達鎖在一塊厚木板上，以 C 型夾固定在兩張實驗桌之間。
- (二)、以水準儀，檢查板面各點是否在同一水平面，以木桿撐在地面與板面之間做修正，使馬達在一個穩定的水平面上。

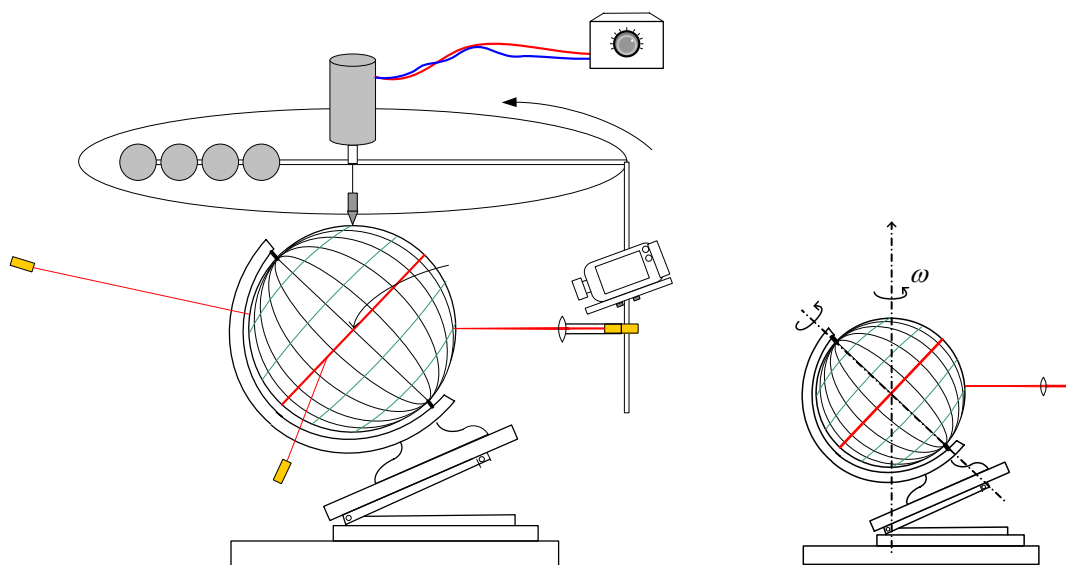


圖(一)

- (三)、以套筒、螺絲、直角夾將一根橫鐵桿與馬達轉軸連在一起，在橫桿一端結合上一根直鐵桿如上圖(一)，另一端旋上鐵球以平衡重量。
- (四)、在直桿上固定一支雷射光筆，鎖上一段角鋼來固定錄影機。
- (五)、將兩支雷射光筆固定在桌腳適當位置，以連通管調整照射方向，且使兩條光線水平相交於馬達軸心的鉛垂線上。此交點即為將來放置地球儀的地心位置，也是衛星光筆的公轉圓心。
- (六)、以連通管調整直桿上的光筆(模擬人造衛星)使其高度與照射方向均與地心在同一水平面上，並且使光筆照射的方向恰好指向地心位置。這樣人造衛星照射到地球儀表面上的位置恰好可以代表人造衛星的鉛直投影位置。
- (七)、將鉛錘升高到恰好地球儀頂的位置，作為校對地軸傾斜角之參考。

三、地球儀之設計及位置校正

- (一)、配合地球儀大小，以電腦畫製球面座標格線。除了極地附近之經線之外其他的刻度線均為 1 度，誤差值在 0.1 度以內。將座標紙貼在地球儀球殼上。
- (二)、以木板製作一個可調整傾斜角的底座，將地球儀固定在上層板。調整至所需角度並鎖緊。此時地球自轉軸與鉛直線之夾角為 δ ，此角度也是模擬衛星公轉軸與地球自轉軸的夾角。
- (三)、將地球儀放在鉛錘正下方，以兩支定位光筆檢查照射的位置，同時檢查鉛錘所指地球儀頂部緯度線是否為 $90^\circ - \delta$ ，調整底座的傾斜角，及高度使球心在設定的位置上。
- (四)、在衛星光筆前套上一個凸透鏡，使光點聚焦在球面上，以增加判讀準確性。
- (五)、打開衛星光筆，使其繞靜止的地球公轉，觀察地球儀上光點軌跡通過之南、北最高緯度線是否為 δ ，否則就要再檢查調整。
- (六)、光筆不動、使地球儀轉動，檢查光筆照在地球儀上的緯度線是否穩定不變，以檢驗地球儀自轉的穩定度。



圖(二)



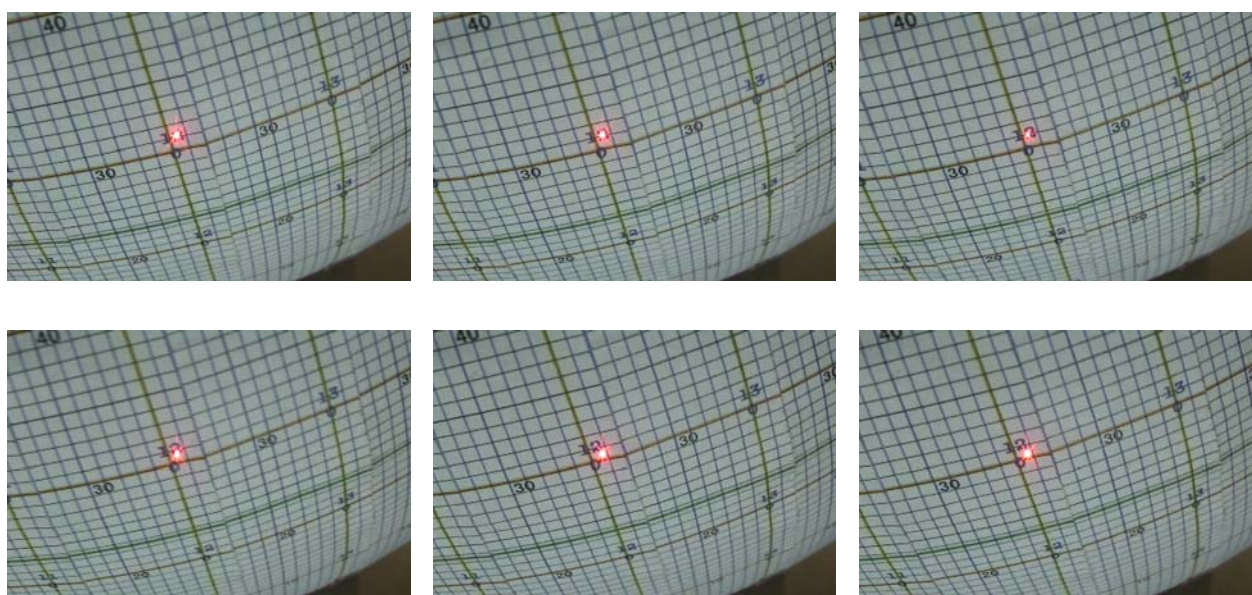
照片(一)

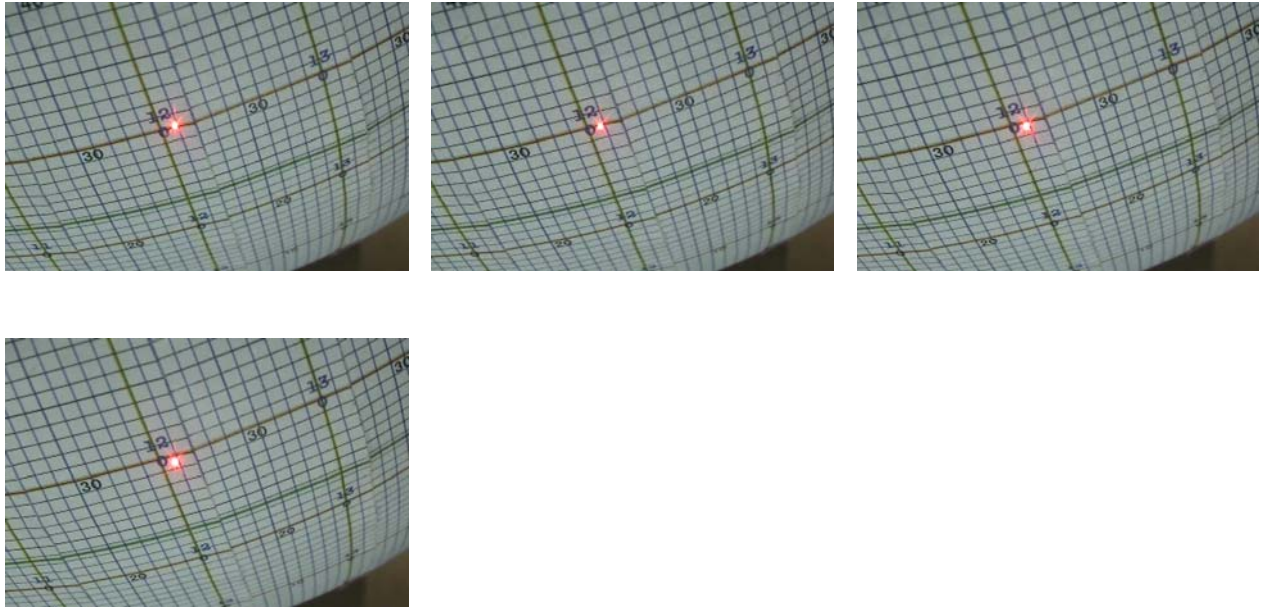
四、開始測量。本實驗的主要變因有兩種，一是地軸與衛星公轉軸的夾角 δ 。一是衛星的公轉角速度 ω_s 與地球自轉角速度 ω_e 之比值。

- (一)、每次改變 δ ，都需要重覆「研究過程三」中步驟(三)~(六)，校正數次，然後才可以開始測量。
- (二)、打開錄影機之後，再打開模擬衛星，先錄取數週地球儀靜止時之畫面。之後，再啟動地球儀，繼續錄製。
- (三)、將錄影內容擷取到電腦，每 1/6 秒讀取一次(θ ， ϕ)，如照片(二~十一)為錄影時之連續畫面。
- (四)、規劃控制變因如表(二)，測量地表座標上之衛星投影點(t ， θ ， ϕ)數據，並畫出 ϕ - θ 直角座標圖。因為讀取數據點的時距都一樣，所以點的密度可象徵速率大小。

衛星公轉 角速度 ω_s 兩軸夾角 δ	$\omega_s > \omega_e$	$\omega_s = \omega_e$	$\omega_s < \omega_e$
$\delta = 0^\circ$	測量結果(一)	測量結果(二)	測量結果(三)
$\delta = 23.5^\circ$	測量結果(四)	測量結果(五)	測量結果(六)
$\delta = 35^\circ$	測量結果(七) 測量結果(八)	測量結果(九)	測量結果(十)
$\delta = 50^\circ$	測量結果(十一)	測量結果(十二)	測量結果(十三)
$\delta = 90^\circ$	失敗	失敗	測量結果(十四)

表(二)





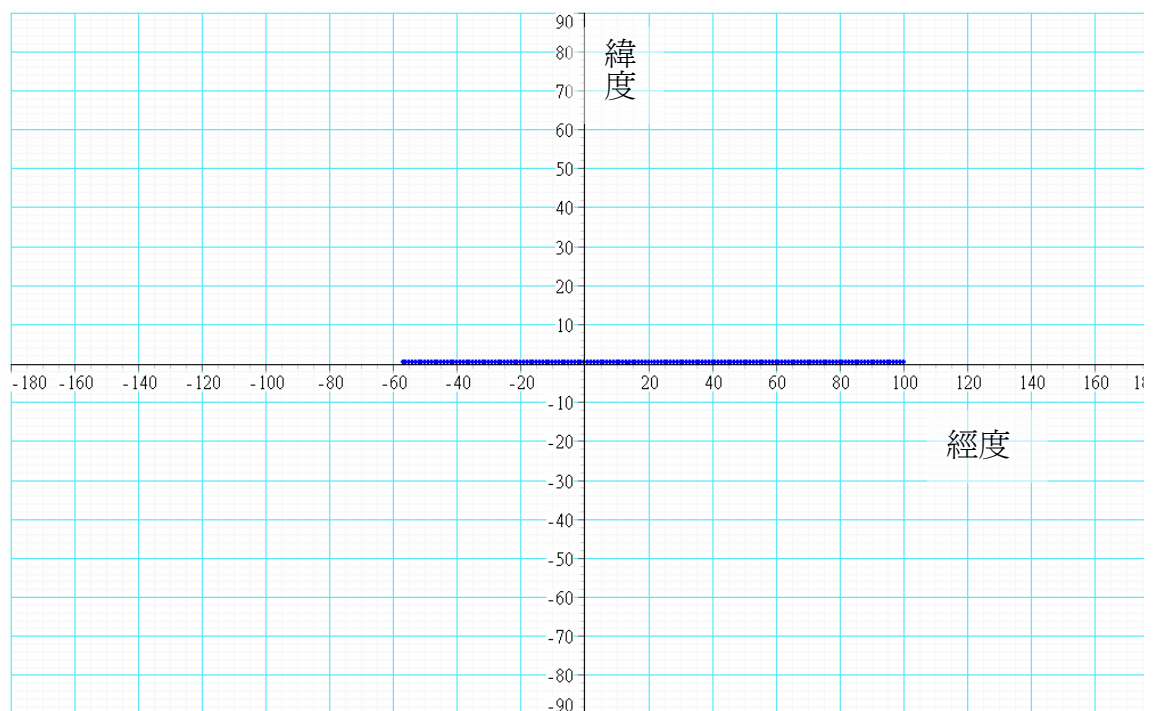
照片(二~十一)

陸、結果與分析：

一、測量結果：圖形中藍色為實測數據，紅色為延伸數據。

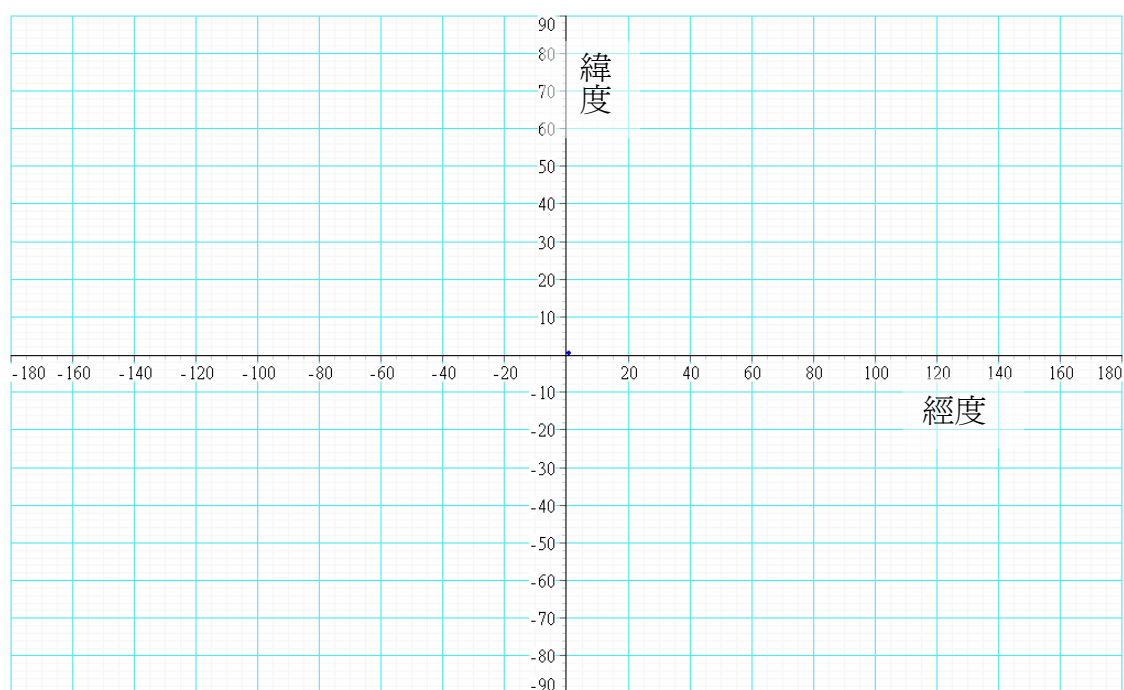
(一)、 $\delta=0^\circ$ ， $\omega_s > \omega_e$

$\omega_s=31.5^\circ/\text{s}$ $\omega_e=27.0^\circ/\text{s}$ 對地運動向東



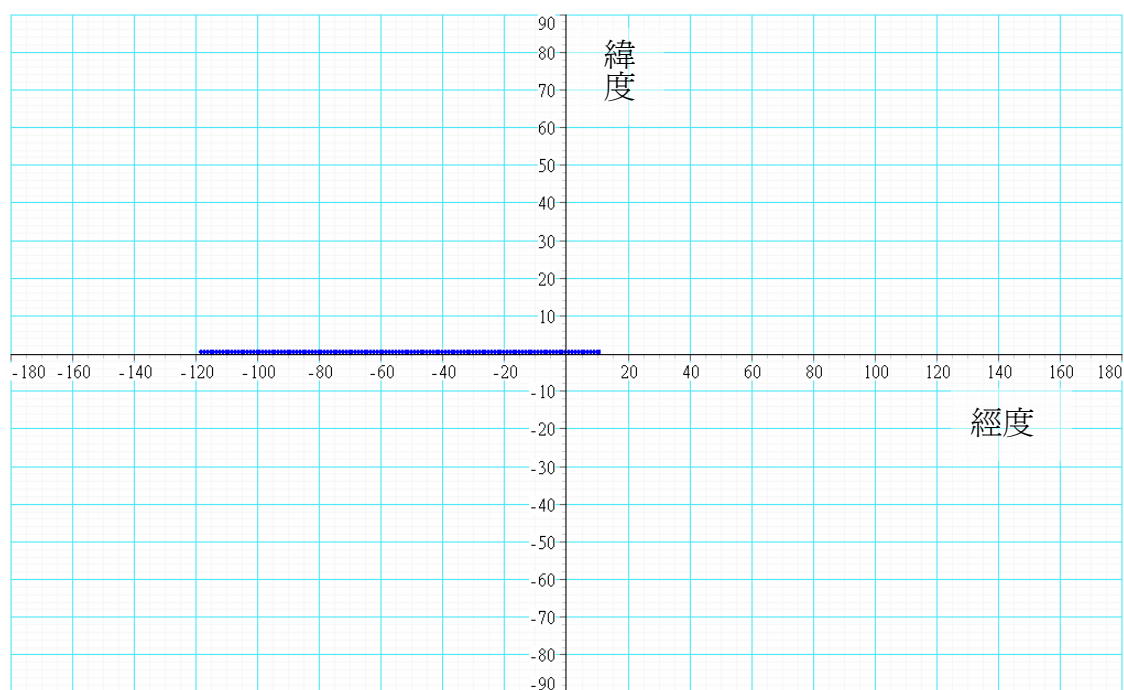
(二)、 $\delta=0^\circ$, $\omega_s=\omega_e$

$\omega_s=25.3^\circ/\text{s}$ $\omega_e=27.0^\circ/\text{s}$ 定點不動



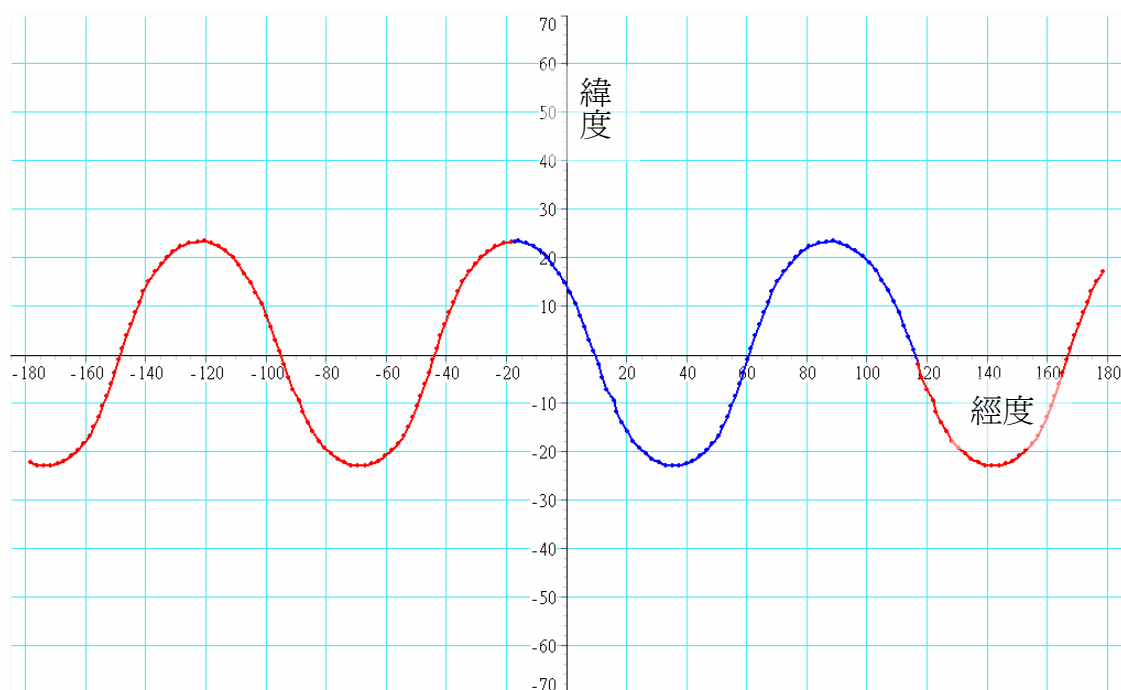
(三)、 $\delta=0^\circ$, $\omega_s<\omega_e$

$\omega_s=23.3^\circ/\text{s}$ $\omega_e=27.0^\circ/\text{s}$ 對地運動向西



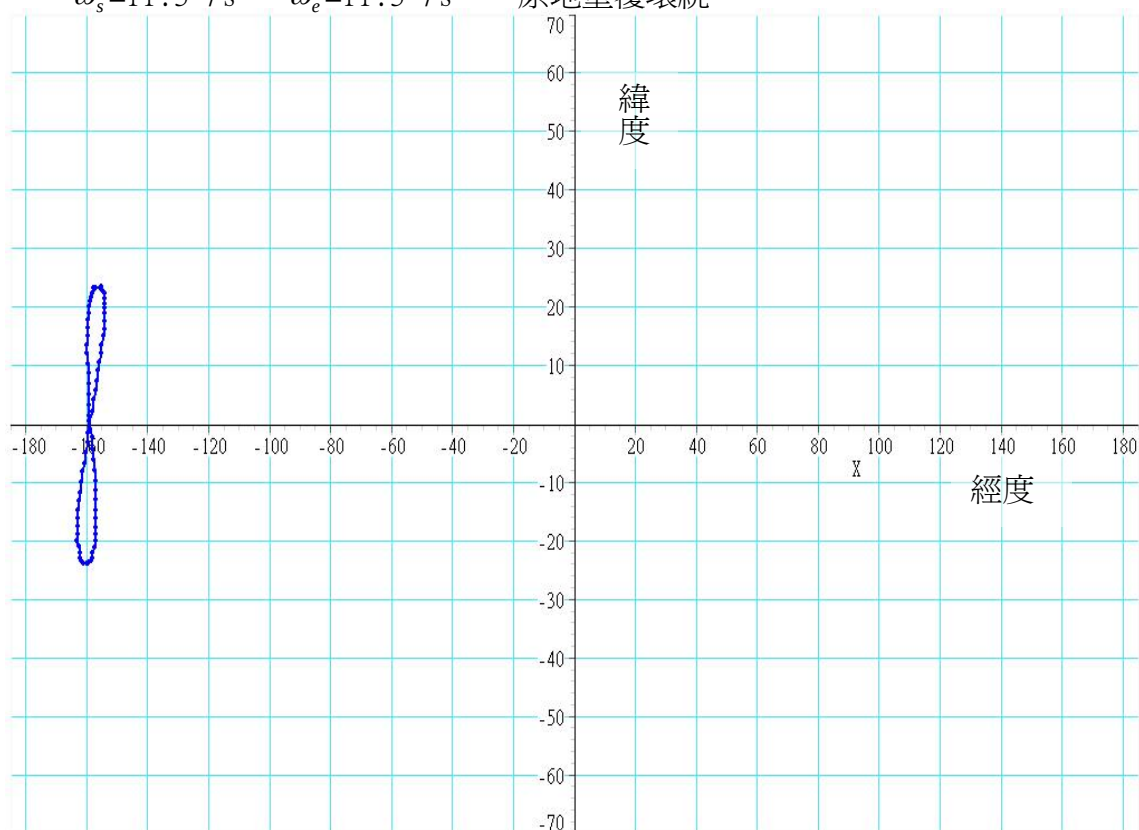
(四)、 $\delta=23.5^\circ$ ， $\omega_s > \omega_e$

$\omega_s=38.1^\circ/\text{s}$ $\omega_e=27.0^\circ/\text{s}$ 運動向東 軌跡每 105 經度重覆一次



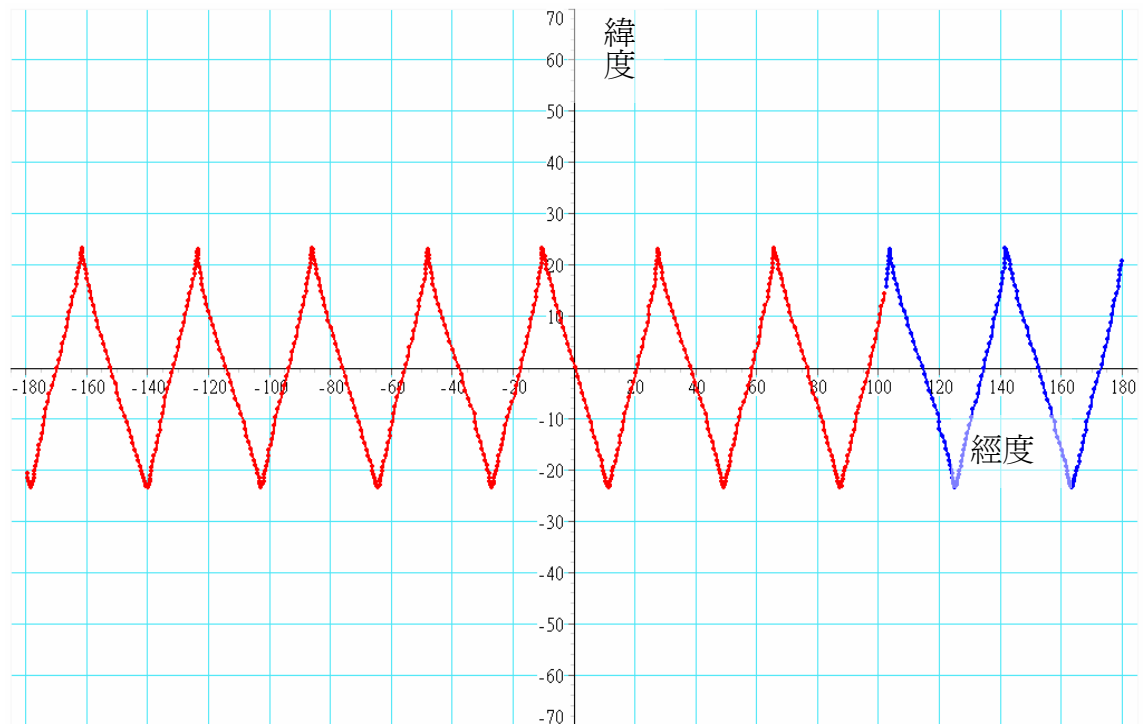
(五)、 $\delta=23.5^\circ$ ， $\omega_s = \omega_e$

$\omega_s=11.3^\circ/\text{s}$ $\omega_e=11.3^\circ/\text{s}$ 原地重覆環繞



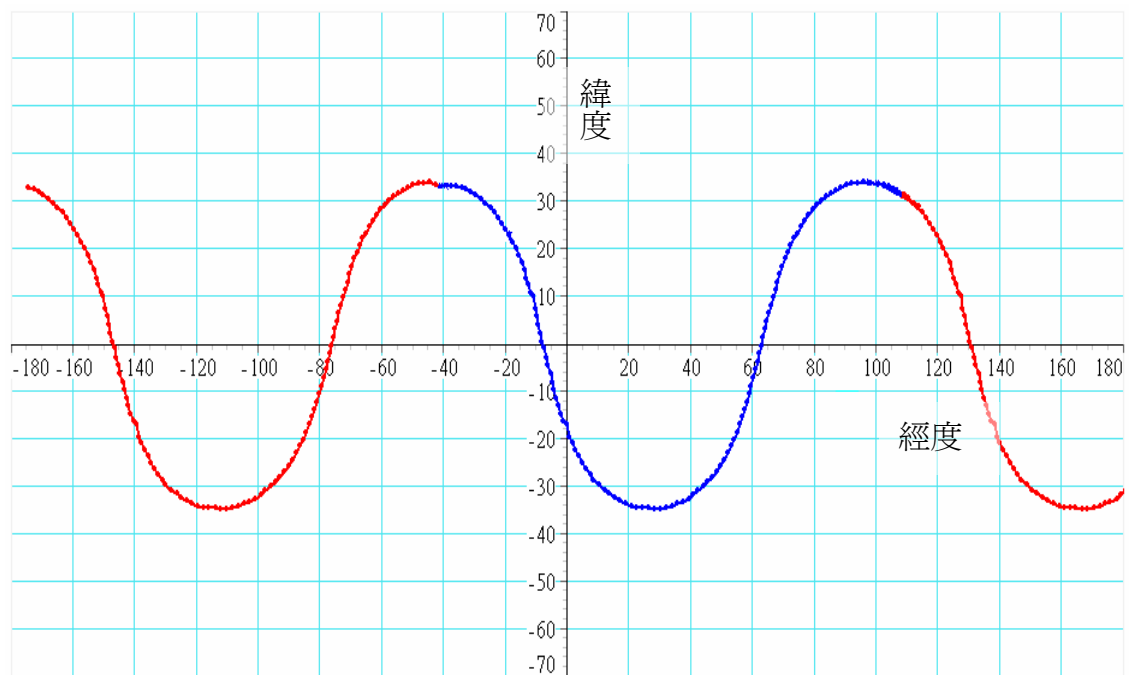
(六)、 $\delta=23.5^\circ$ ， $\omega_s < \omega_e$

$\omega_s=24.4^\circ/\text{s}$ $\omega_e=27.0^\circ/\text{s}$ 對地運動向西 軌跡每 -38.3 經度重覆一次



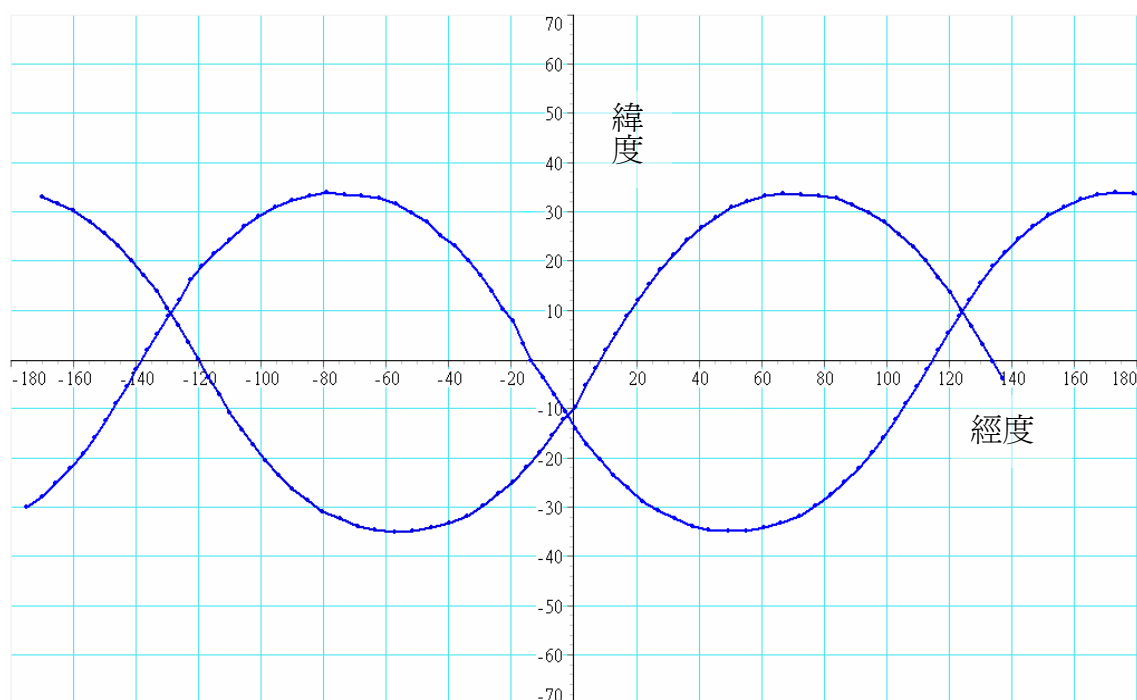
(七)、 $\delta=35^\circ$ ， $\omega_s > \omega_e$

$\omega_s=18.6^\circ/\text{s}$ $\omega_e=11.3^\circ/\text{s}$ 對地運動向東 軌跡每 141.3 經度重覆一次



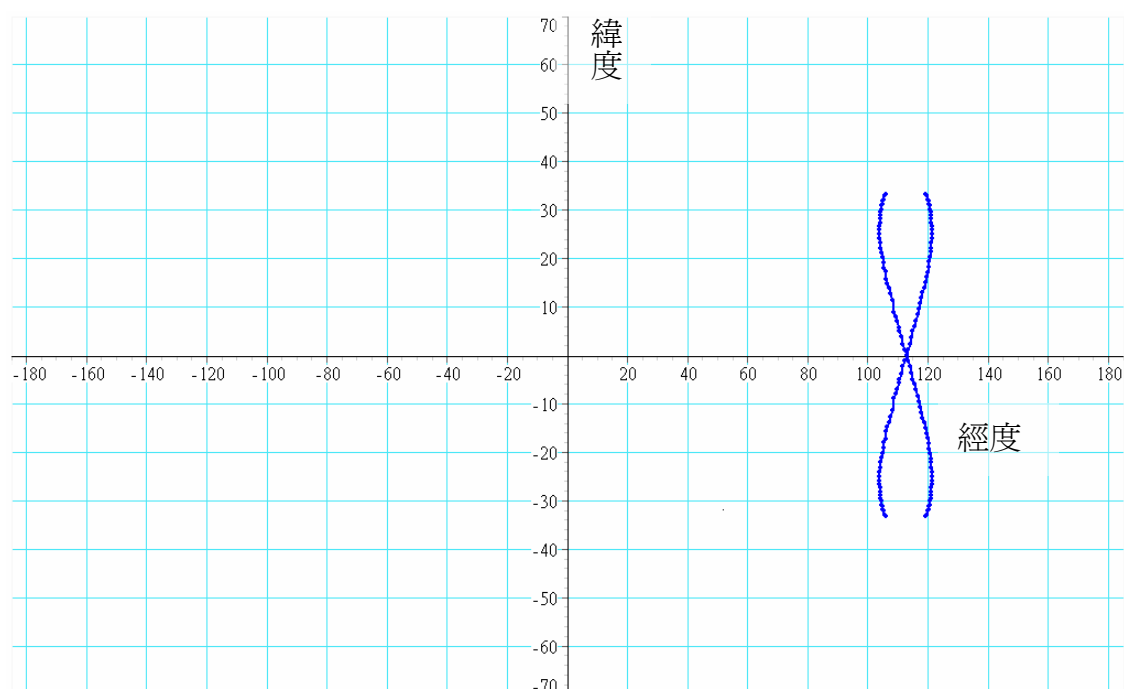
(八)、 $\delta=35^\circ$ ， $\omega_s > \omega_e$

$\omega_s=37.5^\circ/\text{s}$ $\omega_e=11.3^\circ/\text{s}$ 對地運動向東 軌跡每 255 經度重覆一次



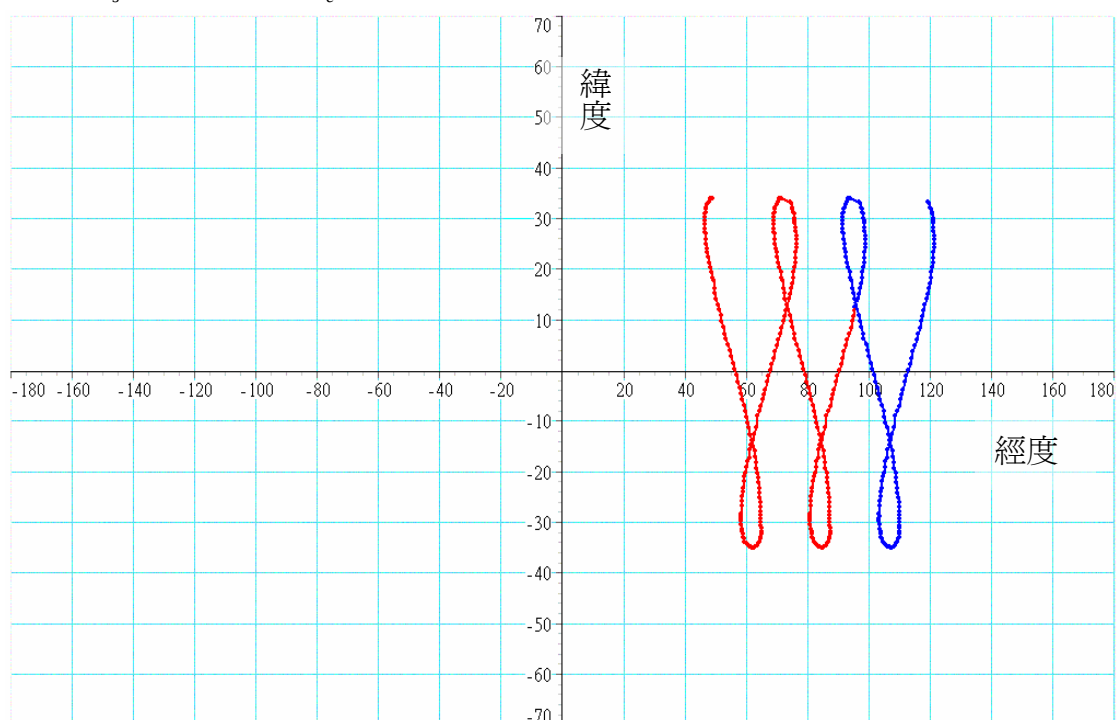
(九)、 $\delta=35^\circ$ ， $\omega_s = \omega_e$

$\omega_s=11.3^\circ/\text{s}$ $\omega_e=11.3^\circ/\text{s}$ 原地重覆環繞



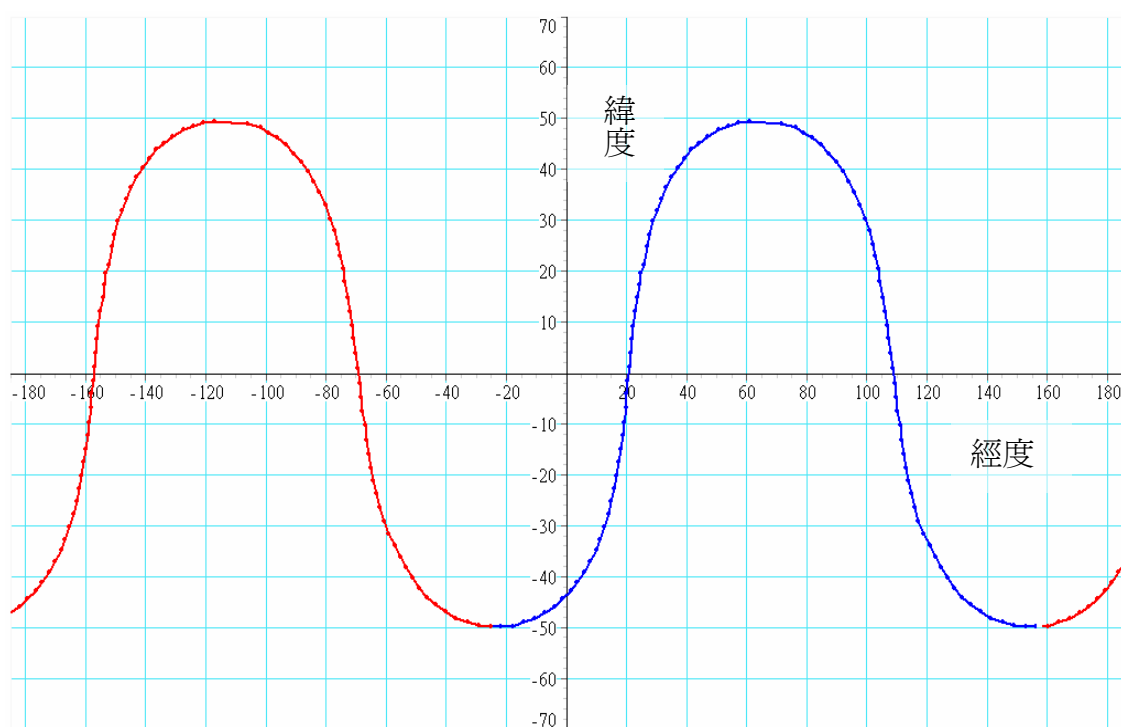
(十)、 $\delta=35^\circ$, $\omega_s < \omega_e$

$\omega_s=10.6^\circ/\text{s}$ $\omega_e=11.3^\circ/\text{s}$ 對地運動向西 軌跡每-23.8 經度重覆一次



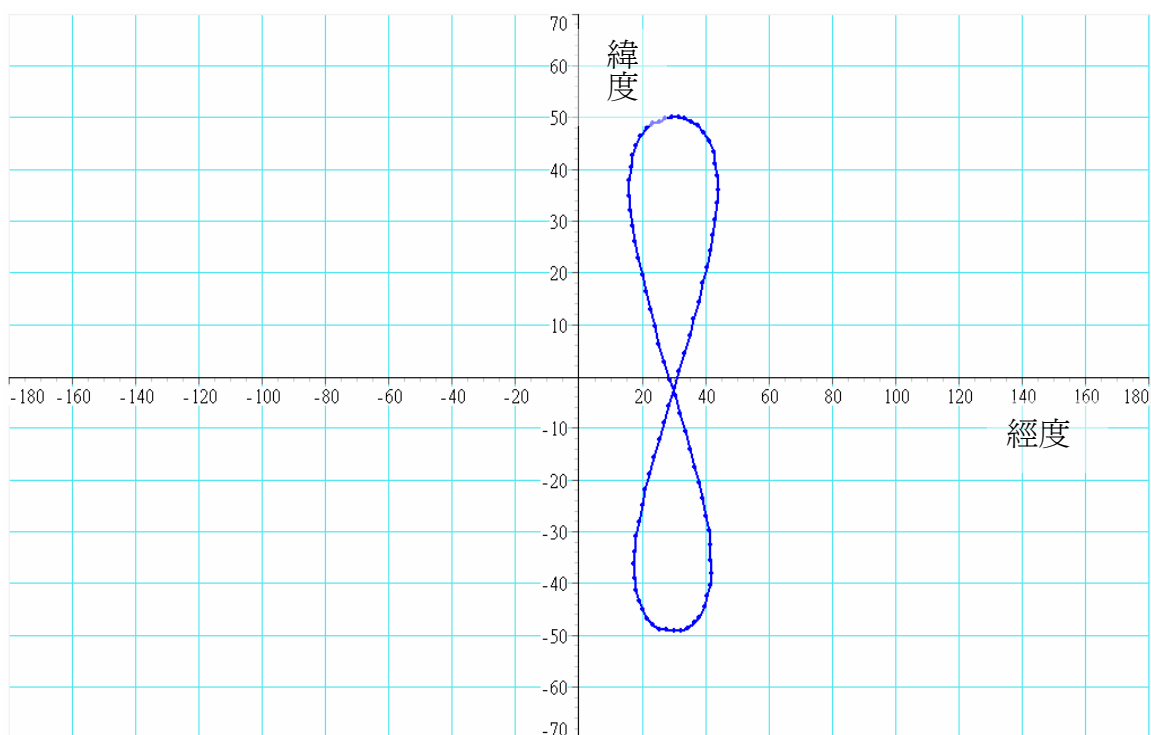
(十一)、 $\delta=50^\circ$, $\omega_s > \omega_e$

$\omega_s=22.5^\circ/\text{s}$ $\omega_e=11.3^\circ/\text{s}$ 對地運動向東 軌跡每171.7 經度重覆一次



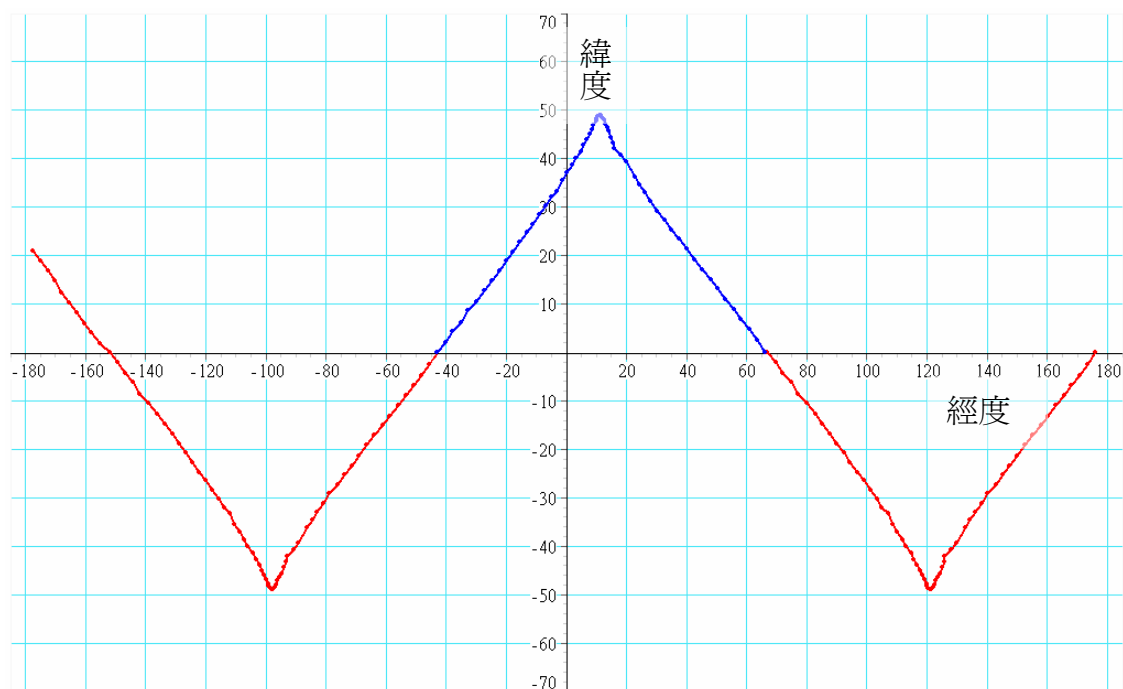
(十二)、 $\delta=50^\circ$, $\omega_s=\omega_e$

$\omega_s=11.3^\circ/\text{s}$ $\omega_e=11.3^\circ/\text{s}$ 原地重覆環繞



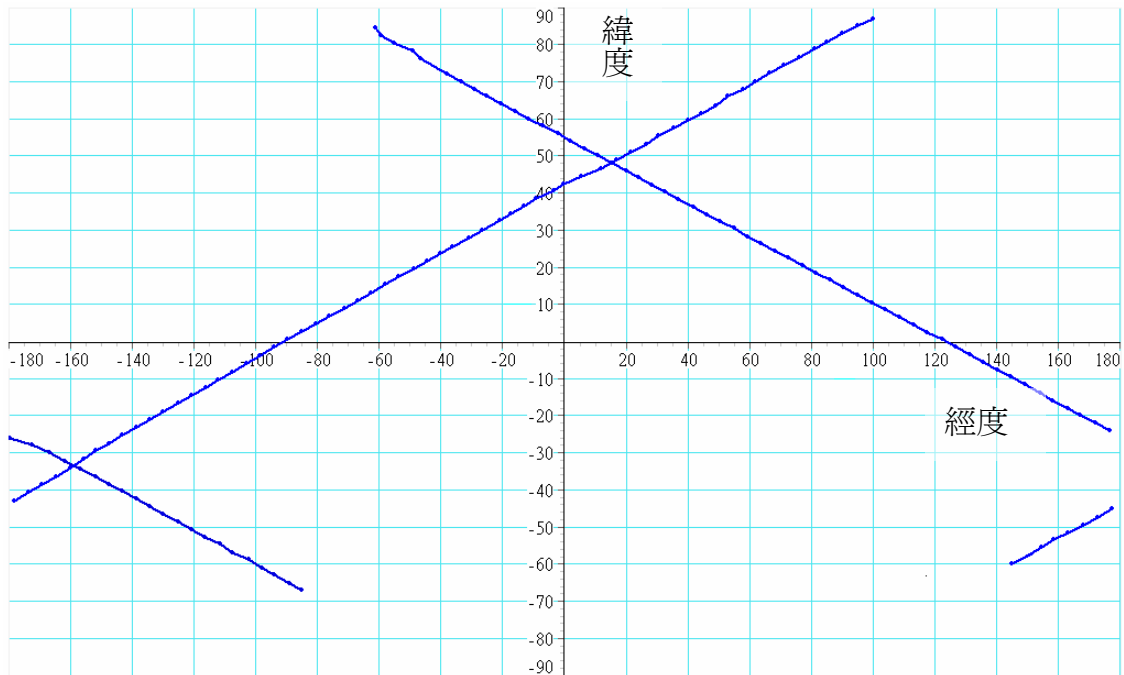
(十三)、 $\delta=50^\circ$, $\omega_s<\omega_e$

$\omega_s=17.0^\circ/\text{s}$ $\omega_e=27.0^\circ/\text{s}$ 對地運動向西 軌跡每-211.8 經度重覆一次



(十四)、 $\delta=90^\circ$ ， $\omega_s < \omega_e$

$\omega_s=12.2^\circ/\text{s}$ $\omega_e=27.0^\circ/\text{s}$ 直線交錯運動



二、分析：

(一)、定義代號：

R_e ：地球半徑

$\vec{V}_s$ ：衛星投影在地表之運動速度， $V_s = R_e \omega_s$ 。

$\vec{V}_e$ ：地球表面赤道切線速度， $V_e = R_e \omega_e$ ，方向恆向東。

$\vec{V}_{se}$ ：衛星投影點相對於地表之速度， $\vec{V}_{se} = \vec{V}_s - \vec{V}_e \cos \phi$ 。

δ ：地軸與衛星公轉軸的夾角，也相當於衛星通過赤道時與赤道的夾角。

θ ：地表經度座標。

ϕ ：地表緯度座標。

α ： $\vec{V}_{se}$ 與緯度線之夾角， $\vec{V}_{se}$ 向東時， α 定為 0° 。

β ： $\vec{V}_s$ 與緯度線之夾角， β 是 ϕ 的函數，與地球轉速無關， $\vec{V}_s$ 向東時， β 定為 0° 。

V_E ： $\vec{V}_{se}$ 的東西向分量。

V_N ： $\vec{V}_{se}$ 的南北向分量。

(二)、以相對運動的觀念分析衛星投影點的軌跡：

$$\vec{V}_{se} = \vec{V}_s - \vec{V}_e \cos \phi$$

$$\text{又 } \vec{V}_{se} = V_E \hat{i} + V_N \hat{j}$$

$$\therefore V_E = V_s \cos \beta - V_e \cos \phi$$

$$V_N = V_s \sin \beta$$

$$\tan \alpha = \frac{V_N}{V_E} = \frac{V_s \sin \beta}{V_s \cos \beta - V_e \cos \phi}$$

$$\ominus V_s = R_e \omega_s \text{ 且 } V_e = R_e \omega_e$$

$$\therefore \frac{V_N}{V_E} = \frac{\omega_s \sin \beta}{\omega_s \cos \beta - \omega_e \cos \phi}$$

$$\therefore \tan \alpha = \frac{\omega_s \sin \beta}{\omega_s \cos \beta - \omega_e \cos \phi} \dots\dots\dots \text{公式(1)}$$

$$\text{定義：} n = \omega_s / \omega_e \text{ 則 } \tan \alpha = \frac{n \sin \beta}{n \cos \beta - \cos \phi} \dots\dots\dots \text{公式(2)}$$

$\angle \alpha$ 是 ϕ 的函數，受 n 及 δ 兩個因素的影響。

(三)、從衛星投影點繞地球以 V_s 等速率運動分成四個階段討論：

1、南北向速度： $V_N = V_s \sin \beta$

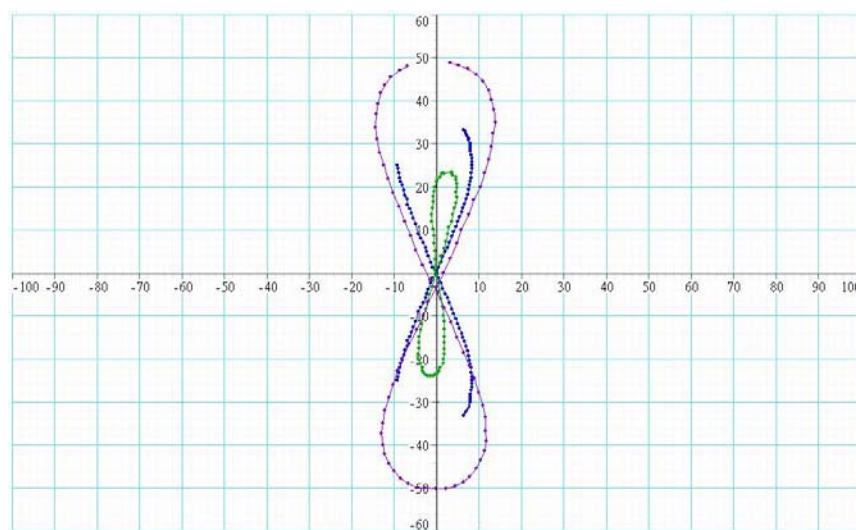
階段	緯度區間	ϕ 值	β 值	運動方向
第一階段	由赤道朝北至緯度最大處	$0^\circ \rightarrow \delta$	$\delta \rightarrow 0^\circ$	$V_N > 0$ ，向北
第二階段	由緯度最大處朝南至赤道	$\delta \rightarrow 0^\circ$	$0^\circ \rightarrow -\delta$	$V_N < 0$ ，向南
第三階段	由赤道朝南至緯度最小處	$0^\circ \rightarrow -\delta$	$-\delta \rightarrow 0^\circ$	$V_N < 0$ ，向南
第四階段	由緯度最小處朝北至赤道	$-\delta \rightarrow 0^\circ$	$0^\circ \rightarrow \delta$	$V_N > 0$ ，向北

2、東西向速度： $V_E = R_e (\omega_s \cos \beta - \omega_e \cos \phi)$

因為正、負角度餘弦函數均相同，所以 $\vec{V}_{se}$ 的東西向分量與南、北半球 (ϕ 、 β 之正、負) 無關。其方向主要來自比較 $\omega_s \cos \beta$ 、 $\omega_e \cos \phi$ 大小，當 $\omega_s \cos \beta > \omega_e \cos \phi$ 時， $V_E > 0$ ，向東；當 $\omega_s \cos \beta < \omega_e \cos \phi$ 時， $V_E < 0$ ，向西。

(四)、比較 $\omega_s = \omega_e$ 之衛星軌道 ($n = 1$)：

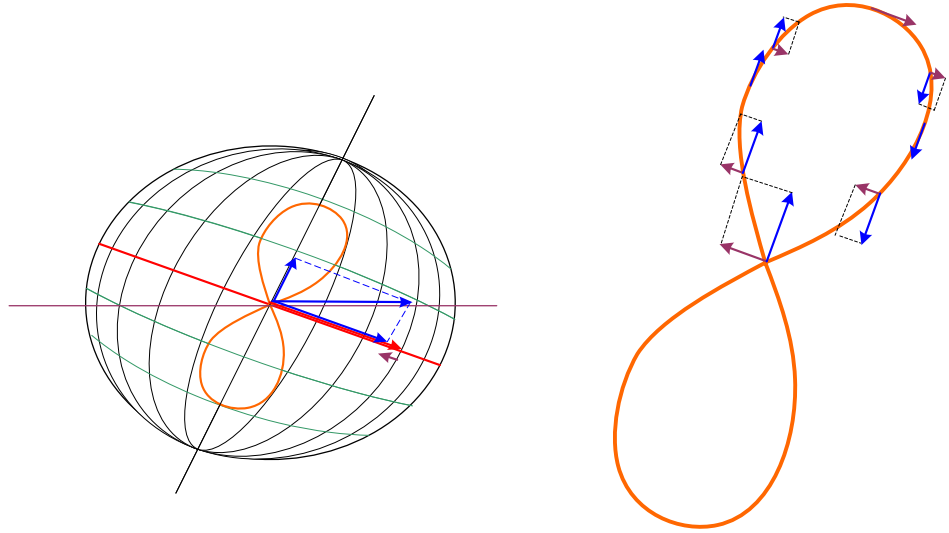
- 1、當 $\delta = 0^\circ$ 時，衛星相對地表的投影軌跡為一個定點，此為同步衛星，如測量結果(二)。
- 2、比較 $\delta = 23.5^\circ$ ， $\delta = 35^\circ$ ， $\delta = 50^\circ$ 之軌跡如測量結果(五)、(九)、(十二)。將三組數據之經度值平移，使重疊在一起方便比較如圖(三)，軌跡形狀均為8字形，交叉的位置大略都在赤道附近。



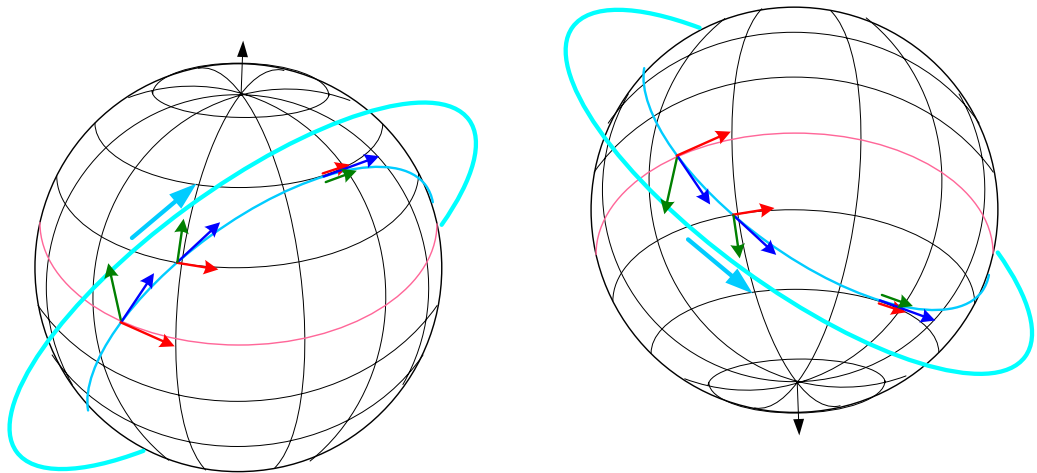
圖(三)

3、在北半球均向右偏、南半球均向左偏。以相對運動分析其原因：

由公式(2) $\Rightarrow \tan \alpha = \frac{\sin \beta}{\cos \beta - \cos \phi}$ 討論。參照圖(四)、圖(五)



圖(四)



註：紅色向量： $\vec{V}_e^p \cos \phi$ 藍色向量： $\vec{V}_s^p$ 綠色向量： $\vec{V}_{se}^p$

圖(五)

- (1) 第一階段：東西向 $\cos \beta - \cos \phi$ 由 $(\cos \delta - 1)$ 增加至 $(1 - \cos \delta)$ ，剛開始為負值，期間必會經過 $\cos \beta = \cos \phi$ 之處，而後為正值。而南北向則恆為正。軌跡一路向右彎。
- (2) 第二階段：東西向 $\cos \beta - \cos \phi$ 由 $(1 - \cos \delta)$ 漸減至 $(\cos \delta - 1)$ ，剛開始為正值，期間必會經過 $\cos \beta = \cos \phi$ 之處，而後為負值，而南北向則恆為負。軌跡仍一路向右彎。

- (3) 第三階段：東西向的分量與第一階段對稱，但南北向分量朝南。軌跡一路向左彎。
- (4) 第四階段：東西向的分量與第二階段對稱，但南北向分量朝北。軌跡仍一路向左彎。
- (5) 隨著 δ 愈大，8 字形衛星軌跡在赤道處之張角愈大，偏轉的傾向愈強。
- (6) 當 δ 愈大時，衛星通過赤道的速度愈大，也表示衛星愈容易運行到緯度較高處。證明如下：

$$\begin{aligned} \Theta \quad V_{se} &= \sqrt{(V_N)^2 + (V_E)^2} \\ \therefore V_{se} &= \sqrt{(V_s \sin \beta)^2 + (V_s \cos \beta - V_e \cos \phi)^2} \\ \Theta \quad \beta &= \delta \quad \phi = 0^\circ \quad V_s = V_e \\ \therefore V_{se} &= V_e \sqrt{(\sin \delta)^2 + (\cos \delta - 1)^2} = V_e \sqrt{2 - 2 \cos \delta} \\ \therefore \delta &\text{愈大，} \cos \delta \text{愈小，} V_{se} \text{愈大} \end{aligned}$$

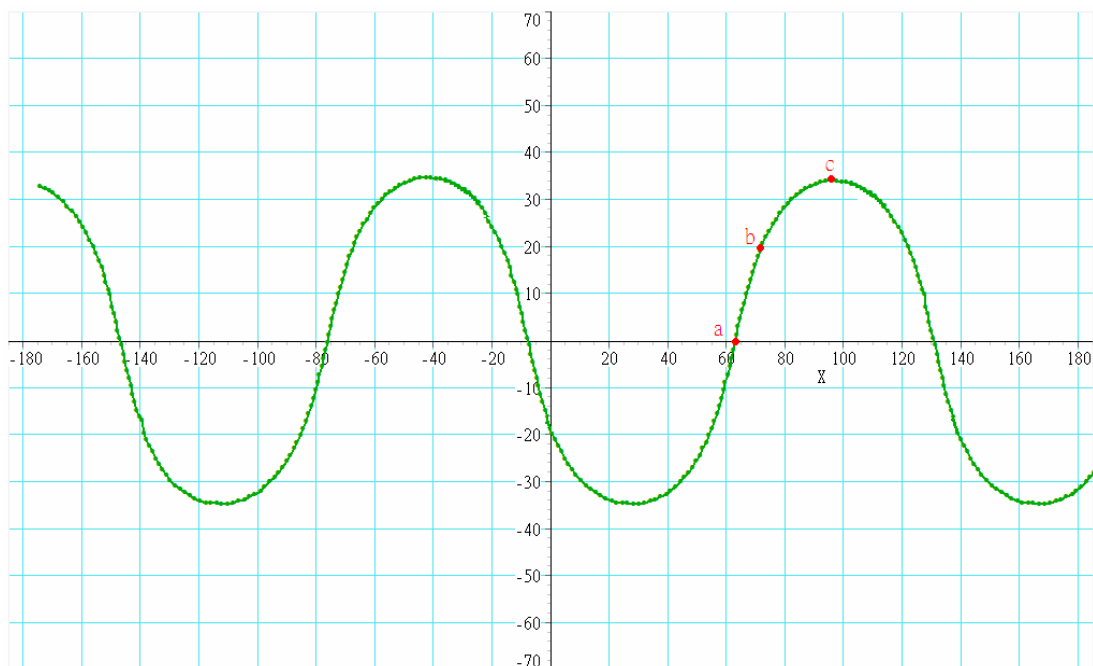
(五)、公轉軸與自轉軸夾角 δ 相同,比較 ω_s, ω_e 不同時，衛星的軌跡：

$\delta = 50^\circ$ 之軌跡：參照測量結果(十一)、(十二)、(十三)。

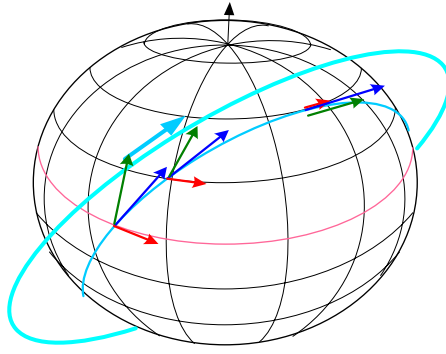
$\delta = 35^\circ$ 之軌跡：參照測量結果(七)、(八)、(九)、(十)。

1、 $\omega_s > \omega_e$ ($n > 1$ 衛星光筆轉得較快，整體軌跡向東行)

(1)參照圖(六)、圖(七) ($n = 1.65$)



圖(六)



圖（七）

第一階段：東西向為 $n \cos \beta - \cos \phi$ 由 $(1.65 \cos 35^\circ - 1 = 0.35)$ 增加至 $(1.65 - \cos 35^\circ = 0.83)$ ，恆為正值，南北向亦為正值。圖中 c 點南北向恰為 0 之處。

(2) 參照圖(八)， $(n=3.31)$

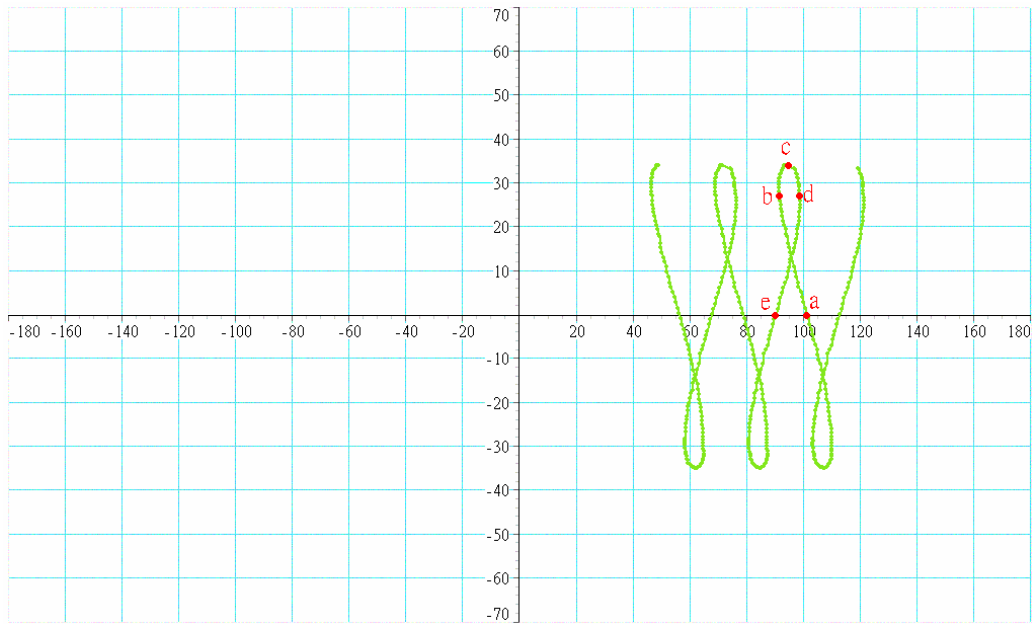
當 n 更大時，赤道處軌道的 $\angle \alpha$ 會變小。



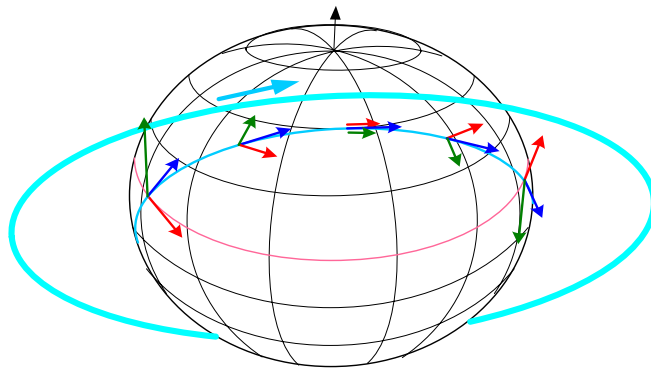
圖（八）

2、 $\omega_s < \omega_e$ ($n < 1$ 衛星光筆轉得較慢，整體軌跡向西行)

(1) 參照圖(九)、圖(十) ($n=0.94$)



圖(九)



圖(十)

第一階段：東西向 $n \cos \beta - \cos \phi$ 由 $(0.94 \cos 35^\circ - 1 = -0.23)$ 增加至 $(0.94 - \cos 35^\circ = 0.12)$ ，剛開始為負值，期間必會經過 b 點 $n \cos \beta - \cos \phi = 0$ 之處，而後為正值，而南北向則為正。 c 點處南北向則為 0。

第二階段：東西 $n \cos \beta - \cos \phi$ 由 $(0.94 - \cos 35^\circ = 0.12)$ 漸減至 $(0.94 \cos 35^\circ - 1 = -0.23)$ ，剛開始為正值，期間必會經過 d 點 $n \cos \beta - \cos \phi = 0$ 之處，而後為負值，而南北向則恆為負。

(2) 參照圖(十一)、圖(十二) (當 n 更小, $n = 0.63$)

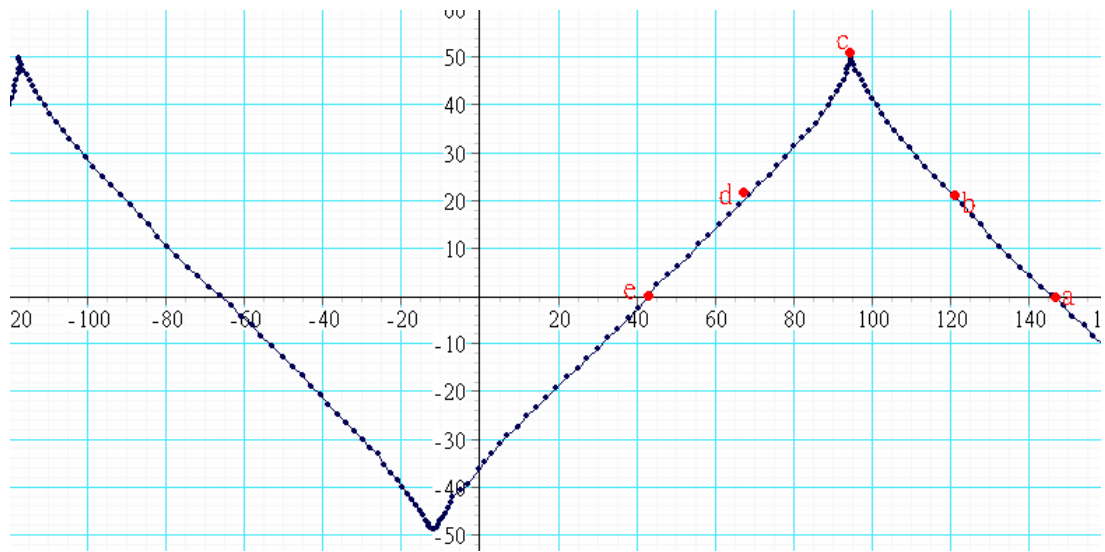


圖 (十一)

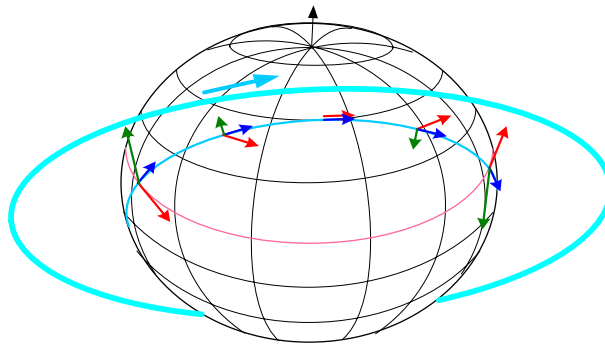


圖 (十二)

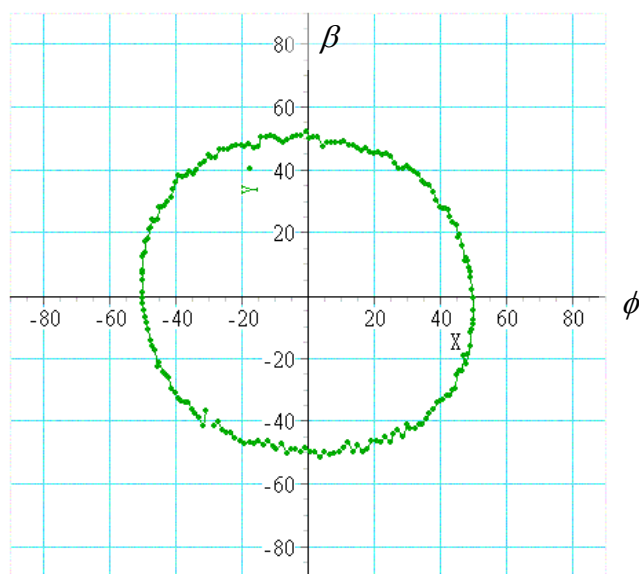
圖(十一)中的 c 點, 東西向與南北向的速度均為 0, 就好像將圖(九)中, 弧線 abc 與弧線 cde 均向外拉開, 成山形之頂端。

(六)、比較 α 、 V_s 的理論值與測量值：

- 1、由實驗裝置測量 $\beta - \phi$ 關係：取 $\delta = 50^\circ$, 地球不轉, 衛星公轉角速度 $\omega_s = 10.8^\circ/s$, 讀出每 1/6 秒光點在地球上的座標值 (θ, ϕ) 。利用 $\tan \beta = \text{南北向位移} / \text{東西向位移} = R_e \cdot \Delta \phi / R_e \cos \phi \cdot \Delta \theta$, 算出 β 值。但因只要 θ 或 ϕ 值誤差 0.1° , β 值便會有很大差別, 所以我們便加大時距以求得較穩定、規律的 $\beta - \phi$ 關係。結果如下表(三), 並作 $\beta - \phi$ 關係圖形如圖(十三)。

緯度 (度)	角度 β (度)	緯度 (度)	角度 β (度)	緯度 (度)	角度 β (度)	緯度 (度)	角度 β (度)	緯度 (度)	角度 β (度)	緯度 (度)	角度 β (度)	緯度 (度)	角度 β (度)	緯度 (度)	角度 β (度)
-31.6	-41.5	-49.9	0.8	-34.5	38.4	-3.0	50.6	29.0	40.5	49.5	5.7	36.0	-39.5	2.4	-49.7
-32.8	-39.1	-50.0	4.7	-33.4	40.0	-1.8	50.7	30.1	41.0	49.9	1.6	34.9	-41.4	1.0	-49.7
-34.0	-37.7	-49.9	7.2	-32.2	41.5	-0.3	51.9	31.2	40.4	50.0	-0.8	33.8	-41.1	-0.5	-48.8
-35.0	-36.4	-49.9	8.0	-31.1	42.3	0.8	49.8	32.3	39.3	50.1	-4.8	32.5	-42.4	-2.0	-49.9
-36.0	-34.1	-49.8	12.1	-30.0	44.6	2.0	50.5	33.6	38.6	50.2	-7.8	31.2	-42.6	-3.5	-48.9
-37.0	-34.1	-49.4	13.1	-28.8	43.7	3.2	50.3	34.8	36.5	50.1	-9.4	30.0	-41.3	-4.9	-49.2
-38.0	-33.8	-49.0	13.7	-27.6	44.0	4.8	47.5	35.8	35.4	49.9	-11.0	28.8	-45.1	-6.2	-50.2
-39.0	-32.9	-48.9	16.9	-26.4	46.5	6.0	48.8	36.8	35.1	49.5	-11.7	27.2	-43.1	-7.8	-47.1
-40.0	-31.3	-48.3	18.1	-25.2	46.2	7.2	48.8	38.0	32.8	49.2	-16.2	26.2	-44.4	-9.2	-48.9
-41.0	-29.7	-47.8	20.8	-24.0	46.5	8.6	48.4	39.0	30.1	48.9	-15.7	25.0	-46.7	-10.4	-48.3
-42.0	-26.4	-47.3	21.5	-22.8	47.3	10.0	48.6	40.0	28.2	48.5	-18.7	23.4	-44.9	-12.0	-46.5
-42.9	-25.3	-46.8	24.1	-21.4	47.7	11.2	49.3	41.0	27.4	48.0	-22.1	22.2	-46.7	-13.2	-47.7
-43.7	-24.4	-46.1	23.5	-20.0	47.6	12.6	47.7	41.8	27.6	47.2	-19.1	20.9	-46.4	-14.8	-46.4
-44.6	-21.3	-45.3	23.9	-19.0	47.3	13.8	47.9	42.5	27.0	46.9	-24.1	19.5	-46.2	-16.2	-47.1
-45.2	-22.8	-44.7	28.0	-17.7	48.2	15.2	47.0	43.2	24.8	46.2	-24.0	18.0	-49.3	-17.5	-46.8
-46.0	-17.6	-44.0	28.0	-16.2	47.0	16.5	46.0	44.1	23.2	45.2	-25.6	16.8	-50.1	-19.0	-47.1
-46.7	-16.0	-43.1	28.4	-15.0	47.4	17.8	46.8	45.0	22.4	44.8	-29.6	15.2	-47.9	-20.2	-46.4
-47.2	-14.6	-42.3	29.9	-13.8	50.2	19.0	45.4	45.8	18.2	44.0	-30.2	14.0	-49.8	-21.8	-45.5
-48.0	-11.0	-41.2	30.9	-12.3	50.2	20.3	45.1	46.2	19.3	43.2	-32.0	12.4	-47.0	-23.0	-43.9
-48.2	-11.2	-40.5	33.7	-11.0	50.8	21.5	45.4	47.0	15.6	42.1	-31.9	11.0	-48.4	-24.2	-43.6
-48.7	-8.8	-39.8	36.0	-9.9	50.4	22.9	44.6	47.8	11.0	41.2	-33.5	9.8	-49.9	-25.8	-42.9
-49.0	-7.2	-38.8	38.2	-8.5	49.6	24.0	45.0	48.0	12.0	40.2	-33.7	8.2	-50.5	-27.0	-40.3
-49.4	-4.9	-37.7	37.5	-7.1	48.5	25.2	44.2	48.5	11.0	39.2	-34.3	6.9	-50.9	-28.2	-41.4
-49.6	-2.5	-36.6	38.1	-5.9	49.4	26.6	42.2	48.9	8.9	38.2	-36.3	5.2	-49.9	-29.8	-39.0
-49.8	-0.8	-35.6	39.2	-4.5	50.3	27.8	40.5	49.2	7.4	37.0	-37.7	3.9	-51.5	-30.8	-36.0

(表三)



(圖十三)

2、以 $\delta = 50^\circ$ ， $n=1$ ，之衛星軌道為例，驗證測量值與理論值之誤差：

(1)由數據表(三)，用內插法找出各緯度時之 β 值，代入公式(2)得

$$\tan \alpha \text{ 的理論值} = \frac{n \sin \beta}{n \cos \beta - \cos \phi}$$

$$\alpha \text{ 的理論值} = \tan^{-1} \left(\frac{n \sin \beta}{n \cos \beta - \cos \phi} \right)$$

$\tan \alpha$ 的測量值 = 測量值的南北向速度／東西向速度

$$= \frac{R_e(\phi_2 - \phi_1)/(t_2 - t_1)}{R_e \cos \phi \cdot (\theta_2 - \theta_1)/(t_2 - t_1)}$$

$$\alpha \text{ 的測量值} = \tan^{-1} \left(\frac{R_e(\phi_2 - \phi_1)/(t_2 - t_1)}{R_e \cos \phi \cdot (\theta_2 - \theta_1)/(t_2 - t_1)} \right)$$

$$V_{sc} \text{ 的理論值} = R_e \omega_e \sqrt{(n \cdot \sin \beta)^2 + (n \cdot \cos \beta - \cos \phi)^2}$$

$$V_{sc} \text{ 的測量值} = \sqrt{(R_e(\phi_2 - \phi_1)/(t_2 - t_1))^2 + (R_e \cos \phi \cdot (\theta_2 - \theta_1)/(t_2 - t_1))^2}$$

(2)將以上公式算出來的數據及其誤差分析如下頁表(四)。

(3)由角度誤差之標準差 5.2 度(其中接近最大緯度處誤差較大，其餘都很小)，及速率誤差之標準差 2.8 mm/s 可證明實驗測量的結果與理論很吻合。

θ (度)	Φ (度)	測量 α (度)	理論 α (度)	角度 誤差 (度)	測量 V_{se} (mm/s)	理論 V_{se} (mm/s)	速度 誤差 (mm/s)	θ (度)	Φ (度)	測量 α (度)	理論 α (度)	角度 誤差 (度)	測量 V_{se} (mm/s)	理論 V_{se} (mm/s)	速度 誤差 (mm/s)
17.0	41.7	-68.5	-76.2	7.7	32.6	35.1	-2.5	17.2	-37.2	8.8	14.6	-5.8	20.9	25.6	-4.7
16.4	39.3	-79.1	-84.2	5.1	39.0	36.7	2.4	17.6	-34.9	26.9	31.9	-5.0	24.7	25.5	-0.8
16.0	36.8	-82.7	-88.8	6.1	40.2	40.2	0.0	18.0	-32.0	44.8	45.5	-0.7	27.2	27.4	-0.2
15.8	33.8	-86.8	-95.6	8.8	48.0	41.8	6.2	19.0	-29.1	59.9	56.9	3.1	33.2	29.2	4.0
16.1	31.0	-95.2	-98.8	3.5	44.9	46.2	-1.3	20.0	-26.0	65.2	65.3	-0.1	29.9	31.1	-1.2
16.8	28.0	-101.6	-102.5	0.8	48.9	47.6	1.3	20.8	-22.9	70.6	75.2	-4.7	35.5	33.1	2.5
17.7	25.0	-105.2	-105.0	-0.2	49.6	50.0	-0.4	22.1	-19.9	80.1	81.5	-1.4	35.6	36.5	-0.9
18.8	21.8	-107.7	-107.8	0.1	53.6	51.5	2.1	23.6	-16.6	85.1	89.3	-4.1	44.8	38.7	6.1
20.0	18.6	-109.6	-109.6	0.1	54.2	54.0	0.2	25.4	-13.2	98.1	93.6	4.5	37.1	42.7	-5.6
21.2	15.4	-109.9	-111.8	1.9	54.3	55.2	-0.9	27.0	-10.0	96.7	96.2	0.5	46.6	44.9	1.7
22.6	12.0	-111.9	-112.8	0.9	58.5	57.7	0.8	28.3	-6.7	106.8	100.9	5.9	48.3	45.2	3.2
24.0	8.6	-112.2	-113.5	1.4	58.6	58.3	0.3	30.1	-3.4	106.2	104.4	1.8	51.5	48.7	2.8
25.3	5.2	-110.8	-115.0	4.1	58.1	58.6	-0.5	31.7	0.0	103.4	107.7	-4.3	50.9	51.3	-0.5
26.8	1.8	-113.8	-115.5	1.7	59.3	61.1	-1.8	33.4	3.3	112.2	109.5	2.6	51.7	54.5	-2.8
28.7	-1.6	-119.2	-115.0	-4.2	62.2	61.9	0.2	35.0	6.8	113.5	110.9	2.7	57.4	55.8	1.6
30.3	-4.8	-116.5	-114.4	-2.1	57.1	60.7	-3.7	36.0	10.0	117.3	112.1	5.1	61.0	56.5	4.6
32.0	-8.1	-117.0	-114.4	-2.6	59.1	59.8	-0.6	37.8	13.4	116.2	113.6	2.6	56.9	57.4	-0.4
33.6	-11.6	-114.1	-113.0	-1.1	61.2	60.4	0.8	39.0	16.9	111.4	114.4	-3.0	56.6	59.3	-2.7
35.0	-15.0	-111.7	-111.5	-0.2	58.4	58.6	-0.2	40.5	19.9	118.6	114.4	4.2	60.0	60.0	0.0
36.5	-18.5	-112.1	-110.2	-2.0	60.3	56.8	3.5	41.5	23.2	115.2	115.2	0.0	60.0	59.5	0.5
37.9	-21.6	-112.8	-108.6	-4.2	53.7	56.2	-2.5	42.4	26.3	117.2	115.0	2.2	59.2	61.2	-2.0
39.2	-24.6	-111.5	-106.1	-5.4	51.5	55.2	-3.7	43.1	29.3	114.4	114.2	0.3	61.3	60.8	0.5
40.1	-27.9	-103.6	-103.0	-0.6	54.2	53.0	1.2	43.5	32.4	107.1	113.1	-6.0	53.4	59.6	-6.1
41.0	-30.8	-104.9	-99.4	-5.6	47.9	50.7	-2.8	44.0	35.0	117.2	112.8	4.4	61.0	58.1	2.9
41.6	-33.6	-100.1	-95.5	-4.7	45.4	48.1	-2.7	43.7	37.8	108.2	110.6	-2.4	58.8	58.9	-0.1
41.7	-36.6	-91.5	-91.6	0.1	47.9	45.8	2.1	43.1	40.1	115.2	109.1	6.1	52.9	56.0	-3.1
41.9	-39.0	-93.7	-84.8	-8.9	38.4	44.4	-6.1	42.5	42.4	105.6	106.7	-1.1	54.7	55.0	-0.3
41.5	-41.3	-82.6	-77.6	-5.0	37.0	40.4	-3.4	41.0	44.4	104.6	104.8	-0.3	51.1	53.0	-1.8
40.5	-43.5	-71.8	-69.6	-2.2	37.0	37.2	-0.2	39.5	46.0	101.5	101.0	0.5	48.9	52.3	-3.5
39.6	-45.5	-72.5	-61.3	-11.2	33.5	34.5	-1.0	37.5	47.5	96.2	97.9	-1.7	49.8	49.1	0.7
38.0	-47.5	-61.6	-46.9	-14.7	36.3	32.4	3.9	21.5	43.2	99.0	93.2	5.7	42.0	47.7	-5.7
21.6	-47.8	-49.9	-34.6	-15.3	22.9	29.3	-6.4	20.8	41.2	85.2	86.8	-1.7	44.8	44.6	0.2
20.1	-46.0	-36.3	-20.0	-16.3	27.0	27.5	-0.5	20.0	38.8	78.7	81.4	-2.7	37.4	41.0	-3.5
19.0	-44.3	-20.4	-7.0	-13.4	22.1	26.3	-4.2	19.6	36.2	79.1	74.0	5.1	37.4	38.8	-1.4
18.0	-42.2	-3.7	-2.2	-1.5	24.7	25.6	-0.9	19.8	33.5	61.8	66.5	-4.6	36.2	36.0	0.3
17.5	-40.0	3.6	7.0	-3.4	25.7	25.7	0.1	20.0	30.5	56.9	57.2	-0.3	30.5	33.8	-3.3
α 誤差平均值：-1.0度 α 誤差標準差：5.2度 V_{se} 誤差平均值：2.1(mm/s) V_{se} 誤差標準差：2.8(mm/s)															

表(四)

(七)、衛星對地軌跡具有週期性，每一週期相對於地面的經度角位移為

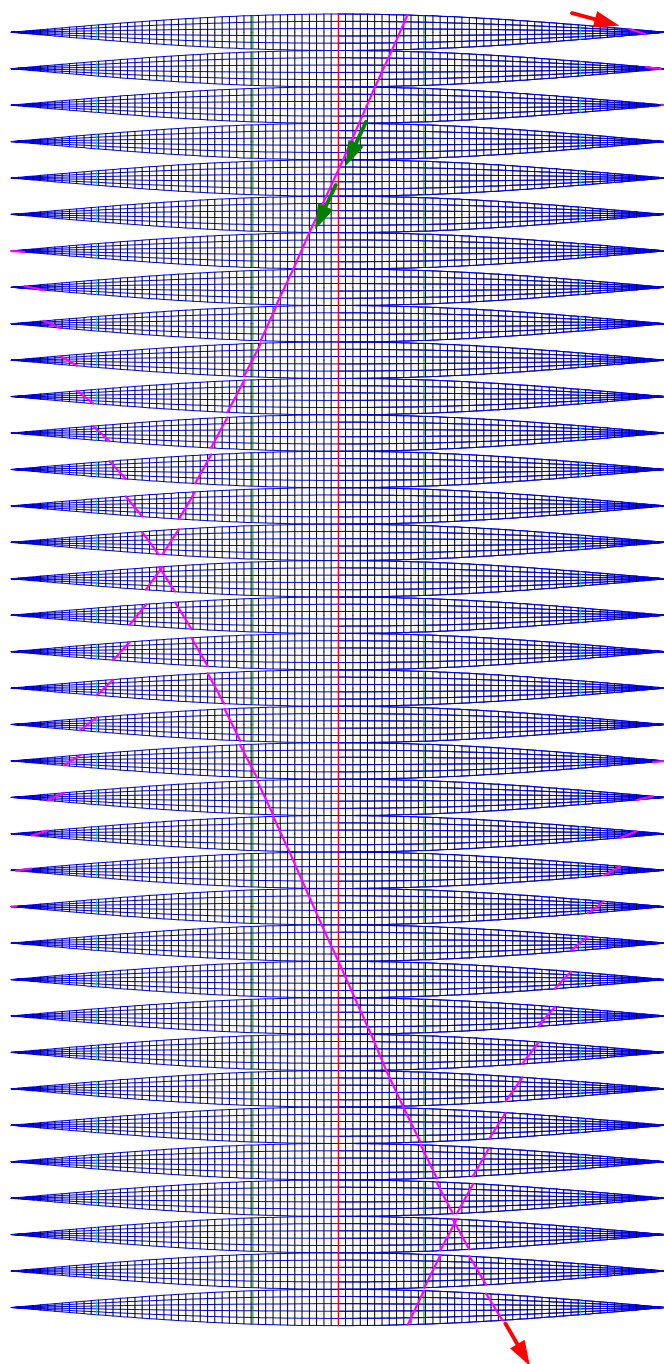
$$\Delta\theta = \frac{\omega_s - \omega_e}{\omega_s} \times 360^\circ \text{。如測量結果(四)~(十四)。}$$

(八)、由繞極衛星軌跡分析球面座標與平面座標之差別：

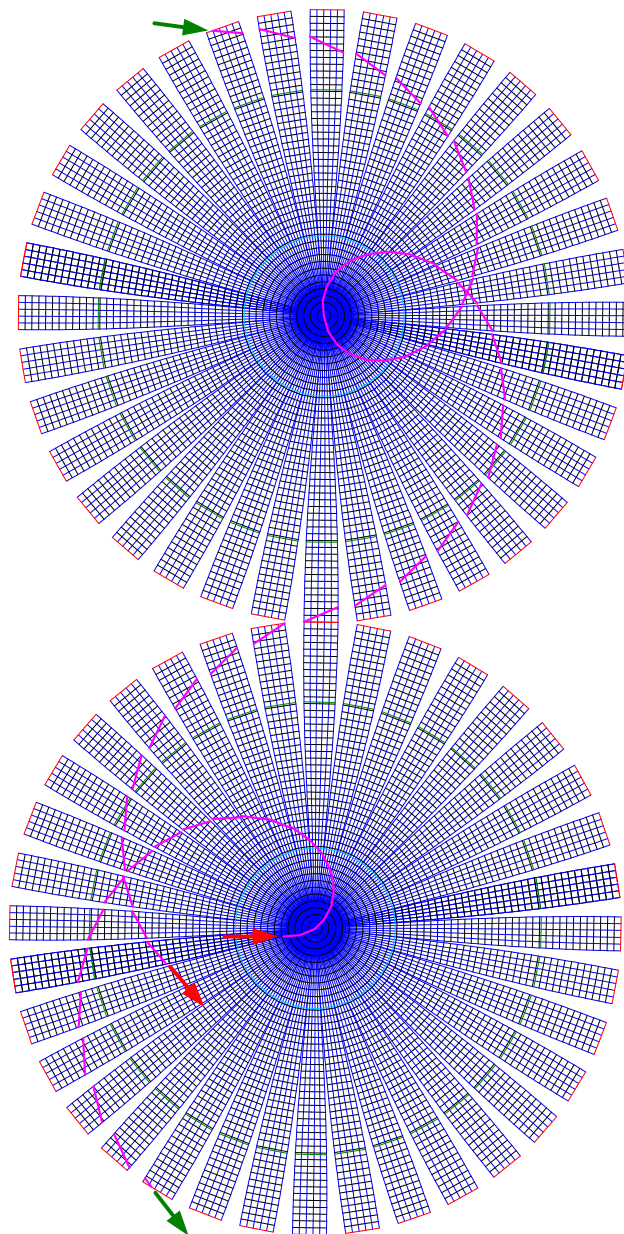
1、以 $\delta = 90^\circ$ ， $n=0.45$ 為例。 β 恆為 $+90^\circ$ 或 -90° ，所以 $V_N = \pm V_s$ 為定值，而

$V_E = -V_e \cos\phi$ 恆向西且其值隨 ϕ 增加而減少。

- 2、在球面上 θ 刻度大小應該隨著 ϕ 改變 ($\theta \propto \cos \phi$)，但在直角座標系中將 θ 刻度大小全部取一樣大(相當於將刻度放大了 $\sec \phi$ 倍)，所以 $V_E = -V_e$ 為一定值，而繞極衛星的軌跡成為直線，如測量結果（十四）。
- 2、若將同樣的數據畫在以赤道為基準攤平的球面座標上，則如圖(十四)。若畫在
- 3、以兩極為基準攤平的球面座標上，則如圖(十五)。



圖（十四）



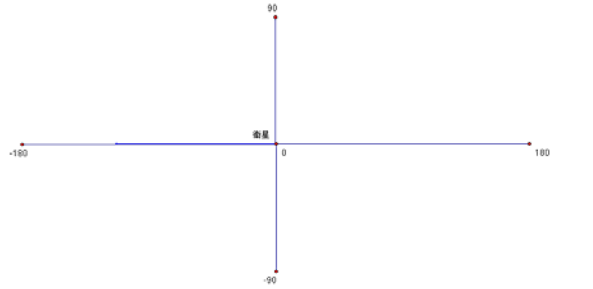
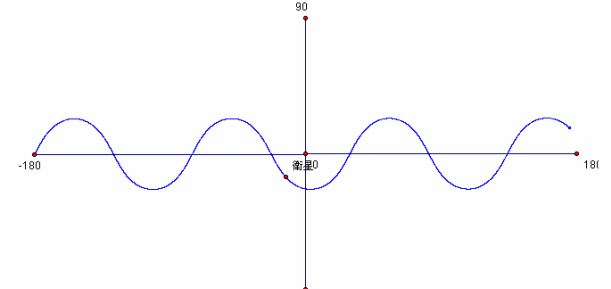
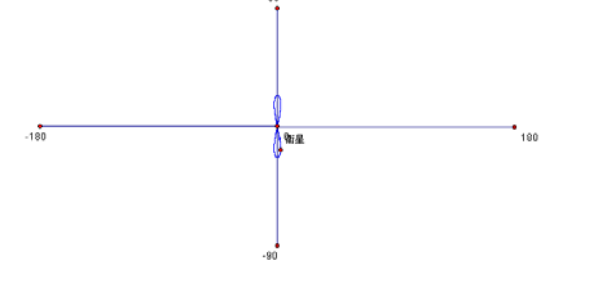
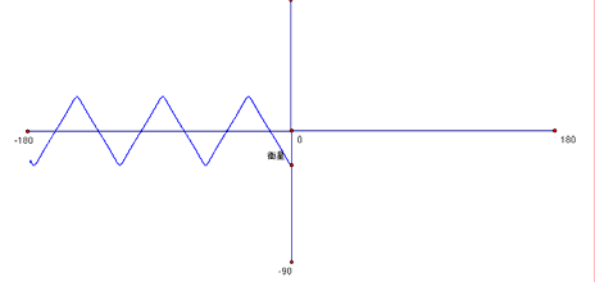
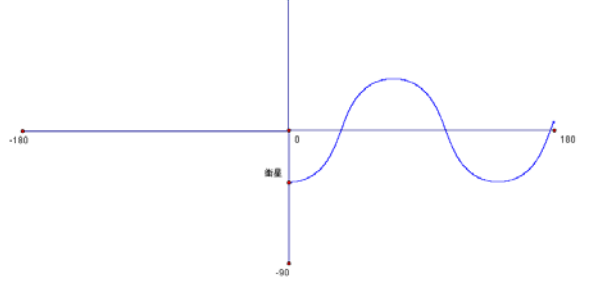
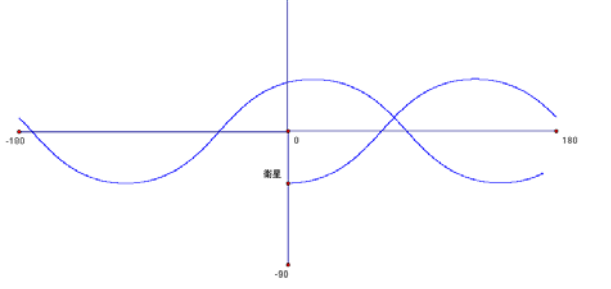
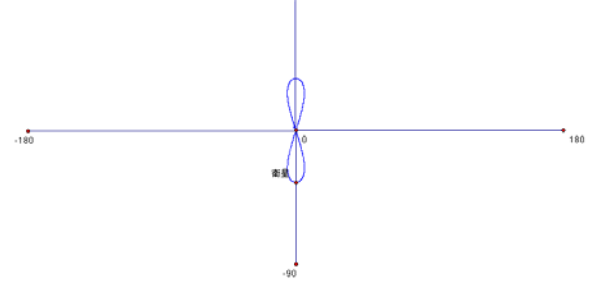
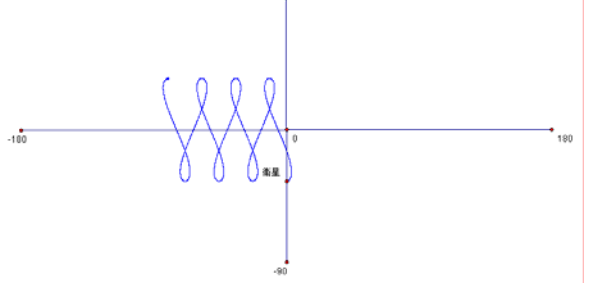
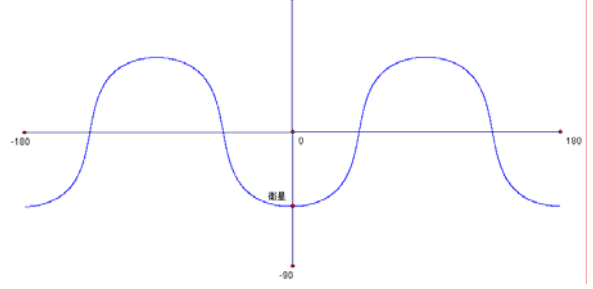
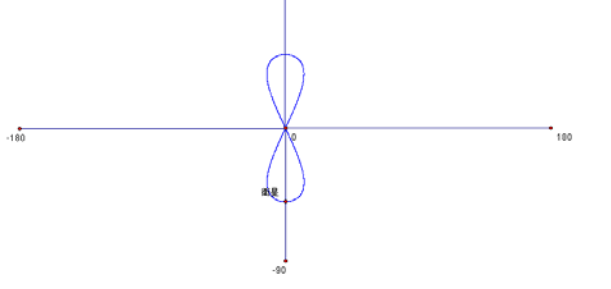
北
半
球

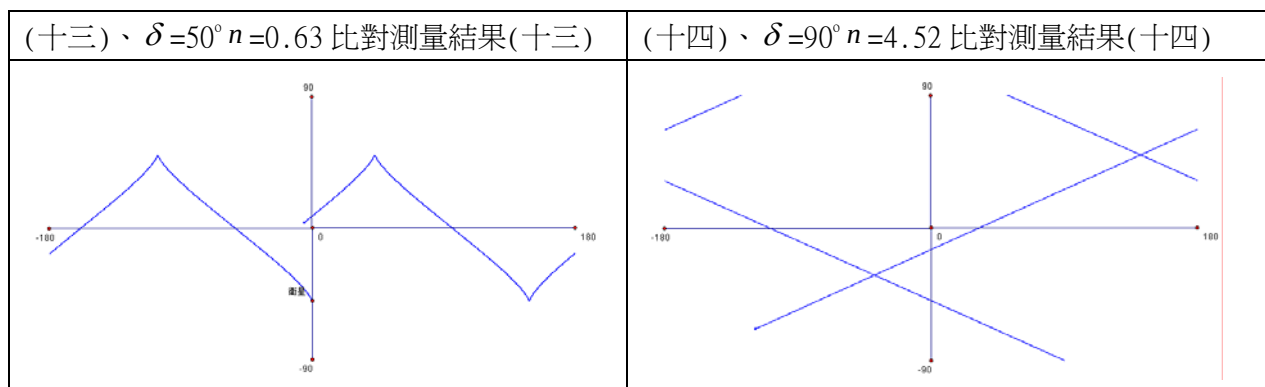
圖（十五）

(九)、由相對運動觀點設計電腦程式，模擬人造衛星對地運動：

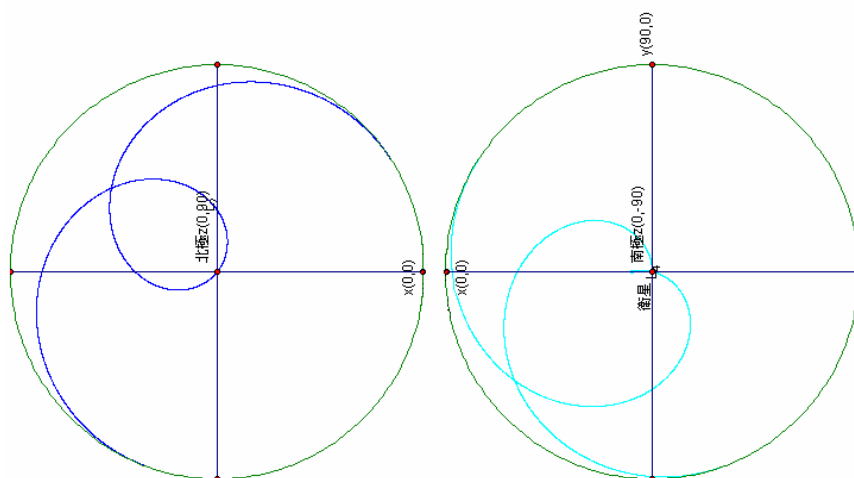
- 1、以 n 、 δ 為參數，畫出 $\phi-\theta$ 關係圖如電腦模擬圖(一)~(十四)，與本實驗測量
- 2、結果(一)~(十四)比對。軌道形狀、週期性等特性均極為符合。

(一)、 $\delta=0^\circ$ $n=1.17$ 比對測量結果(一)	(二)、 $\delta=0^\circ$ $n=1$ 比對測量結果(二)

(三)、$\delta=0^\circ$ $n=0.86$ 比對測量結果(三) 	(四)、$\delta=23.5^\circ$ $n=1.41$ 比對測量結果(四) 
(五)、$\delta=23.5^\circ$ $n=1$ 比對測量結果(五) 	(六)、$\delta=23.5^\circ$ $n=0.90$ 比對測量結果(六) 
(七)、$\delta=35^\circ$ $n=1.65$ 比對測量結果(七) 	(八)、$\delta=35^\circ$ $n=3.31$ 比對測量結果(八) 
(九)、$\delta=35^\circ$ $n=1$ 比對測量結果(九) 	(十)、$\delta=35^\circ$ $n=0.94$ 比對測量結果(十) 
(十一)、$\delta=50^\circ$ $n=1.99$ 比對測量結果(十一) 	(十二)、$\delta=50^\circ$ $n=1$ 比對測量結果(十二) 

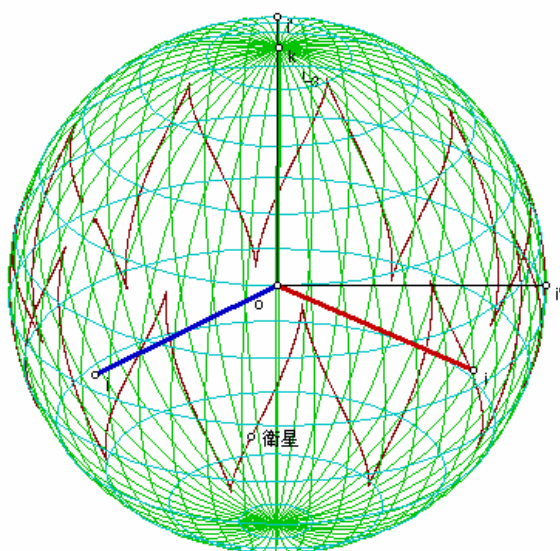


2、設計電腦程式畫出極地座標圖 (十六)，與本實驗裝置所測得結果圖(十五)比對。形狀、週期性等特徵均極為符合。



圖(十六)

3、設計電腦程式模擬全球 3D 動畫圖，改變 n 、 δ 來更清楚的了解衛星對地運動軌跡。如圖(十七)為 $\delta = 23.5^\circ$ $n = \cos 23.5^\circ$ 之標準尖角軌跡。



圖(十七)

柒、討論：

- 一、根據高中物理學過的萬有引力課程----繞地球作圓周運動的物體，若知道其繞行週期，便可知其距地面高度。

由地面緯度 ϕ 的人看到天頂衛星軌跡速度 $\dot{V}_{se}^p$ 可由方程式

$$V_E = V_s \cos \beta - V_e \cos \phi \quad V_N = V_s \sin \beta \quad \text{求得 } \beta \text{ 及 } V_s。$$

衛星投影在地面上的速度 $V_s = R_e \omega_s$

衛星真實的速度 $\dot{V} = r \omega_s = (R_e + h) \omega_s$

$$\frac{GMm}{(R_e + h)^2} = \frac{mV^2}{(R_e + h)} = \frac{m(R_e + h)^2 \omega_s^2}{(R_e + h)} \quad \therefore (R_e + h)^3 = \frac{GM}{\omega_s^2}$$

$$\therefore h = \sqrt[3]{\frac{GM}{\omega_s^2}} - R_e = \sqrt[3]{\frac{GMR_e^2}{V_s^2}} - R_e$$

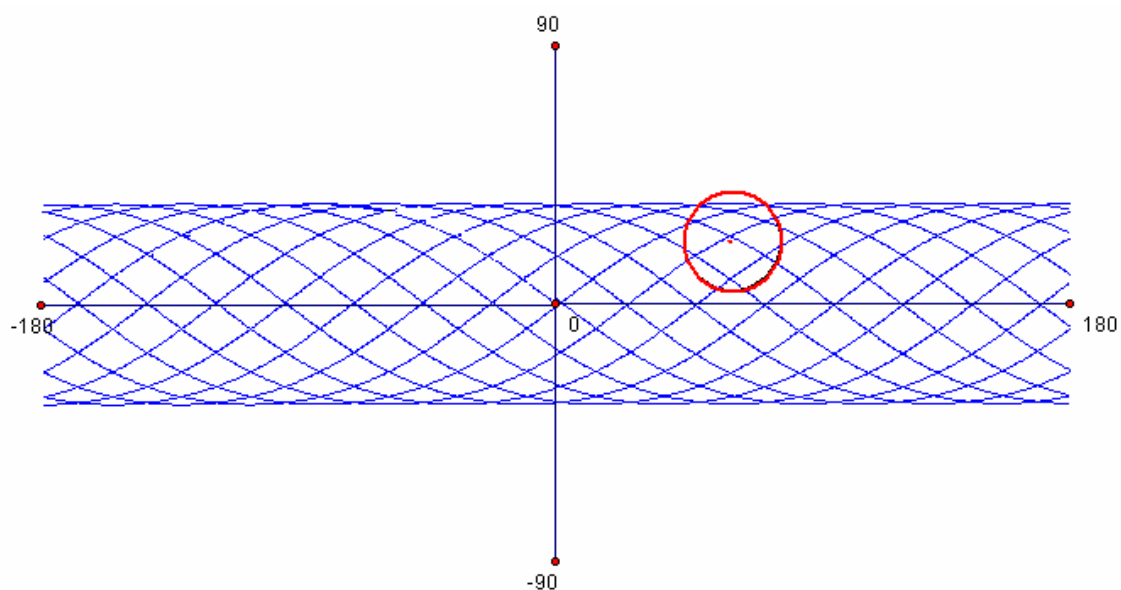
- 二、以研究結果比對福爾摩沙衛星資料：

(一)、由國家太空計畫室網站查到衛星資料如下：

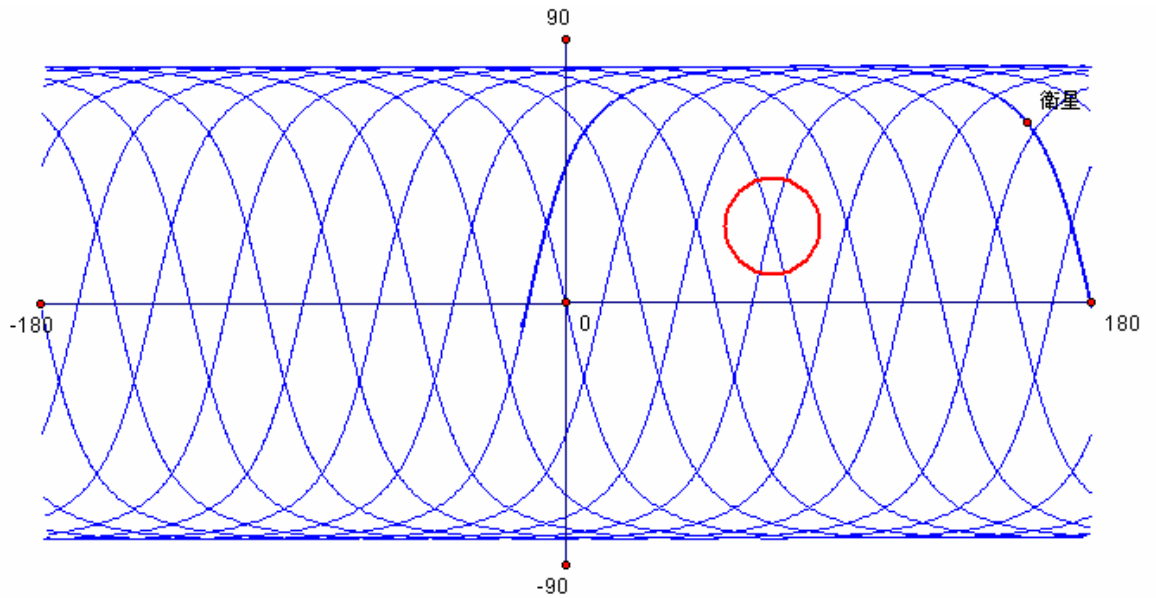
	傾斜角	週期	軌道高	每日繞地	每日連絡
福爾摩沙一號	35 度	96.7 分	600 公里	14.9 圈	6 次
福爾摩沙二號	99.1 度	約 100 分	891 公里	14 圈	2 次

(二)、用電腦模擬動畫繪軌跡圖：

圖(十八)為以電腦模擬福爾摩沙一號衛星之軌跡圖，一天中可與台灣地面遙測中心聯絡 6 次。圖(十九)為福爾摩沙二號之電腦模擬軌跡圖，一天可與台灣地面聯絡 2 次。



圖(十八)



圖(十九)

(三)、由討論一中的公式 $(R_e + h)^3 = \frac{GM}{\omega_s^2}$ 及分析(七)中的公式 $\frac{360^\circ}{\omega_s} = \frac{\Delta\theta}{\omega_s - \omega_e} \Rightarrow$ 可

驗證福爾摩沙衛星的一些資料。

1、以福爾摩沙二號衛星為例：(衛星偏西繞行)

(1) 由高度計算角速度並驗證週期

由 $h = 891km$

$$\Rightarrow [(6400 + 891) \times 10^3]^3 = \frac{6.67 \times 10^{-11} \times 6 \times 10^{24}}{\omega_s^2}$$

$$\therefore \omega_s = 1.016 \times 10^{-3} (rad/s)$$

$$\therefore \text{週期 } T = \frac{2\pi}{\omega_s} = \frac{2\pi}{1.016 \times 10^{-3}} = 6180(s) = 103 \text{ 分}$$

(2) 驗證每天繞地球飛 14 圈 (以下"負"號均表示偏西)

$\ominus \delta = 99.1^\circ > 90^\circ$ 表示衛星有偏西運動的分量，定 ω_s 為負

$$\text{又 } \omega_e = \frac{2\pi}{86400} = 7.27 \times 10^{-5} (rad/s)$$

$$\text{由 } \frac{360^\circ}{\omega_s} = \frac{\Delta\theta}{\omega_s - \omega_e}$$

$$\Rightarrow \frac{-360^\circ}{-1.016 \times 10^{-3}} = \frac{\Delta\theta}{-1.016 \times 10^{-3} - 7.27 \times 10^{-5}} \therefore \Delta\theta = -385.75^\circ$$

衛星繞地一周之經度角位移相當於 $-385.75^\circ + 360^\circ = -25.75^\circ$

$-360^\circ / \text{天} \div (-25.75^\circ / \text{週}) = 13.98 \text{ 週/天}$

(3) 每天通過台灣二次，第一次上午 10:00，第二次晚上 10:00。

由美國范登堡發射場向北偏西發射，約繞過半個地球進入台灣上空正好由東北向西南，與台灣地形(中央山脈走向)吻合，恰可拍攝地表遙測

照片。將發射時間控制好，使衛星恰在上午 10.00 左右陽光充足，角度適當便於拍照，足以掌握台灣大地每天的各種變化。

2、以福爾摩沙一號衛星為例：(衛星偏東繞行)

(1) 驗證週期

$$h = 600\text{km} \quad \omega_s = 1.080 \times 10^{-3} (\text{rad/s}) (\text{向東}) \quad \text{週期 } T = 96.96 \text{ 分}$$

(2) 驗證每天繞地球飛 14.9 圈

$$\frac{360^\circ}{1.080 \times 10^{-3}} = \frac{\Delta\theta}{1.080 \times 10^{-3} - 7.27 \times 10^{-5}} \quad \therefore \Delta\theta = 335.77^\circ$$

$$360^\circ - 335.77^\circ = 24.23^\circ$$

$$360^\circ/\text{天} \div (24.23^\circ/\text{週}) = 14.86 \text{ 週/天}$$

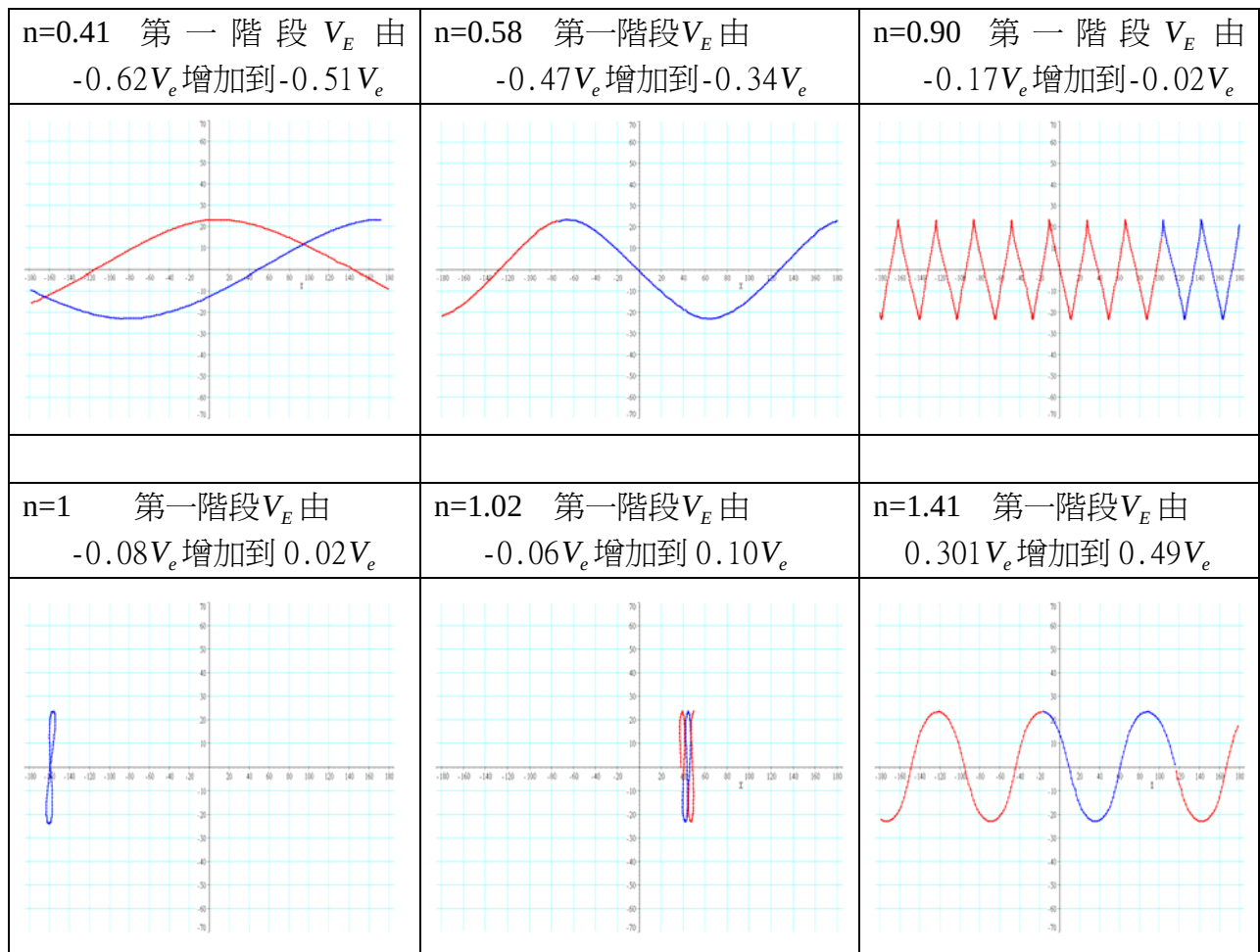
三、衛星只能環繞在南、北緯 δ 之間，如果想要繞遍全球就必須要發射繞極衛星。從地面發射繞極衛星必須將原本隨著地球自轉的東向速度完全抵消，再加上向北的速度分量，所以必須使用較大的能量。又因為地球自轉的東向速度與 $\cos\phi$ 成正比，所以由高緯區發射繞極衛星較節省能量。

四、出現尖角的軌道形狀是最有趣的，在台灣正上方看到尖角的機會大不大呢？(一) 尖角出現的地方一定在南、北緯度 δ 之處，所以 δ 最好在 24 度附近。(二) ω_s 恰好等於 $\omega_e \cos\delta$ 時尖角最明顯，所以衛星公轉角速度最好是每天 0.914 轉，以此轉速此衛星離地高度約為地球半徑的 6.1 倍。如此高度看到的機率實在太渺茫了。

捌、結論：

- 一、本研究設計的裝置能成功的模擬人造衛星繞地運轉時相對地面的各種軌跡。
- 二、由本實驗研究推導的理論來比對福衛一號、二號的一些重要參數，均能吻合。
- 三、衛星對地運動的軌跡變化多端，非常有趣，但其變因主要可歸納為兩個，一是衛星角速度 ω_s (決定了 ω_s ，也等於決定了軌道半徑、切線速率等)。二是公轉軸與地球自轉軸夾角 δ ，決定了此夾角也相當於決定了衛星環繞的緯度範圍在南、北緯 δ 之間。
- 四、各種形狀的衛星對地軌道，都可以由衛星繞地球等速率圓周運動與地球由西向東的自轉運動相減而得的關係式來加以解釋。
 - (一)、東西向分量： $V_E = V_s \cos\beta - V_e \cos\phi$
 南北向分量： $V_N = V_s \sin\beta$
 - (二)、若 $\omega_s = \omega_e$ 則衛星只在固定的經線附近重覆繞 8 字形，如果 δ 又為 0° ，才能真正的固定在天空中一點，即為同步衛星。
 - (三)、若 $\omega_s > \omega_e$ ，衛星轉得較快，整體軌跡有向東推進的趨勢，隨著 ω_s 愈大衛星對地軌跡會由 8 字型逐漸向東拉開成波浪形。
 - (四)、若 $\omega_s < \omega_e$ ，衛星轉得較慢，整體軌跡有向西推進的趨勢，隨著 ω_s 愈小衛星對地軌跡會由 8 字型逐漸向西拉開成 W 形再拉開成山形。

(五)、以 $\delta = 23.5^\circ$ 為例，整理一系列 $n (= \omega_s / \omega_e)$ 值，看衛星軌跡的變化如下圖。



五、繞極衛星可以繞遍全球，其軌跡在直角座標系中呈直線形，但以極地座標描繪時呈現花朵形。直角座標系適用於低緯度地區；極地座標系適用於高緯度地區。

玖、參考資料

作者 陳文典 等	高中基礎物理	康熙出版社
陳文典 等	高中物質科學物理篇	康熙出版社
林明瑞 等	高中物質科學物理篇	南一出版社
陳昭地 等	高中數學	康熙出版社

國家太空計畫實驗室網站資料 <http://www.nspo.gov.tw/>

中華民國第四十五屆中小學科學展覽會
評 語

高中組 物理科

佳作

040105

模擬衛星對地運動

國立新莊高級中學

評語：

在室內模擬衛星運動具有新意，但只模擬正常狀況似乎延伸性不足，宜再增加一些特殊情況如”海嘯、地震”影響地球周期的事件，以增進本作品之價值。