

中華民國第四十五屆中小學科學展覽會
作品說明書

國小組 數學科

第三名

080408

翻出一片天

臺中縣沙鹿鎮公明國民小學

作者姓名：

小六 蘇百毅 小六 楊久霆 小六 陳姿穎
小五 林宜靚 小五 葉書豪 小六 洪綉茹

指導老師：

張淑怡 陳雅芬

中華民國第四十五屆中小學科學展覽會

作品說明書

科 別： 數 學 科

組 別： 國 小 組

作品名稱： 翻 出 一 片 天

關 鍵 詞： 翻杯遊戲、怎樣解題、奇偶數

編 號：

翻 出 一 片 天

壹、研究動機

去年，學長、姊找我和幾個同學一起做科展，在過程中我愈做愈有趣。今年我決定再接再厲，而且爲了延續這項良好的活動，除了找同學外我還找了學弟、學妹們一起來做科展，我以去年的心得跟他們分享，他們聽完之後，很感興趣，我們便開始找題目來做。這時數學課正好在上怎樣解題的單元，老師出了一個翻杯子的題目：『有 7 個杯口朝上的杯子，每一次翻動 4 個不同的杯子，要翻幾次才能把所有的杯子都翻成杯口朝下？』我們一開始拿了幾個漱口杯做做看。想不到，把我們搞得暈頭轉向的，好難啊！但此時不服輸的細胞告訴我們不要放棄！我便跟學弟、妹們說：在研究的過程中遇到瓶頸是常有的事情，不需要感到驚訝。有人提議說，既然遇到不會的，那就簡化問題吧！所以我們開始以下的研究過程！

貳、研究目的

- 一、我們發現最初的題目，7 個杯子一次翻 4 個，無法成功，於是嘗試各種組合情形，並分類出可成功的組合。
- 二、我們在所有可成功的例子中尋找規則，看可不可以用最少的次數完成。

參、研究器材

在這次活動中我們使用的器材有：小漱口杯、紙、筆。

肆、研究過程

一、【第一階段】：瞎子摸象

原來的題目我們一直找不到解答，老師也告訴我們答案是無法翻出，但我們還是感到很疑惑，是只有這一組特殊組合不能成功的翻出嗎？還是之中藏有其他玄機呢？爲了尋求「真理」，我們決定抽絲剝繭的對這種題型加以分析。首先，我們把數字縮小，寫出所有組合並整理它們的規則，希望可以從中找到答案。

在開始之前，爲了使大家都能遵守同樣的規則，我們協定了幾個翻動的規則：

1. 同一次翻動中，翻動的必須是相異的杯子。

- 翻動的數量（以下簡稱翻量）必需小於杯子的數量（以下簡稱杯數）。
- 不論杯數是多少，翻量是 1 時一定能成功，所以不再討論。

訂好遊戲規則之後我們便開始活動，我們決定先用漱口杯實際翻翻看，杯數 8 以內的所有組合情形，並且把過程記錄下來，看看會不會有什麼驚人的發現。

（一）杯數 3 的情形

- 當杯數為 3，翻量 2 時，這種組合情況永遠沒辦法把 3 個原本開口朝上的杯子成功的翻成朝下。

開口朝上的記錄成「+」，開口朝下的記錄成「-」。

翻法	次數	正數 (開口朝上)	反數 (開口朝下)	不能成功 NO !
＋、＋、＋	0	3	0	
－、－、＋	1	1	2	
－、＋、－	2	1	2	

在這個組合中，因為 1 次要翻動 2 個，如果正數動 1 個，反數動 1 個，還是回到正數為 1 反數為 2；如果 2 個都動反數，就回到原本題目的正的 3 個反的 0 個，所以永遠無法成功。

（二）杯數 4 的情形

- 當杯數 4，翻量 2 時，可以成功。

翻法	次數	正數 (開口朝上)	反數 (開口朝下)	可以成功 YES !
＋、＋、＋、＋	0	4	0	
－、－、＋、＋	1	2	2	
－、－、－、－	2	0	4	

- 當杯數 4，翻量 3 時，可以成功。

翻法	次數	正數 (開口朝上)	反數 (開口朝下)	可以成功 YES !
＋、＋、＋、＋	0	4	0	
－、－、－、＋	1	1	3	
－、＋、＋、－	2	2	2	
＋、－、＋、＋	3	3	1	
－、－、－、－	4	0	4	

(三) 杯數 5 的情形

1. 當杯數 5，翻量 2 時，不能成功。

翻法	次數	正數 (開口朝上)	反數 (開口朝下)	不能成功 NO !
＋、＋、＋、＋、＋	0	5	0	
＋、＋、＋、－、－	1	3	2	
＋、－、－、－、－	2	1	4	
－、＋、－、－、－	3	1	4	

2. 當杯數 5，翻量 3 時，可以成功。

翻法	次數	正數 (開口朝上)	反數 (開口朝下)	可以成功 YES !
＋、＋、＋、＋、＋	0	5	0	
＋、＋、－、－、－	1	2	3	
－、＋、＋、＋、－	2	3	2	
－、－、－、－、－	3	0	5	

3. 當杯數 5，翻量 4 時，不能成功。

翻法	次數	正數 (開口朝上)	反數 (開口朝下)	不能成功 NO !
＋、＋、＋、＋、＋	0	5	0	
＋、－、－、－、－	1	1	4	
－、＋、＋、＋、－	2	3	2	
＋、－、＋、－、＋	3	3	2	
－、＋、－、－、－	4	1	4	

(四) 杯數 6 的情形

1. 當杯數 6，翻量 2 時，可以成功。

翻法	次數	正數 (開口朝上)	反數 (開口朝下)	可以成功 YES !
＋、＋、＋、＋、＋、＋	0	6	0	
＋、＋、＋、＋、－、－	1	4	2	
＋、＋、－、－、－、－	2	2	4	
－、－、－、－、－、－	3	0	6	

2. 當杯數 6，翻量 3 時，可以成功。

翻法	次數	正數 (開口朝上)	反數 (開口朝下)	可以成功 YES !
＋、＋、＋、＋、＋、＋	0	6	0	
－、－、－、＋、＋、＋	1	3	3	
－、－、－、－、－、－	2	0	6	

3. 當杯數 6，翻量 4 時，可以成功。

翻法	次數	正數 (開口朝上)	反數 (開口朝下)	可以成功 YES !
＋、＋、＋、＋、＋、＋	0	6	0	
－、－、－、－、＋、＋	1	2	4	
－、＋、＋、＋、－、＋	2	4	2	
－、－、－、－、－、－	3	0	6	

4. 當杯數 6，翻量 5 時，可以成功。

翻法	次數	正數 (開口朝上)	反數 (開口朝下)	可以成功 YES !
＋、＋、＋、＋、＋、＋	0	6	0	
－、－、－、－、－、＋	1	1	5	
－、＋、＋、＋、＋、－	2	4	2	
＋、－、－、－、＋、＋	3	3	3	
－、＋、＋、－、－、－	4	2	4	
＋、－、＋、＋、＋、＋	5	5	1	
－、－、－、－、－、－	6	0	6	

(五) 杯數 7 的情形

1. 當杯數 7，翻量 2 時，不能成功。

翻法	次數	正數 (開口朝上)	反數 (開口朝下)	不能成功 NO !
＋、＋、＋、＋、＋、＋、＋	0	7	0	
＋、＋、＋、＋、＋、－、－	1	5	2	
＋、＋、＋、－、－、－、－	2	3	4	
＋、－、－、－、－、－、－	3	1	6	
＋、＋、＋、－、－、－、－	4	3	4	
＋、－、－、－、－、－、－	5	1	6	

2. 當杯數 7，翻量 3 時，可以成功。

翻法	次數	正數 (開口朝上)	反數 (開口朝下)	可以成功 YES !
＋、＋、＋、＋、＋、＋、＋	0	7	0	
＋、＋、＋、＋、－、－、－	1	4	3	
＋、－、－、－、－、－、－	2	1	6	
－、＋、＋、－、－、－、－	3	2	5	
－、－、＋、＋、＋、－、－	4	3	4	
－、－、－、－、－、－、－	5	0	7	

3. 當杯數 7，翻量 4 時，不能成功。

翻法	次數	正數 (開口朝上)	反數 (開口朝下)	不能成功 NO !
＋、＋、＋、＋、＋、＋、＋	0	7	0	
－、－、－、－、＋、＋、＋	1	3	4	
＋、－、－、－、－、－、－	2	1	6	
＋、＋、＋、＋、＋、－、－	3	5	2	
＋、＋、－、－、－、－、＋	4	3	4	
－、－、＋、＋、－、－、＋	5	3	4	

4. 當杯數 7，翻量 5 時，可以成功。

翻法	次數	正數 (開口朝上)	反數 (開口朝下)	可以成功 YES !
＋、＋、＋、＋、＋、＋、＋	0	7	0	
－、－、－、－、－、＋、＋	1	2	5	
－、－、＋、＋、＋、－、－	2	3	4	
＋、＋、－、＋、＋、＋、＋	3	6	1	
－、－、－、－、－、－、＋	4	1	6	
－、－、＋、＋、＋、＋、－	5	4	3	
＋、＋、＋、＋、－、－、＋	6	5	2	
－、－、－、－、－、－、－	7	0	7	

5. 當杯數 7，翻量 6 時，不能成功。

翻法	次數	正數 (開口朝上)	反數 (開口朝下)	不能成功 NO !
＋、＋、＋、＋、＋、＋、＋	0	7	0	
－、－、－、－、－、－、＋	1	1	6	
－、＋、＋、＋、＋、＋、－	2	5	2	
＋、－、－、－、－、＋、＋	3	3	4	
＋、＋、＋、＋、＋、－、－	4	5	2	
－、－、－、－、－、－、＋	5	1	6	

(六) 杯數 8 的情形

1. 當杯數 8，翻量 2 時，可以成功。

翻法	次數	正數 (開口朝上)	反數 (開口朝下)	可以成功 YES !
＋、＋、＋、＋、＋、＋、＋、＋	0	8	0	
＋、＋、＋、＋、＋、＋、－、－	1	6	2	
＋、＋、＋、＋、－、－、－、－	2	4	4	
＋、＋、－、－、－、－、－、－	3	2	6	
－、－、－、－、－、－、－、－	4	0	8	

2. 當杯數 8，翻量 3 時，可以成功。

翻法	次數	正數 (開口朝上)	反數 (開口朝下)	可以成功 YES !
＋、＋、＋、＋、＋、＋、＋、＋	0	8	0	
－、－、－、＋、＋、＋、＋、＋	1	5	3	
－、－、－、－、－、－、＋、＋	2	2	6	
－、－、－、－、＋、＋、－、＋	3	3	5	
－、－、－、－、－、－、－、－	4	0	8	

3. 當杯數 8，翻量 4 時，可以成功。

翻法	次數	正數 (開口朝上)	反數 (開口朝下)	可以成功 YES !
＋、＋、＋、＋、＋、＋、＋、＋	0	8	0	
＋、＋、＋、＋、－、－、－、－	1	4	4	
－、－、－、－、－、－、－、－	2	0	8	

4. 當杯數 8，翻量 5 時，可以成功。

翻法	次數	正數 (開口朝上)	反數 (開口朝下)	可以成功 YES !
＋、＋、＋、＋、＋、＋、＋、＋	0	8	0	
－、－、－、－、－、＋、＋、＋	1	3	5	
－、－、＋、＋、＋、－、－、＋	2	4	4	
＋、＋、－、－、＋、＋、－、＋	3	5	3	
－、－、－、－、－、－、－、－	4	0	8	

5. 當杯數 8，翻量 6 時，可以成功。

翻法	次數	正數 (開口朝上)	反數 (開口朝下)	可以成功 YES !
＋、＋、＋、＋、＋、＋、＋、＋	0	8	0	
－、－、－、－、－、－、＋、＋	1	2	6	
－、－、＋、＋、＋、＋、－、－	2	4	4	
＋、＋、－、－、＋、＋、＋、＋	3	6	2	
－、－、－、－、－、－、－、－	4	0	8	

6. 當杯數 8，翻量 7 時，可以成功。

翻法	次數	正數 (開口朝上)	反數 (開口朝下)	可以成功 YES !
＋、＋、＋、＋、＋、＋、＋、＋	0	8	0	
＋、－、－、－、－、－、－、－	1	1	7	
－、＋、＋、＋、＋、＋、＋、－	2	6	2	
＋、－、－、－、－、－、＋、＋	3	3	5	
－、＋、＋、＋、＋、－、－、－	4	4	4	
＋、－、－、－、＋、＋、＋、＋	5	5	3	
－、＋、＋、－、－、－、－、－	6	2	6	
＋、－、＋、＋、＋、＋、＋、＋	7	7	1	
－、－、－、－、－、－、－、－	8	0	8	

(七) 整理表格

我們依照以上的記錄，整理成下面表格。

杯數	每次翻量	能成功(○)；不能成功(×)
3	2	×
4	2	○
	3	○
5	2	×
	3	○
	4	×
6	2	○
	3	○
	4	○
	5	○
7	2	×
	3	○
	4	×
	5	○
	6	×
8	2	○
	3	○

杯數	每次翻量	能成功(○)；不能成功(×)
8	4	○
	5	○
	6	○
	7	○

這些實驗中，我們觀察表格發現：不成功的情況都是杯子數量奇數而且翻動數量偶數的情況。

二、【第二階段】：奇偶關係的假設與驗證

（一）【假設】

根據上面的發現，我們假設當杯數奇數、翻量偶數時，一定不會成功。

（二）【驗證】

我們找出許多組杯數為奇數、翻量是偶數的組合來實驗，結果發現真的都不能成功，於是很開心的跑去告訴老師，我們大家的大發現，但老師的回答讓我們陷入深思，老師說：「你們的假設可能是正確的，舉出的例子也都能符合你們的假設，但這些例子只是奇數對偶數的其中幾種組合，不代表所有奇數對偶數的組合，怎麼知道不會有特例呢？你們可不可以找到一個合理的解釋，讓所有的奇偶組合都適用。」

於是大家七嘴八舌的再度討論，學妹突然說：「我知道了！我想起國小 1 年級老師教我們的數學：1+1=2」，大家納悶的問，有什麼關係呢？學妹又說：「那就是奇數+奇數會=偶數呀！但如果奇數+奇數+奇數，還是奇數！」學長豁然開朗的說：「每一個杯子要翻成杯口向下，各自都需要翻動奇數次，如果有奇數個杯子，例如 3 個杯子，要全都翻成杯口朝下，總共要翻動（奇數+奇數+奇數）次才會成功，奇數+奇數+奇數，還是奇數！所以要總次數和也要是奇數次才會成功。可是如果一次翻動偶數個，例如一次翻動 2 個杯子，2+2+2+2……怎麼翻總次數和都還是偶數，不可能是奇數，所以不能成功。」

（三）歸納結果

經過大家熱烈的討論後，我們終於找到了合理的解釋，那就是：

當杯數是奇數，翻量是偶數時，
要翻成功的次數總合=奇數+奇數+奇數+……（奇數個奇數相加）=奇數，
但實際的翻量次數總合=偶數+偶數+……=偶數，
偶數≠奇數，所以無法成功。

同時我們也找到其他組合成功的合理解釋，那就是：

當杯數是奇數，翻量也是奇數時，

要翻成功的次數總合=奇數+奇數+奇數+.....（奇數個奇數相加）=奇數，

實際翻量次數總合=奇數+奇數+奇數+.....=奇數或偶數，

所以只要當實際翻量次數總合=奇數時，就有機會成功。

當杯數是偶數，翻量也是偶數時，

要翻成功的次數總合=奇數+奇數+奇數+奇數.....（偶數個奇數相加）=偶數，

實際翻量次數總合=偶數+偶數+.....=偶數，所以有機會成功

當杯數是偶數，翻量是奇數時，

要翻成功的次數總合=奇數+奇數+奇數+奇數.....（偶數個奇數相加）=偶數，

實際翻量次數總合=奇數+奇數+奇數+.....=奇數或偶數，

所以只要當實際翻量次數總合=偶數時，就有機會成功。

三、【第三階段】：大膽假設

現在，我們已經可以辨別杯數與翻量的組合是否能成功了，接著我們希望從可成功的幾種組合中，找到翻法規則以及最少的翻動次數。

（一）整理歸納

在翻轉的實驗過程中我們發現當杯數是翻量的整數倍時，所需要的最少次數剛好就是杯數除以翻量的商，所以我們猜想其他組合的最少次數可能也與杯數除以翻量的算式有關，因此我們將前面實驗結果中可以成功翻出的組合重新整理成下面表格，並且將杯數÷翻量的商和餘也一起列在表中，觀察其中有沒有什麼玄機。

杯數	每次翻量	成功翻出的最少次數	杯數÷翻量	杯數÷翻量的商	杯數÷翻量的餘	商+餘=翻動的次數
4	2	2	4÷2	2	0	2+0=2
	3	4	4÷3	1	1	×
5	3	3	5÷3	1	2	1+2=3
6	2	3	6÷2	3	0	3+0=3
	3	2	6÷3	2	0	2+0=2
	4	3	6÷4	1	2	1+2=3
	5	6	6÷5	1	1	×
7	3	3	7÷3	2	1	2+1=3
7	5	3	7÷5	1	2	1+2=3

杯數	每次翻量	成功翻出的最少次數	杯數÷翻量	杯數÷翻量的商	杯數÷翻量的餘	商+餘=翻動的次數
8	2	4	$8 \div 2$	4	0	$4+0=4$
	3	4	$8 \div 3$	2	2	$2+2=4$
	4	2	$8 \div 4$	2	0	$2+0=2$
	5	4	$8 \div 5$	1	3	$1+3=4$
	6	3	$8 \div 6$	1	2	$1+2=3$
	7	8	$8 \div 7$	1	1	×

令人興奮的是，在整理的過程中我們有了幾個發現，第一：當杯數可以被翻量整除時，最少次數就等於杯數除以翻量的商；第二：當杯數除以翻量等於 1 餘 1 時（也就是杯數－翻量＝1），最少次數等於杯數；第三：除了上面兩種情況之外，其餘的最少次數剛好等於杯數除於翻量的商加餘（最少次數＝杯數除以翻量的商＋杯數除以翻量的餘）。

（二）假設

依據上面的發現，我們訂定了三項假設

假設一：當杯數可以被翻量整除時，最少次數就等於杯數除以翻量的商。

假設二：當杯數除以翻量等於 1 餘 1 時（也就是杯數－翻量＝1），最少次數等於杯數。

假設三：其餘可以成功的組合，最少次數剛好等於杯數除於翻量的商加餘（最少次數＝杯數除以翻量的商＋杯數除以翻量的餘）。

四、【第四階段】：小心求證

秉持著大膽假設、小心求證的科學精神，接著我們將針對我們提出的假設一一尋求驗證：

（一）假設一的驗證：

如果杯子的總量是每次翻動杯量的倍數，那麼(杯數÷翻量)的商就是成功翻面的最少次數。

驗證：杯子的總量 4，每次翻動 2 杯→成功翻面的最少次數＝ $4 \div 2 = 2$ 次。

杯子的總量 6，每次翻動 2 杯→成功翻面的最少次數＝ $6 \div 2 = 3$ 次。

當杯子數量一直變多時，還是可以遵守這個規則。

杯子的總量 10，每次翻動 5 杯→成功翻面的次數＝ $10 \div 5 = 2$ 次。

杯子的總量 27，每次翻動 9 杯→成功翻面的次數＝ $27 \div 9 = 3$ 次。

這些都證實，當杯數可以被翻量整除時，因為每次可以翻成反面的最大量就是翻量，所以翻成功的次數至少要（杯數÷翻量）次。結果完全符合假設一的論點，也就是：

當杯數可以被翻量整除時，最少次數就等於杯數除以翻量的商。

(二) 假設二的驗證：

當杯數和翻量相差 1 時，也就是(杯子的總量÷翻量)=商 1……餘 1

例如：杯數 4，翻量 3 時= $4 \div 3 = 1 \cdots 1$ ，最少翻動次數 4 次

杯數 6，翻量 5 時= $6 \div 5 = 1 \cdots 1$ ，最少翻動次數 6 次

杯數 8，翻量 7 時= $8 \div 7 = 1 \cdots 1$ ，最少翻動次數 8 次

成功翻面的次數就是杯數。

驗證：

1. 首先我們試著將數字放大，試試看其它商=1、餘=1 的組合，它們的最少次數是不是也等於杯數。

(1) 範例一：杯數 10，翻量 9 時， $10 \div 9 = 1 \cdots 1$

次數	正數(開口朝上)	反數(開口朝下)
0	10	0
1	1	9
2	8	2
3	3	7
4	6	4
5	5	5
6	4	6
7	7	3
8	2	8
9	9	1
10	0	10

(2) 範例二：杯數 14，翻量 13 時， $14 \div 13 = 1 \cdots 1$

次數	正數(開口朝上)	反數(開口朝下)
1	1	13
2	12	2
3	3	11
4	10	4
5	5	9
6	8	6
7	7	7
8	6	8
9	9	5
10	4	10
11	11	3
12	2	12
13	13	1
14	0	14

除了上面兩種組合之外，我們還找了許多商=1、餘=1的組合來實驗，結果都符合假設，但依據先前的經驗，我們知道這樣的驗證過程一定又會被老師駁回，所以我們試著再找出更有利的依據來支持我們的假設，讓老師們心服口服。

2. 分析翻轉步驟：

(1) 範例一：當杯數4，翻量3時

次數	正數	反數	當翻量為3時，翻法（正，反）有：(3,0)、 (2,1)、(1,2)、(0,3) 四種 次數1：一開始只有正數所以只能選擇(3,0) 次數2：在不走回頭路(0,3)，及正數只有1的情況下，只能選擇(1,2) 次數3：在不走回頭路及反數只有2的情況下，只能選擇(1,2) 次數4：正數達到目標數3，選擇(3,0)
0	4	0	
1	1	3	
2	2	2	
3	3	1	
4	0	4	

(2) 範例二：當杯數6，翻量5時

次數	正數	反數	當翻量為5時，翻法（正，反）：(5,0)、(4,1)、 (3,2)、(2,3)、(1,4)、(0,5) 六種 次數1：一開始只有正數所以只能選擇(5,0) 次數2：在不走回頭路及正數只有1的情況下，只能選擇(1,4) 次數3：在不走回頭路及反數只有2的情況下只能選擇(3,2) 次數4：在不走回頭路及正數只有3的情況下只能選擇(3,2) 次數5：在不走回頭路及反數只有4的情況下只能選擇(1,4) 次數6：正數達到目標數5，選擇(5,0)
0	6	0	
1	1	5	
2	4	2	
3	3	3	
4	2	4	
5	5	1	
6	0	6	

(3) 範例三：當杯數 8，翻量 7 時

次數	正數 (開口朝上)	反數 (開口朝下)	當翻量為 7 時，翻法(正, 反): (7, 0)、(6, 1)、 (5, 2)、(4, 3)、(3, 4)、(2, 5)、(1, 6)、 (0, 7) 八種
0	8	0	次數 1: 一開始只有正數所以只能選擇 (7, 0) 次數 2: 在不走回頭路及正數只有 1 的情況下，只能選擇 (1, 6) 次數 3: 在不走回頭路及反數只有 2 的情況下只能選擇 (5, 2) 次數 4: 在不走回頭路及正數只有 3 的情況下只能選擇 (3, 4) 次數 5: 在不走回頭路及反數只有 4 的情況下只能選擇 (3, 4) 次數 6: 在不走回頭路及正數只有 5 情況下只能選擇 (5, 2) 次數 7: 在不走回頭路及反數只有 6 的情況下的情況下只能選擇 (1, 6) 次數 8: 正數達到目標數 7，選擇 (7, 0)
1	1	7	
2	6	2	
3	3	5	
4	4	4	
5	5	3	
6	2	6	
7	7	1	
8	0	8	

3. 歸納發現：

- (1) 在不回頭的原則下，可使用的翻法只有實際翻法的一半。
- (2) 因為杯數和翻量差 1，所以翻第一次後，正數只剩下 1，只有一種翻法可以選擇，接下變成正數到反數去並加 1，再來反數到正數並加 1，這樣逐次 S 型的增加 1，直到正數達到翻量的杯數，這就是倒數第二個步驟，最後一個步驟就是把正數所有的杯子翻成反數，就大功告成了，這樣每次只能用 S 型的增加 1，從 0 增加到目標量（翻量），所以需要的最少次數就是翻量 + 1 = 杯數。

結果完全符合假設一的論點，也就是：

當杯數除以翻量等於 1 餘 1 時 (也就是杯數 - 翻量 = 1)，最少次數 = 杯數。

(三) 假設三的驗證：

其餘可以成功的組合情形，最少次數剛好等於杯數除以翻量的商加餘（最少次數＝杯數除以翻量的商＋杯數除以翻量的餘）。

例如：杯子的總量 5，每次翻動 3 杯＝ $5 \div 3 = 1 \cdots 2$ ，最少翻動次數 $1 + 2 = 3$ 次

杯子的總量 8，每次翻動 5 杯＝ $8 \div 5 = 1 \cdots 3$ ，最少翻動次數 $1 + 3 = 4$ 次

成功翻面的次數＝杯數除以翻量的商＋杯數除以翻量的餘。

驗證：

1. 首先我們試著將數字放大試試看其它組合，它們的最少次數是不是也等於商加餘。

(1) 範例一：當杯數 10，翻量 3 時

次數	正數 (開口朝上)	反數 (開口朝下)	$10 \div 3 = 3 \cdots 1$ 預測的最少次數＝ $3 + 1 = 4$ 實際的最少次數＝4 符合假設
0	10	0	
1	7	3	
2	4	6	
3	3	7	
4	0	10	

(2) 範例二：當杯數 9，翻量 5 時

次數	正數 (開口朝上)	反數 (開口朝下)	$9 \div 5 = 1 \cdots 4$ 預測的最少次數＝ $1 + 4 = 5$ 實際的最少次數＝3 不符合假設
0	9	0	
1	4	5	
2	5	4	
3	0	9	

(3) 假設三驗證失敗，決定重新歸納、整理：

這真是晴天霹靂呀！為甚麼假設三會錯呢？是不是我們忽略了什麼細節呢？於是我們決定再重新探討其他的組合。

五、【第五階段】：

俗話說：「在哪裡跌倒，就要從哪裡爬起來！」雖然假設三遭到瓦解，但秉持著愈戰愈勇

的精神，我們決定再接再厲，衝出迷團。因此我們將杯數 3~20 中除了不能成功的組合、杯數除以翻量整除及杯數除以翻量商 1 餘 1 的情況外的其他組合重列表整理，似乎發現了一些規律。

杯數	翻量	商	餘	最少次數	發現：最少次數與商的關係
5	3	1	2	3	商 + 2；翻量和餘數一奇一偶
6	4	1	2	3	商 + 2；翻量和餘數同偶
7	3	2	1	3	商 + 1；翻量和餘數同奇
	5	1	2	3	商 + 2；翻量和餘數一奇一偶
8	3	2	2	4	商 + 2；翻量和餘數一奇一偶
	5	1	3	4	商 + 3；翻量和餘數同奇
	6	1	2	3	商 + 2；翻量和餘數同偶
9	5	1	4	3	商 + 2；翻量和餘數一奇一偶
	7	1	2	3	商 + 2；翻量和餘數一奇一偶
10	3	3	1	4	商 + 1；翻量和餘數同奇
	4	2	2	3	商 + 1；翻量和餘數同偶
	6	1	4	3	商 + 2；翻量和餘數同偶
	7	1	3	4	商 + 3；翻量和餘數同奇
	8	1	2	3	商 + 2；翻量和餘數同偶
11	3	3	2	5	商 + 2；翻量和餘數一奇一偶
	5	2	1	3	商 + 1；翻量和餘數同奇
	7	1	4	3	商 + 2；翻量和餘數一奇一偶
	9	1	2	3	商 + 2；翻量和餘數一奇一偶
12	5	2	2	4	商 + 2；翻量和餘數一奇一偶
	7	1	5	4	商 + 3；翻量和餘數同奇
	8	1	4	3	商 + 2；翻量和餘數同偶
	9	1	3	4	商 + 3；翻量和餘數同奇
	10	1	2	3	商 + 2；翻量和餘數同偶
13	3	4	1	5	商 + 1；翻量和餘數同奇
	5	2	3	3	商 + 1；翻量和餘數同奇
	7	1	6	3	商 + 2；翻量和餘數一奇一偶
	9	1	4	3	商 + 2；翻量和餘數一奇一偶
	11	1	2	3	商 + 2；翻量和餘數一奇一偶
14	3	4	2	6	商 + 2；翻量和餘數一奇一偶
	4	3	2	4	商 + 1；翻量和餘數同偶
	5	2	4	4	商 + 2；翻量和餘數一奇一偶
	6	2	2	3	商 + 1；翻量和餘數同偶
	8	1	6	3	商 + 2；翻量和餘數同偶
	9	1	5	4	商 + 3；翻量和餘數同奇

	10	1	4	3	商 + 2 ; 翻量和餘數同偶
	11	1	3	4	商 + 3 ; 翻量和餘數同奇
	12	1	2	3	商 + 2 ; 翻量和餘數同偶
15	7	2	1	3	商 + 1 ; 翻量和餘數同奇
	9	1	6	3	商 + 2 ; 翻量和餘數一奇一偶
	11	1	4	3	商 + 2 ; 翻量和餘數一奇一偶
	13	1	2	3	商 + 2 ; 翻量和餘數一奇一偶
16	3	5	1	6	商 + 1 ; 翻量和餘數同奇
	5	3	1	4	商 + 1 ; 翻量和餘數同奇
	6	2	4	3	商 + 1 ; 翻量和餘數同偶
	7	2	2	4	商 + 2 ; 翻量和餘數一奇一偶
	9	1	7	4	商 + 3 ; 翻量和餘數同奇
	10	1	6	3	商 + 2 ; 翻量和餘數同偶
	11	1	5	4	商 + 3 ; 翻量和餘數同奇
	12	1	4	3	商 + 2 ; 翻量和餘數同偶
	13	1	3	4	商 + 3 ; 翻量和餘數同奇
	14	1	2	3	商 + 2 ; 翻量和餘數同偶
17	3	5	2	7	商 + 2 ; 翻量和餘數一奇一偶
	5	3	2	5	商 + 2 ; 翻量和餘數一奇一偶
	7	2	3	3	商 + 1 ; 翻量和餘數同奇
	9	1	8	3	商 + 2 ; 翻量和餘數一奇一偶
	11	1	6	3	商 + 2 ; 翻量和餘數一奇一偶
	13	1	4	3	商 + 2 ; 翻量和餘數一奇一偶
	15	1	2	3	商 + 2 ; 翻量和餘數一奇一偶
18	4	4	2	5	商 + 1 ; 翻量和餘數同偶
	5	3	3	4	商 + 1 ; 翻量和餘數同奇
	7	2	4	4	商 + 2 ; 翻量和餘數一奇一偶
	8	2	2	3	商 + 1 ; 翻量和餘數同偶
	10	1	8	3	商 + 2 ; 翻量和餘數同偶
	11	1	7	4	商 + 3 ; 翻量和餘數同奇
	12	1	6	3	商 + 2 ; 翻量和餘數同偶
	13	1	5	4	商 + 3 ; 翻量和餘數同奇
	14	1	4	3	商 + 2 ; 翻量和餘數同偶
	15	1	3	4	商 + 3 ; 翻量和餘數同奇
	16	1	2	3	商 + 2 ; 翻量和餘數同偶
19	3	6	1	7	商 + 1 ; 翻量和餘數同奇
	5	3	4	5	商 + 2 ; 翻量和餘數一奇一偶
	7	2	5	3	商 + 1 ; 翻量和餘數同奇
	9	2	1	3	商 + 1 ; 翻量和餘數同奇

	11	1	8	3	商 + 2 ; 翻量和餘數一奇一偶
	13	1	6	3	商 + 2 ; 翻量和餘數一奇一偶
	15	1	4	3	商 + 2 ; 翻量和餘數一奇一偶
20	3	6	2	8	商 + 2 ; 翻量和餘數一奇一偶
	6	3	2	4	商 + 1 ; 翻量和餘數同偶
	7	2	6	4	商 + 2 ; 翻量和餘數一奇一偶
	8	2	4	3	商 + 1 ; 翻量和餘數同偶
	9	2	2	4	商 + 2 ; 翻量和餘數一奇一偶
	11	1	9	4	商 + 3 ; 翻量和餘數同奇
	12	1	8	3	商 + 2 ; 翻量和餘數同偶
	13	1	7	4	商 + 3 ; 翻量和餘數同奇
	14	1	6	3	商 + 2 ; 翻量和餘數同偶
	15	1	5	4	商 + 3 ; 翻量和餘數同奇
	16	1	4	3	商 + 2 ; 翻量和餘數同偶
	17	1	3	4	商 + 3 ; 翻量和餘數同奇
	18	1	2	3	商 + 2 ; 翻量和餘數同偶

爲了使思緒簡單清楚些，並簡化題型，我們決定化整爲零，先從商 = 1 的各種狀況開始討論，再逐步推演。

(一) 從商 = 1 開始：

在經過幾組商等於 1 組合的實際操作及沙盤推演後，我們發現無論餘數是多少，最少次數都等於商 (=1) 加 2 或 3，沒有其他狀況，且加 2 或加 3 的差異似乎決定於翻量及餘數間的奇偶關係：

1. 翻量與餘數都是奇數時：

杯數 10，翻量 **7** 時【 $10 \div 7 = 1 \cdots \cdots 3$ ，最少次數 $4 = 1 + 3$ 】

杯數 16，翻量 **9** 時【 $16 \div 9 = 1 \cdots \cdots 7$ ，最少次數 $4 = 1 + 3$ 】

其他相似組合也都符合，當商 = 1 時，不論餘數是多少，只要翻量和餘數都是奇數，最少次數都是 4 次。

2. 翻量與餘數都是偶數時：

杯數 10，翻量 **6** 時【 $10 \div 6 = 1 \cdots \cdots 4$ ，最少次數 $3 = 1 + 2$ 】

杯數 18，翻量 **10** 時【 $18 \div 10 = 1 \cdots \cdots 8$ ，最少次數 $3 = 1 + 2$ 】

其他相似組合也都符合，當商 = 1 時，不論餘數是多少，只要翻量和餘數都是偶數，最少次數都是 3 次。

3. 翻量與餘數一個奇數一個偶數時：

杯數 15，翻量 9 時【 $15 \div 9 = 1 \cdots 6$ ，最少次數 $3 = 1 + 2$ 】

杯數 19，翻量 15 時【 $19 \div 15 = 1 \cdots 4$ ，最少次數 $3 = 1 + 2$ 】

其他相似組合也都符合，當商 = 1 時，不論餘數是多少，只要翻量和餘數一個奇數一個偶數，最少次數都是 3 次。

（二）當商 = 2 時：

我們發現無論餘數是多少，最少次數都等於商（=2）加 1 或 2，且加 1 或加 2 的差異也是決定於翻量及餘數間的奇偶關係：

1. 翻量與餘數都是奇數或都是偶數時：

杯數 15，翻量 7 時【 $15 \div 7 = 2 \cdots 1$ ，最少次數 $3 = 2 + 1$ 】

杯數 20，翻量 8 時【 $20 \div 8 = 2 \cdots 4$ ，最少次數 $3 = 2 + 1$ 】

其他相似組合也都符合，當商 = 2 時，不論餘數是多少，只要翻量和餘數都是奇數或都是偶數，最少次數都是 3 次。

2. 翻量與餘數一個奇數一個偶數時：

杯數 14，翻量 5 時【 $14 \div 5 = 2 \cdots 4$ ，最少次數 $4 = 2 + 2$ 】

杯數 24，翻量 9 時【 $24 \div 9 = 2 \cdots 6$ ，最少次數 $4 = 2 + 2$ 】

其他相似組合也都符合，當商 = 2 時，不論餘數是多少，只要翻量和餘數一個奇數一個偶數，最少次數都是 4 次。

（三）當商 = 或 > 3 時：

我們發現無論餘數是多少，最少次數都等於商加 1 或 2，且加 1 或加 2 的差異同樣決定於翻量及餘數間的奇偶關係：

1. 翻量與餘數都是奇數或都是偶數時：

杯數 26，翻量 7 時【 $26 \div 7 = 3 \cdots 5$ ，最少次數 $4 = 3 + 1$ 】

杯數 39，翻量 9 時【 $39 \div 9 = 4 \cdots 3$ ，最少次數 $5 = 4 + 1$ 】

杯數 30，翻量 4 時【 $30 \div 4 = 7 \cdots 2$ ，最少次數 $8 = 7 + 1$ 】

其他相似組合也都符合，不論餘數是多少，只要翻量和餘數都是奇數或都是偶數，最少次數都是（商 + 1）次。

2. 翻量與餘數一個奇數一個偶數時：

杯數 19，翻量 5 時【 $19 \div 5 = 3 \cdots 4$ ，最少次數 $5 = 3 + 2$ 】

杯數 44，翻量 7 時【 $44 \div 7 = 6 \cdots 2$ ，最少次數 $8 = 6 + 2$ 】

其他相似組合也都符合，不論餘數是多少，只要翻量和餘數一個奇數一個偶數，最少次數都是（商+2）次。

（四）再次假設（修正假設三）：

這次經過更多更精密的實驗、推演、猜測和演算之後，似乎逐漸露出曙光，商和我們原本的猜測相同，具有舉足輕重的重要地位，而餘數只是一個判斷的工具，因此我們總結以上的結果，再次將假設三做了下列的修正：

1. 當商=1時，

翻量與餘數同為奇數時，最少次數=1+3=4次

翻量與餘數同為偶數或一個奇數一個偶數時，最少次數=1+2=3次

2. 當商≥2時，

翻量與餘數同為奇數或同為偶數，最少次數=商+1次

翻量與餘數一個是奇數一個是偶數，最少次數=商+2次

（五）尋找合理的驗證解釋：

有了之前太快下定論而失敗的前車之鑑，因此這次在設下假設之前，我們已經做過無數次的實驗，結果也都與假設符合，但老師的那句「老套」——「舉例只是部分，不代表全部，所以舉再多也只是舉例，還是要找出一個合理的依據。」既然如此，我們只好破沙鍋『挖』到底，繼續挖掘其中的奧秘。

1. 翻量與數字變化的關係：

翻了這麼多之後，我們無形之中有了一套翻法規則，而不是盲目的亂翻一通，我們會依據需要的數字差，去尋找可用的翻法，例如我們在翻杯數24，翻量7的題目中，我們知道可用的翻法有（0，7）、（1，6）、（2，5）、（3，4）、（4，3）、（5，2）、（6，1）、（7，0）交換正反杯數，他們可以產生的數字差有7、5、3、1，因此：

次數	正數 (開口朝上)	反數 (開口朝下)	1. 因為翻量7，所以最後一個步驟正數必須等於7，因此目標正數是7 2. 首先先使正數接近目標數7：24-7-7=10（以最大數字差即差7的最快方法接近） 3. 10-7=3，代表離目標數差3，所以用差3的（5，2）翻法，使正數減3，就可快速翻成。
0	24	0	
1	17	7	
2	10	14	
3	7	17	
4	0	24	

而在一連串的翻法歸納後我們有了下列主要的快數翻法的規則：

- (1) 先列出翻法及產生的數字差，而且如果翻量為奇數，每一次翻完造成的數字差就是 1.3.5...到翻量的所有奇數；如果翻量為偶數，每一次翻完造成的數字差就是 0.2.4.6...到翻量的所有偶數。
- (2) 先用『最大數字差』逐次逼近目標數。
- (3) 在接近目標數時尋找適當數字差的翻法，使正數等於目標量（翻量）。

2. 探討商=1 時的翻法規律，

(1) 範例一：翻量與餘數同為奇數時

杯數 16，翻量 9 時【 $16 \div 9 = 1 \dots 7$ ，最少次數 $4 = 1 + 3$ 】			
次數	正數	反數	1. 翻法有 (9, 0) (0, 9) 差 9；(8, 1) (1, 8) 差 7； (7, 2) (2, 7) 差 5；(6, 3) (3, 6) 差 3； (5, 4) (4, 5) 差 1；
0	16	0	
1	7	9	2. $16 \div 9 = 1 \dots 7$
2	8	8	3. 次數 1：正數 $16 - 9 = 7$ （代表商的步驟）
3	9	7	4. 次數 2、3：若要成功翻出，必須設法使正數=9，現在正數為 7， $9 - 7$ 還差 2 是偶數，無法用一個翻法達到，至少必須 $7 + 1 + 1$ 兩個步驟。
4	0	16	5. 所以翻量和餘數的差如果和翻量同為奇數，餘數與目標量的差反而是偶數，無法一個步驟達到，至少要再兩個步驟，加上最後步驟，所以最少次數=商+3 次。

(2) 範例二：翻量與餘數同為偶數時

杯數 10，翻量 6 時【 $10 \div 6 = 1 \dots 4$ ，最少次數 $3 = 1 + 2$ 】			
次數	正數	反數	1. 翻法有 (6, 0) (0, 6) 差 6；(5, 1) (1, 5) 差 4； (4, 2) (2, 4) 差 2
0	10	0	2. $10 \div 6 = 1 \dots 4$
1	4	6	3. 次數 1：正數 $10 - 6 = 4$ （代表商的步驟）
2	6	4	

3	0	10	4. 次數 2：若要成功翻出，必須設法使正數=6，現在正數為 4，$6-4$ 還差 2 也是偶數，可用翻法 (2, 4) 達到。 5. 所以當翻量和餘數同為偶數時，那翻量和餘數的差也是偶數，可以一個步驟達到，再加上最後步驟，所以最少次數=商+2 次。
---	---	----	--

(3) 範例三：翻量與餘數一個奇數一個偶數時

杯數 15，翻量 9 時【 $15 \div 9 = 1 \dots 6$ ，最少次數 $3 = 1 + 2$ 】			
次數	正數	反數	1. 翻法 (9, 0) (0, 9) 差 9；(8, 1) (1, 8) 差 7； (7, 2) (2, 7) 差 5；(6, 3) (3, 6) 差 3； (5, 4) (4, 5) 差 1
0	15	0	2. $15 \div 9 = 1 \dots 6$
1	6	9	
2	9	6	
3	0	15	3. 次數 1：正數 $15 - 9 = 6$ (代表商的步驟) 4. 次數 2：若要成功翻出，必須設法使正數=9，現在正數為 6，$9-6$ 還差 3 也是奇數，可用翻法 (3, 6) 達到。 5. 翻量和餘數如果一個奇數一個偶數，那翻量和餘數的差都是奇數，可以一個步驟達到，再加上最後步驟，所以最少次數=商+2 次。

經過多次的解釋和歸納結果後，我們發現當商=1 時，因為原本反數=0，所以商 1 是一定且唯一的步驟，接著再考慮餘數和翻量之間的關係，觀察『翻量』(目標量)和『餘數』的『差』，如果『翻量』和『翻量-餘數』同為偶數或同為奇數，表示可以找到一個翻法完成，再加上最後步驟，所以最少次數=商+2；例外，如果『翻量』和『翻量-餘數』一個偶數一個奇數，表示無法一個翻法完成至少要再翻兩次，再加上最後步驟，所以最少次數=商+3，因此商=1 組合的最少次數得到了合理的解釋，可以證實：

當商=1 時，

翻量與餘數同為奇數時，最少次數=1+3=4 次

翻量與餘數同為偶數或一個奇數一個偶數時，最少次數=1+2=3 次

3. 探討商=或>2時的翻法規律，

(1) 範例一：翻量與餘數同為奇數時

杯數 15，翻量 7 時【 $15 \div 7 = 2 \cdots 1$ ，最少次數 $3 = 2 + 1$ 】			
次數	正數	反數	1. 翻法有 (7, 0) (0, 7) 差 7; (6, 1) (1, 6) 差 5; (5, 2) (2, 5) 差 3; (4, 3) (3, 4) 差 1
0	15	0	2. $15 \div 7 = 2 \cdots 1$ ($15 - 7 - 7 = 1$)
1	8	7	3. 次數 1: 正數 $15 - 7 = 1 + 7$ (代表 (商 2 - 1) 的步驟，只要減 1 次 7，只需 1 個步驟)
2	7	8	
3	0	15	4. 次數 2: 若要成功翻出，必須設法使正數=7，現在正數為 8， $8 - 7$ 還差 1 (就是餘數) 是奇數，翻量也是奇數，所以可以用 (4, 3) 差 1 的翻法達到，代表除法化為連減時，第 2 次的減 7 的翻法可以改用減去餘數的翻法取代 ($15 - 7 - 1 = 7$)，使正數=翻量 (目標量)。 5. 翻量和餘數同為奇數時，原定 -7 的最後 1 步驟可以轉換成減餘數，使正數剛好等餘翻量，再加上最後步驟，所以最少次數=商+1 次。

(2) 範例二：翻量與餘數同為偶數時

杯數 30，翻量 4 時【 $30 \div 4 = 7 \cdots 2$ ，最少次數 $8 = 7 + 1$ 】			
次數	正數	反數	1. 翻法有 (4, 0) (0, 4) 差 4; (3, 1) (1, 3) 差 2;
0	30	0	2. $30 \div 4 = 7 \cdots 2$
1	26	4	3. 次數 1~6: 正數 $30 - 4 - 4 - 4 - 4 - 4 - 4 = 2 + 4$ (代表 (商 7 - 1) 的步驟， $7 - 1 = 6$ 次步驟。)
2	22	8	
3	18	12	4. 次數 7: 若要成功翻出，必須設法使正數=4，現在正數為 6， $6 - 4$ 還差 2 (就是餘數) 是偶數，翻量 4 也是偶數，所以可用翻法 (3, 1) 達到。
4	14	16	
5	10	20	
6	6	24	5. 翻量和餘數都是偶數時，原定 -4 的最後 1 步驟可以轉換成減餘數，使正數剛好等餘翻量，再加上最後步驟，所以最少次數=商+1 次。
7	4	26	
8	0	30	

(3) 範例三：翻量與餘數一個奇數一個偶數時

杯數 19，翻量 5 時【 $19 \div 5 = 3 \cdots 4$ ，最少次數 $5 = 3 + 2$ 】			
次數	正數	反數	1. 翻法 (5, 0) (0, 5) 差 5; (4, 1) (1, 4) 差 3; (3, 2) (2, 2) 差 1
0	19	0	2. $19 \div 5 = 3 \cdots 4$
1	14	5	3. 次數 1~2：正數 $19 - 5 - 5 = 4 + 5$ (代表 (商 3 - 1) 次的步驟)
2	9	10	4. 次數 3、4：若要成功翻出，必須設法使正數 5，現在正數為 9， $9 - 5$ 還差 4 (餘數) 是偶數，但翻量 5 數奇數，無法用一個翻法達到，必須按原計劃 $9 - 5$ ，再補上翻量與數是的差 1，所以比商多一個步驟才能完成。
3	4	15	
4	5	14	
5	0	19	5. 因此當翻量和餘數一個奇數一個偶數時，-5 的最後一個步驟後需再補差額再多 1 次步驟，又加上最後步驟，所以最少次數 = 商 + 2 次。

經過上面相似活動反覆的推敲、驗證之後，我們發現當商 = 或 > 2 時，因為經過次數 1 的翻轉，反數不再等於 0，所以可以在商次時 (例： $30 \div 4 = 7 \cdots 2$ ，即第 7 次)，試著除掉餘數，使正數等於翻量，也就是目標數，所以當『翻量』和『餘數』都是奇數或偶數時，最後一次減去最大差的翻法可以轉變成減去餘數的翻法，使正數等於目標數，再將上最後步驟，所以最少次數 = 商 + 1；相反的，如果『翻量』和『餘數』一奇一偶，就要再多 1 次步驟，所以最少次數 = 商 + 2 次，也就可以證實：

當商 ≥ 2 時，

翻量與餘數同為奇數或同為偶數，最少次數 = 商 + 1 次

翻量與餘數一個是奇數一個是偶數，最少次數 = 商 + 2 次

伍、結論

一、研究發現

經過這段時間的努力之後，總算讓我們『翻』出一點成果了——「翻出一片天」，對於這種題型，我們有了下面幾點主要發現：

(一) 能不能翻成功的關鍵點：

當杯數奇數、翻量是偶數時，無法成功的將全部杯子都翻成開口朝下。

(二) 翻成功的最少次數：

1. 當杯數可以被翻量整除時，最少次數等於杯數除以翻量的商。

2. 當杯數除以翻量商 1 餘 1 時（也就是杯數－翻量＝1），最少次數＝杯數次。

3. 杯數÷翻量，當商＝1 時，

翻量與餘數同為奇數時，最少次數＝1＋3＝4 次。

翻量與餘數或同為偶數或一個是奇數一個是偶數時，最少次數＝1＋2＝3 次。

4. 杯數÷翻量，當商＝或>2 時，

翻量與餘數同為奇數或同為偶數，最少次數＝商＋1 次。

翻量與餘數一個是奇數一個是偶數，最少次數＝商＋2 次。

二、 滿載而歸

這個實驗讓我們滿足了「求知慾」，雖然過程十分艱辛，也遇到許多困難，還要拼命想出解釋的方法和為什麼會這樣，可是，當我們實驗成功時，也就顯得格外高興！在我們的努力和老師的協助下，我們成功的完成了這個實驗，清楚的解釋了為什麼，從這次的實驗中不斷的觀察、歸納、假設和驗證的過程中，我們獲得了許多知識，從中找到了樂趣，也了解為什麼人家常常說「團結力量大」了！原來，日常生活中的每樣東西都有他的規律呢！無聊時，不妨你也來試試看，一起加入探索的行列吧！

陸、參考資料

1. 台中縣國民小學科學展覽會：<http://science.boe.tcc.edu.tw/>
2. 南一書局：國民小學數學第十冊（五下）。修訂版。民國 94 年 2 月。
3. 南一書局：國民小學數學第十二冊（六下）。修訂版。民國 94 年 2 月。

中華民國第四十五屆中小學科學展覽會
評 語

國小組 數學科

第三名

080408

翻出一片天

臺中縣沙鹿鎮公明國民小學

評語：

資料分析極為詳盡，並能就所得結果系統化歸納出要點，報告之敘寫頗為清晰完整。口頭說明清楚流俐，操作技術優良，科學精神與態度，思考邏輯程序皆佳。