中華民國第四十五屆中小學科學展覽會
作品說明書

國小組 數學科

最佳(鄉土)教材獎

080403

“蜂“雲在“棋“—蜂巢棋盤遊戲與階梯三角立方體的聯想

國立花蓮師範學院附設實驗國民小學

作者姓名：

小六 曾德維 小六 葉品聰 小六 游皓程

小六 張瑋真

指導老師：

顏凰如 洪錦泉

中華民國第四十五屆中小學科學展覽會

作品說明書

科　　別：數學科

組　　別：國小組

作品名稱："蜂"雲在"棋"　——　蜂巢棋盤遊戲與階梯三角

立方體的聯想

關 鍵 詞：蜂巢棋盤、廝殺、階梯三角立方體

編　　號：

“蜂”雲在“棋”—— 蜂巢棋盤遊戲與階梯三角立方體的聯想

目　　錄

“蜂”雲在“棋” —— 蜂巢棋盤遊戲與階梯三角立方體的聯想

壹、 摘要

在「葛老爹數學推理遊戲叢書」中發現，蜜蜂們下棋的棋盤很特別，棋盤中每個格子的形狀像極了蜂巢的六邊形，我們就稱它為「蜂巢棋盤」。

針對葛老爹的遊戲玩法，我們發現只要知道蜂巢棋盤的層數，就可以很快算出正六邊形個數總和；知道城堡數(棋子)，可以很快算出擺法總數。我們又發現其擺法總數與排列組合的計算結果不謀而合。

因為我們喜歡下棋，於是就嘗試著發明出一種可以兩人對抗的蜂巢棋遊戲，並從各種棋步的紀錄裡，找出立於不敗之地的秘訣。

同學無意間在正六邊形中加上 Y 字，使得平面的蜂巢棋盤成了擬似立方體的圖形，這個新發現，激起我們再探討「階梯三角立方體」圖形，最後找到了立方體個數總和可由階差級數求和的方法中得到快速的計算式子。

貳、 研究動機

有天，皓程同學帶了一系列「葛老爹數學推理遊戲叢書」到校，我發現其中有一篇「愛麗絲漫遊蜜蜂奇境」，故事中愛麗絲到了一個蜜蜂奇境，每隻蜜蜂都會下棋，棋盤很特別，棋盤中每個格子的形狀像極了蜂巢的六邊形，和我在棋藝社裡下的圍棋、象棋是四邊形的格子與跳棋是三角形的格子有很大的差異，這樣的差異使我覺得很有趣，我把這種圖形所形成的棋盤稱為「蜂巢棋盤」。因為我喜歡下棋，於是便異想天開地想要運用這個特別的蜂巢棋盤，創造出另類且屬於我們自己的新玩法，我們開始試著找出它可行的遊戲規則，同時發現蜂巢棋盤中，正六邊形由上到下遞增的組合和我們五上數學第九單元「體積與表面積」有關，因此我和皓程就邀請了兩位志同道合的同學，一起來研究這個有趣的題目。

參、研究目的

一、 探討不同層數的蜂巢棋盤與正六邊形個數總和的關係。
二、 探討在不斷殺情況下，能快速找出不同層數的蜂巢棋盤中，擺放最多的城堡數量。
三、 探討蜂巢棋盤遊戲規則的訂定並找出立於不敗之地的遊戲方法。
四、 探討階梯三角立方體階數與立方體個數總和的關係。

肆、研究問題

一、 如何算出蜂巢棋盤內正六邊形的個數總和？
二、 在不同層數的蜂巢棋盤中，數目不同的城堡數所能擺放的方法各有多少種？
三、 在不廝殺情況下，不同層數的蜂巢棋盤上所能擺放數量最多的城堡為多少？
四、 如何找出蜂巢棋盤層數和城堡個數之間的關係？
五、 找出快速且正確計算城堡數的方法。
六、 如何訂定蜂巢棋盤的遊戲規則？
七、 依蜂巢棋盤的遊戲規則，要如何進行才能立於不敗之地？
八、 找出階梯三角立方體的階數和立方體總數的關係。
九、 找出快速且正確計算階梯三角立方體總數的方法。

伍、名詞解釋

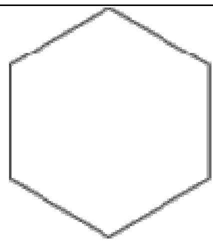
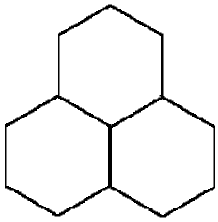
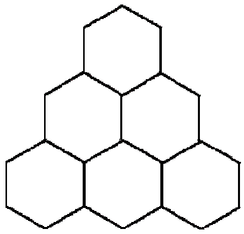
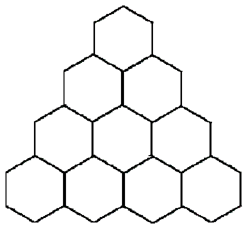
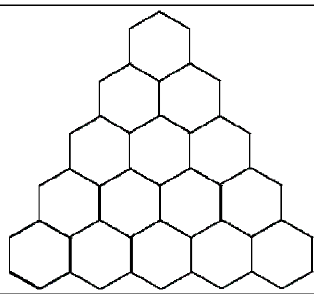
一、 蜂巢棋盤：正六邊形由上而下排列，且第一層個數為 1 個，第二層個數為 2 個，以此類推所組成的近似正三角形的圖案。
二、 城堡（棋子）：蜂巢棋盤中每個正六邊形中心的黑點。
三、 路線：蜂巢棋盤上的城堡或棋子，移動的方向是直線前進，且必須經過相鄰的格子。
四、 涵蓋：蜂巢棋盤上，一棋子可活動的所有路線總稱。
五、 廝殺：後一個城堡（棋子）擺入其他城堡（棋子）的涵蓋內，所產生的結果。
六、 階梯三角立方體：從實體的正視、側視和俯視觀察，均是若干個正立方體遞增或遞減所組成的階梯圖形。

陸、研究工具

一、 紙　二、 筆　　三、 棋子

柒、研究過程與方法

【問題一】如何算出蜂巢棋盤內正六邊形的個數總和？

蜂巢棋盤層數	圖　　　示
1 層蜂巢棋盤	
2 層蜂巢棋盤	
3 層蜂巢棋盤	
4 層蜂巢棋盤	
5 層蜂巢棋盤	

【附件一】5 層蜂巢棋盤總棋步輸贏大公開

1、先：1-7、7-9　WIN
　　後：5-3　　　LOSE

2、先：1-7、7-2　、2-7　、7-9　WIN
　　後：5-6、6-15、15-3　　　LOSE

3、先：1-7、7-2　、2-9　、9-10　LOSE
　　後：5-6、6-15、15-12、12-5　WIN

4、先：1-7、7-2　、2-9　、9-6　、6-1　、1-10　LOSE
　　後：5-6、6-15、15-12、12-14、14-12、12-5　WIN

5、先：1-7、7-2　、2-9　、9-6　、6-1
　　後：5-6、6-15、15-12、12-14、14-5　CYCLE

==

6、先：1-7、7-2　、2-9　、9-6　、6-4　、4-6
　　後：5-6、6-15、15-12、12-14、14-12、12-14　∞

7、先：1-7、7-2　、2-9　、9-6　、6-4　、4-1　、1-7　LOSE
　　後：5-6、6-15、15-12、12-14、14-12、12-14、14-5　WIN

8、先：1-7、7-2　、2-9　、9-6　、6-4　、4-1
　　後：5-6、6-15、15-12、12-14、14-12、12-5　CYCLE

9、先：1-7、7-2　、2-9　、9-14　LOSE
　　後：5-6、6-15、15-3、3-8　WIN

10、先：1-7、7-2　、2-9　、9-13、13-11
　　後：5-6、6-15、15-3、3-10、10-8　CYCLE

11、先：1-7、7-2　、2-9　、9-13、13-11、11-14　LOSE
　　後：5-6、6-15、15-3、3-10、10-3　、3-8　WIN

==

12、先：1-7、7-2　、2-9　、9-13、13-4、4-11
　　後：5-6、6-15、15-3、3-10、10-3、3-8　CYCLE

13、先：1-7、7-2　、2-9　、9-13、13-4、4-11、11-2　LOSE
　　後：5-6、6-15、15-3、3-10、10-3、3-10、10-8　WIN

14、先：1-7、7-2 、2-9 、9-13、13-4、4-13、13-4
後：5-6、6-15、15-3、3-10、10-3、3-10、10-3 ∞

15、先：1-7、7-2 、2-9 、9-13、13-4、4-13、13-11、11-14 LOSE
後：5-6、6-15、15-3、3-10、10-3、3-10、10-3 、3-8 WIN

16、先：1-7、7-2 、2-9 、9-13、13-4、4-13、13-11
後：5-6、6-15、15-3、3-10、10-3、3-10、10-8 CYCLE

17、先：1-7、7-2 、2-7 、7-2 、2-7 、7-2
後：5-6、6-13、13-6、6-13、13-6、6-13 ∞

18、先：1-7、7-2 、2-7 、7-2 、2-7 、7-2 、2-9 WIN
後：5-6、6-13、13-6、6-13、13-15、15-12 LOSE

19、先：1-7、7-2 、2-7 、7-2 、2-7 、7-9 、9-10 LOSE
後：5-6、6-13、13-6、6-13、13-15、15-12、12-5 WIN

20、先：1-7、7-2 、2-7 、7-2 、2-7 、7-9 、9-6 、6-1
後：5-6、6-13、13-6、6-13、13-15、15-12、12-14、14-5 CYCLE

21、先：1-7、7-2 、2-7 、7-2 、2-7 、7-9 、9-6 、6-1 、1-10 LOSE
後：5-6、6-13、13-6、6-13、13-15、15-12、12-14、14-12、12-5 WIN

==

22、先：1-7、7-2 、2-7 、7-2 、2-7 、7-9 、9-6 、6-4 、4-6
後：5-6、6-13、13-6、6-13、13-15、15-12、12-14、14-12、12-14 ∞

23、先：1-7、7-2 、2-7 、7-2 、2-7 、7-9 、9-6 、6-4 、4-1
後：5-6、6-13、13-6、6-13、13-15、15-12、12-14、14-12、12-5 CYCLE

24、先：1-7、7-2 、2-7 、7-2 、2-7 、7-9 、9-6 、6-4 、4-1 、1-7 LOSE
後：5-6、6-13、13-6、6-13、13-15、15-12、12-14、14-12、12-14、14-5 WIN

25、先：1-7、7-2 、2-7 、7-2 、2-7 、7-9 、9-14 LOSE
後：5-6、6-13、13-6、6-13、13-15、15-3、3-8 WIN

26、先：1-7、7-2 、2-7 、7-2 、2-7 、7-9 、9-13、13-11
後：5-6、6-13、13-6、6-13、13-15、15-3、3-10、10-8 CYCLE

27、先：1-7、7-2 、2-7 、7-2 、2-7 、7-9 、9-13、13-11、11-14 LOSE
後：5-6、6-13、13-6、6-13、13-15、15-3、3-10、10-3 、3-8 WIN

28、先：1-7、7-2 、2-7 、7-2 、2-7 、7-9 、9-13、13-4、4-11
後：5-6、6-13、13-6、6-13、13-15、15-3、3-10、10-3、3-8 CYCLE

29、先：1-7、7-2 、2-7 、7-2 、2-7 、7-9 、9-13、13-4、4-11、11-2 LOSE
後：5-6、6-13、13-6、6-13、13-15、15-3、3-10、10-3、3-10、10-8 WIN

30、先：1-7、7-2 、2-7 、7-2 、2-7 、7-9 、9-13、13-4、4-13、13-4
後：5-6、6-13、13-6、6-13、13-15、15-3、3-10、10-3、3-10、10-3 ∞

31、先：1-7、7-2 、2-7 、7-2 、2-7 、7-9 、9-13、13-4、4-13、13-11
後：5-6、6-13、13-6、6-13、13-15、15-3、3-10、10-3、3-10、10-8 CYCLE

32、先：1-7、7-2 、2-7 、7-2 、2-7 、7-9 、9-13、13-4、4-13、13-11、11-14 LOSE
後：5-6、6-13、13-6、6-13、13-15、15-3、3-10、10-3、3-10、10-3 、3-8 WIN

===

33、先：1-7、7-2 、2-7 、7-2 、2-7 、7-9 WIN
後：5-6、6-13、13-6、6-15、15-3 LOSE

34、先：1-7、7-2 、2-7 、7-2 、2-9 、9-14 LOSE
後：5-6、6-13、13-6、6-15、15-3、3-8 WIN

35、先：1-7、7-2 、2-7 、7-2 、2-9 、9-13、13-11
後：5-6、6-13、13-6、6-15、15-3、3-10、10-8 CYCLE

36、先：1-7、7-2 、2-7 、7-2 、2-9 、9-13、13-11、11-14 LOSE
後：5-6、6-13、13-6、6-15、15-3、3-10、10-3 、3-8 WIN

37、先：1-7、7-2 、2-7 、7-2 、2-9 、9-13、13-4、4-11、11-2 LOSE
後：5-6、6-13、13-6、6-15、15-3、3-10、10-3、3-10、10-8 WIN

38、先：1-7、7-2 、2-7 、7-2 、2-9 、9-13、13-4、4-11
後：5-6、6-13、13-6、6-15、15-3、3-10、10-3、3-8 CYCLE

39、先：1-7、7-2 、2-7 、7-2 、2-9 、9-13、13-4、4-13、13-11
後：5-6、6-13、13-6、6-15、15-3、3-10、10-3、3-10、10-8 CYCLE

40、先：1-7、7-2 、2-7 、7-2 、2-9 、9-13、13-4、4-13、13-11、11-14 LOSE
後：5-6、6-13、13-6、6-15、15-3、3-10、10-3、3-10、10-3、3-8 WIN

41、先：1-7、7-2 、2-7 、7-2 、2-9 、9-13、13-4、4-13、13-4
後：5-6、6-13、13-6、6-15、15-3、3-10、10-3、3-10、10-3 ∞

===

42、先：1-7、7-2 、2-7 、7-2 、2-9 、9-10 LOSE
後：5-6、6-13、13-6、6-15、15-12、12-5 WIN

43、先：1-7、7-2 、2-7 、7-2 、2-9 、9-6 、6-4 、4-1 、1-7 LOSE
後：5-6、6-13、13-6、6-15、15-12、12-14、14-12、12-14、14-5 WIN

44、先：1-7、7-2 、2-7 、7-2 、2-9 、9-6 、6-4 、4-1
後：5-6、6-13、13-6、6-15、15-12、12-14、14-12、12-5 CYCLE

45、先：1-7、7-2 、2-7 、7-2 、2-9 、9-6 、6-4 、4-6 、6-4
後：5-6、6-13、13-6、6-15、15-12、12-14、14-12、12-14、14-12 ∞

46、先：1-7、7-2 、2-7 、7-2 、2-9 、9-6 、6-4 、4-6 、6-1 、1-10 LOSE
後：5-6、6-13、13-6、6-15、15-12、12-14、14-12、12-14、14-12、12-5 WIN

47、先：1-7、7-2 、2-7 、7-2 、2-9 、9-6 、6-4 、4-6 、6-1
後：5-6、6-13、13-6、6-15、15-12、12-14、14-12、12-14、14-5 CYCLE

48、先：1-7、7-2 、2-7 、7-2 、2-9 、9-6 、6-4 、4-6
後：5-6、6-13、13-6、6-15、15-12、12-14、14-12、12-14 ∞

49、先：1-7、7-2 、2-7 、7-2 、2-9 、9-6 、6-1 、1-10 LOSE
後：5-6、6-13、13-6、6-15、15-12、12-14、14-12、12-5 WIN

50、先：1-7、7-2 、2-7 、7-2 、2-9 、9-6 、6-1
後：5-6、6-13、13-6、6-15、15-12、12-14、14-5 CYCLE

※ 棋步 51 至 62 省略

63、先：1-7、7-2 、2-7 、7-9 、9-13、13-4、4-13、13-11
後：5-6、6-13、13-15、15-3、3-10、10-3、3-10、10-8 CYCLE

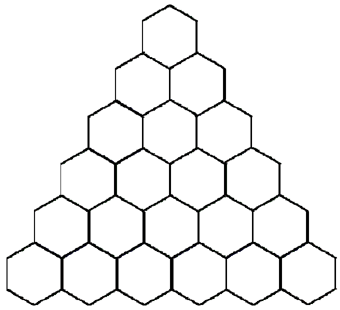
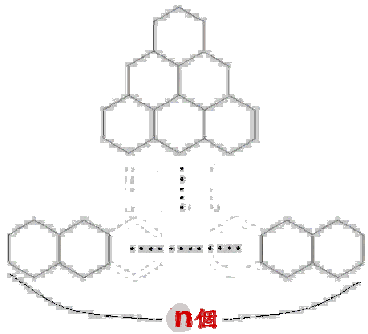
64、先：1-7、7-2 、2-7 、7-9 、9-13、13-4、4-13、13-4
後：5-6、6-13、13-15、15-3、3-10、10-3、3-10、10-3 ∞

65、先：1-7、7-2 、2-7 、7-9 、9-13、13-4、4-11、11-2 LOSE
後：5-6、6-13、13-15、15-3、3-10、10-3、3-10、10-8 WIN

66、先：1-7、7-2 、2-7 、7-9 、9-13、13-4、4-11
後：5-6、6-13、13-15、15-3、3-10、10-3、3-8 CYCLE

【結論】

一、 先贏的走法有 5 種；後贏的走法有 30 種；循環的走法有 22 種；無限的走法有 9 種。
二、 經由實驗發現，起始爲 1、5 的位置開始下棋，玩法可爲最多種。
三、 最後下到 5、8、9 位置的玩家，都能贏得勝利。

6 層蜂巢棋盤	
. . .	. . .
n 層蜂巢棋盤	

【發現】 1 層蜂巢棋盤，蜂巢棋盤裡的正六邊形個數總和是 1
2 層蜂巢棋盤，蜂巢棋盤裡的正六邊形個數總和爲 1＋2
3 層蜂巢棋盤，蜂巢棋盤裡的正六邊形個數總和爲 1＋2＋3
4 層蜂巢棋盤，蜂巢棋盤裡的正六邊形個數總和爲 1＋2＋3＋4
5 層蜂巢棋盤，蜂巢棋盤裡的正六邊形個數總和爲 1＋2＋3＋4＋5
6 層蜂巢棋盤，蜂巢棋盤裡的正六邊形個數總和爲 1＋2＋3＋4＋5＋6

.
.
.

10 層蜂巢棋盤，蜂巢棋盤裡的正六邊形個數總和爲 1＋2＋⋯＋9＋10

＝＞上列的算式我們可以利用已學過的梯形面積公式＝ $\frac{(\text{上底}+\text{下底})\times\text{高}}{2}$

以及 連續數總和 ＝ $\frac{(\text{大數}+\text{小數})\times\text{個數}}{2}$ 的方法就可以快速算出來。

所以蜂巢棋盤裡六邊形個數的總和分別是 1、3、6、10、15、21、⋯⋯⋯

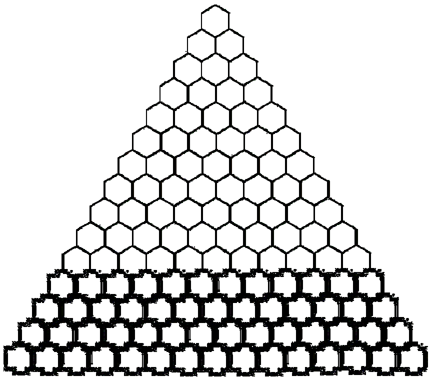
例：　15 層蜂巢棋盤如圖

則　蜂巢棋盤裡六邊形的個數總和為

$1 + 2 + 3 + \cdots\cdots + 15$

$= (1 + 15) \times 15 \div 2$

$= 120$

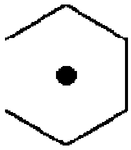


【結果】n 層蜂巢棋盤內正六邊形的個數總和有 $\frac{n(n+1)}{2}$ 個

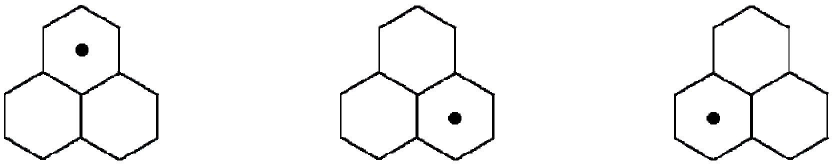
【問題二】在不同層數的蜂巢棋盤中，所能擺放城堡個數的方法有多少種？

＊ 1 層蜂巢棋盤，六邊形個數總和是 1 ，城堡個數是 1 時擺法如下圖：

＝＞擺法只有一種

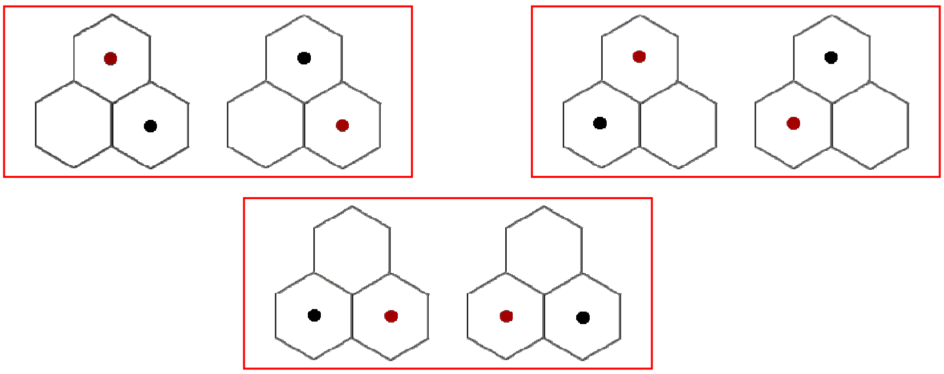


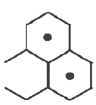
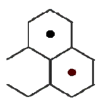
＊ 2 層蜂巢棋盤，六邊形個數總和是 3，城堡個數是 1 時擺法如下圖：



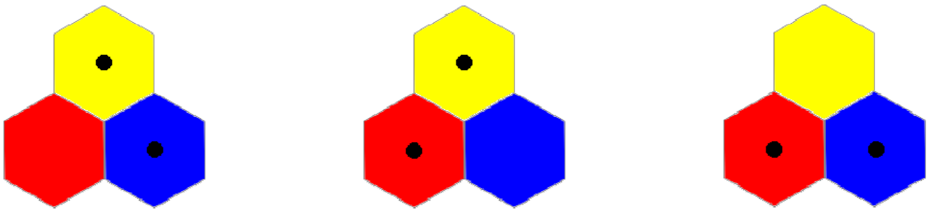
＝＞擺法共有 3 種〔有 3 個正六邊形，每次選擇 1 個正六邊形擺放 1 個城堡，就是 1 種擺法，所以有 3 種擺法〕

＊ 2 層蜂巢棋盤，正六邊形個數總和是 3，城堡個數是 2 時擺法如下圖：

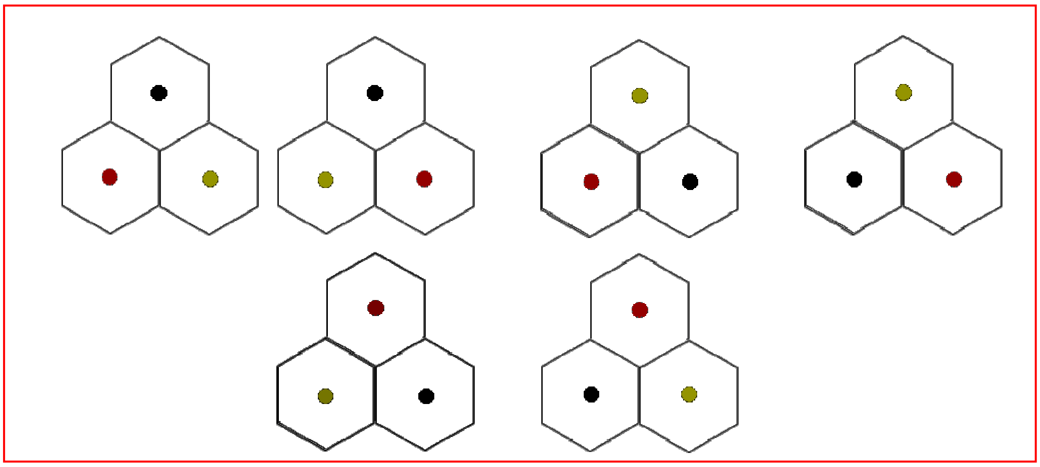


＝＞擺法共有三種〔有 3 個正六邊形，同時擺放兩個城堡，2 個城堡位置順序對調的方法有 2 種，實際上都是同 1 種擺法，像  和 

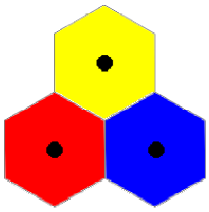
即是同 1 種擺法，所以在此條件下，擺法只有 3 種（$\frac{6}{2}$）〕如下圖：



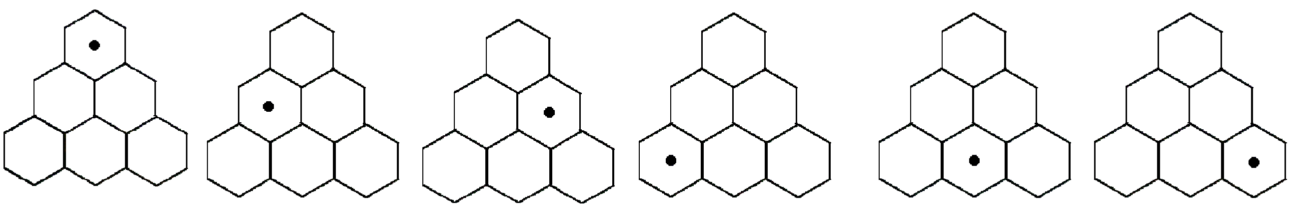
＊ 2 層蜂巢棋盤，正六邊形個數總和是 3，城堡個數是 3，擺法如下圖



＝＞**擺法只有一種**〔有 3 個六邊形同時擺放 3 個城堡，3 個城堡位置順序對調的方法有 6 種，實際上都是同 1 種擺法，所以在此條件下，擺法只有 1 種（$\frac{6}{6}$）〕如下圖：



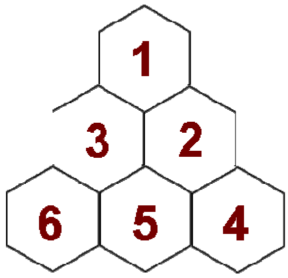
＊ 3 層蜂巢棋盤，正六邊形個數總和是 6，城堡個數是 1 時，
所有的擺法如下圖：



＝＞**擺法共有 6 種**〔有 6 個正六邊形，每次選擇 1 個正六邊形擺放 1 個城堡，就是 1 種擺法，所以有 6 種擺法（$\frac{6}{1}$）〕

＊ 3 層蜂巢棋盤，正六邊形個數總和是 6，城堡個數是 2 時

【說明】我們爲每一個正六邊形編上數字 1-6 的號碼，以方便表示出城堡擺放的方法。（如右圖）

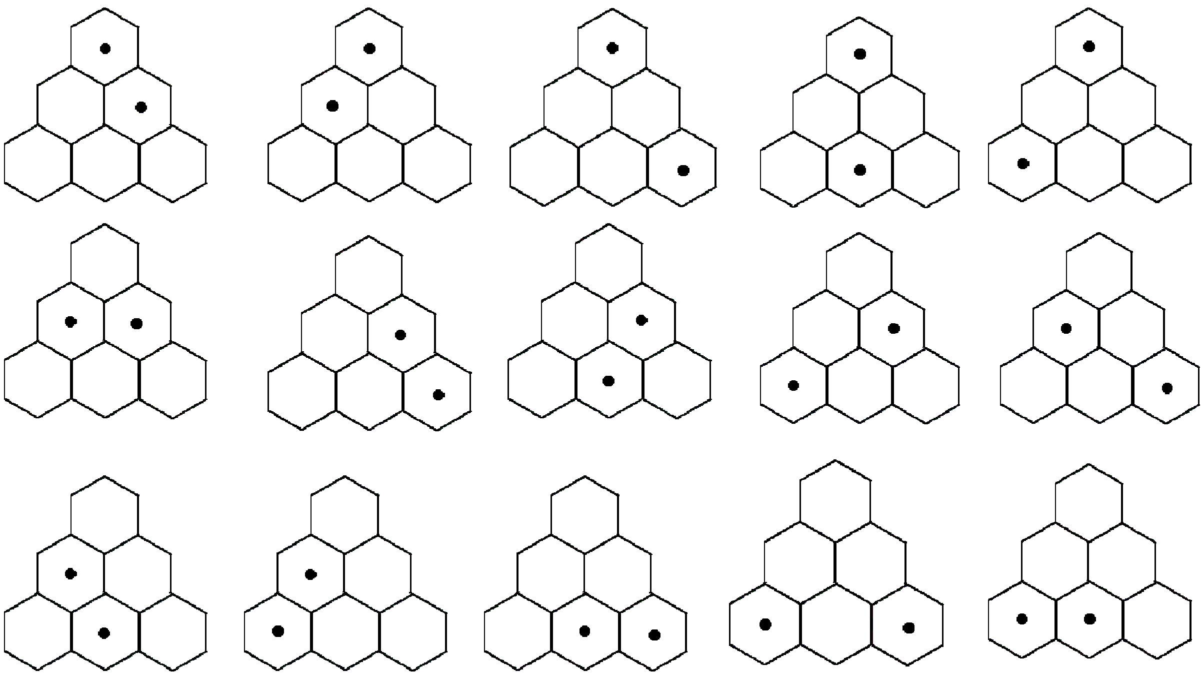


所有擺法代號如下：

（1,2）	（2,1）
（1,3）	（3,1）
（1,4）	（4,1）
（1,5）	（5,1）
（1,6）	（6,1）
（2,3）	（3,2）
（2,4）	（4,2）
（2,5）	（5,2）

（2,6）	（6,2）
（3,4）	（4,3）
（3,5）	（5,3）
（3,6）	（6,3）
（4,5）	（5,4）
（4,6）	（6,4）
（5,6）	（6,5）

＝＞**擺法共有 15 種**〔有 6 個正六邊形，同時擺放 2 個城堡，2 個城堡位置順序對調的方法有 2 種，實際上都是同 1 種擺法，所以在此條件下，擺法只有 15 種($\frac{30}{2}$)〕如下圖：

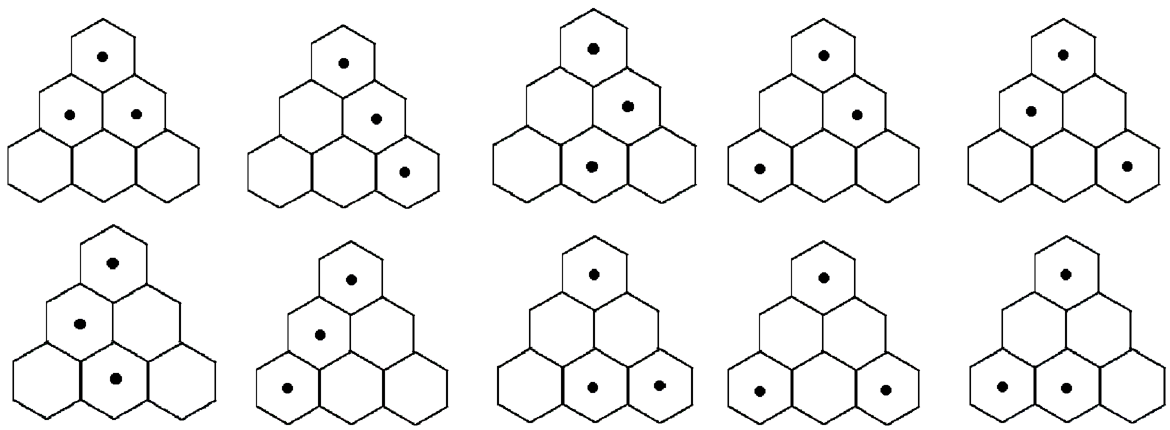


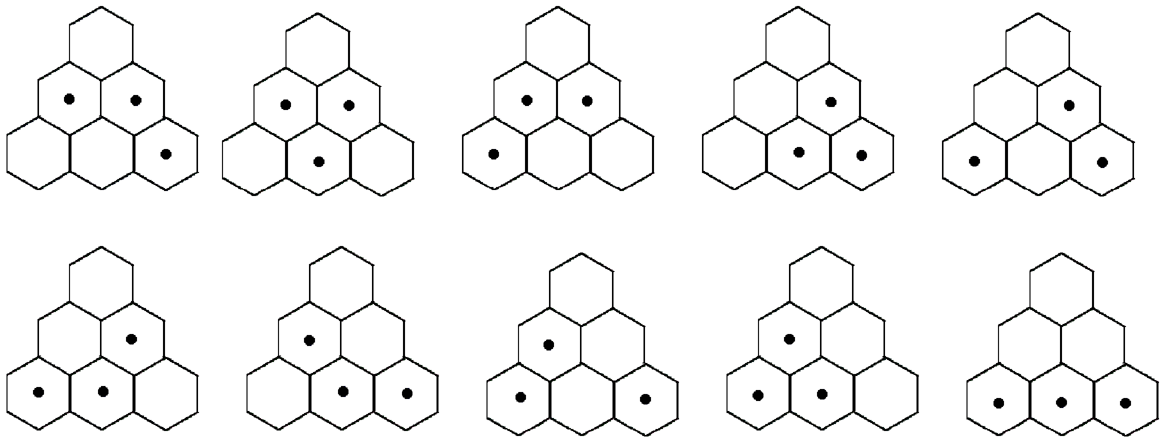
＊ 3 層蜂巢棋盤，正六邊形個數總和是 6，城堡個數是 3 時所有的擺法代號如下：

(1,2,3)	(1,3,2)	(2,1,3)	(2,3,1)	(3,1,2)	(3,2,1)
(1,2,4)	(1,4,2)	(2,1,4)	(2,4,1)	(4,1,2)	(4,2,1)
(1,2,5)	(1,5,2)	(2,1,5)	(2,5,1)	(5,1,2)	(5,2,1)
(1,2,6)	(1,6,2)	(2,1,6)	(2,6,1)	(6,1,2)	(6,2,1)
(1,3,4)	(1,4, 3)	(3,1,4)	(3,4,1)	(4,1,3)	(4,3,1)
(1,3,5)	(1,5,3)	(3,1,5)	(3,5,1)	(5,1,3)	(5,3,1)
(1,3,6)	(1,6,3)	(3,1,6)	(3,6,1)	(6,1,3)	(6,3,1)
(1,4,5)	(1,5,4)	(4,1,5)	(4,5,1)	(5,1,4)	(5,4,1)
(1,4,6)	(1,6,4)	(4,1,6)	(4,6,1)	(6,1,4)	(6,4,1)
(1,5,6)	(1,6,5)	(5,1,6)	(5,6,1)	(6,1,5)	(6,5,1)
(2,3,4)	(2,4,3)	(3,2,4)	(3,4,2)	(4,2,3)	(4,3,2)
(2,3,5)	(2,5,3)	(3,2,5)	(3,5,2)	(5,2,3)	(5,3,2)
(2,3,6)	(2,6,3)	(3,2,6)	(3,6,2)	(6,2,3)	(6,3,2)
(2,4,5)	(2,5,4)	(4,2,5)	(4,5,2)	(5,2,4)	(5,4,2)
(2,4,6)	(2, 6,4)	(4,2,6)	(4,6,2)	(6,2,4)	(6,4,2)
(2,5,6)	(2,6,5)	(5,2,6)	(5,6,2)	(6,2,5)	(6,5,2)
(3,4,5)	(3,5,4)	(4,3,5)	(4,5,3)	(5,3,4)	(5,4,3)
(3,4,6)	(3,6,4)	(4,3,6)	(4,6,3)	(6,3,4)	(6,4,3)
(3,5,6)	(3,6,5)	(5,3,6)	(5,6,3)	(6,3,5)	(6,5,3)
(4,5,6)	(4,6,5)	(5,4,6)	(5,6,4)	(6,4,5)	(6,5,4)

＝＞**擺法共有 20 種**〔有 6 個正六邊形，同時擺放 3 城堡，3 個城堡位置順序對調的方法有 6 種，實際上都是同 1 種擺法，所以在此條件下，擺法只有 20 種（$\frac{120}{6}$）〕

擺法：





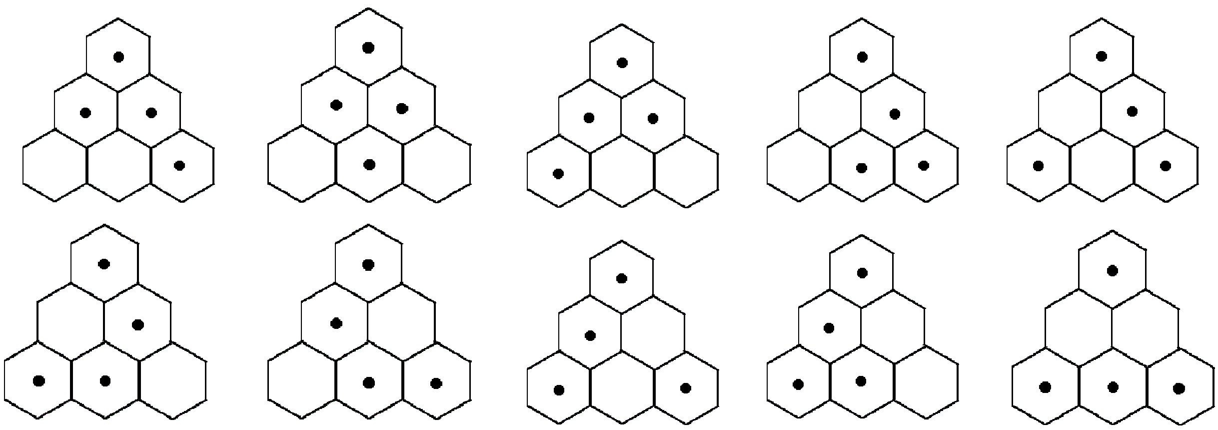
＊ 3 層蜂巢棋盤，正六邊形個數總和是 6，城堡個數是 4 時，所有的擺法代號如下：

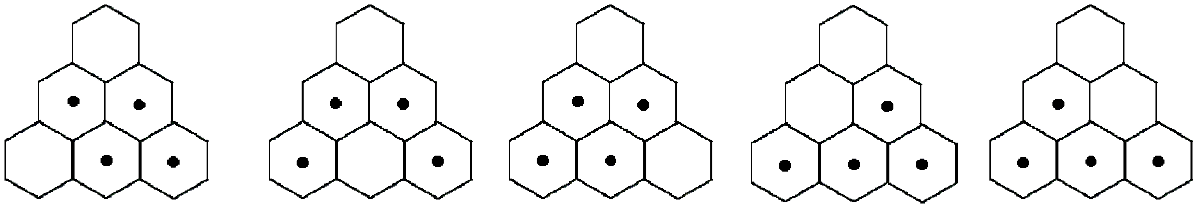
（1,2,3,4）	（1,2,3,5）	（1,2,3,6）	（1,2,4,5）	（1,2,4,6）	（1,2,5,6）	（1,3,4,5）
（1,2,4,3）	（1,2,5,3）	（1,2,6,3）	（1,2,5,4）	（1,2,6,4）	（1,2,6,5）	（1,3,5,4）
（1,3,4,2）	（1,3,5,2）	（1,3,6,2）	（1,4,5,2）	（1,4,6,2）	（1,5,6,2）	（1,4,5,3）
（1,3,2,4）	（1,3,2,5）	（1,3,2,6）	（1,4,2,5）	（1,4,2,6）	（1,5,2,6）	（1,4,3,5）
（1,4,3,2）	（1,5,3,2）	（1,6,3,2）	（1,5,4,2）	（1,6,4,2）	（1,6,5,2）	（1,5,4,3）
（1,4,2,3）	（1,5,2,3）	（1,6,2,3）	（1,5,2,4）	（1,6,2,4）	（1,6,2,5）	（1,5,3,4）
（2,1,3,4）	（2,1,3,5）	（2,1,3,6）	（2,1,4,5）	（2,1,4,6）	（2,1,5,6）	（3,1,4,5）
（2,1,4,3）	（2,1,5,3）	（2,1,6,3）	（2,1,5,4）	（2,1,6,4）	（2,1,6,5）	（3,1,5,4）
（2,3,1,4）	（2,3,1,5）	（2,3,1,6）	（2,4,1,5）	（2,4,1,6）	（2,5,1,6）	（3,4,1,5）
（2,3,4,1）	（2,3,5,1）	（2,3,6,1）	（2,4,5,1）	（2,4,6,1）	（2,5,6,1）	（3,4,5,1）
（2,4,1,3）	（2,5,1,3）	（2,6,1,3）	（2,5,1,4）	（2,6,1,4）	（2,6,1,5）	（3,5,1,4）
（2,4,3,1）	（2,5,3,1）	（2,6,3,1）	（2,5,4,1）	（2,6,4,1）	（2,6,5,1）	（3,5,4,1）
（3,1,4,2）	（3,1,5,2）	（3,1,6,2）	（4,1,5,2）	（4,1,6,2）	（5,1,6,2）	（4,1,5,3）
（3,1,2,4）	（3,1,2,5）	（3,1,2,6）	（4,1,2,5）	（4,1,2,6）	（5,1,2,6）	（4,1,3,5）
（3,4,1,2）	（3,5,1,2）	（3,6,1,2）	（4,5,1,2）	（4,6,1,2）	（5,6,1,2）	（4,5,1,3）
（3,4,2,1）	（3,5,2,1）	（3,6,2,1）	（4,5,2,1）	（4,6,2,1）	（5,6,2,1）	（4,5,3,1）
（3,2,4,1）	（3,2,5,1）	（3,2,6,1）	（4,2,5,1）	（4,2,6,1）	（5,2,6,1）	（4,3,5,1）
（3,2,1,4）	（3,2,1,5）	（3,2,1,6）	（4,2,1,5）	（4,2,1,6）	（5,2,1,6）	（4,3,1,5）
（4,1,2,3）	（5,1,2,3）	（6,1,2,3）	（5,1,2,4）	（6,1,2,4）	（6,1,2,5）	（5,1,3,4）
（4,1,3,2）	（5,1,3,2）	（6,1,3,2）	（5,1,4,2）	（6,1,4,2）	（6,1,5,2）	（5,1,4,3）
（4,2,3,1）	（5,2,3,1）	（6,2,3,1）	（5,2,4,1）	（6,2,4,1）	（6,2,5,1）	（5,3,4,1）
（4,2,1,3）	（5,2,1,3）	（6,2,1,3）	（5,2,1,4）	（6,2,1,4）	（6,2,1,5）	（5,3,1,4）
（4,3,1,2）	（5,3,1,2）	（6,3,1,2）	（5,4,1,2）	（6,4,1,2）	（6,5,1,2）	（5,4,1,3）
（4,3,2,1）	（5,3,2,1）	（6,3,2,1）	（5,4,2,1）	（6,4,2,1）	（6,5,2,1）	（5,4,3,1）

（1,3,4,6）	（1,3,5,6）	（1,4,5,6）	（2,3,4,5）	（2,3,4,6）	（2,3,5,6）	（2,4,5,6）	（3,4,5,6）
（1,3,6,4）	（1,3,6,5）	（1,4,6,5）	（2,3,5,4）	（3,2,6,4）	（3,2,6,5）	（4,2,6,5）	（6,3,5,4）
（1,4,6,3）	（1,5,6,3）	（1,5,6,4）	（2,4,5,3）	（3,4,6,2）	（3,5,6,2）	（4,5,6,2）	（6,4,5,3）
（1,4,3,6）	（1,5,3,6）	（1,5,4,6）	（2,4,3,5）	（3,4,2,6）	（3,5,2,6）	（4,5,2,6）	（6,4,3,5）
（1,6,4,3）	（1,6,5,3）	（1,6,5,4）	（2,5,4,3）	（3,6,4,2）	（3,6,5,2）	（4,6,5,2）	（6,5,4,3）
（1,6,3,4）	（1,6,3,5）	（1,6,4,5）	（2,5,3,4）	（3,6,2,4）	（3,6,2,5）	（4,6,2,5）	（6,5,3,4）
（3,1,4,6）	（3,1,5,6）	（4,1,5,6）	（3,2,4,5）	（2,3,4,6）	（2,3,5,6）	（2,4,5,6）	（3,6,4,5）
（3,1,6,4）	（3,1,6,5）	（4,1,6,5）	（3,2,5,4）	（2,3,6,4）	（2,3,6,5）	（2,4,6,5）	（3,6,5,4）
（3,4,1,6）	（3,5,1,6）	（4,5,1,6）	（3,4,2,5）	（2,4,3,6）	（2,5,3,6）	（2,5,4,6）	（3,4,6,5）
（3,4,6,1）	（3,5,6,1）	（4,5,6,1）	（3,4,5,2）	（2,4,6,3）	（2,5,6,3）	（2,5,6,4）	（3,4,5,6）
（3,6,1,4）	（3,6,1,5）	（4,6,1,5）	（3,5,2,4）	（2,6,3,4）	（2,6,3,5）	（2,6,4,5）	（3,5,6,4）
（3,6,4,1）	（3,6,5,1）	（4,6,5,1）	（3,5,4,2）	（2,6,4,3）	（2,6,5,3）	（2,6,5,4）	（3,5,4,6）
（4,1,6,3）	（5,1,6,3）	（5,1,6,4）	（4,2,5,3）	（4,3,6,2）	（5,3,6,2）	（5,4,6,2）	（4,6,5,3）
（4,1,3,6）	（5,1,3,6）	（5,1,4,6）	（4,2,3,5）	（4,3,2,6）	（5,3,2,6）	（5,4,2,6）	（4,6,3,5）
（4,6,1,3）	（5,6,1,3）	（5,6,1,4）	（4,5,2,3）	（4,6,3,2）	（5,6,3,2）	（5,6,4,2）	（4,5,6,3）
（4,6,3,1）	（5,6,3,1）	（5,6,4,1）	（4,5,3,2）	（4,6,2,3）	（5,6,2,3）	（5,6,2,4）	（4,5,3,6）
（4,3,6,1）	（5,3,6,1）	（5,4,6,1）	（4,3,5,2）	（4,2,6,3）	（5,2,6,3）	（5,2,6,4）	（4,3,5,6）
（4,3,1,6）	（5,3,1,6）	（5,4,1,6）	（4,3,2,5）	（4,2,3,6）	（5,2,3,6）	（5,2,4,6）	（4,3,6,5）
（6,1,3,4）	（6,1,3,5）	（6,1,4,5）	（5,2,3,4）	（6,3,2,4）	（6,3,2,5）	（6,4,2,5）	（5,6,3,4）
（6,1,4,3）	（6,1,5,3）	（6,1,5,4）	（5,2,4,3）	（6,3,4,2）	（6,3,5,2）	（6,4,5,2）	（5,6,4,3）
（6,3,4,1）	（6,3,5,1）	（6,4,5,1）	（5,3,4,2）	（6,2,4,3）	（6,2,5,3）	（6,2,5,4）	（5,3,4,6）
（6,3,1,4）	（6,3,1,5）	（6,4,1,5）	（5,3,2,4）	（6,2,3,4）	（6,2,3,5）	（6,2,4,5）	（5,3,6,4）
（6,4,1,3）	（6,5,1,3）	（6,5,1,4）	（5,4,2,3）	（6,4,3,2）	（6,5,3,2）	（6,5,4,2）	（5,4,6,3）
（6,4,3,1）	（6,5,3,1）	（6,5,4,1）	（5,4,3,2）	（6,4,2,3）	（6,5,2,3）	（6,5,2,4）	（5,4,3,6）

＝＞**擺法共有 15 種**〔有 6 個正六邊形，同時擺放 4 個城堡，4 個城堡位置順序對調的方法有 24 種，實際上都是同 1 種擺法，所以在此條件下，擺法只有 15 種（$\frac{360}{24}$）〕

擺法：

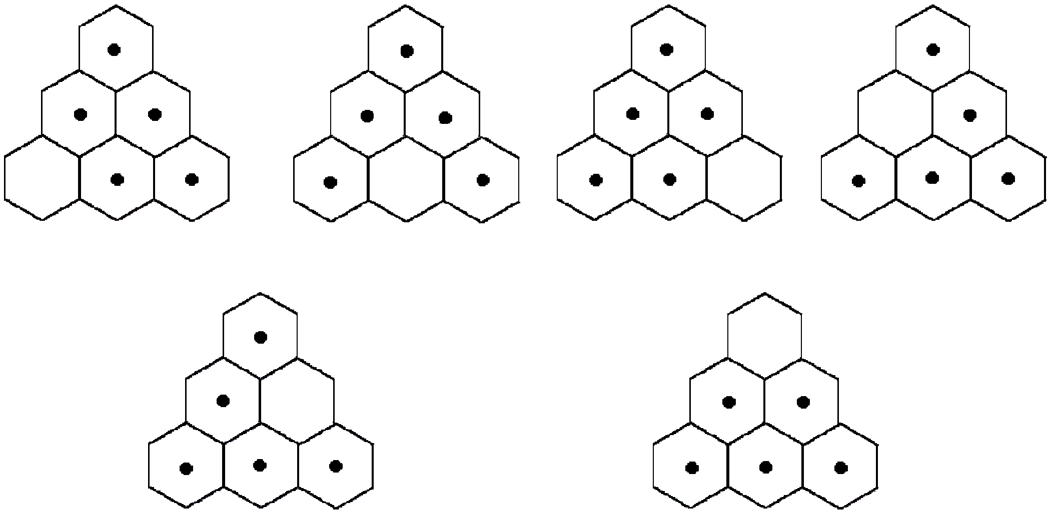




＊3 層蜂巢棋盤，正六邊形個數總和是 6，城堡個數是 5 時，所有的擺法代號見（手稿一）

＝＞**擺法共有 6 種**〔有 6 個六邊形，同時擺放 5 個城堡，5 個城堡位置順序對調的方法有 120 種，實際上都是同 1 種擺法，所以在此條件下，擺法只有 6 種（$\frac{720}{120}$）〕

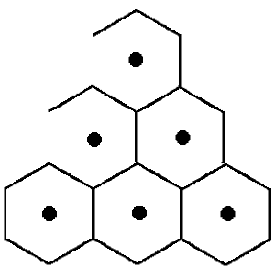
擺法如下圖：



＊ 3 層蜂巢棋盤，正六邊形個數**總和是 6，城堡數是 6 時**所有的擺法代號見（手稿二）

＝＞**擺法只有 1 種**〔有 6 個六邊形，同時擺放 6 個城堡，6 個城堡位置順序對調的方法有 720 種，實際上都是同 1 種擺法，所以在此條件下，擺法只有 1 種($\frac{720}{720}$)〕

擺法如下圖：



蜂巢棋盤層數與城堡個數擺法統計表：

蜂巢棋盤層數	1	2	2	2	3	3	3	3	3	3
六邊形個數總和	1	3	3	3	6	6	6	6	6	6
城堡個數	1	1	2	3	1	2	3	4	5	6
擺法	1	3	3	1	6	15	20	15	6	1

【發現】 正六邊形個數總和爲 3，城堡個數爲 1，擺法有 3 種

$$3 = \frac{3}{1}$$

正六邊形個數總和爲 3，城堡個數爲 2，擺法有 3 種

$$3 = \frac{6}{2} = \frac{3\times 2}{1\times 2}$$

正六邊形個數總和爲 3，城堡個數爲 3，擺法有 1 種

$$1 = \frac{6}{6} = \frac{3\times 2\times 1}{1\times 2\times 3}$$

正六邊形個數總和爲 6，城堡個數爲 1，擺法有 6 種

$$6 = \frac{6}{1}$$

正六邊形個數總和爲 6，城堡個數爲 2，擺法有 15 種

$$15 = \frac{30}{2} = \frac{6\times 5}{1\times 2}$$

正六邊形個數總和爲 6，城堡個數爲 3，擺法有 20 種

$$20 = \frac{120}{6} = \frac{6\times 5\times 4}{1\times 2\times 3}$$

正六邊形個數總和爲 6，城堡個數爲 4，擺法有 15 種

$$15 = \frac{360}{24} = \frac{6\times 5\times 4\times 3}{1\times 2\times 3\times 4}$$

正六邊形個數總和爲 6，城堡個數爲 5，擺法有 6 種

$$6 = \frac{720}{120} = \frac{6\times 5\times 4\times 3\times 2\times 1}{1\times 2\times 3\times 4\times 5}$$

正六邊形個數總和爲 6，城堡個數爲 6，擺法有 1 種

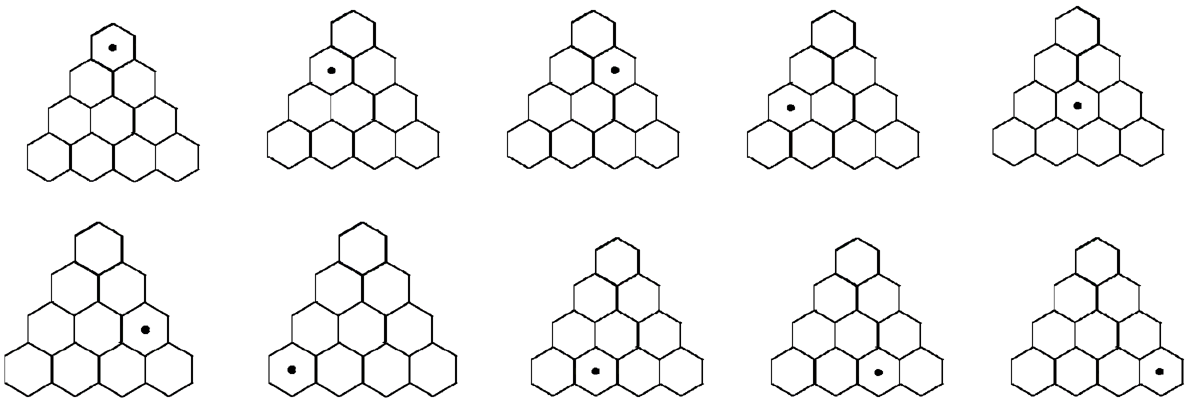
$$1 = \frac{720}{720} = \frac{6\times 5\times 4\times 3\times 2\times 1}{1\times 2\times 3\times 4\times 5\times 6}$$

依照上列算法，推算 4 層蜂巢棋盤，正六邊形個數總和是 10，數目不同的城堡個數擺法如下：

正六邊形個數總和是 10，城堡個數爲 1 $\frac{10}{1} = 10$

＝＞擺法有 10 種

擺法：



正六邊形個數總和是 10，城堡個數爲 2

$$\frac{10\times 9}{1\times 2}=\frac{90}{2}=45$$

＝＞擺法有 45 種

擺法代號如下表：

（1,2）	（2,1）
（1,3）	（3,1）
（1,4）	（4,1）
（1,5）	（5,1）
（1,6）	（6,1）

（1,7）	（7,1）
（1,8）	（8,1）
（1,9）	（9,1）
（1,10）	（10,1）

（2,3）	（3,2）
（2,4）	（4,2）
（2,5）	（5,2）
（2,6）	（6,2）
（2,7）	（7,2）
（2,8）	（8,2）
（2,9）	（9,2）
（2,10）	（10,2）

（6,7）	（7,6）
（6,8）	（8,6）
（6,9）	（9,6）
（6,10）	（10,6）

（3,4）	（4,3）
（3,5）	（5,3）
（3,6）	（6,3）
（3,7）	（7,3）
（3,8）	（8,3）
（3,9）	（9,3）
（3,10）	（10,3）

（4,5）	（5,4）
（4,6）	（6,4）
（4,7）	（7,4）
（4,8）	（8,4）
（4,9）	（9,4）
（4,10）	（10,4）

（5,6）	（6,5）
（5,7）	（7,5）
（5,8）	（8,5）
（5,9）	（9,5）
（5,10）	（10,5）

（7,8）	（8,7）
（7,9）	（9,7）
（7,10）	（10,7）

（8,9）	（9,8）
（8,10）	（10,8）

（9,10）	（10,9）

正六邊形個數總和是 10，城堡個數爲 3

$$\frac{10\times 9\times 8}{1\times 2\times 3}=\frac{720}{6}=120$$

＝＞擺法有 120 種　擺法代號見（手稿三）

蜂巢棋盤層數與城堡個數擺法統計表：

蜂巢棋盤層數	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4
六邊形個數總和	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10
城堡數	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
擺法	10	45	120	210	252	210	120	45	10	1

※　老師告訴我們在高中二年級的數學課本中，組合的算法正好和我們的算法不謀而合。

當我們知道正六邊形個數的總和為 n，城堡個數為 r 時，他的擺放方法如同從 n 個正六邊形中，每次選取 r 個為一組的方法總數是相同的，在數學上以 C_r^n 來表示。只要知道蜂巢棋盤的層數，就可以很快算出正六邊形總和數，知道城堡個數，就可以很快算出擺法總數。

【發現】當正六邊形個數的總和為 n，城堡個數為 r 時，它的擺法總數的算法是：

$$C_r^n = \frac{\mathrm{n}\times(n-1)\times(n-2)\times(n-3)\times.......\times(n-r+1)}{1\times2\times3\times..................\times\mathrm{r}}$$

【問題三】在不斷殺情況下，各層數的蜂巢棋盤上所能擺放數量最多的城堡爲多少？

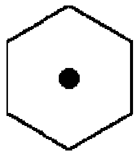
【過程一】

城堡成功的擺法：

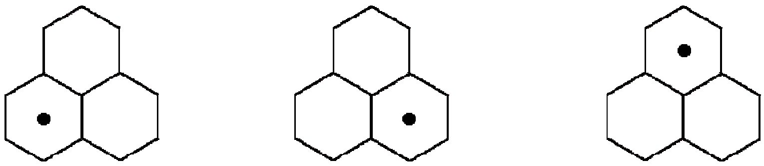
一、 城堡在不斷殺且涵蓋整個棋盤的情況下，當指定層數的蜂巢棋盤上擺放數量最多的城堡時，就算是一種城堡成功的擺法。

二、 城堡成功的擺法如下

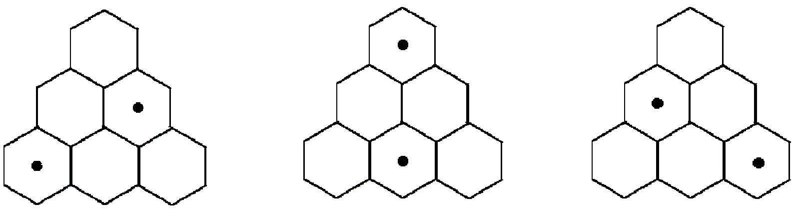
＊1 層蜂巢棋盤，
城堡個數最多有 1 個
。



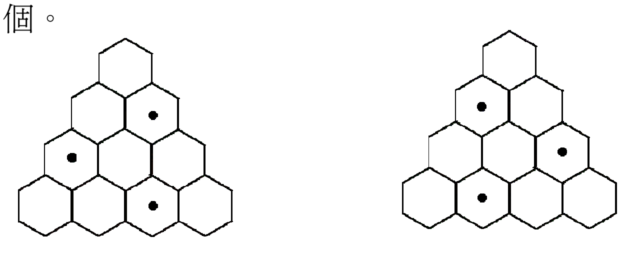
＊2 層蜂巢棋盤：
城堡個數最多有 1 個。



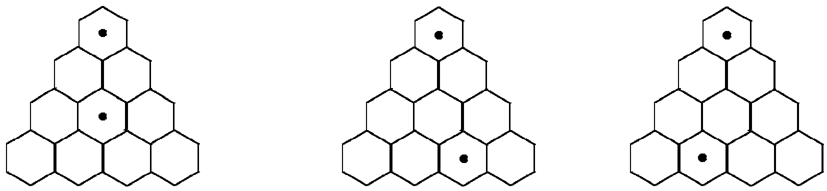
＊3 層蜂巢棋盤：
城堡個數最多有 2 個。



＊4 層蜂巢棋盤：
城堡個數最多有 3 個。



城堡不成功的擺法：



【說明】

在練習過程中，我們發現在 4 層蜂巢棋盤中，有 3 種不同的擺法不會廝殺，又能涵蓋整個棋盤，但因為城堡數量只有 2 個，不是最多（四層蜂巢棋盤的城堡個數最多有 3 個），所以它們是不成功的擺放方法。

【過程二】

在 4 層蜂巢棋盤中不成功與成功的擺放方法裡發現，成功的的擺法中，3 個城堡都是擺放在蜂巢棋盤周圍的三個邊上。

【說明】

在 4 層蜂巢棋盤中且城堡數是 3 個時，我們試著將城堡從頂點開始擺放，發現在不會廝殺的情況下，擺完第 2 個城堡就已經涵蓋整個蜂巢棋盤了。

接著我們再試著將城堡從蜂巢棋盤的正中央開始擺放，也是擺完第二個城堡就已經涵蓋整個蜂巢棋盤了。所以，從之前擺放的試驗中得知，城堡如先擺在正中央或頂點，能擺放城堡的位置會變少，但如果從蜂巢棋盤周圍的邊開始擺放，能擺放城堡的位置變多。

【發現】

一、在所有城堡不廝殺的情況下，在指定的 n 層蜂巢棋盤上擺放數量最多的城堡，就要先從蜂巢周圍的邊上開始擺起，最後再擺頂點和中間。

二、2 層蜂巢棋盤可成功的擺放 1 個城堡，3 層蜂巢棋盤可成功的擺放 2 個城堡，4 層蜂巢棋盤可成功的擺放 3 個城堡，5 層蜂巢棋盤可成功的擺放 3 個城堡，6 層蜂巢棋盤可成功的擺 4 個城堡，7 層蜂巢棋盤可成功的擺放 5 個城堡、………………。

【問題四】如何找出蜂巢棋盤層數和成功城堡個數之間的關係？

蜂巢棋盤層數與成功的城堡個數關係製成下表：

蜂巢棋盤層數	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
成功城堡個數	1	1	2	3	3	4	5	5	6	7	7	8	9	9	10	11

【發現】 除了 1 層蜂巢棋盤，成功的城堡個數是 1 以外，其他層數是 2、3、4、5、6、7、8、9、10、……………的成功城堡個數依序是 1、2、3、3、4、5、5、6、7、7、8、9、………。(請見手稿四）

【問題五】找出快速且有效率計算成功城堡個數的方法

想法 1：承上表當層數是『3 的倍數加 1』時，可寫成（3k＋1），成功的城堡個數就是

（層數－k），即層數為 1、4、7、10、…… 時，

1＝3x0＋1　　城堡個數是 1＝1－0
4＝3x1＋1　　城堡個數是 3＝4－1
7＝3x2＋1　　城堡個數是 5＝7－2
10＝3x3＋1　　城堡個數是 7＝10－3

.
.
.

【發現 1】當層數是（3k＋1）時成功的城堡個數 ＝ 層數－k

想法 2 承上表當層數是『3 的倍數加 2』時，可寫成（3k＋2）即層數是 2、7、8、11、…時，

2＝3x0＋2　　城堡個數是 1＝2－（0＋1）
5＝3x1＋2　　城堡個數是 3＝5－（1＋1）
8＝3x2＋2　　城堡個數是 5＝8－（2＋1）
11＝3x3＋2　　城堡個數是 7＝11－（3＋1）

.
.
.

【發現 2】當層數是（3 k ＋ 2）時，成功的城堡個數＝層數 －（k ＋ 1）

想法 3：承上表當層數是『3 的倍數』時，可寫成 3k，即層數是 3、6、9、12、…時，

3＝3×1	城堡個數是 2＝3－1
6＝3×2	城堡個數是 4＝6－2
9＝3×3	城堡個數是 6＝9－3
12＝3×4	城堡個數是 8＝12－4

.
.
.

【發現 3】當層數是『3 的倍數』時，成功的城堡個數＝層數－k

【結果】當層數是 3k 或（3k＋1）時，成功的城堡個數＝層數－k

當層數是（3k＋2）時，成功的城堡個數＝層數－（k＋1）

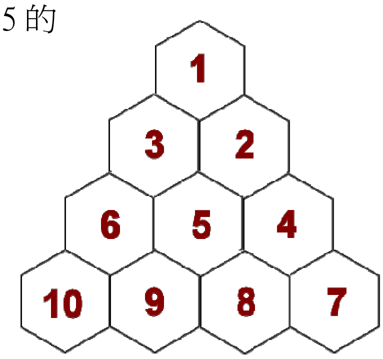
例：20 層蜂巢棋盤中，成功的城堡數有多少個？

答：承上述知，應有 13 個 Θ 20 ＝ 3 × 6 ＋ 2

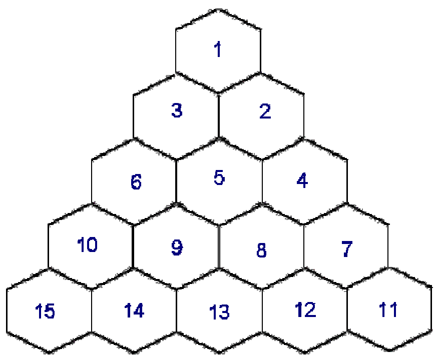
∴ 城堡數 ＝ 20 －（6＋1）＝ 13

【問題六】如何訂定蜂巢棋盤的遊戲規則？

【過程一】剛開始玩蜂巢棋盤遊戲時，我們試著從每邊 4 個的峰巢棋盤中(如右下圖)，設兩個棋子分別放在(1,2)、(1,3)、(1,4)以及(1,6)的位置，這樣的擺放方法已經產生厮殺，所以這樣的擺放方法我們放棄了，因此我們採用 1 和 5 的擺放方法，可是擺放在 1 和 5 的位置只能移動 2 步，先動的人就輸了，根本無法繼續玩下去。



【過程二】 既然【過程一】無法繼續玩下去，但我們發現 1 和 5 的位置至少可移動 2 步，於是我們推測是蜂巢棋盤活動空間太小，所以，我們決定採用 5 層的蜂巢棋盤。(如右圖)



【蜂巢棋盤的遊戲規則】

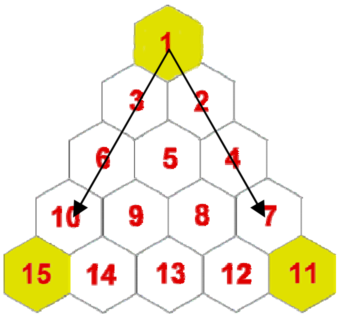
規則一：一開始猜贏的人先啓動 1 號棋子，輸的人後移動 5 號棋子。

規則二：頂點上的棋子，可以直線移動三格。(因爲在頂點上的棋子只能涵蓋兩個方向)

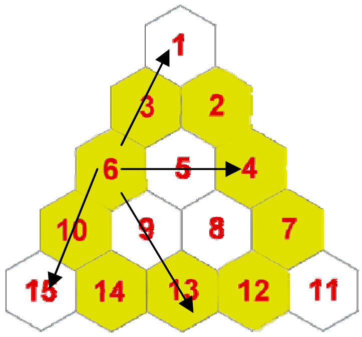
規則三：邊上且不包含頂點的棋子，可以直線移動兩格。(因爲在邊上只能涵蓋 4 個方向)

規則四：棋盤內部的棋子，可以直線移動一格。(因爲在中心的棋子可以涵蓋 6 個方向)

規則五：當一個棋子只能走進敵方的涵蓋範圍內，不能走別的路線時，對方就贏了。



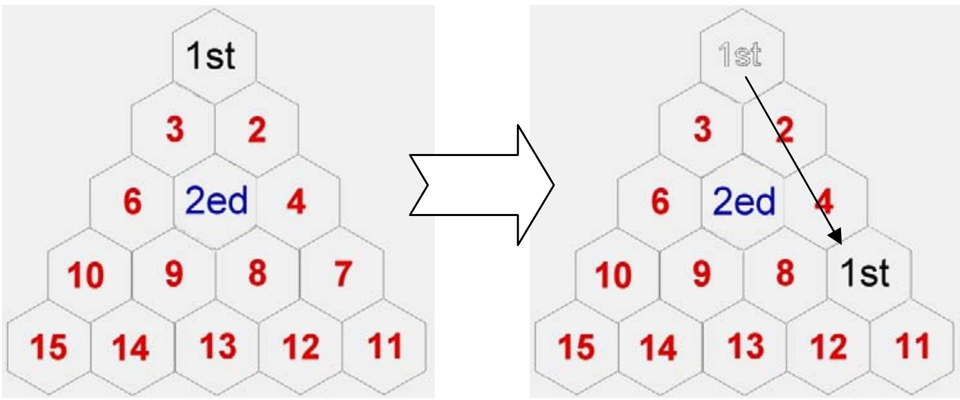
規則二



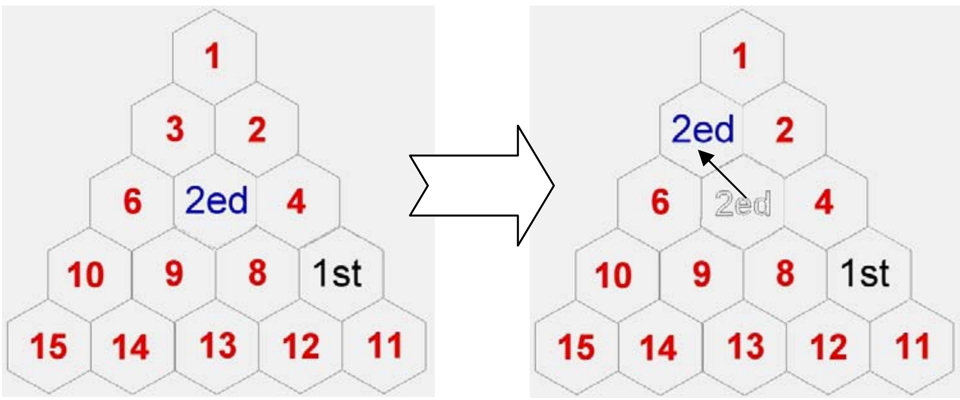
規則三

【遊戲流程】

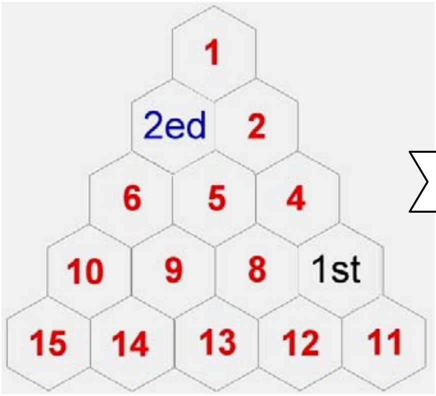
流程一：一開始猜拳贏的人先啓動 1st 棋。頂點上的棋子，可以直線移動三格（規則二），所以 1st 棋由 1 的位置走到 7 的位置，棋步記爲 1-7。

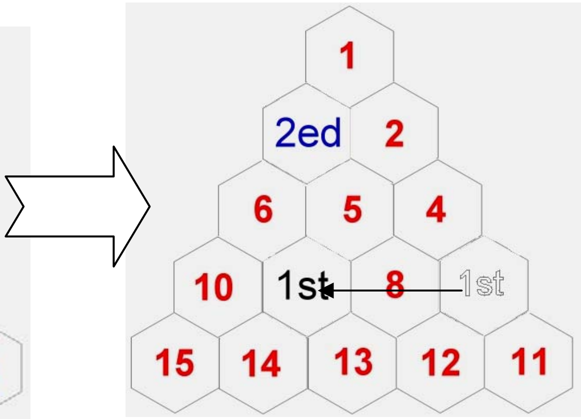


流程二：猜拳輸的人後移動 2ed 棋。棋盤內部的棋子，可以直線移動一格（規則四），所以 2ed 棋由 5 的位置走到 3 的位置，棋步記爲 5-3。

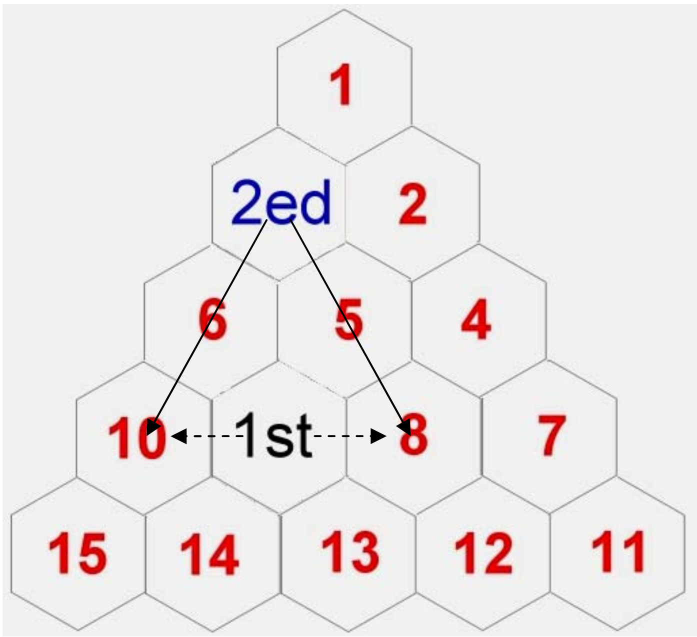


流程三：接下來由先者移動 1st 棋。邊上且不包含頂點的棋子，可以直線移動兩格（規則三），所以 1st 棋由 7 的位置走到 9 的位置，棋步記為 7-9。





流程四：當 2ed 棋只能走進敵方 1st 棋的涵蓋範圍內，不能走別的路線時，1st 就贏了（規則五）。

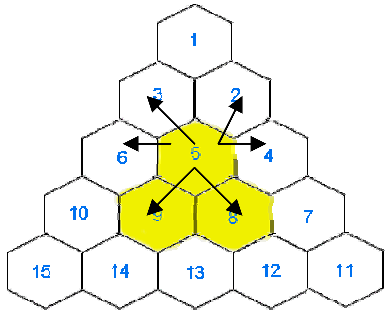


棋步記法

先（1st）：1-7、7-9　WIN
後（2ed）：5-3　　　　LOSE

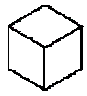
【問題七】依蜂巢棋盤的遊戲規則，要如何進行才能立於不敗之地？

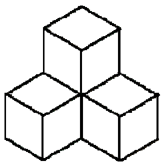
我們依遊戲規則，在 5 層的蜂巢棋盤中一再的做了許多次的相互挑戰，我們發現，棋子在 1、2、3、7、10、11、12、13、15 的位置最容易輸，在 5、8、9 的位置較能夠立於不敗之地，因爲前者的移動路線都只有 2 條，而後者都有 6 條移動路線，所以棋子若能進入棋盤內部就能掌握贏棋的機會。（見附件一）



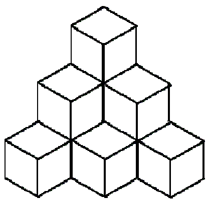
規則四

【我們的新發現】

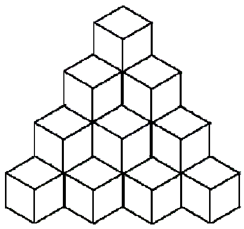
在玩蜂巢棋盤的過程中，我們無意間發現在一個正六邊形加上 1 個 Y 字(如圖 )，結果發現正六邊形竟然成了立方體圖形，於是我們將蜂巢棋盤裡的所有正六邊形全部加上 Y 字(如下圖)，發現蜂巢棋盤擬似立方體的圖形，接著我們試著用白色小立方體，按照立方體圖形加以排列，確實可以具體呈現階梯狀的立方體圖形，我們就把這個立方體圖形，稱為『階梯三角立方體』。



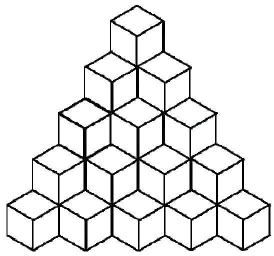
2 階三角立方體



3 階三角立方體



4 階三角立方體



5 階三角立方體

【問題八】找出階梯三角立方體的階數和立方體總數的關係。

我們發現階梯三角立方體是分別從實體的正視、側視和俯視觀察，均是由一個正立方體遞增或遞減所組成的階梯圖形。

【發現】

階梯三角立方體階數爲 1 時，立方體總數是：1

階梯三角立方體階數爲 2 時，立方體總數是：1＋(1＋2)

階梯三角立方體階層爲 3 時，立方體總數是：1＋(1＋2)＋(1＋2＋3)

階梯三角立方體階層爲 4 時，立方體總數是：1＋(1＋2)＋(1＋2＋3)＋(1＋2＋3＋4)

階梯三角立方體階層爲 5 時，立方體總數是：1＋(1＋2)＋(1＋2＋3)＋(1＋2＋3＋4)＋(1＋2＋3＋4＋5)

階梯三角立方體階層爲 6 時，立方體總數是：1＋(1＋2)＋(1＋2＋3)＋(1＋2＋3＋4)＋(1＋2＋3＋4＋5)＋(1＋2＋3＋4＋5＋6)

.
.
.
.
.

階梯三角立方體階數爲 n 時，立方體總數是：1＋（1＋2）＋（1＋2＋3）＋……………＋（1＋2＋3＋……+n）

【結果】n 階三角立方體的立方體總數是由第 1 層的蜂巢棋盤的正六邊形個數的總和一直加到第 n 層蜂巢棋盤的正六邊形個數的總和爲止。

【問題九】找出快速且有效計算階梯三角立方體總數的方法。

【過程一】在堆疊過程中，我們發現階梯三角立方體中，各階的立方體個數分別爲 1、3、6、10、……、(1＋2＋3＋…＋n)，此數列剛好是「階差數列」，且第 n 階的正立方體個數爲 $\frac{n\times(n+1)}{2}$。 [因爲 1＋2＋3＋…＋n=$\frac{n\times(n+1)}{2}$]

【過程二】在【問題八】的過程中，我們發現 n 階階梯三角立方體的正立方體個數總和正好是『階差級數』首 n 項的總和。

1 階： 1 個(立方體)
2 階：1＋（1＋2）＝ 4 個(立方體)
3 階：1＋（1＋2）＋（1＋2＋3）＝ 10 個(立方體)
4 階：1＋（1＋2）＋（1＋2＋3）＋（1＋2＋3＋4）＝ 20 個(立方體)
5 階：1＋（1+2）＋（1+2+3）＋（1+2+3+4）＋（1+2+3+4 ＋5）＝ 35 個
6 階：1＋（1＋2）＋（1＋2＋3）＋……＋（1＋2＋…＋6）＝ 56 個
7 階：1＋（1＋2）＋（1＋2＋3）＋……＋（1＋2＋3＋…＋7）＝ 84 個
. .
. .
. .
. .
（n－1）階＝1＋（1＋2）＋（1＋2＋3）＋………………… ＋〔1+2+……+（n-1）〕
n 階＝1＋（1＋2）＋（1＋2＋3）＋…………＋(1+2+……+n)

【過程三】 經過我們的演算後，得到 n 階階梯三角立方體的正立方體個數總和爲 $\frac{n\times(n+1)\times(n+2)}{6}$(個)〈證明見手稿五〉

例： n ＝ 2 總數是：$\frac{2\times(2+1)\times(2+2)}{6}=\frac{24}{6}$＝4（個）

n ＝ 4 總數是：$\frac{4\times(4+1)\times(4+2)}{6}=\frac{4\times5\times6}{6}$＝20（個）

【結果】

一、只要知道階梯三角立方體的階數，就可以算出階梯三角立方體的正立方體個數總和。

二、n 階階梯三角立方體的正立方體個數總和爲 $\frac{n\times(n+1)\times(n+2)}{6}$(個)

捌、研究結論

一、蜂巢的總數可以利用梯形面積算法或連續數總和算出。

算法： $\dfrac{(上底+下底)\times 高}{2}$ 或 $\dfrac{(大數+小數)\times 個數}{2}$

也可寫成 $\dfrac{n\times(n+1)}{2}$

二、只要知道正六邊形個數的總和和城堡個數，就可以算出所有的擺法。

算法： $C_r^n = \dfrac{\mathrm{n}\times(n-1)\times(n-2)\times(n-3)\times\ldots\ldots\times(n-r+1)}{1\times 2\times 3\times\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\times \mathrm{r}}$

三、如果要在不斷殺的情況下，擺上數量最多的城堡，就要先從邊上開始擺起，頂點和中間最後再擺。

四、除了 1 層蜂巢棋盤外，成功的城堡數依序是 1、2、3、3、4、5、5、6、7、7、8、9、………，只要知道蜂巢棋盤的層數，就可以算出成功城堡個數。

五、(一) 當蜂巢棋盤層數是『3 的倍數』或『3 的倍數+1』時，
成功的城堡個數＝層數－倍數

(二) 當層數是『3 的倍數+2』時，成功的城堡個數＝層數 －（倍數＋1）

六、在 5 層蜂巢棋盤對奕中，若能進入蜂巢棋盤內部 5、8、9 的位置時，就能掌握贏棋的先機。

七、只要在蜂巢棋盤裡的每一個正六邊形上加一個 Y 字，看起來就像是由正立方體組合成的階梯三角立方體圖形。

八、平面圖形變成立體圖形，只是視覺上的效果，看起來像立方體而已。

九、階梯三角立方體的階數是多少就有多少組連續數相加，每當階數增加 1 時，就多一組由 1 遞增相加的連續數總和。

十、n 階階梯三角立方體最後一組連續數中的最大數為 n。

十一、只要知道階梯三角立方體的階數，就可以算出立方體個數的總和。

十二、n 階階梯三角立方體的個數總和算法： $\dfrac{n\times(n+1)\times(n+2)}{6}$

玖、研究心得

在這一次的數學研究中，我們最大的樂趣就是發明蜂巢棋盤的遊戲規則，因爲這是我們新發明的棋類遊戲，而且學校裡許多同學也覺得很新奇、很好玩，也跟著我們一起玩蜂巢棋，於是下課時，學校走廊的長椅上、教室的遊戲角，校園內掀起了「蜂巢棋」的對奕熱潮，使我們覺得很有成就感，自己就像發明象棋、跳棋的人一樣了不起，增添了同學們生活中的樂趣。

另一方面，在探究的過程中，我們發現「蜂巢棋盤層數和城堡個數」以及「階梯三角立方體圖形的立方體個數」算法有明顯的規律性，在寒假期間，我們不斷討論、苦思，仍然找不出有效率的計算方法，於是我們就近請教老師，在老師的指導下，我們對看起來像躺著的麥當勞符號－$\sum$ 公式有了初步的認識後，我們就可以找到快速算出階梯三角立方體個數總和的式子。

從蜂巢棋盤的對奕遊戲中，我們發現了由城堡（棋子）的移動路線所衍生的另一種平面空間的概念，並且意外地發展出與階梯三角立方體的連結。同時，發現平面圖形再加上一些線條就可以看作立方體圖案的正視圖，故立體圖形也可以當作是平面圖形的延伸；因此，只要學會基礎數學的概念，就能夠解決複雜的問題，所以學習數學可以將許多問題化繁爲簡。

謝謝老師在這次活動中的協助，使我們更進一步體會到研究數學的樂趣，我們期望蜂巢棋能走出校園，深入每個喜愛棋藝朋友的心裏。

拾、參考資料

葛登能（民 92）：葛老爹數學推理遊戲叢書 2。台北：天下文化
牛頓出版社編著（民 85）：小牛頓數學百科 3。台北：牛頓
李國賢（民 92）：趣味數學棋藝篇。台北：明日世紀，231－234 頁
南一出版社編著（民 92）：高中數學課本，第 4 冊第 2 章第 4 節。台北：南一
康軒出版社編著（民 89）：國小數學課本，第 9 冊第 9 單元。台北：康軒

中華民國第四十五屆中小學科學展覽會

評　　語

國小組 數學科

最佳(鄉土)教材獎

080403

“蜂“雲在“棋“—蜂巢棋盤遊戲與階梯三角立方體的聯想

國立花蓮師範學院附設實驗國民小學

評語：

研究的主題新穎、有趣，且嘗試發明一種新的遊戲是本研究最大的特色，唯部分說明敘述不清宜再加強。