

中華民國第四十五屆中小學科學展覽會
作品說明書

國小組 數學科

佳作

080410

九尾謎咒

臺南市中區進學國民小學

作者姓名：

小六 林冠宇 小六 黃冠維 小六 謝孟成

小六 凌嘉蔚

指導老師：

曾大衛 陳緯匡

中華民國第 四十五 屆中小學科學展覽會
作品說明書

科 別：數學科

組 別：國小組

作品名稱：九尾謎咒

關 鍵 詞：撲克牌、9'er、單人遊戲（最多三個）

編 號：

九尾謎咒

摘要

在撲克牌遊戲中，我們選擇了一個單人撲克牌遊戲，找尋在這 40 張牌中迷人的規律。遊戲中發現要玩出一個結果似乎要花費很久的時間，並且也很容易失敗，所以我們簡化遊戲規則，讓完成的牌組不再循環，剩餘牌再重新排起。規則簡化後，不僅更快完成，並發現從中可找出最簡化的結果，40 張牌可找出 13 組牌組，還剩一張固定剩餘牌 3。接著我們討論出三種方法來觀察遊戲所遵循的規則，第三種方法可以找出一個規律，讓我們確定此遊戲的剩餘牌為 3。

得到遊戲規律後，我們試著以八尾來做推論，並試著將規律推測至所有的數，發現過了五以後，就不可能出現剩餘牌。我們很高興，以後這個遊戲可以不用侷限在九尾了，可以換作八尾、七尾，甚至只有一種可能的五尾。

壹、 研究動機

在下課時間與同學玩著新學的撲克牌遊戲，發現此撲克牌遊戲有著神奇的秘密，使得玩出來的結果皆為同一個數 3。於是便藉由這次的科展活動，討論這個遊戲的神秘之處，看看是什麼原因使得最後一張為 3。

在第十二冊的數學課本的第九單元”式子與解”，老師有教到如何列式子來求得我們想要的數，恰好派的上用場。雖然有一些未知數，不過我們用推測的方式把有可能的答案算出來，可以說是學以致用！

貳、 研究目的

- 一、找出此遊戲的結果數字
- 二、找出此遊戲的規律
- 三、研究是否可以推論到其他數字

參、 研究設備及器材

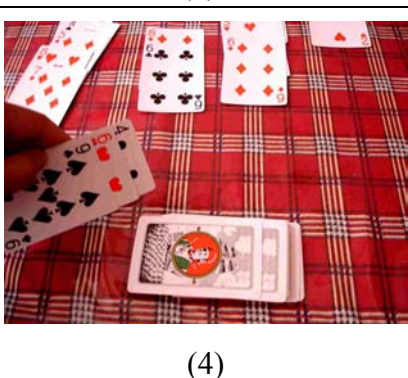
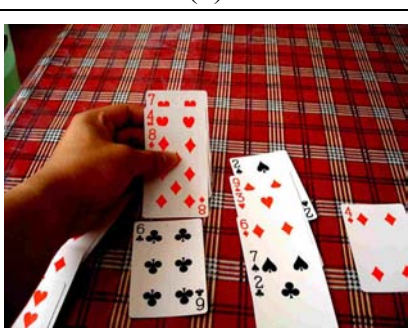
四副撲克牌、紙和筆，外加四顆小腦袋

肆、 研究過程與方法

遊戲規則

1. 挑出數字 1~10，四種花色共 40 張。
2. 依序由左而右，一張張排出，排至第四張後,回到第一排。
3. 持續排出 ,至同一排連續三張加起是 9,19,29 的數字(同一排最上面的一張可與最下面的兩張組合成一組,最上面兩張亦可與最下面一張組合)。
4. 成功的排組放回牌堆，再次循環。
5. 最後會剩下一張牌($40-3 \times 13=1$ 或 $40+3 \times a-3 \times (a+13)=1$)。

6. 若是到最後牌已用完，即宣告失敗。
7. 若只剩最後一張牌，則此張牌會是固定為一數字 3。
8. 或最後剛好完成，即沒有剩牌，則排組中最上面那張也必定固定為數字 3。

(1)			
(2)			
(3-1)			
(3-2)			
(3-3)			

(4)

(4)

一、研究問題：

- (一) 此遊戲結果為何？
- (二) 是否有規律來找出結果數字？
- (三) 是否可以用找出來的規律來推論其他規則（例：8尾）

二、研究方法與結果：

- (一) 問題一：此遊戲結果為何？

解決方法 1：實際排出結果

1．實驗結果：

- (1) 四人開始各自遊戲，第一個小時內兩人失敗，兩人成功
- (2) 兩人都於第四次時成功
- (3) 一位是剛好只剩一張 3，另一位剛好排完，則發現最上面的那張恰好為 3

實驗一成功數據（1－1）

10,10,9	4,1,4	7,4,8	6,8,5	7,1,1	3,3,3	6,10,3,	6,5,8	2,7,10
5,2,2	9,9,1	6,9,4	10,9,10	7,4,8	8,4,7	5,6,8	1,7,1	3,3,3
2,1,6	10,5,4							

小計：三張組合為 2 9 者有 2 組 1 9 者有 1 1 組 9 者有 7 組

實驗一成功數據（1－2）

8,6,5	5,2,2	3,9,7	7,3,9	5,8,6	1,10,8	1,6,2	6,3,10	7,2,10
1,3,5	9,4,6	9,5,5	1,8,10	6,1,2	4,3,2	6,5,8	9,3,7	4,10,5
10,8,1	1,6,2	3,3,3	4,6,9	4,7,8	2,2,5	7,7,5	2,7,10	10,5,4
9,8,2	3,3,3	9,4,6	4,1,4	5,2,2	7,7,5	8,1,10	10,2,7	6,5,8
10,10,9	1,6,2	8,7,4	3,3,3	6,4,9	6,4,9	5,1,3	9,8,2	7,7,5
10,8,1	2,7,10	6,5,8	10,4,5	1,6,2	2,7,10	3,3,3,	9,1,9	4,6,9
4,4,1	8,6,5							

小計：三張組合為 2 9 者有 1 組 1 9 者有 3 8 組 9 者有 1 7 組

2．研究討論

- (1) 失敗原因討論

- i. 有牌組組成卻沒有被發現，導致沒有足夠的牌循環使用。
- ii. 恰巧都沒有可拿起來的牌組。

- (2) 改良方式

- i. 兩人一組，一人排，另一人觀察並紀錄。
- ii. 如果將以完成的牌組，放置一旁，不加入循環，剩餘的牌再重新排起，結果如何？

解決方法 2：簡化遊戲規則(不循環)

1．實驗結果：

- (1) 2 人第一次就成功，順利找出剩餘牌為 3

(2) 第三人於第二次成功，也找出剩餘牌為3

實驗二成功數據 (2-1)

10,3,6	7,10,2	10,4,5	5,9,5	10,1,8	1,2,6	7,1,1
7,4,8	8,6,5	2,3,4	9,4,6	2,8,9	3,9,7	

小計：三張組合為2 9 者有 0組 1 9 者有1 0組 9 者有 3 組

實驗二成功數據 (2-2)

6,4,9	7,10,2	3,5,1	8,7,4	6,2,1	1,2,6	5,1,3
8,8,3	5,4,10	6,4,9	10,10,9	8,2,9	5,7,7	

小計：三張組合為2 9 者有 1組 1 9 者有 8組 9 者有 4 組

實驗二成功數據 (2-3)

7,5,7	2,8,9	10,8,1	2,3,4	5,5,9	10,10,9	9,3,7
6,2,1	8,1,10	6,5,8	4,4,1	6,6,7	2,3,4	

小計：三張組合為2 9 者有 1組 1 9 者有 8組 9 者有 4 組

2 · 研究討論

(1) 不循環的結果有：2 9、1 9與9的組數共有1 3組

(2) 比原規則更容易出現結果，但是仍有失敗的情況，一些數字已使用完，造成一些比較大的數無法組合成2 9、1 9或9。

(二) 問題二：是否可以從遊戲規則中找出規律？

1 · 討論結果：

已知條件：

(1) 全部牌的總和為： $(1 + 2 + 3 \cdots + 10) \times 4 = 220$

(2) 依照使用簡化規則來遊戲發現，2 9、1 9與9三種組數共為1 3組

(3) 2 9這一組最多只有2組，因為構成2 9的數為 $10 + 10 + 9$

(4) 一副牌最多只有4張1 0，所以2 9這組最多只有2組

(5) 結果為3

2 · 解決方法

(1) 方法一（全部總和除以三組總和）

$$9 + 19 + 29 = 57$$

$$220 \div 57 = 3 \dots 49$$

解釋：9、1 9、2 9各3組，無法除盡

(2) 方法二 (全部總和除以各組數)

$$220 \div 9 = 24 \dots 4$$

$$220 \div 19 = 11 \dots 11$$

$$220 \div 29 = 7 \dots 19$$

解釋：全部以 9 或 19 或 29 來組合，仍有餘數，無法解決

(3) 方法三 (全部的牌總和扣掉剩餘牌 3，再分析其組合)

$$\text{全部牌總和} : (1 + 2 + 3 \dots + 10) \times 4 = 220$$

$$\text{扣掉剩餘牌} : 220 - 3 = 217$$

我們可從 217 為 9、19、29 各組的總和來分析得知

$$\Rightarrow 217 = 29 \times a + 19 \times b + 9 \times c$$

$$\Rightarrow a \text{ 為 } 29 \text{ 的組數} \quad b \text{ 為 } 19 \text{ 的組數} \quad c \text{ 為 } 9 \text{ 的組數}$$

又

$$29 \text{ 最多有兩組、} a + b + c = 13 \text{ 組}$$

所以

我們可以從 29 有兩組、一組、零組來推論

類型 1：29 有兩組

19 的組數加 9 的組數會剩下 $13 - 2 = 11$ 組

	29	19	9	和
	2	0	11	157
	2	1	10	167
	2	2	9	177
	2	3	8	187
	2	4	7	197
	2	5	6	207
	2	6	5	217
	2	7	4	227
	2	8	3	237
	2	9	2	247
	2	10	1	257
	2	11	0	267

發現在 29 兩組的情況下，19 與 9 分別為六組、五組時，可符合和為 217

類型 2：29 有一組

19 的組數加 9 的組數會剩下 $13 - 1 = 12$ 組

29	19	9	和
1	0	12	137
1	1	11	147
1	2	10	157
1	3	9	167
1	4	8	177
1	5	7	187
1	6	6	197
1	7	5	207
1	8	4	217
1	9	3	227
1	10	2	237
1	11	1	247
1	12	0	257

發現在 2 9 一組的情況下，1 9 與 9 分別為八組、四組時，可符合和為 2 1 7

類型 3：2 9 有零組

1 9 的組數加 9 的組數會剩下 $13 - 0 = 13$ 組

29	19	9	和
0	0	13	117
0	1	12	127
0	2	11	137
0	3	10	147
0	4	9	157
0	5	8	167
0	6	7	177
0	7	6	187
0	8	5	197
0	9	4	207
0	10	3	217
0	11	2	227
0	12	1	237
0	13	0	247

發現在 2 9 零組的情況下，1 9 與 9 分別為 1 0 組、3 組時，可符合和為 2 1 7

3．研究討論

(1) 方法一與方法二無法找出規律性

(2) 在 2 9 各為兩組、一組與零組的情況下，我們可以得到剛好符合 2 1 7 的和

(3) 對照之前實驗結果，算出來的數據與之前紀錄符合

(4) 由此得知，剩餘的此牌，數字為 3

(三) 是否可以用找出來的規律來推論其他規則？(8 尾或其他)

由問題二的方法三，我們可以知道 2 1 7 是由 $2\ 2\ 0 - 3$ 而得

不過由於 3 是已知數，我們可以發現，若是換作 8 尾，其結果可以使用上述的方式來尋找嗎？

解決方法 1

分析問題二的方法三，我們觀察到

2 1 7 為 2 2 0 減掉 3 (已知)，再由 2 9、1 9 與 9 的各組數組合來證明

$$2\ 2\ 0 - 3 = 2\ 9 \times a + 1\ 9 \times b + 9 \times c$$

我們假設

八尾也能找出一張剩餘牌，其數字為 A

則我們可以寫下

$$2\ 2\ 0 - A = 2\ 8 \times a + 1\ 8 \times b + 8 \times c$$

所以

$$A = 2\ 2\ 0 - 2\ 8 \times a + 1\ 8 \times b + 8 \times c = 2\ 2\ 0 - \text{和}$$

而 A 為 1~10 中某一數，

只要 A 符合介於 1~10 之間的數，即為我們所要的數字

又 2 8 這組最多也為兩組 (原因同九尾)

所以我們可以從 2 8 有兩組來推論

類型 1：2 8 有兩組

1 8 的組數加 8 的組數會剩下 $1\ 3 - 2 = 1\ 1$ 組

28	18	8	和	220-和
2	0	11	144	76
2	1	10	154	66
2	2	9	164	56
2	3	8	174	46
2	4	7	184	36
2	5	6	194	26
2	6	5	204	16
2	7	4	214	6
2	8	3	224	-4
2	9	2	234	-14
2	10	1	244	-24
2	11	0	254	-34

發現在 2 8 兩組的情況下，1 8 與 8 分別為七組、四組時，可符合 A 為 6

類型 2：2 8 有一組

1 8 的組數加 8 的組數會剩下 $13 - 1 = 12$ 組

28	18	8	和	220-和
1	0	12	124	96
1	1	11	134	86
1	2	10	144	76
1	3	9	154	66
1	4	8	164	56
1	5	7	174	46
1	6	6	184	36
1	7	5	194	26
1	8	4	204	16
1	9	3	214	6
1	10	2	224	-4
1	11	1	234	-14
1	12	0	244	-24

發現在 2 8 一組的情況下，1 8 與 8 分別為九組、三組時，可符合 A 為 6

類型 3：2 8 有零組

1 8 的組數加 8 的組數會剩下 $13 - 0 = 13$ 組

28	18	8	和	220-和
0	0	13	104	116
0	1	12	114	106
0	2	11	124	96
0	3	10	134	86
0	4	9	144	76
0	5	8	154	66
0	6	7	164	56
0	7	6	174	46
0	8	5	184	36
0	9	4	194	26
0	10	3	204	16
0	11	2	214	6
0	12	1	224	-4
0	13	0	234	-14

發現在 2 8 零組的情況下，1 8 與 8 分別為 10 組、3 組時，可符合 A 為 6

研究討論

(1) 用在九尾的規律算法，也能在八尾使用

(2) 八尾的結果在 2 8 分別為兩組、一組與零組時，有數字為 6 的剩餘牌

伍、 結論

一、此遊戲有一固定結果，其剩餘牌為數字 3。

二、此遊戲並不一定每場都能順利完成，也會有失敗的時候。

三、可以從簡化的遊戲規則推論出一樣的結果。

(一) 可得 9、19、29 共 13 組

(二) 結果剩餘的牌亦為 3

(三) 也會有失敗，但是採用簡化規則比較容易成功

四、我們可以找出此遊戲的規則為

(一) $220 - 3 = 217 = 29 \times a + 19 \times b + 9 \times c$

a 為 29 的組數 b 為 19 的組數 c 為 9 的組數

(二) a 最大為 2，也就是 29 最多為兩組

(三) 依照 29 的組數 (0、1、2)，19 與 9 有可能共為 13 組、12 組與 11 組

(四) 當 29 為兩組時，19 與 9 分別為六組、五組

(五) 當 29 為一組時，19 與 9 分別為八組、四組

(六) 當 29 為零組時，19 與 9 分別為十三組、零組

五、由問題三，我們可以將九尾的規律，推論到八尾，可得出用 28、18 與 8 的組合來進行遊戲，可得到剩餘牌為數字 6

六、我們亦可將此規則推論至其餘數字

可得以下結果

尾數	剩餘牌數字	各組組數			*代表各尾數
		2 *	1 *	*	
九尾 (共三組)	3	2	6	5	
	3	1	8	4	
	3	0	10	3	
八尾 (共三組)	6	2	7	4	
	6	1	9	3	
	6	0	11	2	
七尾 (共三組)	9	2	8	3	
	9	1	10	2	
	9	1	10	2	
六尾 (共二組)	2	2	10	1	
	2	1	12	0	
五尾	5	2	11	0	
四尾	無	—	—	—	
三尾	無	—	—	—	
二尾	無	—	—	—	
一尾	無	—	—	—	

附件一

七尾與六尾的運算結果 (A 為剩餘牌數字)

27	17	7 和	220-和 (A)		26	16	6 和	220-和 (A)	
2	0	11	131	89	2	0	11	118	102
2	1	10	141	79	2	1	10	128	92
2	2	9	151	69	2	2	9	138	82
2	3	8	161	59	2	3	8	148	72
2	4	7	171	49	2	4	7	158	62
2	5	6	181	39	2	5	6	168	52
2	6	5	191	29	2	6	5	178	42
2	7	4	201	19	2	7	4	188	32
2	8	3	211	9	2	8	3	198	22
2	9	2	221	-1	2	9	2	208	12
2	10	1	231	-11	2	10	1	218	2
2	11	0	241	-21	2	11	0	228	-8
1	0	12	111	109	1	0	12	98	122
1	1	11	121	99	1	1	11	108	112
1	2	10	131	89	1	2	10	118	102
1	3	9	141	79	1	3	9	128	92
1	4	8	151	69	1	4	8	138	82
1	5	7	161	59	1	5	7	148	72
1	6	6	171	49	1	6	6	158	62
1	7	5	181	39	1	7	5	168	52
1	8	4	191	29	1	8	4	178	42
1	9	3	201	19	1	9	3	188	32
1	10	2	211	9	1	10	2	198	22
1	11	1	221	-1	1	11	1	208	12
1	12	0	231	-11	1	12	0	218	2
0	0	13	91	129	0	0	13	78	142
0	1	12	101	119	0	1	12	88	132
0	2	11	111	109	0	2	11	98	122
0	3	10	121	99	0	3	10	108	112
0	4	9	131	89	0	4	9	118	102
0	5	8	141	79	0	5	8	128	92
0	6	7	151	69	0	6	7	138	82
0	7	6	161	59	0	7	6	148	72
0	8	5	171	49	0	8	5	158	62
0	9	4	181	39	0	9	4	168	52
0	10	3	191	29	0	10	3	178	42
0	11	2	201	19	0	11	2	188	32
0	12	1	211	9	0	12	1	198	22
0	13	0	221	-1	0	13	0	208	12

五尾與四尾的運算結果（A 為剩餘牌數字）

25	15	5	和	220-和（A）	24	14	4	和	220-和（A）
2	0	11	105	115	2	0	11	92	128
2	1	10	115	105	2	1	10	102	118
2	2	9	125	95	2	2	9	112	108
2	3	8	135	85	2	3	8	122	98
2	4	7	145	75	2	4	7	132	88
2	5	6	155	65	2	5	6	142	78
2	6	5	165	55	2	6	5	152	68
2	7	4	175	45	2	7	4	162	58
2	8	3	185	35	2	8	3	172	48
2	9	2	195	25	2	9	2	182	38
2	10	1	205	15	2	10	1	192	28
2	11	0	215	5	2	11	0	202	18
1	0	12	85	135	1	0	12	72	148
1	1	11	95	125	1	1	11	82	138
1	2	10	105	115	1	2	10	92	128
1	3	9	115	105	1	3	9	102	118
1	4	8	125	95	1	4	8	112	108
1	5	7	135	85	1	5	7	122	98
1	6	6	145	75	1	6	6	132	88
1	7	5	155	65	1	7	5	142	78
1	8	4	165	55	1	8	4	152	68
1	9	3	175	45	1	9	3	162	58
1	10	2	185	35	1	10	2	172	48
1	11	1	195	25	1	11	1	182	38
1	12	0	205	15	1	12	0	192	28
0	0	13	65	155	0	0	13	52	168
0	1	12	75	145	0	1	12	62	158
0	2	11	85	135	0	2	11	72	148
0	3	10	95	125	0	3	10	82	138
0	4	9	105	115	0	4	9	92	128
0	5	8	115	105	0	5	8	102	118
0	6	7	125	95	0	6	7	112	108
0	7	6	135	85	0	7	6	122	98
0	8	5	145	75	0	8	5	132	88
0	9	4	155	65	0	9	4	142	78
0	10	3	165	55	0	10	3	152	68
0	11	2	175	45	0	11	2	162	58
0	12	1	185	35	0	12	1	172	48
0	13	0	195	25	0	13	0	182	38

中華民國第四十五屆中小學科學展覽會
評 語

國小組 數學科

佳作

080410

九尾謎咒

臺南市中區進學國民小學

評語：

本作品從九尾出發，探討各種尾數之最後牌號。並輔以簡單的教學式子予以驗證，內容完整。現場表現很不錯。雖然本作品深度普通，但仍是一分值得嘉許的作品。