

中華民國第四十五屆中小學科學展覽會
作品說明書

國小組 數學科

080411

舞動奇『積』-探討五元方格 4×15 的 3D 變化

臺中市西區大勇國民小學

作者姓名：

小六 蔡博恩 小六 朱盈亞 小六 朱盈安
小六 饒嘉宏 小六 陳維新 小六 陳彥竹

指導老師：

劉育芬 楊嬪婷

中華民國第四十五屆國民中小學科學展覽會

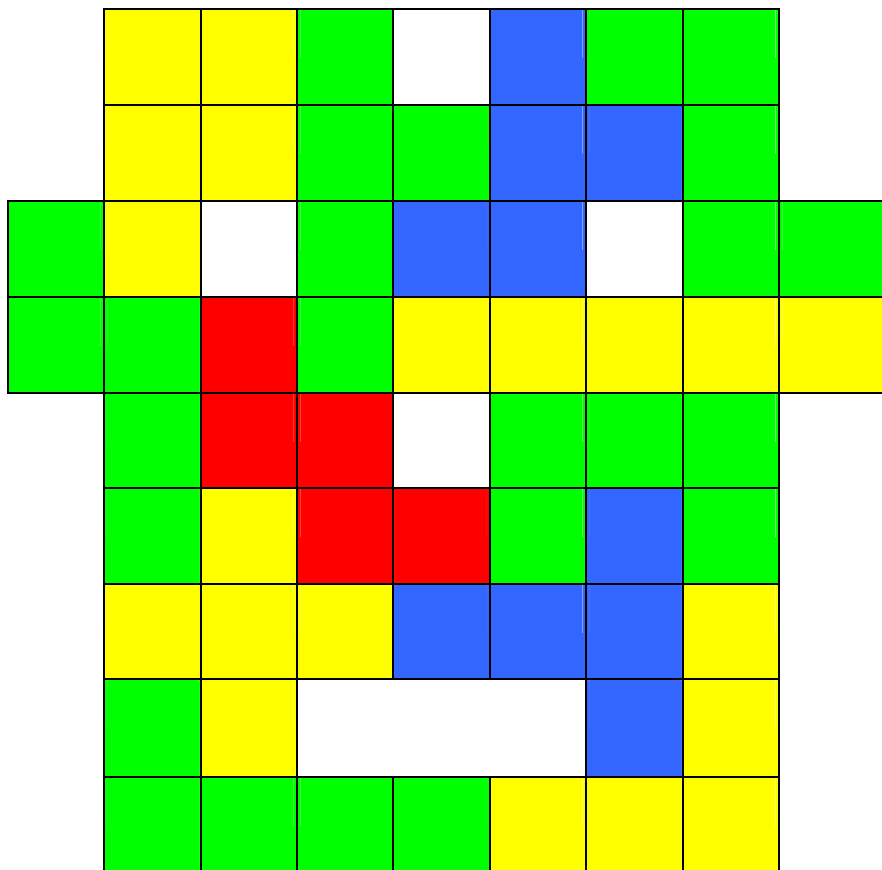
作品說明書

科 別：數學科

組 別：國小組

作品名稱：舞動奇「積」－探討五元方格 4×15 的 3D 變化

關 鍵 詞：Pentomino. 4×15 家族. 3D 變化



編號：

摘要

二十世紀中期，組合數學開始發展，五元方格（pentomino）積木（介紹見研究方法及過程）正是其中之一，五元方格的變化數以萬計，我們選擇別人尚未研究的範疇來研究。這個積木迷人的地方是「看起來沒有規律，但又藏有少許的規律。」有規律的數學規則或定理，雖然難，但人的智慧總可以破解的；沒有規律的數學，看似簡單，卻讓我們嚐盡了的苦頭。

我們主要研究 4×15 （由五元方格排出的寬 4 單位長 15 單位平面圖形）由 2D 轉變成為 3D 的立體變化，首先我們先將 4×15 的 368 種排法列出並編號（見附件一），其次把能夠變化成相同立體圖形的 2D 答案列出來，因為時間有限，我們只研究了 53 種的立體變化，但受益良多。

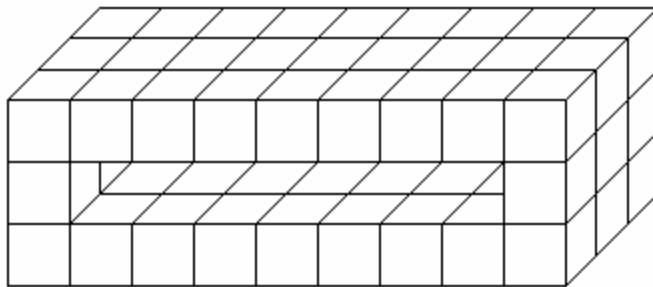
這次的研究我們學到：

- （一）在解題當中如果一時找不出答案，可以從另一個角度想想看，會有意想不到的收穫。
- （二）**做一件事情，團體的合作比個人的突出更重要。**
- （三）數學可以用在任何的地方，真是受益無窮。
- （四）有規律的東西雖難，但人的智慧總可以破解的；沒有規律的東西看起來簡單，卻難以掌握其條理和變化。
- （五）尋找條件越多的立體圖形，只要知道其中的關係，就可以利用其他有相同條件的立體圖形來找它們的交集，可更快速找出答案。

壹、研究動機

在四下數學學習領域中，有一個單元是「正方體和長方體」，我們對這些圖形的展開圖感到十分好奇。有一次戶外教學到國立自然科學博物館參觀，意外的發現五元方格積木，就將它買下來。更令人興奮的是在逛書店時發現了[數學遊戲大觀－王登傳著]一書中，有一個單元就是在介紹多元方格連遊戲，真是太棒了。如同書上所說的：**[只要試過一次,就會感到它是一種富於刺激充滿著發現的喜悅,使人難以釋手的遊戲。]**於是我們幾個有興趣的同學就一起研究起來了。

在一次又一次的排法中發現它真的是千變萬化，它有數十萬種平面的變化，尤其立體的排法更是多到讓人無法想像，最後我們決定研究 4×15 。因為 5×12 的變化太多了（有 1010 個答案）我們自覺能力不足；而 3×20 的變化雖然可以排出很漂亮的空心角柱圖形（見下圖）



可惜只有 2 種答案；而 4×15 的變化有 368 個答案，數量適中，所以我們找了 4×15 當研究題目。

貳、研究目的

12 個五元方格可以排成寬 4 單位長 15 單位的長方形，從這些研究我們慢慢的了解到圖形的無窮變化，而且從平面轉變成立體變化真的很多。

而全部的研究都是從課本衍生出來的，不但讓我們學會了課本上的知識，也體會到學數學的樂趣，所以大家要把數學讀好，因此我們將研究提出來和大家一起分享。

參、研究設備及器材

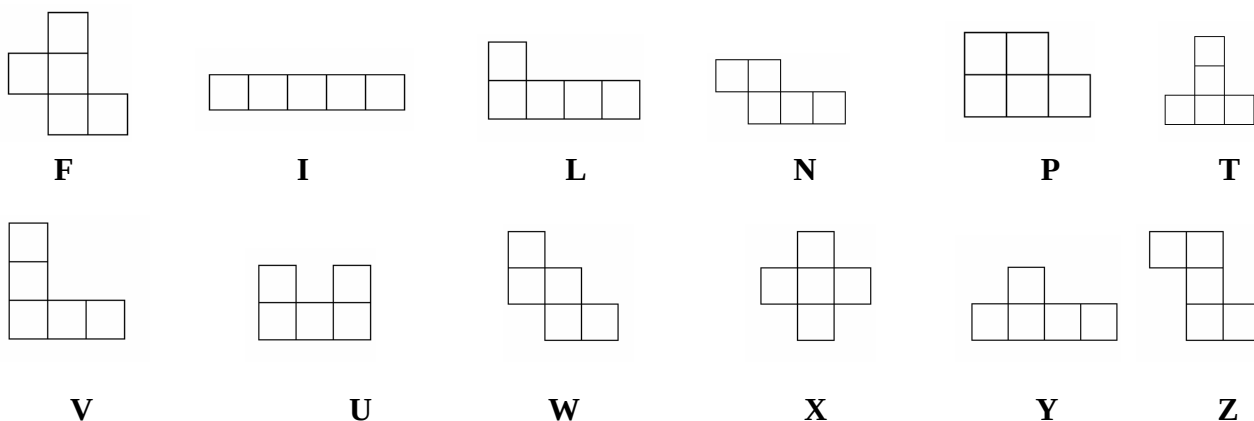
1. 電腦 2.印表機 3.五元方格積木 4.鉛筆 5.橡皮擦 6.資料夾 7.長尺 8.白紙

肆、研究過程及方法

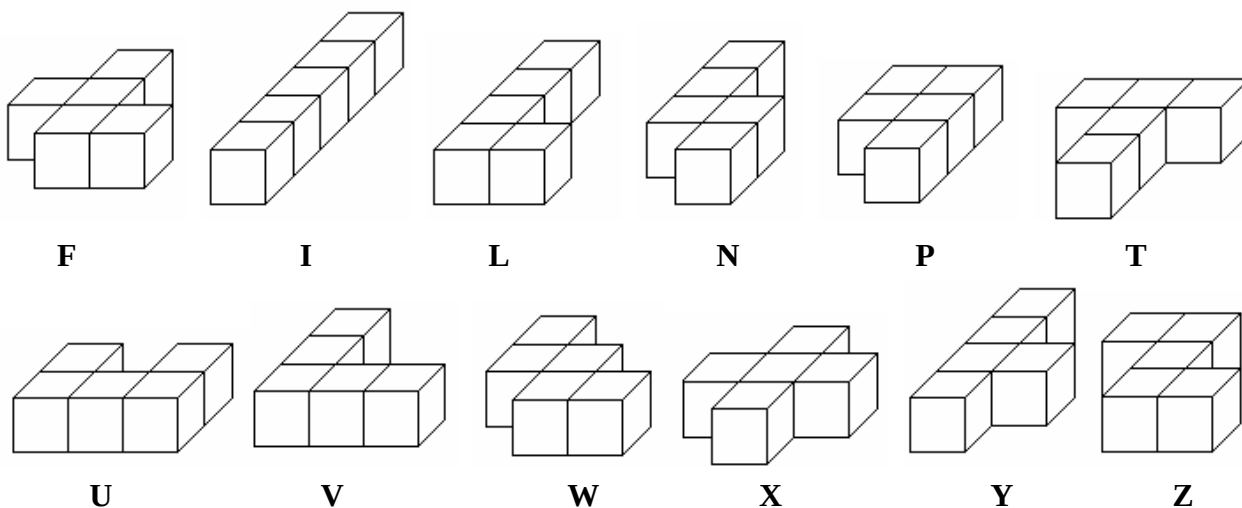
一、命名及立體編號：

1.命名

將五個正方形沿邊緣連接，即形成五元方格（pentomino），一共有 12 種組合，可以排出數萬種平面或立體圖形，每一個組合都有英文字母的命名：

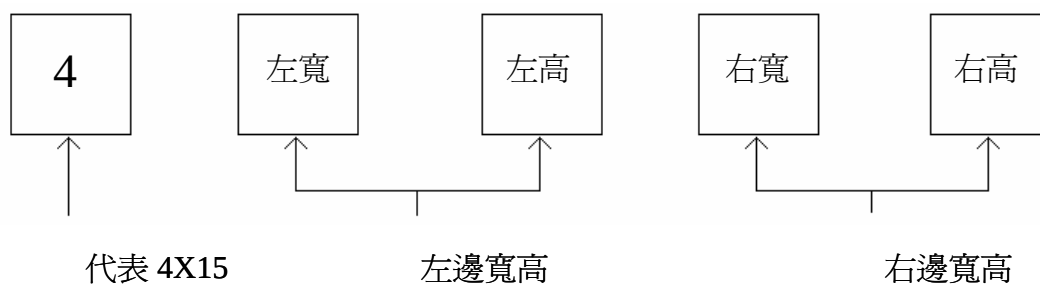


之後我們將平面的正方形變成立方體，成為我們所研究的積木，見下圖：



2.立體編號

立體圖形的命名以五個數字代表，其每一個數字各有意義：



寬高用數字來表示，如果寬高超過 10 以上，就以英文字母依序表示。

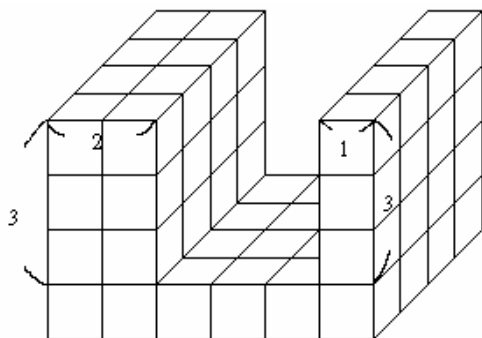
A=10 B=11 C=12 D=13 E=14 F=15 G=16 H=17 I=18 J=19 K=20

圖（五二）、（五三）除外。

例如：

編號（42313），其意義：

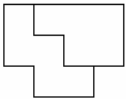
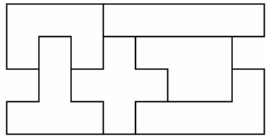
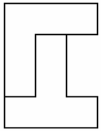
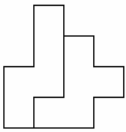
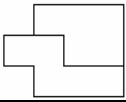
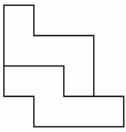
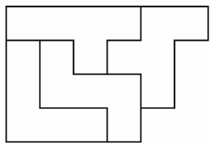
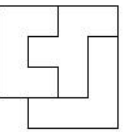
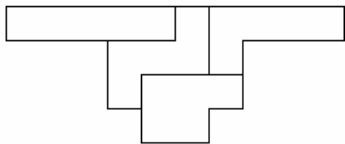
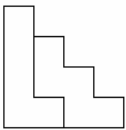
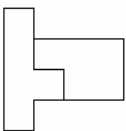
4X15 的立體變化，左邊寬兩格、高三格，而右邊寬一格、高三格；如下圖：

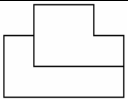
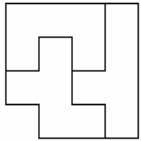
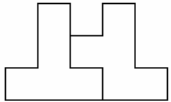
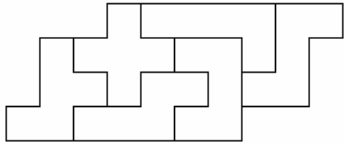
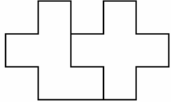
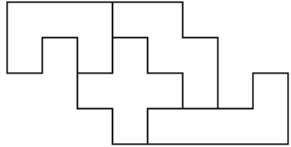
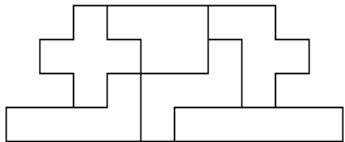
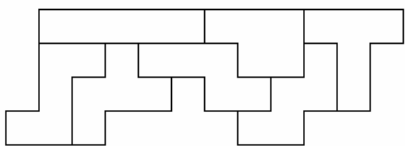
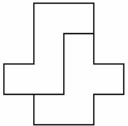
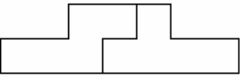
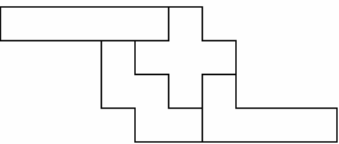
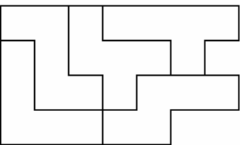


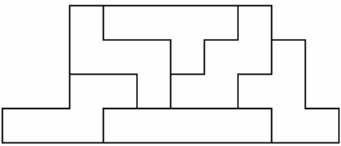
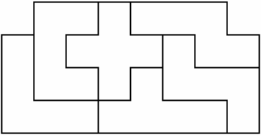
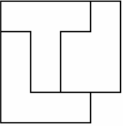
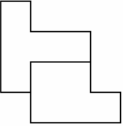
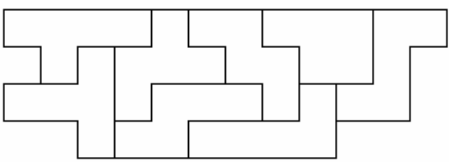
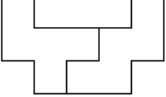
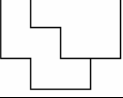
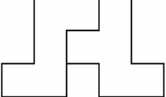
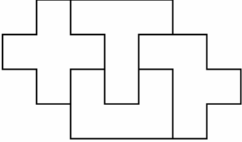
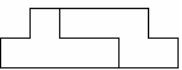
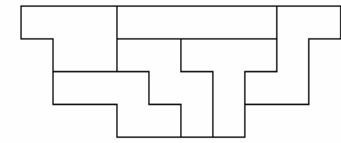
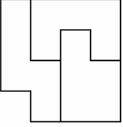
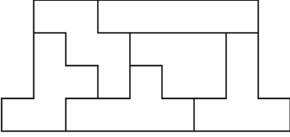
二、研究程序

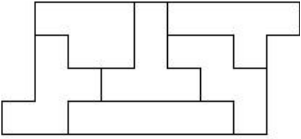
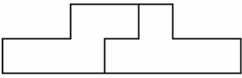
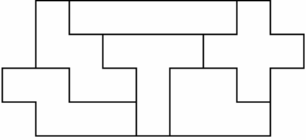
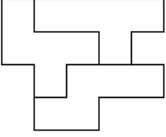
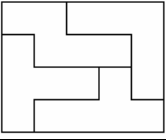
- （一）先從網路（打 pentomino 按搜尋即可）找到 368 個 4X15 的解答。
- （二）再將這些答案畫在電腦上並縮小。（如附件一）
- （三）以對稱組合變化出相近的答案並歸在一類加以編號。
- （四）以下圖表是我們在 4X15 的 368 種答案中所找到的對稱組合，可以幫助我們檢驗立體變化的答案。（對稱組合就是兩個或兩個以上的積木互相調換或旋轉成相同的圖形）

對稱組合	在平面圖形中編號	總計
	(20)~(27) (58)(59) (91)~(94) (111)~(114) (133)~(140) (171)~(190) (231)~(233) (237)~(248) (261)~(337) (339)~(354) (359)~(363) (365)~(367)	共 162 個
	(18)(19) (34)(35)	共 4 個

	(30)(31) (67)~(72) (116)~(119) (121) (123)~(125) (127)(128) (130)(131) (153)~(156)	共 24 個
	(36)(37)	共 2 個
	(38)(39) (44)~(47) (54)(55) (62)(63) (91)~(95) (111)~(114) (145)~(148) (157)~(159) (164)~(170) (173)~(190) (205)~(209) (222) (307)~(314) (321)~(326)	共 71 個
	(40)(41) (161)~(163) (191)(193) (194)(198) (202) (216)~(219) (234) (249)~(251) (253)~(258) (273)~(276) (289)~(292)	共 36 個
	(42)(43)	共 2 個
	(48)~(51) (60)(61) (149)~(151) (153)~(156) (191)~(193) (195)~(197) (199)~(204) (216) (219)~(221) (223) (226)~(229) (234)~(236) (249)(250) (252)(253) (255)(260) (275)~(286) (291)~(308) (310)(313) (314)(317) (318) (319)~(322) (327)~ (328)	共 84 個
	(52)(53)	共 2 個
	(56)(57) (115)~(120)	共 8 個
	(64)(66)	共 2 個
	(67)~(72) (115)~(117) (119)(120) (124) (126)~(130) (132)	共 18 個
	(73)~(75)	共 3 個

	(73)~(75)	共 3 個
	(76)~(81)	共 6 個
	(76)(77) (79)(80) (141)(142) (191)~(193) (195)~(197) (199)(200) (210)(212) (214)(215) (261)(262) (265)~(268) (271)(272)	共 26 個
	(82)(83)	共 2 個
	(85) (87)~(89) (141)(144) (205) (208)~(211) (213)(214) (222) (237)~(248) (261)~(264) (268)~(270) (279)~(286) (295)~(306) (329)~(337) (339)~(354) (359)~(367)	共 87 個
	(85)~(87)	共 3 個
	(111)(112)	共 2 個
	(135)~(137) (139)	共 4 個
	(141)(143) (181)~(190)	共 12 個
	(149)(151)	共 2 個
	(145)~(148) (331)(333) (334)(338) (348)(350) (361)(364) (366)(368)	共 14 個
	(151)(152)	共 2 個

	(171)(172)	共 2 個
	(201)(203) (204)	共 3 個
	(157)(159) (307)~(311) (314)~(316) (323)	共 11 個
	(158) (312)~(314) (316) (319)~(321) (324)~(328)	共 13 個
	(160)~(163)	共 4 個
	(161)(162) (213)~(215)	共 5 個
	(210)~(215)	共 6 個
	(223)(226) (228)	共 3 個
	(223)~(227) (229)	共 6 個
	(237) (242)~(248)	共 8 個
	(237)~(241)	共 5 個
	(257)(259)	共 2 個
	(275)~(279) (281)(282) (285)(286) (375)~(379)	共 14 個

	(291)~(294) (298)(299) (304)(305)	共 8 個
	(296) (297)(298) (300)(301) (303)(304) (306)(307) (310)(311) (314)(322) (325)(326)	共 15 個
	(287)(288)	共 2 個
	(309) (312)(313) (315)(316) (321)	共 6 個
	(329)~(368)	共 40 個

三、各立體圖形的尋找方法

編號	尋找方法
41100	L 或 Y 在最旁邊
41200	找 V+F , P+W , V+T , V+Z , L+N , U+P , L+U,在最旁邊。
41300	左起或右起第四行可折立者。
41400	左起或右起第五行可折立者。
41500	左起或右起第六行可折立者。
41600	左起或右起第七行可折立者。
41700	左起或右起第八行可折立者。
41211	找 41200 和 41100 的交集。
41311	找 41300 和 41100 的交集。
41411	找 41400 和 41100 的交集。
41511	找 41500 和 41100 的交集。
41611	找 41600 和 41100 的交集。
41711	找 41700 和 41100 的交集。
41811	找 41600 和 41100 的交集。
41B11	找 41300 和 41100 的交集。
41212	找雙邊可形成 41200。
41312	找 41300 和 41200 的交集。
41612	找 41600 和 41200 的交集。
41712	找 41700 和 41200 的交集。

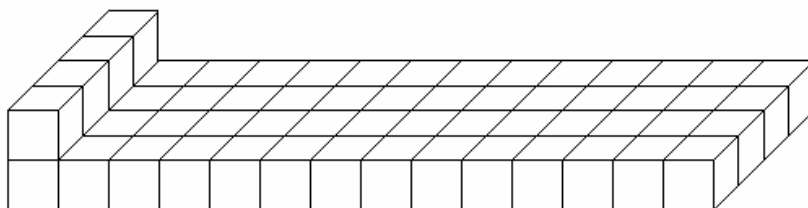
41812	找 41600 和 41200 的交集。
41313	找雙邊可形成 41300。
41413	找 41400 和 41300 的交集。
41513	找 41500 和 41300 的交集。
41613	找 41600 和 41300 的交集。
41713	找 41700 和 41300 的交集。
41813	找 41600 和 41300 的交集。
41614	找 41600 和 41400 的交集。
41814	找 41600 和 41400 的交集。
41615	找 41600 和 41500 的交集。
41616	找雙邊可形成 416 00。
42100	同一邊第二和第三行可折立者。
42112	找 42100 和 41200 的交集。
42113	找 42100 和 41300 的交集。
42116	找 42100 和 41600 的交集。
42118	找 42100 和 41600 的交集。
43121	找 42100 和 43100 的交集。
43100	同一邊第三行和第四行可折立者。
43111	找 43100 和 41100 的交集。
43112	找 43100 和 41200 的交集。
43113	找 43100 和 41300 的交集。
43116	找 43100 和 41600 的交集。
43117	找 43100 和 41700 的交集。
43118	找 43100 和 41600 的交集。
45100	同一邊第五行和第六行可折立者。
45111	找 45100 和 41100 的交集。
45113	找 45100 和 41300 的交集。
46100	同一邊第六行和第七行可折立者。
47100	同一邊第七行和第八行可折立者。
42300	同一邊第行和第行可折立者。
42311	找 45100 和 41100 的交集。
42313	找 45100 和 41300 的交集。
2X3X15	找 U、L、Y、P、I、N 在最旁邊可折立。
2X4X14	L 和 Y 在中間，但經過尋找後發現 Y 在中間沒有答案。

伍、研究結果

經過一年多的努力，我們共找了 53 種立體圖形，加以整理，見以下圖形：

(一) 編號：41100

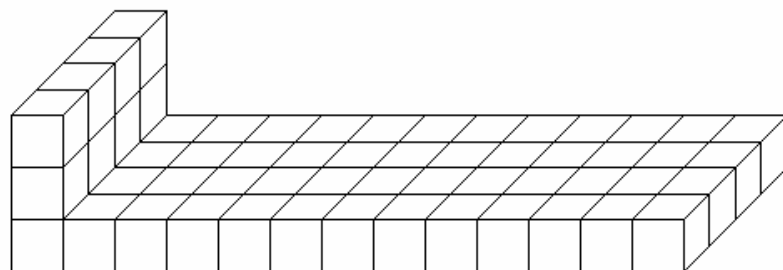
(1)(11)(16)(18)(19)(21)
(23)(25)(26)(28)(29)(30)
(31)(32)(34)(35)(36)(37)
(59)(65)(69)(72)(73)(74)
(75)(76)(77)(79)(80)(85)



(86)(87)(93)(94)(95)(96)(97)(98)(99)(102)(107)(108)(113)(114)(119)(120)(126)(129)
(132)(136)(137)(138)(166)(168)(170)(172)(177)(178)(179)(180)(181)(182)(183)(184)(201)(202)
(203)(204)(216)(217)(218)(219)(220)(221)(223)(224)(225)(226)(227)(228)(229)(231)(233)(234)
(235)(236)(239)(245)(246)(247)(248)(262)(266)(270)(272)(274)(276)(278)(283)(284)(285)(286)
(288)(290)(292)(294)(301)(302)(303)(304)(305)(306)(330)(332)(335)(337)(359)(362)(365)(367)
共 120 個

(二) 編號：41200

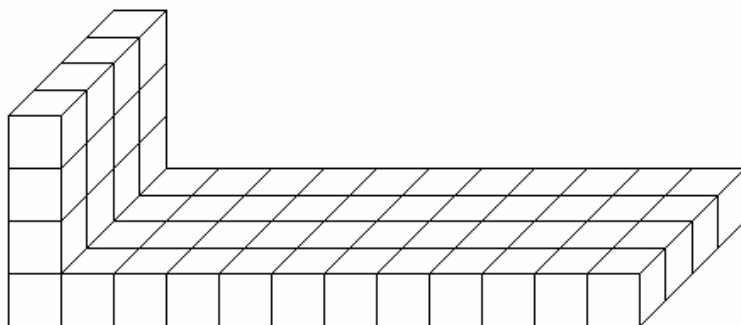
(2)(4)(5)(6)(8)(9)(11)
(12)(14)(18)(19)(20)(21)
(22)(23)(26)(27)(30)(31)
(32)(33)(34)(36)(37)(38)
(39)(44)(45)(46)(47)(49)
(51)(52)(54)(55)(57)(60)
(62)(63)(64)(65)(66)(67)



(68)(69)(70)(71)(72)(73)(74)(75)(76)(77)(78)(79)(80)(81)(82)(83)(84)(88)(8
9)(90)(91)(92)(93)(94)(95)(96)(97)(98)(99)(100)(101)(102)(105)(106)(109)(110)(111)
(112)(113)(114)(115)(119)(121)(122)(123)(124)(125)(126)(127)(128)(129)(135)(136)(137)(138)
(139)(140)(145)(146)(147)(148)(150)(152)(153)(154)(155)(156)(159)(160)(161)(162)(163)(164)
(173)(174)(175)(176)(177)(178)(179)(180)(181)(182)(183)(184)(185)(186)(187)(188)(189)(190)
(191)(192)(193)(194)(196)(198)(200)(203)(205)(206)(207)(208)(209)(210)(211)(212)(213)(214)
(215)(216)(217)(218)(219)(222)(223)(228)(229)(235)(237)(242)(243)(244)(245)(246)(247)(248)
(250)(251)(252)(253)(254)(255)(256)(257)(258)(273)(274)(275)(276)(277)(280)(282)(284)(286)
(289)(290)(291)(292)(296)(299)(302)(305)(315)(316)(318)(320)(321)(322)(323)(324)(325)(326)
(327) 共 205 個

(三) 編號：41300

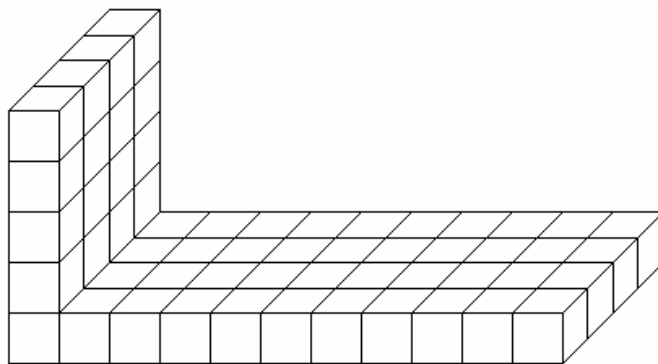
(1)(7)(8)(13)(15)(16)(17)
(18)(19)(20)(21)(22)(23)
(24)(25)(26)(27)(28)(34)
(35)(36)(40)(41)(42)(43)
(46)(47)(48)(49)(50)(51)
(53)(56)(57)(58)(59)(60)
(61)(64)(65)(67)(68)(69)
(70)(71)(72)(76)(77)(78)



(79)(80)(81)(86)(91)(92)(93)(94)(99)(100)(101)(102)(103)(104)(105)(106)(109)(111)
(113)(114)(115)(116)(117)(118)(119)(120)(124)(125)(126)(127)(128)(129)(130)(131)(132)(133)
(134)(135)(136)(137)(138)(139)(140)(141)(142)(143)(144)(145)(147)(149)(150)(151)(153)(154)
(155)(156)(157)(158)(159)(160)(165)(166)(167)(168)(169)(170)(171)(172)(173)(174)(175)(176)
(177)(178)(179)(180)(181)(182)(183)(184)(185)(186)(187)(188)(189)(190)(191)(192)(193)(195)
(196)(197)(199)(200)(202)(204)(216)(219)(220)(221)(230)(231)(232)(233)(234)(237)(238)(239)
(240)(241)(242)(243)(244)(245)(246)(247)(248)(249)(250)(252)(253)(255)(257)(259)(560)(261)
(262)(263)(264)(265)(266)(267)(268)(269)(270)(271)(272)(273)(274)(275)(276)(277)(278)(279)
(280)(281)(282)(283)(284)(285)(286)(287)(288)(289)(290)(291)(292)(293)(294)(295)(296)(297)
(298)(299)(300)(301)(302)(303)(304)(305)(306)(307)(308)(309)(310)(311)(312)(313)(314)(315)
(316)(317)(318)(319)(320)(321)(322)(323)(324)(325)(326)(327)(328)(329)(330)(331)(332)(334)
(335)(336)(337)(355)(356)(357)(358)(359)(360)(361)(362)(363)(365)(366)(367) 共 257 個

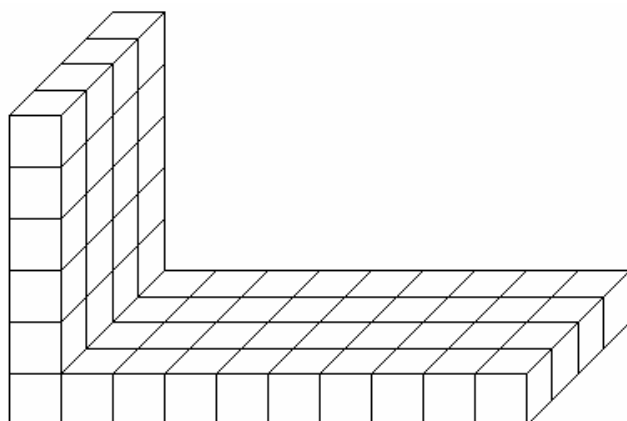
(四) 編號：41400

(329)(330)(331)(332)(333)(334)(335)(336)
(337)(338)(339)(340)(341)(342)(343)(344)
(345)(346)(347)(348)(349)(350)(351)(352)
(353)(354)(355)(356)(357)(358)(359)(360)
(361)(362)(363)(364)(365)(366)(367)(368)
共 40 個



(五) 編號：41500

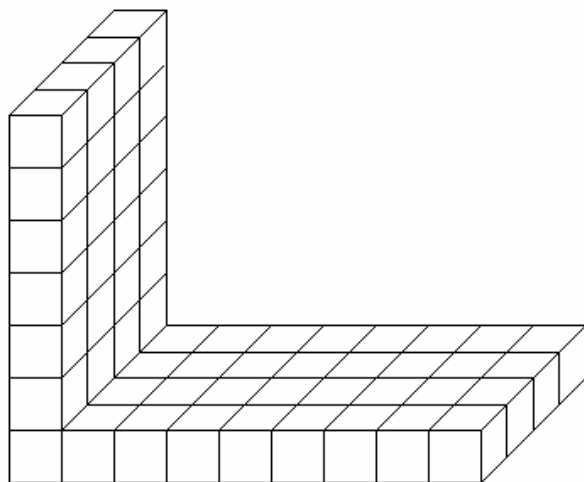
(329)(330)(331)(332)(333)(334)(335)(336)
(337)(338)(339)(340)(341)(342)(343)(344)
(345)(346)(347)(348)(349)(350)(351)(352)
(353)(354)(355)(356)(357)(358)(359)(360)
(361)(362)(363)(364)(365)(366)(367)(368)
共 40 個



(六) 編號：41600

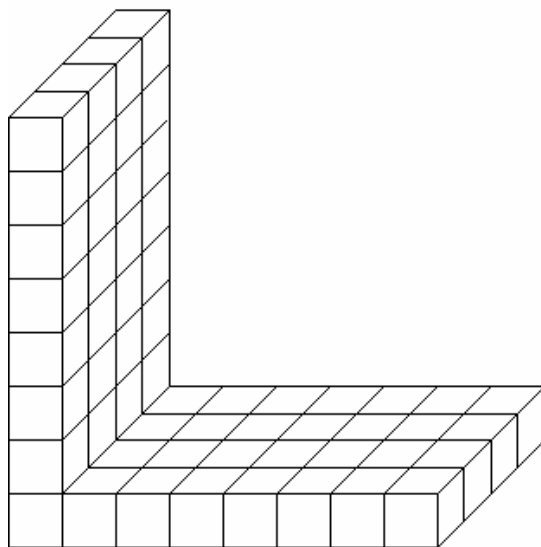
(2)(7)(9)(10)(11)(12)(13)(14)(15)
(16)(17)(20)(21)(28)(29)(30)(31)(32)
(33)(34)(35)(36)(37)(42)(43)(44)(45)
(46)(47)(48)(49)(50)(51)(53)(54)(55)
(62)(63)(66)(73)(74)(75)(85)(86)(87)
(88)(89)(90)(91)(92)(93)(94)(95)(96)
(97)(98)(103)(104)(105)(106)(107)(108)(110)
(112)(115)(116)(117)(118)(119)(120)(121)(122)
(123)(127)(128)(129)(130)(131)(132)(133)(134)
(141)(142)(143)(144)(146)(148)(149)(150)(151)
(152)(153)(154)(155)(156)(157)(158)(159)(160)

(161)(162)(163)(164)(169)(170)(171)(172)(173)(174)(177)(178)(181)(182)(183)(184)(185)(186)
(187)(188)(189)(190)(201)(203)(204)(205)(207)(208)(209)(210)(211)(212)(213)(214)(215)(216)
(217)(218)(219)(220)(221)(222)(223)(224)(225)(226)(227)(228)(229)(230)(232)(235)(236)(249)
(250)(250)(252)(253)(254)(255)(254)(257)(258)(259)(260)(307)(308)(310)(311)(314)(317)(318)
(319)(320)(321)(322)(323)(324)(325)(326)(327)(328)(333)(339)(340)(341)(342)(343)(344)(345)
(346)(347)(348)(349)(350)(351)(352)(353)(354)(364)(368) 共 200 個



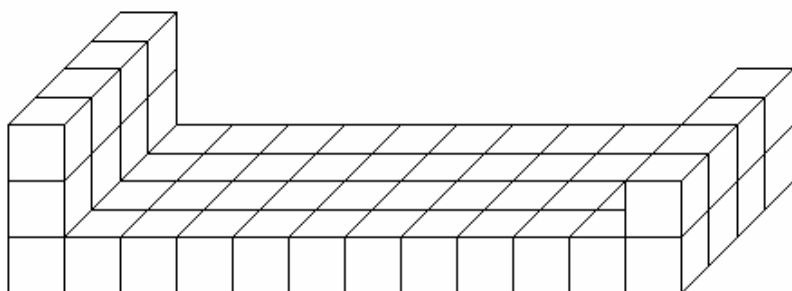
(七) 編號：41700

(1)(3)(4)(5)(6)(15)(22)(23)(24)(25)(38)
(39)(40)(41)(48)(49)(52)(53)(76)(77)(78)
(79)(80)(81)(82)(83)(84)(128)(129)(130)(131)
(132)(163)(165)(166)(167)(168)(191)(192)(193)(194)
(195)(196)(197)(198)(199)(200)(202)(232)(233)(234)
(238)(239)(240)(241)(261)(262)(263)(264)(265)(266)
(267)(268)(269)(270)(271)(272)(308)(309)(312)(313)
(315)(316)(317)(318)(319)(320)(323)(324) 共 79 個

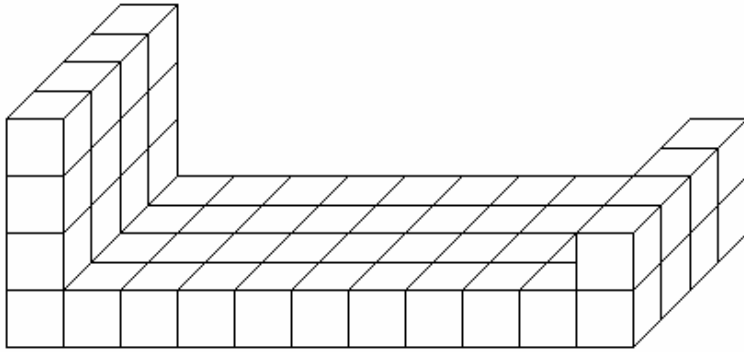


(八) 編號：41211

(18)(21)(23)(26)(30)(31)
(32)(34)(36)(37)(69)(72)
(73)(74)(75)(76)(77)(79)
(80)(93)(94)(95)(96)(97)
(98)(99)(102)(113)(114)(119)
(126)(12)(136)(137)(138)(177)
(178)(179)(180)(181)(182)(183)
(184)(216)(217)(218)(219)(245)(246)(247)(248)(274)(276)(284)(286)(290)(292)(302)(304)(305)
共 60 個

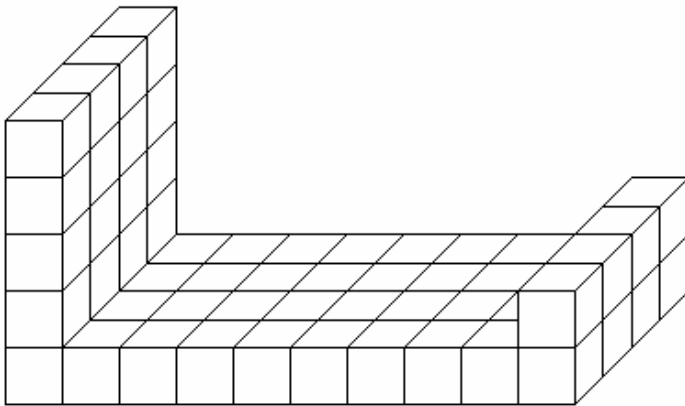


(九) 編號：41311



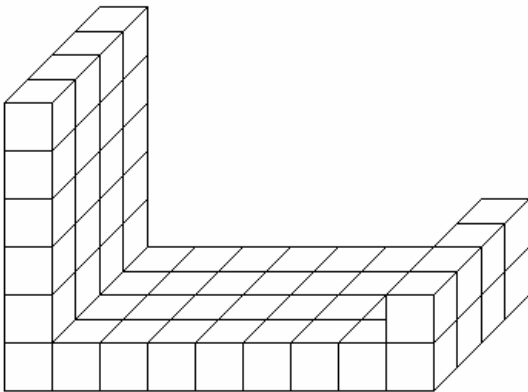
(18)(19)(34)(35)(119)(120)(216)
(219)(220)(221)(276)(278)(283)
(284)(285)(286)(288)(292)(294)
(301)(302)(303)(304)(305)(306)
共 25 個

(十) 編號：41411



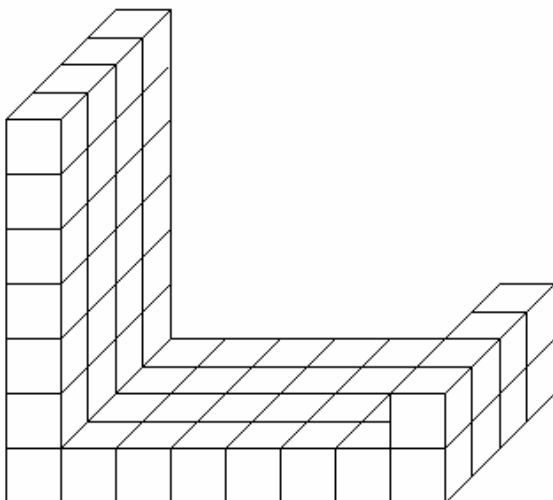
(330)(332)(335)(337)(359)(362)(365)
(367) 共 8 個

(十一) 編號：41511



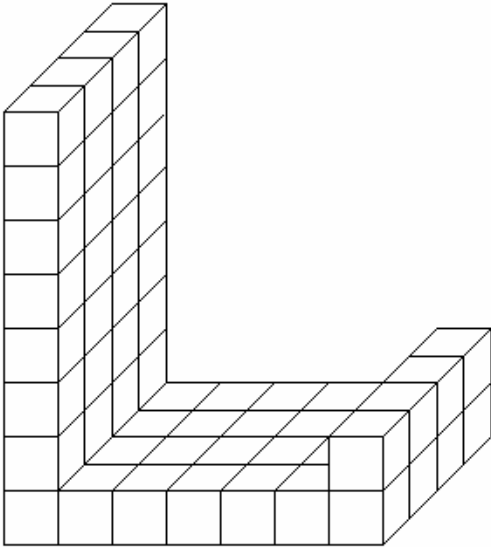
(330)(332)(335)(337)(359)(362)(365)
(367) 共 8 個

(十二) 編號：41611



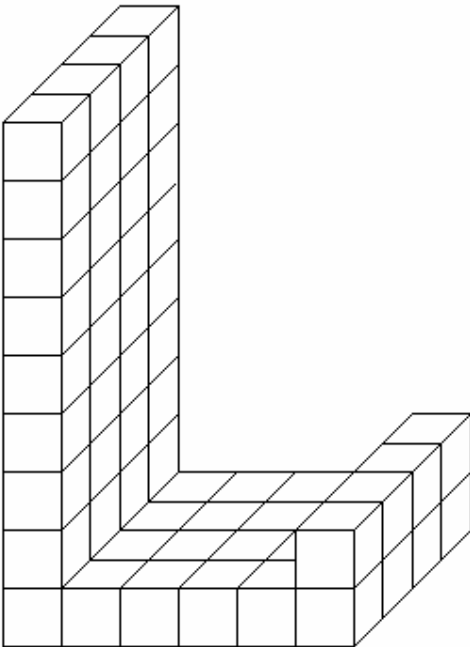
(16)(28)(29)(30)(31)(36)(37)(73)(74)(75)(85)
(86)(87)(93)(94)(119)(120)(177)(178)(201)(203)
(204)(223)(224)(225)(226)(227)(228)(229)(234)
(235)(236) 共 32 個

(十三) 編號：41711



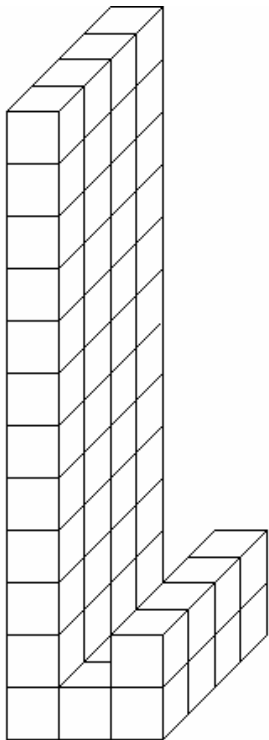
(1)(23)(25)(76)(77)(79)(80)(132)(166)(168)
 (202)(233)(234)(239)(262)(266)(270)(272)
 共 18 個

(十四) 編號：41811



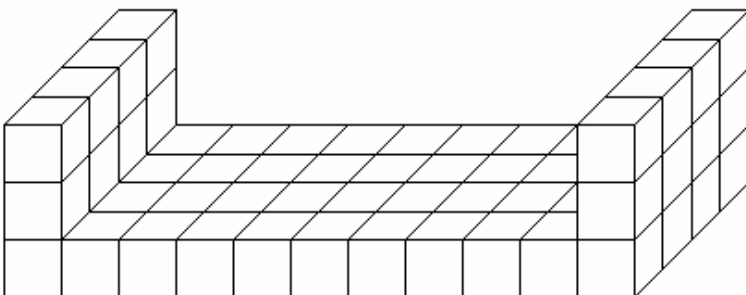
(11)(21)(29)(32)(34)(35)(37)(73)(74)
 (75)(85)(87)(95)(96)(97)(98)(107)(108)
 (129)(132)(170)(172)(181)(182)(183)(184)(216)
 (217)(218)(219)(220)(221)(223)(224)(225)(226)
 (227)(228)(229)(231)(236) 共 41 個

(十五) 編號：41B11



(1)(16)(21)(23)(25)(26)(28)(36)(59)(69)(72)(76)(77)(79)
 (80)(86)(93)(94)(99)(102)(103)(114)(119)(120)(126)(129)(134)(136)
 (137)(138)(166)(168)(170)(172)(177)(178)(179)(180)(181)(182)(183)(184)
 (202)(204)(231)(233)(234)(239)(245)(246)(247)(248)(262)(266)(270)(272)
 (274)(276)(278)(283)(284)(285)(286)(288)(290)(292)(294)(301)(302)(303)
 (304)(305)(306)(330)(332)(335)(337)(359)(362)(365)(367) 共 81 個

(十六) 編號：41212

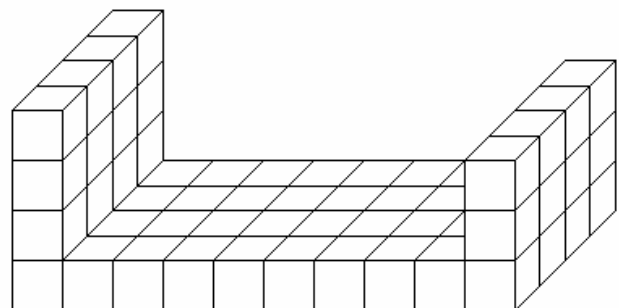


共 9 個

(12)(18)(30)(31)(44)(45)(97)(98)(154)

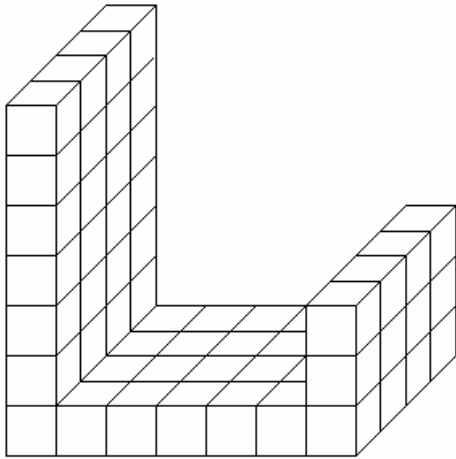
(十七) 編號：41312

(19)(20)(21)(22)(23)(26)(27)(36)
 (47)(57)(60)(64)(65)(67)(68)(69)
 (70)(71)(72)(76)(77)(78)(79)(80)
 (81)(91)(92)(93)(94)(99)(100)(101)
 (102)(109)(111)(113)(114)(115)(118)(119)
 (124)(125)(126)(127)(128)(129)(135)(136)
 (137)(138)(139)(140)(145)(147)(153)(154)



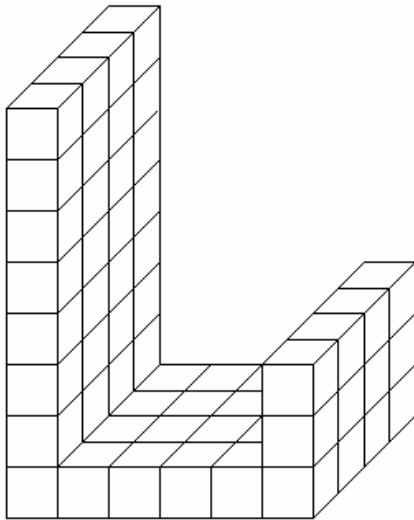
(155)(156)(173)(174)(175)(176)(177)(178)(179)(180)(181)(182)(183)(184)(185)(186)(187)(188)
 (189)(190)(237)(242)(243)(244)(245)(246)(247)(248)(273)(274)(275)(276)(280)(272)(284)(286)
 (289)(290)(291)(292)(296)(299)(302)(305) 共 100 個

(十八) 編號：41612



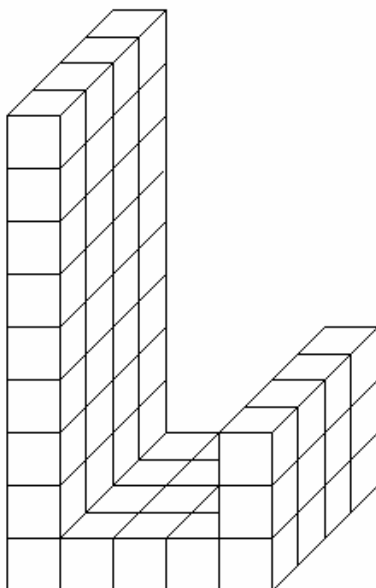
(2)(9)(11)(12)(14)(20)(21)(30)(31)(32)(33)
 (34)(37)(44)(45)(51)(66)(73)(74)(75)(88)(89)
 (90)(95)(96)(97)(98)(105)(106)(112)(122)(123)(127)
 (128)(129)(146)(148)(149)(150)(152)(159)(160)(161)(162)
 (163)(181)(182)(183)(184)(185)(186)(187)(188)(189)(190)
 (203)(205)(206)(207)(208)(209)(210)(211)(212)(213)(214)
 (215)(216)(217)(218)(219)(222)(223)(228)(229)(235)(250)
 (251)(253)(254)(255)(256)(257)(258)(318)(320)(321)(322)
 (323)(324)(325)(326)(327) 共 93 個

(十九) 編號：41712



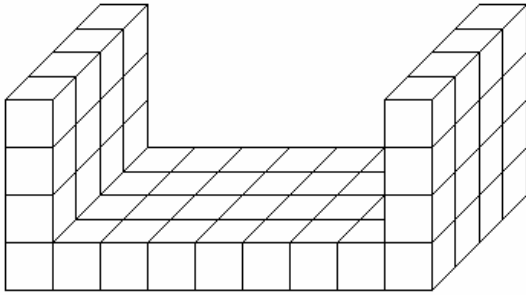
(4)(5)(6)(22)(23)(38)(39)(52)(76)(77)(78)(79)
 (80)(81)(82)(83)(84)(128)(129)(163)(191)(193)(194)
 (196)(198)(200)(202)(315)(316)(318)(320)(323)(324)
 共 33 個

(二十) 編號：41812



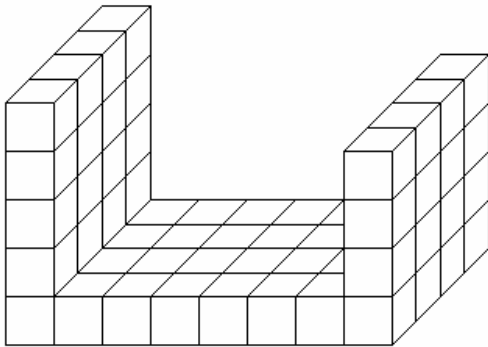
(2)(5)(9)(11)(14)(30)(31)(36)(37)(46)(47)(52)
 (54)(55)(62)(63)(73)(74)(75)(91)(92)(93)(94)(97)
 (110)(115)(118)(119)(164)(173)(174)(177)(178)(203)(210)(211)
 (212)(213)(214)(215)(223)(228)(229)(235)
 共 44 個

(二一) 編號：41313



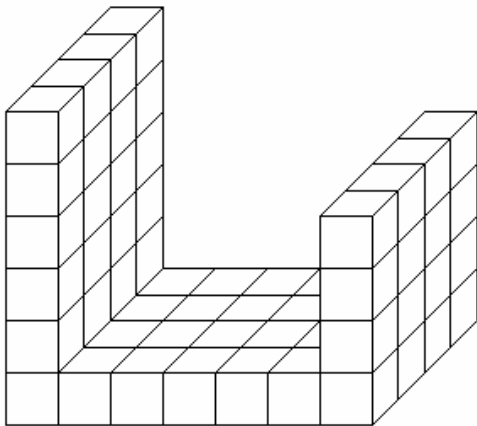
(56)(57)(58)(59)(60)(61)(115)(116)(117)(118)(119)
(120)(275)(276)(277)(278)(279)(280)(281)(282)(293)
(294)(295)(296)(297)(298)(299)(300)(301)(302)(303)
(304)(305)(306) 共 44 個

(二二) 編號：41413



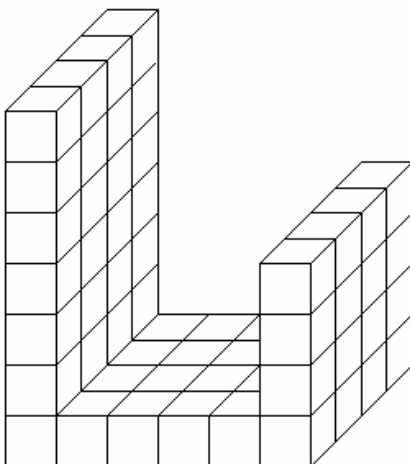
(329)(330)(331)(332)(334)(335)(336)(337)(355)(356)
(357)(358)(359)(360)(361)(362)(363)(365)(366)(367)
共 20 個

(二三) 編號：41513



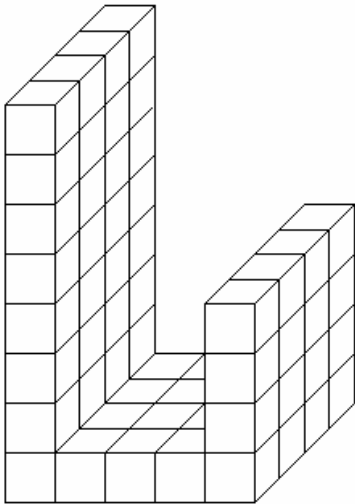
(329)(330)(331)(332)(334)(335)(336)(337)(355)(356)
(357)(358)(359)(360) (361) (362)(363)(365)(366)(367)
共 20 個

(二四) 編號：41613



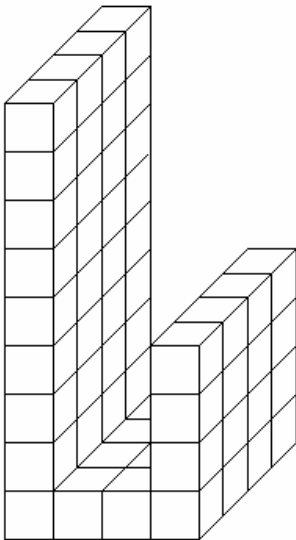
(7)(13)(16)(17)(28)(34)(35)(36)(41)(42)(43)(46)
(47)(48)(49)(50)(51)(86)(91)(92)(93)(94)(103)(104)
(105)(106)(115)(117)(119)(120)(141)(142)(143)(144)(149)(150)
(151)(153)(154)(155)(156)(157)(158)(159)(160)(173)(174)(177)
(178)(204)(216)(219)(220)(221)(234)(249)(250)(252)(253)(255)
(257)(259)(260)(307)(308)(310)(311)(313)(314)(317)(318)(319)
(320)(321)(322)(323)(324)(325)(326)(327)(328) 共 81 個

(二五) 編號：41713



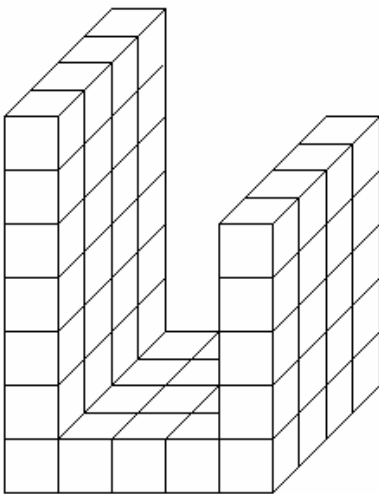
(1)(15)(22)(23)(24)(25)(40)(41)(48)(49)(53)(76)
 (77)(78)(79)(80)(81)(127)(128)(129)(130)(131)(132)(165)
 (166)(167)(168)(191)(192)(193)(195)(196)(197)(19)(200)(202)
 (232)(233)(234)(238)(239)(240)(241)(261)(262)(263)(264)(265)
 (266)(267)(268)(269)(270)(271)(272)(308)(309)(312)(313)(315)
 (316)(317)(318)(319)(320)(323)(324) 共 67 個

(二六) 編號：41813



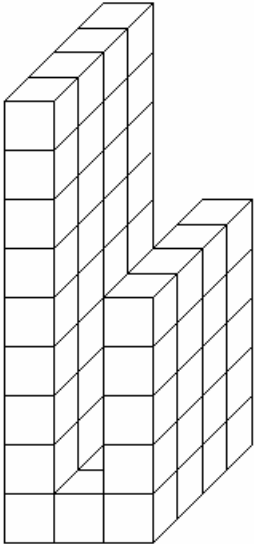
(7)(13)(15)(20)(21)(115)(116)(118)(119)(120)(127)(128)(129)
 (130)(131)(132)(133)(134)(142)(169)(171)(172)(181)(182)(183)(184)
 (185)(186)(187)(188)(189)(190)(230)(231) 共 34 個

(二七) 編號：41614



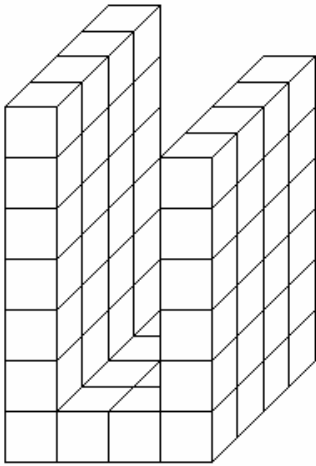
(333)(338)(339)(340)(341)(342)(343)(344)(345)(346)(347)(348)
 (349)(350)(351)(352)(353)(354)(364)(368) 共 20 個

(二八) 編號：41814



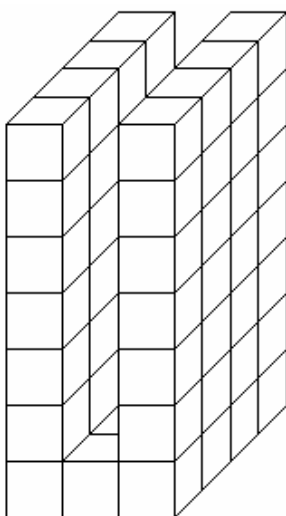
(343)(344)(345)(346)(351)(352)(353)(354) 共 8 個

(二九) 編號：41615



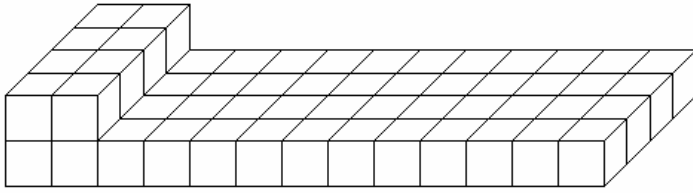
(333)(33)(339)(340)(341)(342)(343)(344)(345)(346)(347)(348)(349)
(350)(351)(352)(353)(354)(364)(368) 共 20 個

(三十) 編號：41616



(2)(9)(14)(29)(37)(73)(74)(75)(85)(87)(141)(142)(143)(144)
(201)(203)(210)(211)(212)(213)(214)(215)(223)(224)(225)(226)(227)
(228)(229)(235)(236)(243)(244)(245)(246)(251)(252)(253)(254)
共 39 個

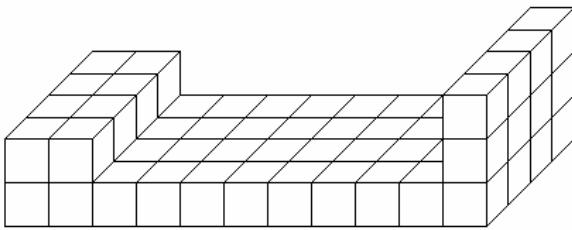
(三一) 編號：42100



共 13 個

(11)(18)(19)(30)(31)(65)(97)(98)(203)(223)(228)(229)(235)

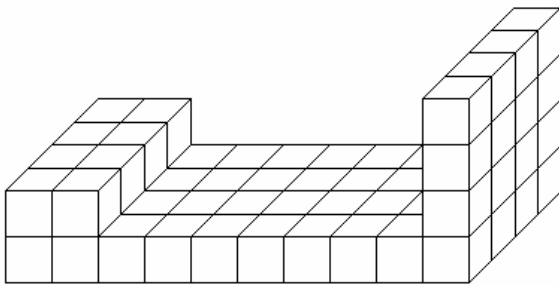
(三二) 編號：42112



共 5 個

(18)(30)(31)(97)(98)

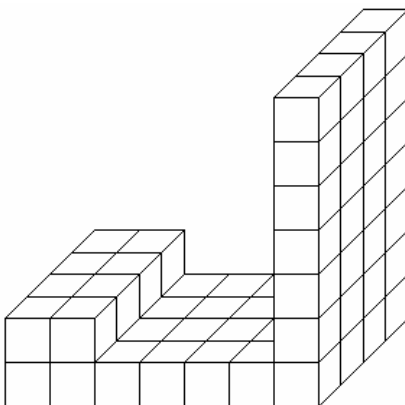
(三三) 編號：42113



共 2 個

(19)(65)

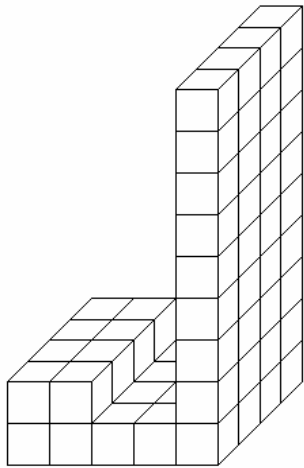
(三四) 編號：42116



共 8 個

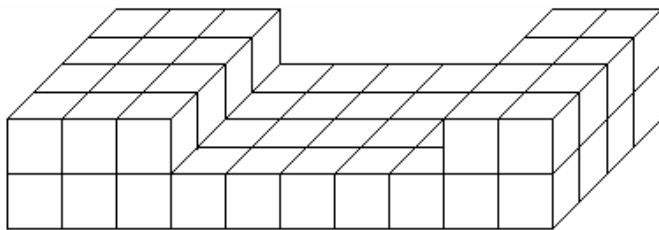
(11)(30)(31)(203)(223)(228)(229)(235)

(三五) 編號：42118



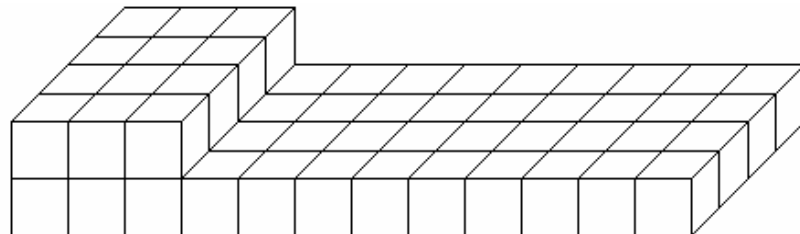
(11)(97)(98)(203)(223)(228)(229)(235)
共 8 個

(三六) 編號：43121



(18)
共 1 個

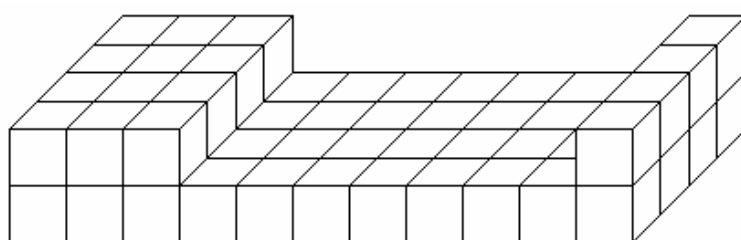
(三七) 編號：43100



(18)(34)(49)(51)(57)(60)
(105)(106)(115)(118)(119)(150)
(154)(156)(159)(160)(191)(193)
(196)(200)(216)(219)(250)(253)
(255)(257)(275)(276)(280)(282)

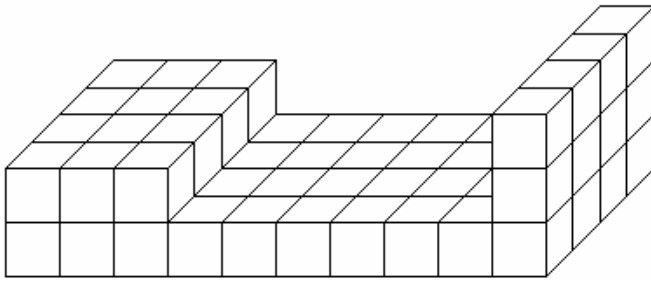
(284)(286)(291)(292)(296)(299)(302)(305)(315)(316)(318)(320)(321)(322)(323)(324)(325)(326)
共 49 個

(三八) 編號：43111



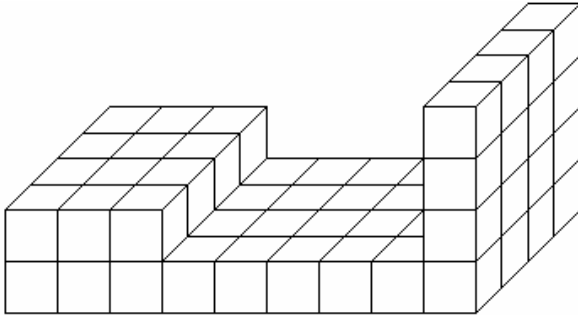
(18)(34)(119)(216)(219)(276)(284)
(286)(292)(302)(305) 共 11 個

(三九) 編號：43112



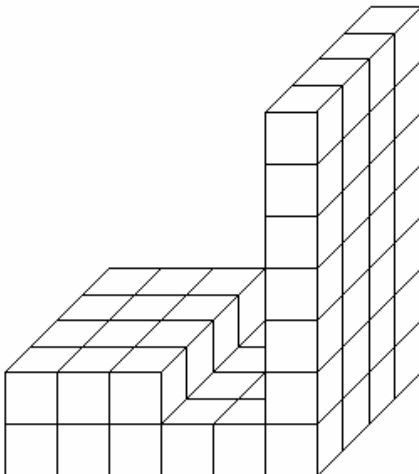
共 3 個
(18)(154)(156)

(四十) 編號：43113



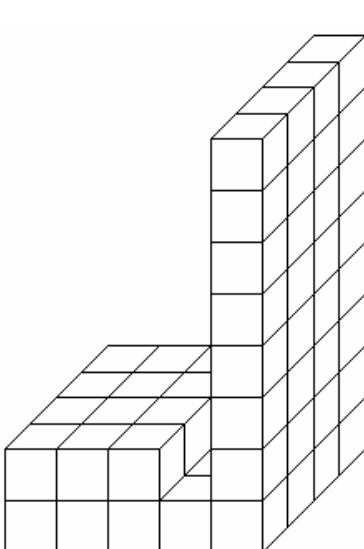
(57)(60)(115)(119)(275)(276)(280)(282)
(284)(286)(291)(292)(296)(299)(302)(305)
共 16 個

(四一) 編號：43116



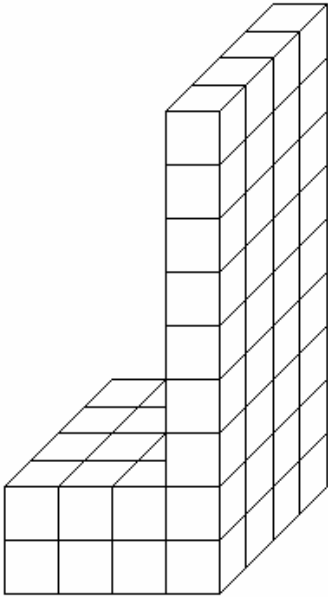
(34)(49)(51)(105)(106)(150)(154)(156)(159)(160)(216)(219)
(250)(253)(258)(257)(318)(320)(321)(322)(323)(324)(325)
(326)(327) 共 25 個

(四二) 編號：43117



(49)(191)(193)(196)(200)(315)(316)(318)(320)(323)(324)
共 11 個

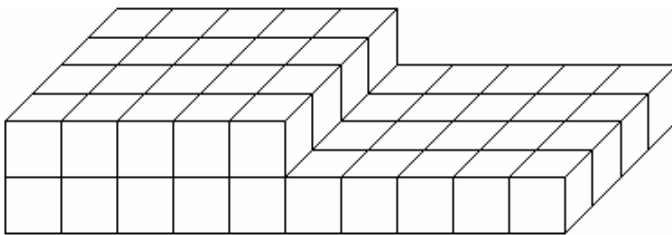
(四三) 編號：43118



(115)(119)

共 2 個

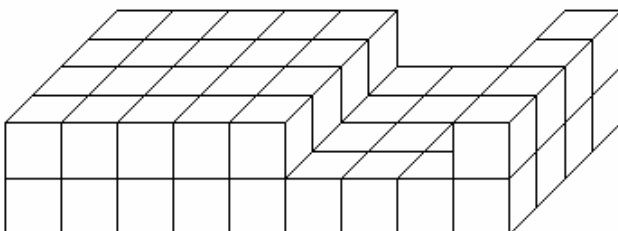
(四四) 編號：45100



共 40 個

(329)(330)(331)(332)(333)(334)(335)(336)(337)(338)(339)(340)(341)(342)(343)(344)(345)(346)
 (347)(348)(349)(350)(351)(352)(353)(354)(355)(356)(357)(358)(359)(360)(361)(362)(363)(364)
 (365)(366)(367)(368)

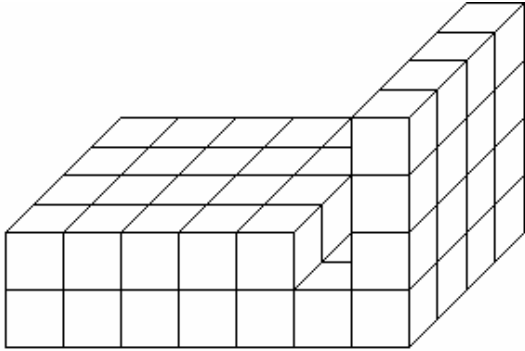
(四五) 編號：45111



共 8 個

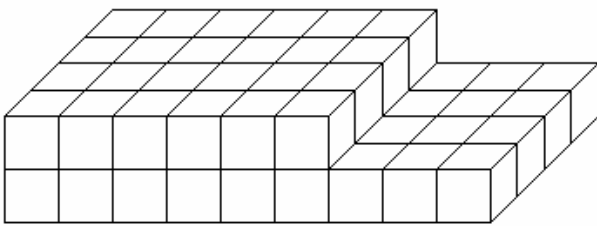
(330)(332)(335)(337)(359)(362)(365)(367)

(四六) 編號：45113



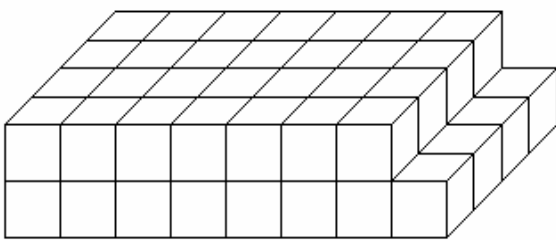
(330)(331)(332)(334)(335)(336)(337)(355)(356)(357)(
358)(359)(360)(361)(362)(363)(365)(366)
(367) 共 19 個

(四七) 編號：46100



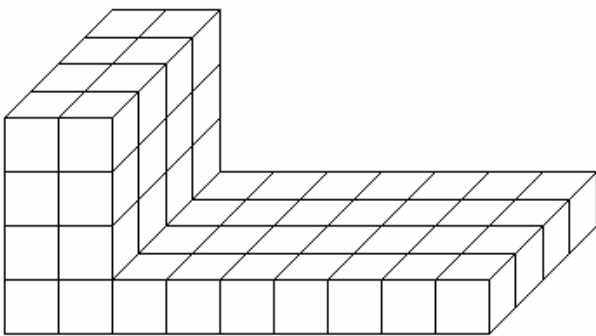
(343)(344)(345)(346)(351)(352)(353)(354)
共 8 個

(四八) 編號：47100



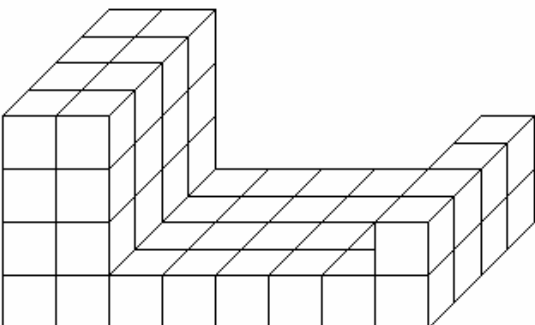
(5)(41)(48)(49)(52)(53)(127)(128)(129)(130)
(131)(132)(234)(308)(313)(323)(324) 共 17 個

(四九) 編號：42300



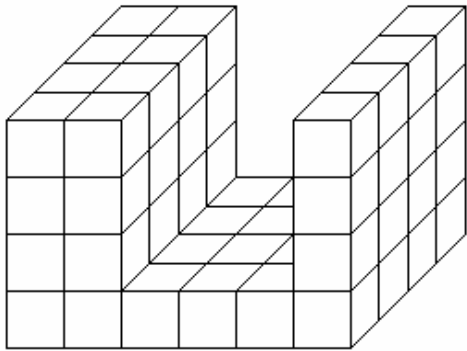
(115)(118)(119) 共 3 個

(五十) 編號：42311



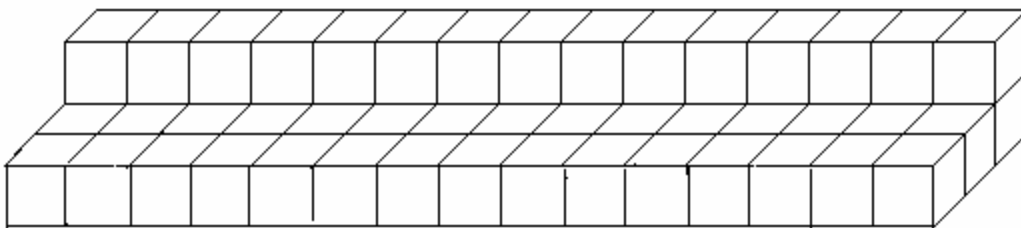
(119)
共 1 個

(五一) 編號：42313



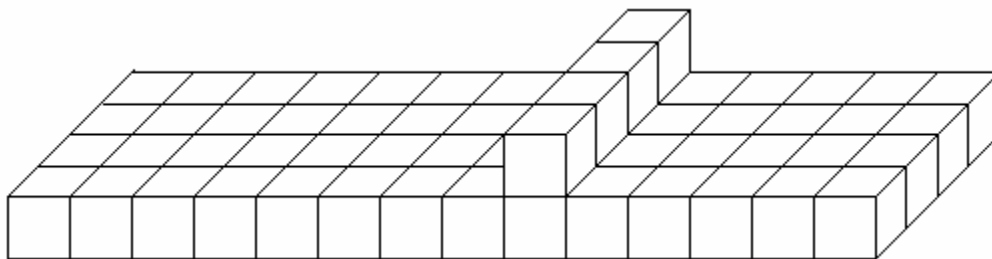
(115)(118)(119) 共 3 個

(五二) 2X3X15



(267)(268)(269) 共 3 個

(五三) 2X4X14



(343)(344)(345)(346)(351)(352)(353)(354) 共 8 個

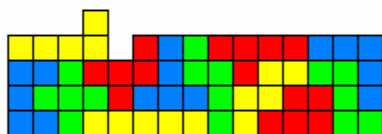
陸、討論

在我們研究 4X15 的時候，發現它可以從 2D 轉變成 3D，這是我們從未研究過的，緊接著我們又再度發現 3D 圖形的變化竟然數以萬計，雖然有些圖形很美，有些圖形很值得研究，但圖形實在太多了，我們只能就我們能力所及做研究，所以我們就只有研究其中的一點點。以下是我們的心得：

- (一) 積木的形體和排法沒有一定的規律。
- (二) 所有 4X15 的 2D 平面圖形都可以變成立體圖形。
- (三) 在尋找將 2D 變 3D 的過程中，發現原本畫的 2D 平面圖形有一部份編號是錯誤的，所以必須再重頭做起，因一時的小疏忽可能造成事倍功半的麻煩。
- (四) 在解題當中如果一時找不出答案，可以從另一個角度想想看，會有意想不到的收穫。

- (五) 利用數個積木，構成的對稱組合，將其歸類在一起，可以快速的找出所需的答案。
- (六) 發現 4 X15 的立體圖形也不一定只有 4X15 可以排出來，也可以用其他方式排出相同的圖形。

例如：41300，也可以由下圖排出，但它不是 4X15。



- (七) 另外發現 3X20 的 2 個答案都可以排出 3X3X9 中空柱體，而 Steve Strickland 資料認為只有一個答案。
- (八) 尋找條件越多的立體圖形時，只要知道其中的關係，就可以利用其他有相同條件的立體圖形來找它們的交集，可以讓效率加倍。

柒、結論

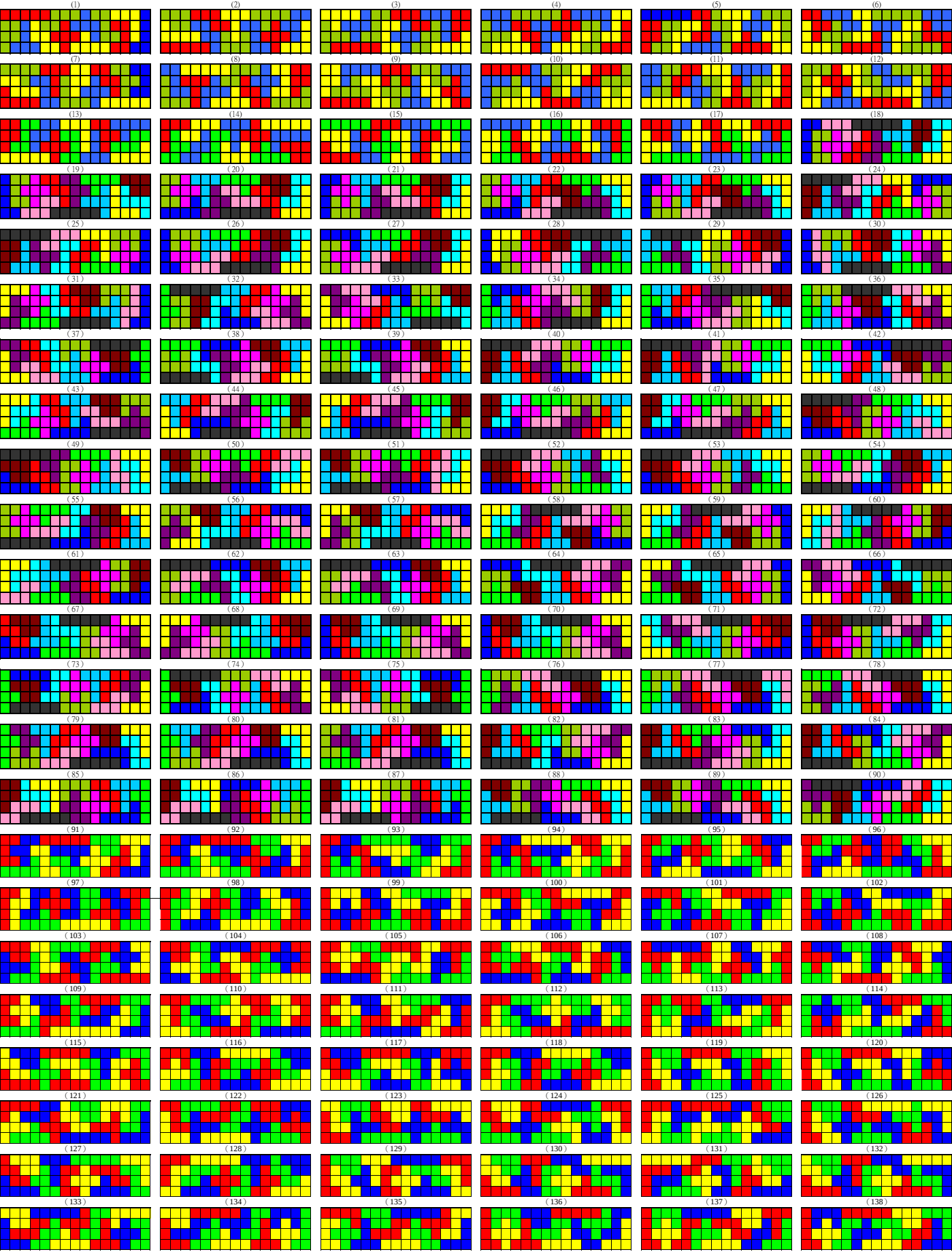
五元方格積木(pentomino)是組合數學的其中之一，正因為如此，它的變化更顯得多樣，不管是平面的 8X8 圖形，或者是把 4X15 的 2D 圖形變成 3D 立體圖形，還是排出各種立體的形狀... ..都令我們好奇不已！

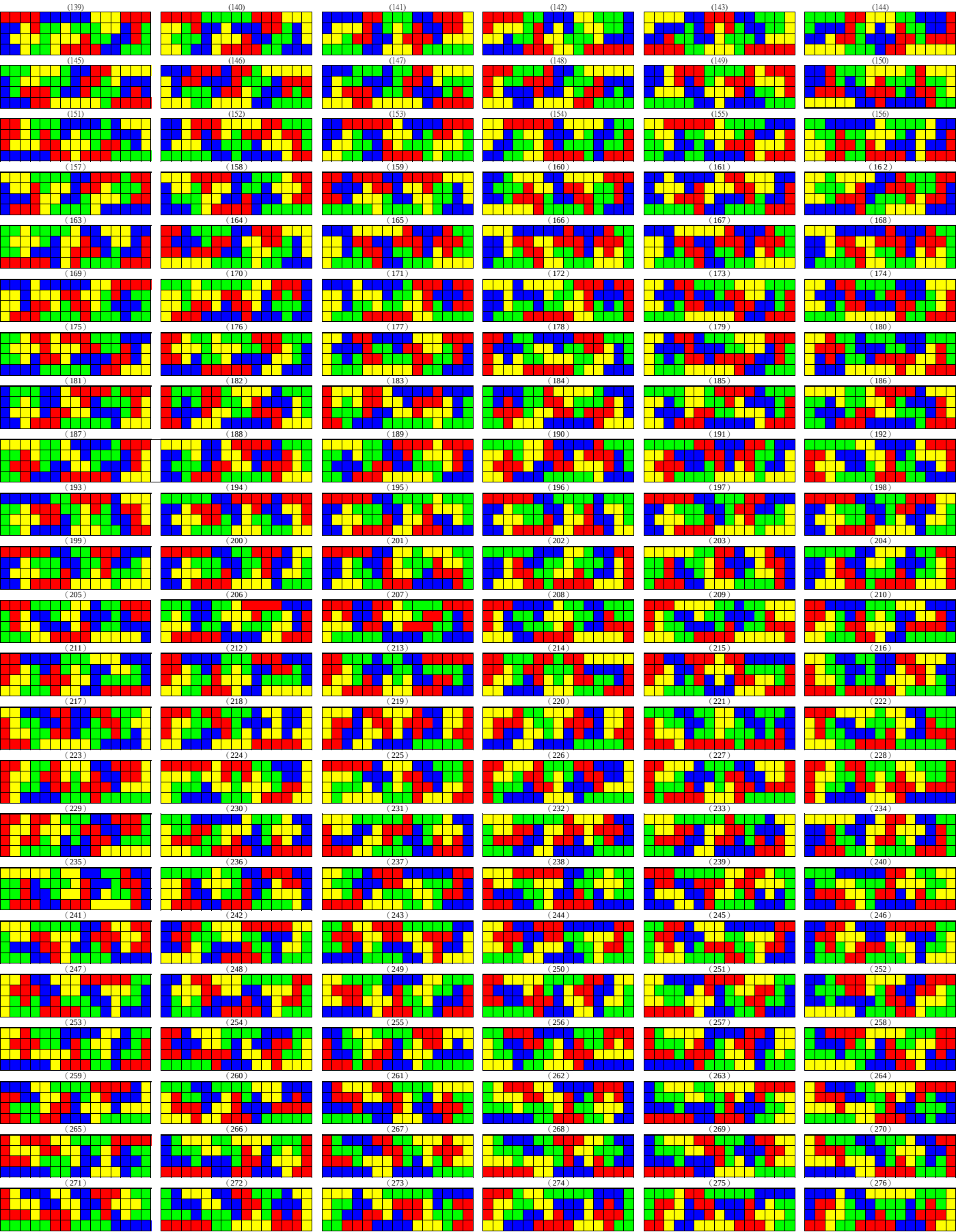
但是，研究積木並不簡單，因為它是一種看起來沒有規律，但在某些部分又藏有少許規律的東西，我們想嘗試找出其中的規律，因此需要一些基本的概念、方法和手腦的應用，如果一個角度想不出來，就換第二個角度想想到底該怎麼排出來。還好在研究的路途中，有電腦的幫助，以及同伴們的集思廣益，互補有無，才能將困難一一克服，否則，縱使個人再怎麼努力，也弄不出個所以然來。

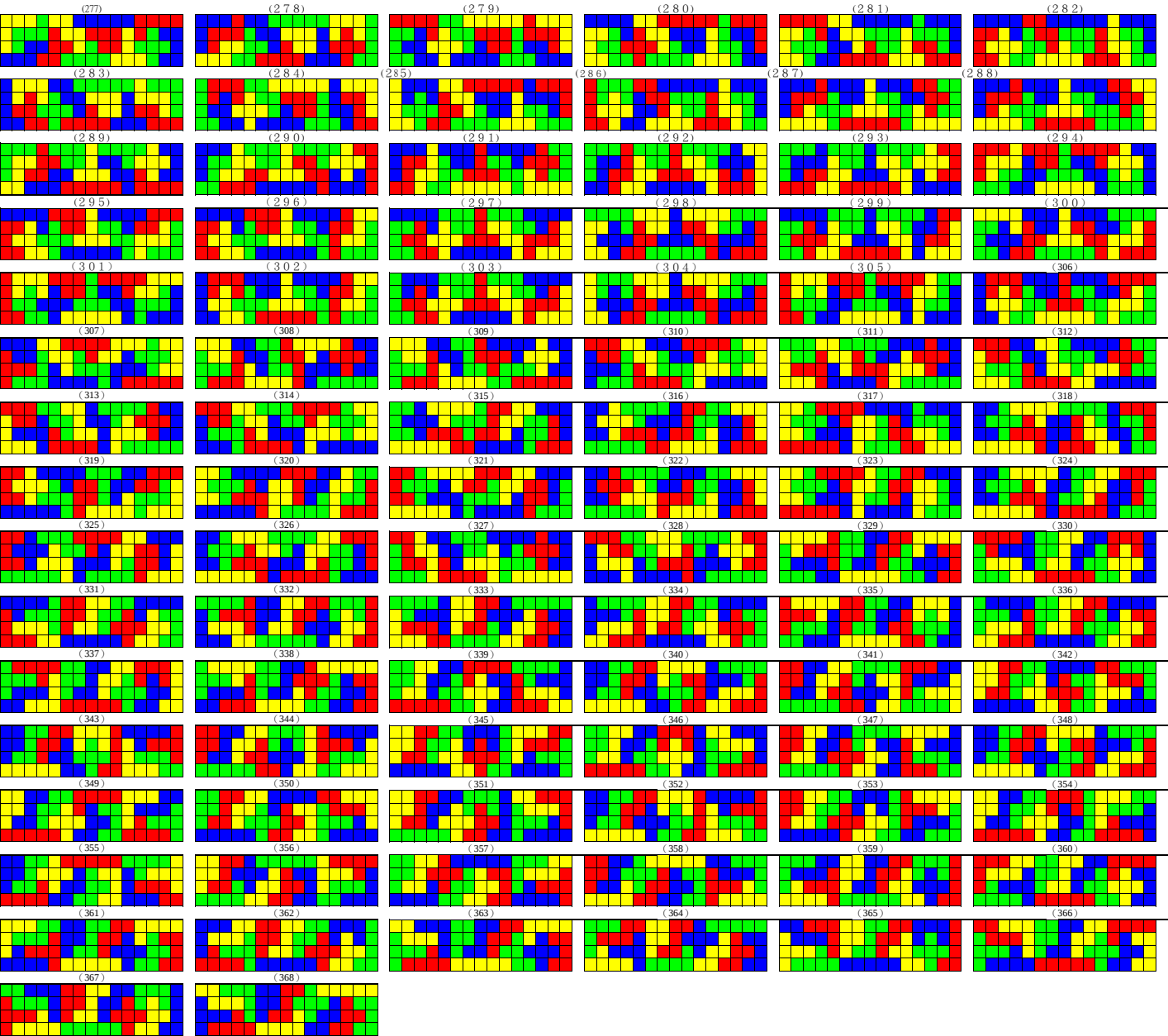
有一句話說：「萬丈高樓平地起。」雖然研究積木十分辛苦，但是，只要我們再更加把勁，一定會成功的！
(爲了環保我們採雙面印刷)

捌、參考資料

1. 王登傳 數學遊戲大觀第三集 再版 高雄 前程出版社 第 147 頁~第 151 頁 91 年 9 月
2. 許永山 五元方格初探 積木附贈光碟
3. <http://mathworld.wolfram.com/Pentomino.html>
4. <http://www.snaffles.demon.co.uk/pentanomes/pentanomes.html>







中華民國第四十五屆中小學科學展覽會
評 語

國小組 數學科

080411

舞動奇『積』-探討五元方格 4×15 的 3D 變化

臺中市西區大勇國民小學

評語：

本研究嘗試將幾種五元方格排出的 368 種長方形(4×15)轉變成立體圖形，精神可嘉，使用分類尋找方法，將問題簡化，從討論中已看出了努力的結果，但還有一些繼續探討的空間，再加油。