中華民國第四十五屆中小學科學展覽會
作品說明書

國小組 數學科

佳作

080417
丟球

臺北縣樹林鎮大同國民小學

作者姓名：
小六 葉佩雯 小六 林家安 小六 陳源弘
小六 陳彥至 小六 陳威銘 小六 劉書魁

指導老師：
顏榮皇 李文永

中華民國第四十五屆中小學科學展覽會

作品說明書

科　　別：數學科

組　　別：國小組

作品名稱：丟球

關 鍵 詞：費氏數列、下樓的第一步

編　　號：

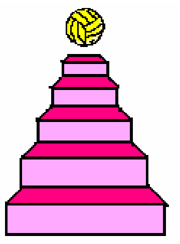
目錄

零、摘要

本研究係觀察球在樓梯間滾動的方式，尋求丟球的一般式。並利用「下樓梯的第一步」，解釋丟球具有「費式數列」的現象。筆者，並利用「下樓梯的第一步」及表格分析探討「費式數列」，並對於「費式數列奇偶性」提出分析。

壹、研究動機

我們由一本叫規律性的書開始研究，研究中，發現一題很有趣的題目，爬樓梯，我們就決定作為本次科展，並把題目改為丟球，來解決下列的問題



(圖 1丶丟球)

貳、研究目的

找出有 n 階，可以丟 1、2...m 格時、可以丟 1、3...m 格，而 m 是奇數時，和會是如何可以丟 2、4...m 格， 而 m 是偶數時，會是如何?

參、研究材料

紙與筆

肆、研究過程

一、先從可以丟 1、2 格開始分析，漸漸推算到有 n 階 ，可 以 丟 1、2、...m 格時 ，會是如何?

二、有 n 階，可以丟 2、4... m 格，而 m 是偶數， 會是如何 ？

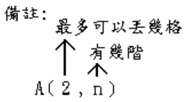
三、有 n 階，可以丟 1、3... m 格，而 m 是奇數， 會是如何 ？

四、每格都可以丟時，會是如何 ？

伍、研究結果

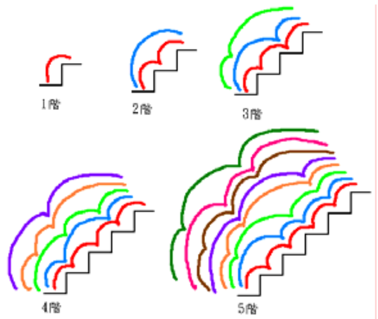
一、直接觀察

（一）名詞定義



（二）A(2,n)

知道這個題目後，我們決定先從可以丟比較小的數開始研究，我們先用數數的方式，再演算出表一



（圖 2、A(2,5)）

表一 、丟 1、2 格時所列出的數

階層	1 階	2 階	3 階	4 階	5 階
幾組	1 組	2 組	3 組	5 組	8 組

根據上表我們推論下列公式

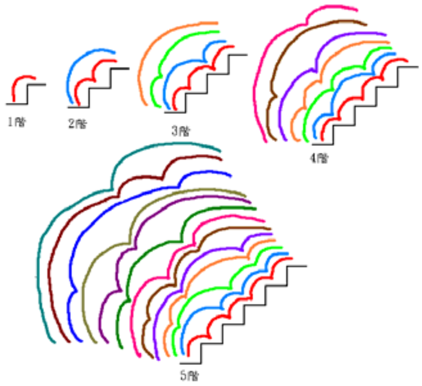
A(2,3) = A(2,3-1) + A(2,3-2)

推測

A(2.n)= A(2.n-2)+A(2.n-1)

（三）A(3,n)

由於研究完可以丟 1、2 格後，我們就想，可以丟 1、2 、3 格時，會如圖三?所以就數數，並演算出表二。



（圖 3、A(3,n)）

表二、丟 1、2、3 格時所列出的數

階層	1 階	2 階	3 階	4 階	5 階
幾組	1 組	2 組	4 組	7 組	13 組

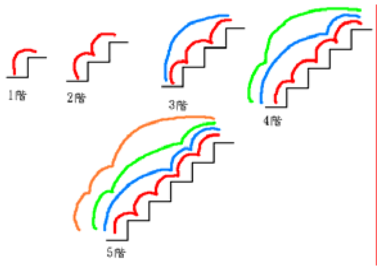
A(3,4)
=A(3,4-1)+A(3,4-2)+ A(3,4-3)
推測
A(3,n)
=A(3,n-3)+ A(3,n-2)+A(3,n-1)

（四）A(m,n)的推測

由實驗一和實驗二，推展成有 n 階，可丟 m 格時，如下公式：

A(m,n) =A(m,n-1)+ A(m,n-2)+...+ A(m,n-m)

（五）A(3(偶數不算),n)



(圖 4、A(3(偶數不算),n))

我們研究完 有 n 階可以丟 1、2...m 格,想到,如果都是丟奇數格,會變成如何,所以就從奇數最小的數,也就是可以丟 1、3 格開始研究,演算出表三

表三 、丟 1、3 格時所列出的數

階層	1 階	2 階	3 階	4 階	5 階
幾組	1 組	1 組	2 組	3 組	4 組

公式:

A(3(偶數不算),4)

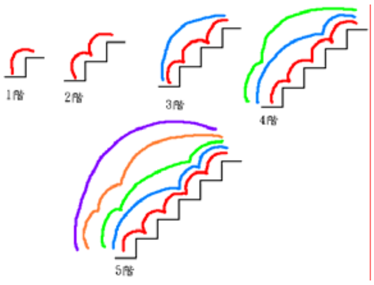
= A(3(偶數不算),4-1)+A(3(偶數不算),4-3)

推測

A(3(偶數不算),n)

= A(3(偶數不算),n-1)+A(3(偶數不算),n-3)

（六）A(5(偶數不算),n)
研究完可以丟 1、3 格後,我們就決定繼續研究可以丟 1、3 、5 格的時候,會是如何? 開始數數 ,並演算出表四。



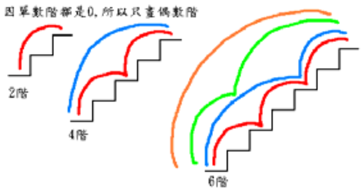
(圖 4、A(5(偶數不算),n))

表四、丟 1、3、5 格時所列出的數

階層	1 階	2 階	3 階	4 階	5 階
幾組	1 組	1 組	2 組	3 組	5 組

公式:
A(5(偶數不算),6)=
A(3(偶數不算）, 6-1)+ A(3(偶數不算）, 6-3)+ A(3(偶數不算）, 6-5)
推測
A(5(偶數不算),n)
=A(3(偶數不算),n-1)+A(3(偶數不算),n-3)+A(3(偶數不算), n-5)

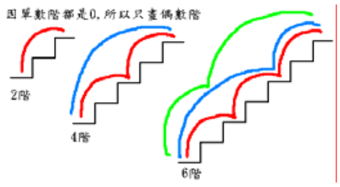
（七）A(m(偶數不算), n)猜測
我們研究完可以丟 1、3 格和可以丟 1、3 、5 格後,就推算,如果有 n 階,可以丟 1、3...m 格 , 而 m 是奇數時,會怎樣 ?



公式:
A(m(偶數不算）, n) = A(m(偶數不算）, n-1) + A(m(偶數不算）, n-3)+ A(m(偶數不算）, n-5)+...+ A(m(偶數不算）, n-m)

（八）A(4(奇數不算)， n)

我們前面研究完奇數的,所以當然也要研究偶數的,所以就先數數, 演算出表五



(圖 5丶A(4(奇數不算),n))

表五 、丟 2、4 格時所列出的數

階層	2 階	4 階	6 階	8 階	10 階
幾組	1 組	2 組	3 組	5 組	8 組

公式:

A(4(奇數不算),6)

=A(4(奇數不算),6-2)+A(4(奇數不算),6-4)

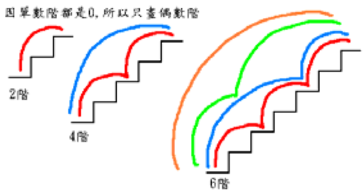
推測

A(4(奇數不算),n)=A(4(奇數不算),n-2)+A(4(奇數不算),n-4)

備註: n 要 = 偶數時

（九）A(6(奇數不算),n)

我們研究完可以丟 2、4 格後,就繼續研究可以丟 2、4、6 格,然後數數,並演算出表六



圖六、A(6(奇數不算),n)

表六、丟 2、4、6 格時所列出的數

階層	2 階	4 階	6 階	8 階	10 階
幾組	1 組	2 組	4 組	7 組	13 組

公式:

A(6(奇數不算)， 8)=A(6(奇數不算),8-2)+A(6(奇數不算),8-4)+ A(6(奇數不算),8-6)

推測

A(6(奇數不算),n)

= A(6(奇數不算),n-2)+A(6(奇數不算),n-4)+A(6(奇數不算),n-6)

備註: n 要 = 偶數時

（十）A(m(奇數不算),n)

由於前面研究完可以丟 2、4 格和可以丟 2、4、6 格,所以就推算可以丟 2、4...m 格， 而 m 是偶數,如下

公式:

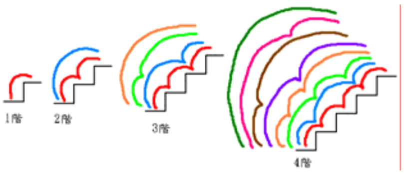
A(m(奇數不算)， n) = A(m(奇數不算)， n-2) + A(m(奇數不算)， n-4)+...+ A(m(奇數不算)， n-m)

二、無窮大構想

（一）我們的好奇

我們在想，球如果可以要跳幾格，就跳幾格，沒有限制，會如何？

（二）四階的討論



圖七、無窮大的討論

（三）二的次方

當我們畫各種階梯的情形，把組數列成表七時，發現組數呈現以次方的方式出現。

表七、無窮大的討論

階層	一階	二階	三階	四階
幾組	1	2	4	8
2 的次方	2 的 0 次方	2 的 1 次方	2 的 2 次方	2 的 3 次方

（四）2 的次方分析

我們很好奇，為何？我們沒有限制丟球的順序時，會出現 2 的次方？

一階沒有限制的情形，只有一種走法。其他的階層如表八、表九及表十。

表八、二階沒有限制的情形

情況	每次步數
1	（1、1）
2	（2）

表八中，(1、1) 代表第一次走 1 步，第 2 次也走 1 步。(2) 代表只走一次 2 步。

表九、三階沒有限制的情形

情況	每次步數
1	（1、1、1）
2	（1、2）
3	（2、1）
4	（3）

表九中，(1、1、1) 代表每一次走 1 步。(1、2) 代表第一次走 1 步，第 2 次走 2 步。為了統計方便，我們先算 (1，2) 再 (2，1)。

表十、四階沒有限制的情形

情況	每次步數
1	（1、1、1、1）
2	（1、1、2）
3	（1、2、1）
4	（2、1、1）
5	（2、2）
6	（1、3）
7	（3、1）
8	（4）

（五）需要解決問題

嚴格來說，由上面的表格分析，只是分析的方便，但，我們還是沒有解決問題：『為何沒有限制的走法是以 2 的次方形式』出現。

這個在研究討論會出現

陸、研究討論

一、全國科展

（一）老師的電話

本來在去年暑假（七月初）就開始進行。但，去年八月一日，老師打電話告訴我們，第四十四屆全國科學展覽國小組，台南市有一組小朋友做爬樓梯的研究並得了佳作。我們聽了好難過，打算要放棄這一題科學展覽。因為，我們知道科學展覽重視原創，抄襲的作品一定會被「損龜」。

（二）三件事的啟發

在科學研究社團時間，老師一再強調三件故事，勉勵我們

1.「606」的新藥是經歷 606 次的實驗，才完成的新藥，發明後，治癒成千上萬的性病患者

2.我們的老師不是科學展覽評審，但，曾經到去年的科學展覽現場看國小組「爬樓梯」的作品。發現 A（m，n）=A(m，n-1)+A(m，n-2)是重要的關鍵。台南市的小朋友並沒有解釋好。但，怎麼解釋？老師一直思考。當天中午，要離開現場時，一下樓梯，踏出第一步，老師說:「他已經知道答案了」。

3.「如果不要有限制,各個階層,每格都可以丟,會怎樣?」,

二、下樓梯的第一步

（一）美中不足

我們讀過台南市的小朋友所寫的研究，覺得他們有些地方沒有說清楚, 我們嘗試利用我們的定義來說明

（二）新分析方法
我們後來看同學抬餐盤，發現同學上上下下。讓我們想到，如果，我們以「下樓梯的第一步」來解決問題呢？
我們嘗試以 A（2，3）表格分析如表十一。
表十一、A(2，3)的分析

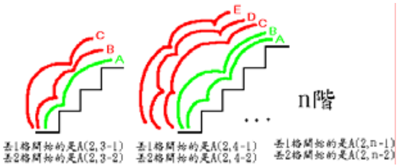
前項 A(2，3)	後項 A(2，2)+A(2，1)	
（1，1，1）	（1，1）	
（1，1，2）	(2)	
（2，1）		(1)

我們先就 A（2，3）和 A(2，2)的比較，我們發現必須要第一步先層，才能由 A(2，3)變成 A(2，2)。換句話，在第一步走一階層後，全部的階梯，會全部階層減少一層變成 A(2，3-1)=A(2，2)。
再考慮表十一，A（2，3）與 A(2，1)之差異是只差兩階。由圖八，若，第一步踏出兩階，那麼 A(2，3)會變成 A(2，3-2)=A(2，1)。由老師的第二個故事，老師是在走下樓梯時，發現規則一的實例。再印證表十一，我們發現，上一屆台南市小朋友所發現的規則一關鍵是在於，當你，走出第一步時是什麼？公式就隨之被建立。
A(2，3)代表有三個階梯，每次最多 2 步。
當，球落下的第一步走 1 階梯，A(2，3)變成 A(2，3-1)=A(2，2)。
當，球落下的第一步走 2 階梯，A(2，3)變成 A(2，3-2)=A(2，1)。

（三）推理至 A（2，4）
根據上面的演算及推理，我們來 A(2，3)推理至 A(2，4)。依照上面推理，A(2，4)走的第一步決定 A(2，3)或者是 A(2，4)。
當第一步是走 1 步，接下來的走法是 A(2，4-1)=A(2，3)。
當第一步是走 2 步，接下來的走法是 A(2，4-2)=A(2，1)。
又，A(2，4)只限定最高只能走 2 步，故，如表十二所表示：
A(2，4)=A（2，3）＋A(2，2)
表十二、A(2，4)的分析

前項 A(2，4)	後項 A(2，3)+A(2，2)	
（1、1、1、1）	（1、1、1）	
（1、1、2）	（1、2）	
（1、2、1）	（2、1）	
（2、1、1）		（1、1）
（2、2）		（2）

（四）A(2，n)的思考



圖八、A(2，n)的思考

因為，A(2，n)限定於一次最高只有兩步情形，所以，A(2，n)只有兩種情形，第一次只走一步和第二次只走兩步。

第一次只一步的情形，n 階梯會變成 n-1 階梯，故，第一次只走一步的情形變成 A(2，n-1)。

第一次只走二步的情形，n 階階梯會變成 A(2，n-2)。

故，根據表十一及表十二及上面的討論，得到下面的結論。

A(2，n)=A(2，n-1)+A(2，n-2)

（五）推理至 A（3，4）

A(3，4)的推理如表十三。

表十三、A(3，4)的分析

前項 A(3，4)	後項 A(3，3)+A(3，2)+A(3，1)	
（1、1、1、1）	（1、1、1）	
（1、1、2）	（1、2）	
（1、2、1）	（2、1）	
（1、3）	（3）	
（2、1、1）		（1、1）
（2、2）		（2）
（3、1）	（1）	

由表十三而知，

A(3，4)先走一步變成 A（3，3）。

A(3，4)先走二步變成 A（3，2）。

A(3，4)先走三步變成 A（3，1）。

A(3，4)最多只能走 3 步，故，

A(3，4)

=A(3，3)+A(3，2)A(3，1)

顯然，先走第一步的方法可以被用來解釋。

（六）A(m,n)的推測

我們曾經在研究結果一，直觀實驗中推測一個公式

A(m,n)

= A(m,n-1) + A(m,n-2) +...+ A(m,n-m)

我們嘗試利用下面表個來討論 A(m,n)。

表十四、A(m，n)推測的討論

情況	第一步走多少階	第一步後剩下階層	第一步後剩下階層表示法
1	1	n-1	A(m，n-1)
2	2	n-2	A(m，n-2)
3	3	n-3	A(m，n-3)
4	4	n-4	A(m，n-4)
5	5	n-5	A(m，n-5)
…	…	…	…
m	m	n-m	A(m，n-m)

由於定義的關係，A(m，n)是 n 層階梯最多只有一次走 m 步。所以，A(m，n)的第一步有 m 種情況，第一步走後剩下的結果如表十一。

此種表格是目前我們能夠說明 A(m,n)

= A(m,n-1) + A(m,n-2) +...+ A(m,n-m)

（七）偶數不算

考慮 A(m(偶數不算)，n)的情形是第一步不跳偶數階梯。模仿表十四分析如表十五。

情況	第一步走多少階	第一步後剩下階層	第一步後剩下階層表示法
1	1	n-1	A(m∗，n-1)
	2	不會出現	
2	3	n-3	A(m∗，n-3)
	4	不會出現	
3	5	n-5	A(m∗，n-5)
…	…	…	…
[m/2]+1	m	n-m	A(m∗，n-m)

當然，第一步的最大步數 m 被假設成奇數。

符號：

A(m∗，n)表示 A(m(偶數不算),n)

故，其公式為：

A(m∗,n)

=A(m∗,n-1) + A(m∗,n-3)+ A(m∗, n-5)+...+ A(m∗,n-m)

（八）奇數不算

考慮 A(m(奇數不算),n)的情形是步不跳偶數階梯.模仿表十五分析如表十六。

情況	第一步走多少階	第一步後剩下階層	第一步後剩下階層表示法
	1	不會出現	
1	2	n-2	A(m◎，n-2)
	3	不會出現	
2	4	n-4	A(m◎，n-4)
	5	不會出現	
3	6	n-6	A(m◎，n-6)
…	…	…	…
M/2	m	n-m	A(m◎，n-m)

表十六中，第一步的最大步數 m 被假設成偶數。符號：A(m◎，n)表示 A(m(奇數不算),n)

故，其公式為：

A(m◎,n)

=A(m◎,n-2) + A(m◎,n-4)+ A(m◎, n-6)+...+ A(m◎,n-m)

三、A(無限大，n)

（一）無窮大構想

如果不要有限制,各個階層,每格都可以丟,會怎樣? 我們想把 A(∞,n)代表 A(無限大，n)

根據表十分類如表十七。

表十七、A(∞，4)的分析

分類	A（∞，n）	走法
一	A（∞，3）	（1、1、1、1）
		（1、1、2）
		（1、2、1）
		（1、3）
二	A（∞，2）	（2、1，1）
		（2、2）
三	A（∞，1）	（3、1）
四	一次 4 步	（4）

很顯然，只要是 A（∞，n）就有 n 個分類，同時，只要是 A（∞，n），其個數一定是 2 的（n-1）次方種的走法。

（二）A(∞，4)較嚴謹說法

在老師的鼓勵下，我們根據表十七嘗試以下樓梯後第一步的想法，提出我們的解釋。如表十八。

表十八、A(∞，4)比較嚴謹說法

走法	第一階梯	第二階梯	第三階梯	第四階梯
（1、1、1、1）	V	V	V	V
（1、1、2）	V	V	跳	V
（1、2、1）	V	跳	V	V
（1、3）	V	跳	跳	V
（2、1，1）	跳	V	V	V
（2、2）	跳	V	跳	V
（3、1）	跳	跳	V	V
（4）	跳	跳	跳	V

很顯然的在 A(∞，4)中，只有最後第四階梯必須要選擇落地，其他第一階梯、第二階梯及第三階梯均可以選擇跳或是不跳落地的兩種選擇。故，

A(∞，4)

$=2\times2\times2$

$=8$

=2 的 3 次方

四、「爬樓梯」與「丟球」比較

（一）兩研究的相同之處

兩個研究都發生費式數列現象。

（二）兩研究的不同之處

1.研究時間的落差：
我們的研究是從去年（93 年）暑假七月就開始進行，我們並不知道台南市小朋友以爬樓梯的題目參加全國國小組科學展覽。

2.研究方法的不同：
爬樓梯的題目直接由數字分析找出其規則。本研究（丟球）則是利用實際下樓梯及表格分析，找出費氏數列。

（三）規則一

$A(m,n)=A(m,n-1)+A(m,n-2)+...+A(m,n-m)$

規則 1 原因如表十九

表十九、規則 1 原因

第 1 步的階數	剩下的階數
1	n-1
2	n-2
3	n-3
...	...
M	n-m

（四）規則二

$A(\infty,n)=A(n,n)$

規則 2 原因:

當 A(m,n)時,如果 m>n 的話,n 階樓梯中不可能跨 m 階,因為跨 m 階已經大於樓梯的 n 階,大於標準所以方法數不變

（五）規則三

$A(n,n)=2^{n-1}$

規則 3 原因:

因為 n 階樓梯中,每格都會有跳到、沒跳到,兩種情形,第 1 步是絕對會跳到 2 乘 n-1 次,就是 2^{n-1}

（六）規則四

$A(n,k)=2^{k-1}$,其中 k<n

規則 4 原因:

1. 因為 k 階樓梯中,每格都會有跳到、沒跳到,兩種情形,第 1 步是絕對會跳到 2 乘 k-1 次,就是 2^{k-1}
2. 例: A(4,4)時,如表二十

表二十、A(4,4)時

	1 階	2 階	3 階	4 階
1,1,1,1	V	V	V	V
1,1,2	V(重複)	V（重複）	X	V
1,2,1	V(重複)	X	V	V
1,3	V(重複)	X	X	V
2,1,1	X	V	V	V
2,2	X	V(重複)	X	V
3,1	X	X	V	V
4	X	X	X	V
總結	2 的 3 次方 ❺2 ❺2 ❺2	2 的 3 次方 ❺2 ❺2	2 的 3 次方 ❺2	2 的 3 次方

（七）規則五(1)

A(n,k)=A(n,k-1)*2- A(n,k-(n+1))

規則 5(1)原因:

舉例，A(2,5)=A(2,4)*2-A(2,2)

A(2,4)=A(2,4)

A(2,2)+A(2,3)=A(2,4)

A(2,2)+A(2,3)+A(2,4)

=A(2,4)*2=A(2,5)+A(2,2)

A(2,4)*2-A(2,2)=A(2,5)+A(2,2)-A(2,2)

A(2,5)=A(2,4)*2-A(2,2)

（八）規則五(2)

A(n,n+1)=A(n,n)*2-1

規則 5(2)原因如表二十一

表二十一、規則 5(2)原因

2^0	2^1	2^2	2^3	2^4	2^5	和	和	和
1	2					3		
1	2	4				7	3+4	4*2-1
1	2	4	8			15	7+8	8*2-1
1	2	4	8	16		31	15+16	16*2-1
1	2	4	8	16	32	63	31+32	32*2-1

五、丟球奇偶性分析

(一)A(2,n)奇偶性的分析

分析如表二十二

表二十二、A(2,1~10)奇偶性結分析

階梯數	A(2,1)	A(2,2)	A(2,3)	A(2,4)	A(2,5)	A(2,6)	A(2,7)	A(2,8)	A(2,9)	A(2,10)
方法數	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89
O /E	O	E	O	O	E	O	O	E	O	O

其中:O 為奇數,E 為偶數

推算: A(2,3k)和 A(2,3k+1)為奇數

A(2,3k+2) 為偶數

(二)A(3,n)奇偶性的分析

分析如表二十三

表二十三、A(3,1~10)奇偶性結分析

階梯數	A(3,1)	A(3,2)	A(3,3)	A(3,4)	A(3,5)	A(3,6)	A(3,7)	A(3,8)	A(3,9)	A(3,10)
方法數	1	2	4	7	13	24	44	81	149	274
O /E	O	E	E	O	O	E	E	O	O	E

其中:O 為奇數,E 為偶數

推算: A(3,4k)和 A(3,4k+1)為奇數

A(3,4k+2)和 A(3,4k+3)為偶數

(三)A(4,n)奇偶性的分析

分析如表二十四

表二十四、A(4,1~10)奇偶性結分析

階梯數	A(4,1)	A(4,2)	A(4,3)	A(4,4)	A(4,5)	A(4,6)	A(4,7)	A(4,8)	A(4,9)	A(4,10)
方法數	1	2	4	8	15	29	56	108	208	401
O /E	O	E	E	E	O	O	E	E	E	O

其中:O 為奇數,E 為偶數

推算: A(4,5k)和 A(4,5k+1)為奇數

A(4,5k+2)、A(4,5k+3)和 A(4,5k+4)為偶數

(四)A(m,n)奇偶性的分析

推算: A(m,(m-1+2) k)和 A(m,(m-1+2) k+1)為奇數

A(m,(m-1+2)k+2)~ A(m,(m-1+2)k+(m-1+2-1))為偶數

↓

A(m,(m+1)k)和 A(m,(m+1)k+1)為奇數

A(m,(m+1)k+2)~ A(m,(m+1)k+m)為偶數

(五)A(m,n)奇偶性的原因

原因如表二十五

表二十五、奇偶性的原因

	n=1	n=2	n=3	n=4	n=5	n=6	n=7	原因
A(2,n)	1	2	3	5	8	13	21	0+E=0 E+0=0 0+0=E
A(3,n)	1	2	4	7	13	24	44	0+E+E=0 E+E+0=0 E+0+0=E 0+0+E=E
A(4,n)	1	2	4	8	15	29	56	0+E+E+E=0 E+E+E+0=0 E+E+0+0=E E+0+0+E=E 0+0+E+E=E

其中:0 為奇數,E 為偶數

奇偶數判斷

1. $\left(\frac{n}{2}-\left[\frac{n}{2}\right]\right)$ *2=1⇨n 為奇數
2. $\left(\frac{n}{2}-\left[\frac{n}{2}\right]\right)$ *2=0⇨n 為偶數

柒、結論

一、A(m，n)

A(m,n)
= A(m,n-1) + A(m,n-2) +...+ A(m,n-m)

二、偶數不能走

A(m＊,n)
=A(m＊,n-1) + A(m＊,n-3)+ A(m＊, n-5)+...+ A(m＊,n-m)

三、奇數不能走

A(m◎,n)
=A(m◎,n-2) + A(m◎,n-4)+ A(m◎, n-6)+...+ A(m◎,n-m)

四、A(m，m)及 A（∞，m）

A（∞，m）
=A(m，m)
=2 的(m-1)次方

國小組 數學科

佳作

080417

丟球

臺北縣樹林鎮大同國民小學

評語：

研究過程觀查仔細，並能就觀察出之特性歸納出一般性，唯某些符號之運用或定義欠妥當、表格中的標記或用詞，有待更明確的註解。