

中華民國第四十五屆中小學科學展覽會
作品說明書

國小組 數學科

最佳團隊合作獎

080404

方陣之美

苗栗縣竹南鎮竹南國民小學

作者姓名：

小五 陳建華 小五 連伯修

指導老師：

柯政毅 傅彥豪

中華民國第 四十五 屆中小學科學展覽會 作品說明書

科 別：數學科

組 別：國小組

作品名稱：方陣之美

關 鍵 詞：魔術方陣、平面方陣、立體方陣

編 號：

製作說明：

- 1.說明書封面僅寫科別、組別、作品名稱及關鍵詞。
- 2.編號由國立臺灣科學教育館統一編列。
- 3.封面編排由參展作者自行設計。

壹、摘要

本研究主要在探討奇數階平面方陣及奇數階立體方陣的規則，我們發現奇數階平面方陣及奇數階立體方陣有一定的規則可循。建構奇數階平面方陣可依據兩個規則：〈一〉平面方陣中的正中央所填入數字一定是數列的中間數。〈二〉每條直行及橫行中，各行數字所代表的座標依循著一定規律方式，座標依照 $A \rightarrow B \rightarrow C$ 或 $C \rightarrow B \rightarrow A$ ，以及 $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3$ 或 $3 \rightarrow 2 \rightarrow 1$ 的規則，並且都不重複。建構奇數階立體方陣可依據四個規則：〈一〉依據階數，將所有數字平均分組，接著將所有數字座標化。〈二〉數列的中間數字必落於中層，選取各組數字時，由中層先選取，其他層選取各組數字時，依據平面方陣建構之規則來選取。〈三〉各層數字選取後，先由中層開始建構，建構之規則與平面方陣之規則相同。〈四〉中層建構完成後，其他各層與中層的座標需要交錯，然後依序所對應的填上數字。

貳、研究動機

有一天彈性課的時候，老師爲了想要考驗我們的數學能力，出了一個三階平面方陣的數學問題給我們做，要我們填入 1 到 9 的數字，使得方陣中的各條直行、橫行和斜行的三個數字加起來的和都是一樣的。於是我們每個人就開始埋頭苦算，經過了很多次將數字帶入試驗的方法，終於把問題的答案找出來了，經過了大約十分鐘，大部分同學都把這個問題給解答出來了。接著老師又畫了一個五階的平面方陣在黑板上，這次老師要我們填入 1 到 25 的數字，使方陣中的各條直行、橫行和斜行的五個數字加起來的和都是一樣的。經過了一節課後，始終沒有同學可以將這個問題解答出來，我們也因此開始想著手深入來探討這一個問題。

參、研究問題

我們這次研究的目的主要在找出奇數階平面方陣的規則，並試著利用奇數階平面方陣之規則，探討奇數階立體方陣是否也有規則可循。主要的研究問題如下所述：

- 一、探討奇數階平面方陣是否有一定之規則可循？
- 二、探討奇數階立體方陣是否有一定之規則可循？

肆、研究設備及器材

- 一、電腦〈WORD 及 EXCEL 軟體〉
- 二、印表機
- 三、白紙〈列印 3X3、5X5、7X7 之方格〉

伍、研究過程

- 一、奇數階平面方陣
 - 〈一〉三階平面方陣之研究

填入 1~9 的數字，使直行、橫行、斜行三個數字相加的和都一樣。

A	B	C
D	E	F
G	H	I

〈圖一〉

首先分析各個位置：從〈圖一〉中可發現 A、C、G、I 位置直行、橫行及一條斜行都需要成立，也就是四個數字都需要有三個算式成立。如下所述：

$$\begin{aligned}
 A + B + C &= A + D + G = A + E + I \\
 C + B + A &= C + F + I = C + E + G \\
 G + D + A &= G + E + C = G + H + I \\
 I + H + G &= I + F + C = I + E + A
 \end{aligned}$$

第二個發現：B、D、F、H 位置需直行及橫行成立，也就是四個數字都需要二個式子成立。如下所述：

$$\begin{aligned}
 B + A + C &= B + E + H \\
 D + A + G &= D + E + F \\
 F + C + I &= F + E + D \\
 G + H + I &= G + D + A
 \end{aligned}$$

第三個發現：E 位置直行、橫行及兩條斜行都需要成立，也就是 E 位置所填入的數字需要有四個式子成立，如下所示：

$$E + A + I = E + D + F = E + B + H = E + C + G$$

接著我們分析 1~9 的數字〈三個數相加和為 15〉

數字為 1 時：1 + 5 + 9 = 15, 1 + 6 + 8 = 15

數字為 2 時：2 + 4 + 9 = 15, 2 + 5 + 8 = 15, 2 + 6 + 7 = 15

數字為 3 時：3 + 4 + 8 = 15, 3 + 5 + 7 = 15

數字為 4 時：4 + 5 + 6 = 15, 4 + 2 + 9 = 15, 4 + 3 + 8 = 15

數字為 5 時：5 + 1 + 9 = 15, 5 + 2 + 8 = 15, 5 + 3 + 7 = 15, 5 + 4 + 6 = 15

數字為 6 時：6 + 1 + 8 = 15, 6 + 2 + 7 = 15, 6 + 4 + 5 = 15

數字為 7 時：7 + 2 + 6 = 15, 7 + 3 + 5 = 15

數字為 8 時：8 + 1 + 6 = 15, 8 + 2 + 5 = 15, 8 + 3 + 4 = 15

數字為 9 時：9 + 1 + 5 = 15, 9 + 2 + 4 = 15

整理如〈表一〉所示：

式子個數	數字	對應位置
2	1、3、7、9	B、D、F、H
3	2、4、6、8	A、C、G、I
4	5	E

〈表一〉

對照〈表一〉，我們依序將數字帶入方陣的各個位置中，發現共可填出八種方陣，如下所示：

2	7	6
9	5	1
4	3	8

8	3	4
1	5	9
6	7	2

6	7	2
1	5	9
8	3	4

4	9	2
3	5	7
8	1	6

6	1	8
7	5	3
2	9	4

8	1	6
3	5	7
4	9	2

4	3	8
9	5	1
2	7	6

2	9	4
7	5	3
6	1	8

接著，將上面所製作出來的八種三階平面方陣加以分析，我們利用座標法的方式，試圖找出三階平面方陣是否有規則可循。首先將 1~9 的數字賦予一個座標，如下所示：

	1	2	3
A	1(A ₁)	2(A ₂)	3(A ₃)
B	4(B ₁)	5(B ₂)	6(B ₃)
C	7(C ₁)	8(C ₂)	9(C ₃)

接著，我們將 1~9 的數字所定義的座標一一的帶入已經找出來的八種三階平面方陣之中，如下所示：

A ₂	C ₁	B ₃
C ₃	B ₂	A ₁
B ₁	A ₃	C ₂

C ₂	A ₃	B ₁
A ₁	B ₂	C ₃
B ₃	C ₁	A ₂

B ₃	C ₁	A ₂
A ₁	B ₂	C ₃
C ₂	A ₃	B ₁

B ₁	C ₃	A ₂
A ₃	B ₂	C ₁
C ₂	A ₁	B ₃

B ₃	A ₁	C ₂
C ₁	B ₂	A ₃
A ₂	C ₃	B ₁

C ₂	A ₁	B ₃
A ₃	B ₂	C ₁
B ₁	C ₃	A ₂

B ₁	A ₃	C ₂
C ₃	B ₂	A ₁
A ₂	C ₁	B ₃

A ₂	C ₃	B ₁
C ₁	B ₂	A ₃
B ₃	A ₁	C ₂

從上面的方陣中，我們發現，每個方陣中的直行、橫行及斜行具有規律性的二個規則存在，即：

規則一：方陣中的正中央所填入數字為數列的中間數。例如：1~9 的數字中，中間數為 5。

規則二：每個直行和橫行中，各個數字所代表的座標依循著由 A→B→C 或 C→B→A 以及從 1→2→3 或 3→2→1 的規律方式，並且每一直行和橫行都不重複。

例如：

C ₂	A ₃	B ₁
A ₁	B ₂	C ₃
B ₃	C ₁	A ₂

上述方陣之規則為，橫行：A→B→C 和 1→2→3

直行：A→B→C 和 3→2→1

〈二〉五階平面方陣之研究

我們利用在三階平面方陣中找出的二個規則來建構五階平面方陣〈1~25〉，以驗證我們假設的這個規則的可行性。

1、**步驟一**：首先將 25 個數字座標化，如下所示。

	1	2	3	4	5
A	1(A ₁)	2(A ₂)	3(A ₃)	4(A ₄)	5(A ₅)
B	6(B ₁)	7(B ₂)	8(B ₃)	9(B ₄)	10(B ₅)
C	11(C ₁)	12(C ₂)	13(C ₃)	14(C ₄)	15(C ₅)
D	16(D ₁)	17(D ₂)	18(D ₃)	19(D ₄)	20(D ₅)
E	21(E ₁)	22(E ₂)	23(E ₃)	24(E ₄)	25(E ₅)

2、**步驟二**：依據規則一，中間數〈C₃：13〉填入中央位置。

		C ₃		

3、**步驟三**：依據規則二，橫行依 A→B→C→D→E 和 1→2→3→4→5 之規則，先將第三橫行按此規則填入。

A ₁	B ₂	C ₃	D ₄	E ₅

4、**步驟四**：直行依 A→B→C→D→E 和 5→4→3→2→1 之規則，依序將五個直行填出。

D ₃	E ₄	A ₅	B ₁	C ₂
E ₂	A ₃	B ₄	C ₅	D ₁
A ₁	B ₂	C ₃	D ₄	E ₅
B ₅	C ₁	D ₂	E ₃	A ₄
C ₄	D ₅	E ₁	A ₂	B ₃

5、**步驟五**：檢驗各直行和橫行所填出的座標是否有依照：直行 A→B→C→D→E 和 5→4→3→2→1、橫行 A→B→C→D→E 和 1→2→3→4→5 之規則。

6、**步驟六**：將各座標所對照之數字填入方陣中：

18	24	5	6	12
22	3	9	15	16
1	7	13	19	25
10	11	17	23	4
14	20	21	2	8

7、**步驟七**：檢驗各直行、橫行及斜行數字之和是否相等。

直行	$18 + 22 + 1 + 10 + 14 = 65$ $24 + 3 + 7 + 11 + 20 = 65$ $5 + 9 + 13 + 17 + 21 = 65$ $6 + 15 + 19 + 23 + 2 = 65$ $12 + 16 + 25 + 4 + 8 = 65$
橫行	$18 + 24 + 5 + 6 + 12 = 65$ $22 + 3 + 9 + 15 + 16 = 65$ $1 + 7 + 13 + 19 + 25 = 65$ $10 + 11 + 17 + 23 + 4 = 65$ $14 + 20 + 21 + 2 + 8 = 65$
斜行	$18 + 3 + 13 + 23 + 8 = 65$ $12 + 15 + 13 + 11 + 14 = 65$

〈三〉七階平面方陣之建構

依照上述的規則，我們可以輕易的建構出七階平面方陣。如下所示：

	1	2	3	4	5	6	7
A	1(A ₁)	2(A ₂)	3(A ₃)	4(A ₄)	5(A ₅)	6(A ₆)	7(A ₇)
B	8(B ₁)	9(B ₂)	10(B ₃)	11(B ₄)	12(B ₅)	13(B ₆)	14(B ₇)
C	15(C ₁)	16(C ₂)	17(C ₃)	18(C ₄)	19(C ₅)	20(C ₆)	21(C ₇)
D	22(D ₁)	23(D ₂)	24(D ₃)	25(D ₄)	26(D ₅)	27(D ₆)	28(D ₇)
E	29(E ₁)	30(E ₂)	31(E ₃)	32(E ₄)	33(E ₅)	34(E ₆)	35(E ₇)
F	36(F ₁)	37(F ₂)	38(F ₃)	39(F ₄)	40(F ₅)	41(F ₆)	42(F ₇)
G	43(G ₁)	44(G ₂)	45(G ₃)	46(G ₄)	47(G ₅)	48(G ₆)	49(G ₇)

依據直行 $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow E \rightarrow F \rightarrow G$ 和 $7 \rightarrow 6 \rightarrow 5 \rightarrow 4 \rightarrow 3 \rightarrow 2 \rightarrow 1$ 、橫行 $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow E \rightarrow F \rightarrow G$ 和 $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 5 \rightarrow 6 \rightarrow 7$ 之規則。

E ₄	F ₅	G ₆	A ₇	B ₁	C ₂	D ₃
F ₃	G ₄	A ₅	B ₆	C ₇	D ₁	E ₂
G ₂	A ₃	B ₄	C ₅	D ₆	E ₇	F ₁
A ₁	B ₂	C ₃	D ₄	E ₅	F ₆	G ₇
B ₇	C ₁	D ₂	E ₃	F ₄	G ₅	A ₆
C ₆	D ₇	E ₁	F ₂	G ₃	A ₄	B ₅
D ₅	E ₆	F ₇	G ₁	A ₂	B ₃	C ₄

填入座標所對應的數字。

32	40	48	7	8	16	24
38	46	5	13	21	22	30
44	3	11	19	27	35	36
1	9	17	25	33	41	49
14	15	23	31	39	47	6
20	28	29	37	45	4	12
26	34	42	43	2	10	18

檢驗各直行、橫行及斜行數字之和是否相等。

直行	$32 + 40 + 48 + 7 + 8 + 16 + 24 = 175$ $38 + 46 + 5 + 13 + 21 + 22 + 30 = 175$ $44 + 3 + 11 + 19 + 27 + 35 + 36 = 175$ $1 + 9 + 17 + 25 + 33 + 41 + 49 = 175$ $14 + 15 + 23 + 31 + 39 + 47 + 6 = 175$ $20 + 28 + 29 + 37 + 45 + 4 + 12 = 175$ $26 + 34 + 42 + 43 + 2 + 10 + 18 = 175$
橫行	$32 + 38 + 44 + 1 + 14 + 20 + 26 = 175$ $40 + 46 + 3 + 9 + 15 + 28 + 34 = 175$ $48 + 5 + 11 + 17 + 23 + 29 + 42 = 175$ $7 + 13 + 19 + 25 + 31 + 37 + 43 = 175$ $8 + 21 + 27 + 33 + 39 + 45 + 2 = 175$ $16 + 22 + 35 + 41 + 47 + 4 + 10 = 175$ $24 + 30 + 36 + 49 + 6 + 12 + 18 = 175$
斜行	$32 + 46 + 11 + 25 + 39 + 4 + 18 = 175$ $24 + 22 + 27 + 25 + 23 + 28 + 26 = 175$

由此可知，我們所假設的規則是可行的。因此，依此規則，亦可建構出九階及十一階……等奇數階平面方陣。

二、奇數階立體方陣

我們試著利用已找出的奇數階平面方陣之規則來建構奇數階立體方陣，並試著找出奇數階立體方陣之規則。

〈一〉三階立體方陣之建構：

步驟一：首先，我們將三階立體方陣所會用到的數字分成三組〈A、B、C 三組〉，如下所示：

A	1	2	3	4	5	6	7	8	9
B	10	11	12	13	14	15	16	17	18
C	19	20	21	22	23	24	25	26	27

步驟二：三階立體方陣為三個三階平面方陣〈上、中、下層〉所組成，所以各組數字應平均分配到各層之中。因此，我們再將各組數字再區分為三組，如下所示

	1			2			3		
A	1	2	3	4	5	6	7	8	9
B	10	11	12	13	14	15	16	17	18
C	19	20	21	22	23	24	25	26	27

步驟三：接著我們開始選取上、中、下層所需的數字。

1、根據奇數階平面方陣之規則一，我們知道數列的中間數應填在中層的中間，所以 B₂ 組的數字〈13、14、15〉會被放置在中層。

2、接著，我們依據奇數階平面方陣之規則二來選取各組數列到上、中、下層，如下所示：

上層	A ₃ (7、8、9)、B ₁ (10、11、12)、C ₂ (22、23、24)
中層	A ₁ (1、2、3)、B ₂ (13、14、15)、C ₃ (25、26、27)
下層	A ₂ (4、5、6)、B ₃ (16、17、18)、C ₁ (19、20、21)

步驟四：開始建構各層方陣。

1、上層：

	1	2	3
A ₃	7	8	9
B ₁	10	11	12
C ₂	22	23	24

⇒

C ₂₂	A ₃₃	B ₁₁
A ₃₁	B ₁₂	C ₂₃
B ₁₃	C ₂₁	A ₃₂

⇒

23	9	10
7	11	24
12	22	8

2、中層：

	1	2	3
A ₁	1	2	3
B ₂	13	14	15
C ₃	25	26	27

⇒

C ₃₂	A ₁₃	B ₂₁
A ₁₁	B ₂₂	C ₃₃
B ₂₃	C ₃₁	A ₁₂

⇒

26	3	13
1	14	27
15	25	2

3、下層：

	1	2	3
A ₂	4	5	6
B ₃	16	17	18
C ₁	19	20	21

⇒

C ₁₂	A ₂₃	B ₃₁
A ₂₁	B ₃₂	C ₁₃
B ₃₃	C ₁₁	A ₂₂

⇒

20	6	16
4	17	21
18	19	5

步驟五：綜合上述結果。

上層	中層	下層																											
<table> <tr><td>23</td><td>9</td><td>10</td></tr> <tr><td>7</td><td>11</td><td>24</td></tr> <tr><td>12</td><td>22</td><td>8</td></tr> </table>	23	9	10	7	11	24	12	22	8	<table> <tr><td>26</td><td>3</td><td>13</td></tr> <tr><td>1</td><td>14</td><td>27</td></tr> <tr><td>15</td><td>25</td><td>2</td></tr> </table>	26	3	13	1	14	27	15	25	2	<table> <tr><td>20</td><td>6</td><td>16</td></tr> <tr><td>4</td><td>17</td><td>21</td></tr> <tr><td>18</td><td>19</td><td>5</td></tr> </table>	20	6	16	4	17	21	18	19	5
23	9	10																											
7	11	24																											
12	22	8																											
26	3	13																											
1	14	27																											
15	25	2																											
20	6	16																											
4	17	21																											
18	19	5																											

步驟六：檢驗各直行、橫行及斜行的數字和。

- 1、上、中、下層各平面方陣之直行及橫行的數字和皆為 42。
- 2、中層之兩條斜行的數字和為 42；但上層及下層僅其中一條斜行的數字和為 42。
- 3、三階立體方陣之斜行的數字和皆為 42。
例： $23 + 14 + 5 = 42$
- 4、三階立體方陣之直行的數字和皆非 42。
例： $23 + 26 + 20 = 69$

由上述四點中，發現我們的推論有錯誤之處：僅平面各層之直行和橫行以及立體之斜行符合數字和為 42。在經過與老師討論後，我們做了以下的修正：

步驟一：首先將各數字座標化。

	1			2			3		
	1	2	3	1	2	3	1	2	3
A	1(A ₁₁)	2(A ₁₂)	3(A ₁₃)	4(A ₂₁)	5(A ₂₂)	6(A ₂₃)	7(A ₃₁)	8(A ₃₂)	9(A ₃₃)
B	10(B ₁₁)	11(B ₁₂)	12(B ₁₃)	13(B ₂₁)	14(B ₂₂)	15(B ₂₃)	16(B ₃₁)	17(B ₃₂)	18(B ₃₃)
C	19(C ₁₁)	20(C ₁₂)	21(C ₁₃)	22(C ₂₁)	23(C ₂₂)	24(C ₂₃)	25(C ₃₁)	26(C ₃₂)	27(C ₃₃)

步驟二：依據奇數階平面方陣之規則二來選取各組數列到上、中、下層，如下所示：

上層	$A_3(7、8、9)、B_1(10、11、12)、C_2(22、23、24)$
中層	$A_1(1、2、3)、B_2(13、14、15)、C_3(25、26、27)$
下層	$A_2(4、5、6)、B_3(16、17、18)、C_1(19、20、21)$

步驟三：由前次的經驗可以知道，原本的方式所建構之中層的直行、橫和及斜行之數字和皆為 42，因此我們先建構中層。如下所示：

C_{32}	A_{13}	B_{21}
A_{11}	B_{22}	C_{33}
B_{23}	C_{31}	A_{12}

步驟四：立體方陣之平面的直行、橫行以及立體的直行的數字和均需相等，因此各層間的座標亦需要交錯。因此，我們利用已建構好的中層來推論上層及下層，如下所示：

上層	中層	下層
B_{11}	C_{32}	A_{23}
C_{23}	A_{11}	B_{32}
A_{32}	B_{23}	C_{11}
C_{22}	A_{13}	B_{31}
A_{31}	B_{22}	C_{13}
B_{12}	C_{33}	A_{21}
C_{21}	A_{12}	B_{33}

步驟五：將座標所對應之數字填入方陣中。

上層	中層	下層
10	26	6
24	1	17
8	15	19
23	3	16
7	14	21
12	25	5
9	13	20
11	27	4
22	2	18

步驟六：檢驗各直行、橫行及斜行之數字和。

- 1、上、中、下層各平面之直行及橫行的數字和皆為 42。
- 2、中層之斜行的數字和為 42；但上層及下層僅之斜行的數字和皆不等於 42。
- 3、三階立體方陣之直行的數字和皆為 42。

例： $10 + 26 + 6 = 42$

- 4、三階立體方陣之斜行的數字和皆為 42。

例： $10 + 14 + 18 = 42$

由上述的四點來看，依照我們修改後的規則所建構的三階立體方陣，其上、中、下層之直行和橫行以及立體之直行和斜行的數字和皆為 42，但是立體方陣各平面之斜行的數字和則皆不等於 42。以立體的觀點來看，立體方陣之各直行、橫行及立體斜行之數字和均為 42，已經符合我們所期待之三階立體方陣的型態了。其規則分述如下：

規則一：先將 1~27 的數字分成三組〈A、B、C 三組〉，三組數字再細分成三小組。

規則二：中間數字必落於中層，因此選取各組數字時，由中層先選取，選取其他各組數字時，需依據平面方陣建構之規則來選取。

規則三：各層數字選取後，先由中層開始建構，建構之規則與平面方陣之規則相同。

規則四：中層建構完成後，其他兩層與中層的座標需要交錯，建構的方式與建構平面方陣之規則相同，只有差別在其他兩層不是將中間數填在中間的位置。如下所示：

上層			中層			下層		
B ₁₁	C ₂₂	A ₃₃	C ₃₂	A ₁₃	B ₂₁	A ₂₃	B ₃₁	C ₁₂
C ₂₃	A ₃₁	B ₁₂	A ₁₁	B ₂₂	C ₃₃	B ₃₂	C ₁₃	A ₂₁
A ₃₂	B ₁₃	C ₂₁	B ₂₃	C ₃₁	A ₁₂	C ₁₁	A ₂₂	B ₃₃

〈二〉五階立體方陣之建構

我們利用三階立體方陣所找出的規則，試著建構出五階立體方陣，以檢驗我們所找出之規則，是否可以通用在各奇數階立體方陣中。

1、將 1~125 數字分組，並予以座標化。

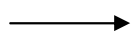
	1	2	3	4	5
A	1.2.3.4.5	6.7.8.9.10	11.12.13.14.15	16.17.18.19.20	21.22.23.24.25
B	26.27.28.29.30	31.32.33.34.35	36.37.38.39.40	41.42.43.44.45	46.47.48.49.50
C	51.52.53.54.55	56.57.58.59.60	61.62.63.64.65	66.67.68.69.70	71.72.73.74.75
D	76.77.78.79.80	81.82.83.84.85	86.87.88.89.90	91.92.93.94.95	96.97.98.99.100
E	101.102.103.104.105	106.107.108.109.110	111.112.113.114.115	116.117.118.119.120	121.122.123.124.125

2、選取各層數字：

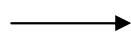
第一層	A ₄ 、B ₅ 、C ₁ 、D ₂ 、E ₃
第二層	A ₅ 、B ₁ 、C ₂ 、D ₃ 、E ₄
第三層	A ₁ 、B ₂ 、C ₃ 、D ₄ 、E ₅
第四層	A ₂ 、B ₃ 、C ₄ 、D ₅ 、E ₁
第五層	A ₃ 、B ₄ 、C ₅ 、D ₁ 、E ₂

3、製作過程如下：

選取各層數字



數字座標化



填入各層數字

第一層

A4	16	17	18	19	20
B5	46	47	48	49	50
C1	51	52	53	54	55
D2	81	82	83	84	85
E3	111	112	113	114	115

B51	C12	D23	E34	A45
C15	D21	E32	A43	B54
D24	E35	A41	B52	C13
E33	A44	B55	C11	D22
A42	B53	C14	D25	E31

46	52	83	114	20
55	81	112	18	49
84	115	16	47	53
113	19	50	51	82
17	48	54	85	111

第二層

A5	21	22	23	24	25
B4	26	27	28	29	30
C3	56	57	58	59	60
D2	86	87	88	89	90
E1	116	117	118	119	120

C22	D33	E44	A55	B11
D31	E42	A53	B14	C25
E45	A51	B12	C23	D34
A54	B15	C21	D32	E43
B13	C24	D35	E41	A52

57	88	119	25	26
86	117	23	29	60
120	21	27	58	89
24	30	56	87	118
28	59	90	116	22

第三層

A1	1	2	3	4	5
B5	31	32	33	34	35
C4	61	62	63	64	65
D3	91	92	93	94	95
E2	121	122	123	124	125

D43	E54	A15	B21	C32
E52	A13	B24	C35	D41
A11	B22	C33	D44	E55
B25	C31	D42	E53	A14
C34	D45	E51	A12	B23

93	124	5	31	62
122	3	34	65	91
1	32	63	94	125
35	61	92	123	4
64	95	121	2	33

第四層

A2	6	7	8	9	10
B1	36	37	38	39	40
C5	66	67	68	69	70
D4	96	97	98	99	100
E3	101	102	103	104	105

E14	A25	B31	C42	D53
A23	B34	C45	D51	E12
B32	C43	D54	E15	A21
C41	D52	E13	A24	B35
D55	E11	A22	B33	C44

104	10	36	67	98
8	39	70	96	102
37	68	99	105	6
66	97	103	9	40
100	101	7	38	69

第五層

A3	11	12	13	14	15
B2	41	42	43	44	45
C1	71	72	73	74	75
D5	76	77	78	79	80
E4	106	107	108	109	110

A35	B41	C52	D13	E24
B44	C55	D11	E22	A33
C53	D14	E25	A31	B42
D12	E23	A34	B45	C51
E21	A32	B43	C54	D15

15	41	72	78	109
44	75	76	107	13
73	79	110	11	42
77	108	14	45	71
106	12	43	74	80

檢驗各層直行、橫行及立體斜行之數字和皆為 315。因此，可以知道我們所找出的規則可適用於各奇數階立體方陣中。

陸、研究結果

本研究主要在探討奇數階平面方陣及奇數階立體方陣之規則。經由以上研究的過程，我們發現奇數階平面方陣及奇數階立體方陣有一定之規則可循，其規則分述如下：

一、奇數階平面方陣之規則

規則一：平面方陣中的正中央所填入數字為數列的中間數。

例如：在 1~9 的數字中為 5，在 1~25 的數字中為 13。

規則二：每條直行及橫行中，各行數字所代表的座標遵循著一定規律方式，座標依照 A → B → C 或 C → B → A，以及從 1 → 2 → 3 或 3 → 2 → 1 的規則，並且都不重複。

例如：

C ₂	A ₃	B ₁
A ₁	B ₂	C ₃
B ₃	C ₁	A ₂

上述方陣之規則為，橫行：A → B → C 和 1 → 2 → 3

直行：A → B → C 和 3 → 2 → 1

二、奇數階立體方陣之規則

規則一：依據階數，將所有數字分組，並將所有數字座標化。

例如：三階立體方陣中，則將數字分成三組〈A、B、C 三組〉，三組數字再細分成三小組，並賦予各個數字座標，如下所示：

	1			2			3		
	1	2	3	1	2	3	1	2	3
A	1(A ₁₁)	2(A ₁₂)	3(A ₁₃)	4(A ₂₁)	5(A ₂₂)	6(A ₂₃)	7(A ₃₁)	8(A ₃₂)	9(A ₃₃)
B	10(B ₁₁)	11(B ₁₂)	12(B ₁₃)	13(B ₂₁)	14(B ₂₂)	15(B ₂₃)	16(B ₃₁)	17(B ₃₂)	18(B ₃₃)
C	19(C ₁₁)	20(C ₁₂)	21(C ₁₃)	22(C ₂₁)	23(C ₂₂)	24(C ₂₃)	25(C ₃₁)	26(C ₃₂)	27(C ₃₃)

規則二：中間數字必落於中層，選取各組數字時，由中層先選取，其他層選取各組數字時，需依據平面方陣建構之規則來選取。

規則三：各層數字選取後，先由中層開始建構，建構之規則與平面方陣之規則相同。

規則四：中層建構完成後，其他各層與中層的座標需要交錯，建構的方式與建構平面方陣的規則相同。

例如：以三階立體方陣為例，只有差別在其他各層並非將中間數填在中間的位置，而是與中層之座標交錯填入。如下所示：

上層	中層	下層
B ₁₁	C ₃₂	A ₂₃
C ₂₃	A ₁₃	B ₃₁
A ₃₂	B ₂₂	C ₁₂
C ₂₁	C ₃₁	B ₃₂
	A ₁₂	C ₂₁
		A ₂₂
		B ₃₃

柒、討論

在剛接觸這個問題時，我們一開始是採用土法煉鋼的方法，利用硬湊帶入數字的方式。在研究三階平面方陣時，土法煉鋼的方法固然可以很輕易的將三階平面方陣填出來，但是在研究五階平面方陣時，發現這樣的帶入法是窒礙難行的，必須使用有系統、有規則的方式來解決問題，否則幾乎只是在做白工而已。

在找出奇數階平面方陣後，我們試著利用這樣的規則來建構奇數階立體方陣，剛開始也遇到數次的挫折，但是經過多次的討論與修正，終於將奇數階立體方陣之規則找出，雖然我們所找出的規則並無法建構出最完美的立體方陣〈平面斜行之數字和不相等〉，但是依此規則，依然可以建構出幾近完美的五階立體方陣。

這次的研究中我們發現：偶數階方陣的填寫較奇數階方陣困難許多，且規則較難建立，因此我們將這次的研究重點都放在奇數階方陣中，而偶數階方陣則將是我們未來繼續努力的方向和目標。

捌、結論

經過這次與老師和同學共同研究這個問題的過程中，讓我們發現數學有許多迷人的地方。一個看似平凡的方陣中，沒想到隱含了這麼多的數學問題，而在解決問題的過程中，也讓我們學習到，運用有系統的方式來思考一個問題，竟然可以將問題變得很簡單，讓原本埋首於加法算式中苦算的我們，變成了填數字遊戲。生活中一定還有許多有趣的數學存在，正等待著我們共同去發現與探索。

玖、參考資料

凡異出版社〈民 88〉數學的神秘與奇趣。新竹市，凡異出版社。

李國賢〈民 91〉數學魔方陣。台北市，林鬱文化出版社。

蔡聰明〈民 91〉數學的發現趣談。台北市，三民書局股份有限公司。

南一書局〈民 93〉國民小學數學教學指引第十冊。台南，南一書局。

中華民國第四十五屆中小學科學展覽會
評 語

國小組 數學科

最佳團隊合作獎

080404

方陣之美

苗栗縣竹南鎮竹南國民小學

評語：

研究過程嚴謹，立體方陣的探討是本研究最大的特色，唯平面方陣的部分較無創新，且只探討奇數階方陣，甚是可惜。