

中華民國第四十五屆中小學科學展覽會  
作品說明書

---

高中組 數學科

040423

來搞 BL

國立嘉義高級中學

作者姓名：

高二 何冠宏 高二 李文平 高二 陳建佑

高二 鍾志泓

指導老師：

羅足坪 戴政毅

# 來搞 BL

## 摘要：

影響樂透彩券買氣的主要原因究竟為何？為了解決這個問題，我們首先假設主要影響原因為頭彩累計獎金多寡，並以大樂透（Big Lottery）為對象，根據北銀所公布的數據，挑選適當的資料，以上一期頭獎獎金的累計獎金為 X 軸，當期投注金額為 Y 軸，畫出散佈圖，發覺所呈現的是曲線相關，而且很像平移後的指數函數，所以，利用最小平方法求其近似函數。

另外，推導出頭獎均沒人中獎的機率公式，二獎以後的獎項也均可套用此公式，再利用此公式引申出頭獎連 k 槓之機率。接著，由北銀所提供的獎金分配比例可推得頭獎預估金額，進一步推出期望值公式。最後，為了印證我們假設是否正確，我們設計了問卷，經由所回收的問卷解釋結果。

## 壹、研究動機：

電視媒體常常報導本期大樂透頭獎預估上看 n 億元，而每當媒體不斷報導說這是台灣史上最高的頭獎時，投注站往往大排長龍，形成「全民瘋樂透」的情形。在「一券在手，希望無窮」的觀念下，簽注樂透彷彿是一種全民運動。而現在我們有個疑問，為何北銀能夠準確地預估頭獎獎金？在樂透銷售情況不佳時，為何北銀選擇頭獎加碼的方式？樂透頭獎累計獎金與樂透的銷售金額究竟有無關係？而當頭獎不斷升高時，期望值究竟會不會大於 50 元呢？

以頭獎累計獎金與樂透的銷售金額做散佈圖，直覺資料所呈現的趨勢很像高中第二冊的「指數函數」，此結果給予我們很大的鼓舞，所以，我們進一步研讀了第四冊的「機率」、「敘述統計」及數學甲(上)的「機率與統計」，期待能求出兩著之間之關係。

## 貳、研究目的：

- 一、藉著樂透頭獎所累積的金額與下一期的投注金額，畫出散佈圖，觀察兩者之間存在著什麼關係。
- 二、依照散佈圖求出趨勢函數(迴歸曲線)，由此可預測下一期的投注金額。
- 三、計算頭獎均沒人中獎之機率，並推算連 k 槓之機率。
- 四、推估頭獎獎金上看金額、頭獎中獎人數之期望值及頭獎獎金之期望值。
- 五、預估樂透的期望值，並算出何時獎金期望值會最大，讓民眾了解頭獎獎金增加時，其期望值確實增加了多少。

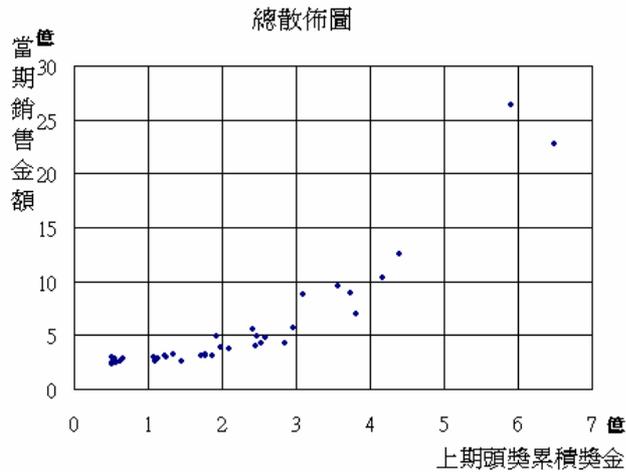
## 參、研究設備及器材：

- 一、電腦一部、EXCEL 軟體。
- 二、工程用計算機。

## 肆、研究過程及方法：

- 一、『上一期頭獎累計獎金』與『當期銷售金額』的資料散佈圖：

由(093001~093104、094001~094014)共 118 期數據，我們以上一期頭獎累積獎金為 X、當期銷售金額為 Y 製成的散佈圖，如下圖所示，我們擷取連槓 4 期以上的數據，共 37 筆，發覺資料所呈現的趨勢非常類似指數函數之圖形。



二、趨勢函數(迴歸曲線)的求法：

因散佈圖所呈現的相關性並非直線相關，而是類似指數函數的曲線相關，故我們假設簽注金額  $Y$  對上一期頭獎累計金額  $X$  的迴歸曲線為指數函數  $y = f(x) = a^x + b$ ，並仿數甲以最小平方法求迴歸曲線。

(一) 因為趨勢函數呈現遞增，所以底數  $a > 1$ 。在收集的 118 期資料中，出現連續 4 期以上的有 37 期（如附件），我們將用這些資料，搭配設定的底數  $a$  值，求對應的  $b$  值。

當  $a=1.1$  時，取  $b = \frac{1}{37} \sum_{i=1}^{37} (y_i - 1.1^{x_i})$ ，得  $f(x) = 1.1^x + 4.3370288$ ；

當  $a=1.2$  時，取  $b = \frac{1}{37} \sum_{i=1}^{37} (y_i - 1.2^{x_i})$ ，得  $f(x) = 1.2^x + 4.0374727$ ；

⋮

當  $a=2.0$  時，取  $b = \frac{1}{37} \sum_{i=1}^{37} (y_i - 2.0^{x_i})$ ，得  $f(x) = 2.0^x + (-3.4310573)$ 。

(二) 將每筆資料  $(x_i, y_i)$ ，代入(一)中每個  $a$  值所求得的函數中，計算  $\sum_{i=1}^{37} [f(x_i) - y_i]^2$  的值，如下表所示。

| $a$ 值      | $b$ 值            | $\sum_{i=1}^{37} [f(x_i) - y_i]^2$ |
|------------|------------------|------------------------------------|
| 1.1        | 4.3370288        | 929.7468                           |
| 1.2        | 4.0374727        | 828.41241                          |
| 1.3        | 3.6628914        | 683.81879                          |
| 1.4        | 3.1933588        | 496.56581                          |
| 1.5        | 2.6042752        | 286.46121                          |
| <b>1.6</b> | <b>1.8655591</b> | <b>113.92552</b>                   |
| <b>1.7</b> | <b>0.940761</b>  | <b>117.55874</b>                   |
| 1.8        | -0.2139048       | 577.35038                          |
| 1.9        | -1.6506116       | 2017.4044                          |
| 2.0        | -3.4310573       | 5368.0171                          |

取  $\sum_{i=1}^{37} [f(x_i) - y_i]^2$  最小的兩筆資料之  $a$  值，即 **1.6** 與 **1.7**。

(三) 將 **1.6** 與 **1.7** 這兩個值之間十等分。針對 1.61、1.62、⋯、1.69 等 9 個值，仿(一)

的步驟，可以得到：

當  $a=1.61$  時，取  $b = \frac{1}{37} \sum_{i=1}^{37} (y_i - 1.61^{x_i})$ ，得  $f(x) = 1.61^x + 1.7821146$ ；

當  $a=1.62$  時，取  $b = \frac{1}{37} \sum_{i=1}^{37} (y_i - 1.62^{x_i})$ ，得  $f(x) = 1.62^x + 1.6967751$ ；

⋮

當  $a=1.69$  時，取  $b = \frac{1}{37} \sum_{i=1}^{37} (y_i - 1.69^{x_i})$ ，得  $f(x) = 1.69^x + 1.0428002$ 。

(四) 將每筆資料  $(x_i, y_i)$ ，代入(三)中每個  $a$  值所求得的函數中，計算  $\sum_{i=1}^{37} [f(x_i) - y_i]^2$  的值，如下表所示。

| $a$ 值       | $b$ 值            | $\sum_{i=1}^{37} [f(x_i) - y_i]^2$ |
|-------------|------------------|------------------------------------|
| 1.60        | 1.8655591        | 113.92552                          |
| 1.61        | 1.7821146        | 103.11318                          |
| 1.62        | 1.6967751        | 94.146577                          |
| 1.63        | 1.6094996        | 87.236459                          |
| 1.64        | 1.5202464        | 82.608718                          |
| <b>1.65</b> | <b>1.428973</b>  | <b>80.505254</b>                   |
| <b>1.66</b> | <b>1.3356362</b> | <b>81.184891</b>                   |
| 1.67        | 1.2401918        | 84.924347                          |
| 1.68        | 1.142595         | 92.019242                          |
| 1.69        | 1.0428002        | 102.78516                          |
| 1.70        | 0.940761         | 117.55874                          |

(五) 依此類推兩輪，獲得以下的兩個資料表：

| $a$ 值        | $b$ 值            | $\sum_{i=1}^{37} [f(x_i) - y_i]^2$ |
|--------------|------------------|------------------------------------|
| 1.650        | 1.428973         | 80.505254                          |
| 1.651        | 1.4197329        | 80.443556                          |
| <b>1.652</b> | <b>1.4104721</b> | <b>80.409942</b>                   |
| <b>1.653</b> | <b>1.4011906</b> | <b>80.404684</b>                   |
| 1.654        | 1.3918883        | 80.428052                          |
| 1.655        | 1.3825653        | 80.480321                          |
| 1.656        | 1.3732213        | 80.561767                          |
| 1.657        | 1.3638565        | 80.672666                          |
| 1.658        | 1.3544707        | 80.813299                          |
| 1.659        | 1.3450639        | 80.983946                          |
| 1.660        | 1.3356362        | 81.184891                          |

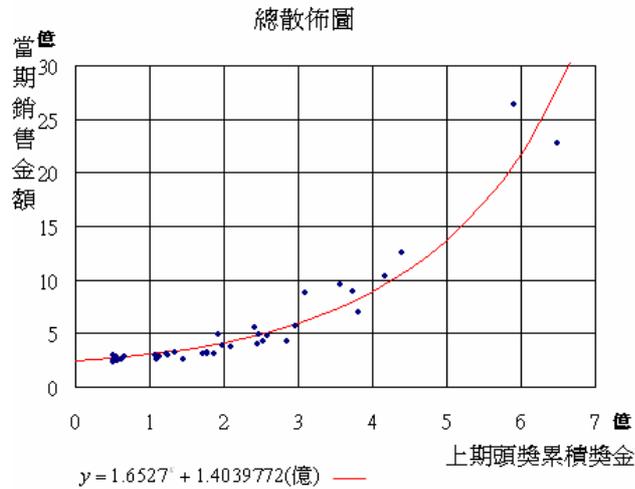
| $a$ 值         | $b$ 值            | $\sum_{i=1}^{37} [f(x_i) - y_i]^2$ |
|---------------|------------------|------------------------------------|
| 1.6520        | 1.4104721        | 80.409942                          |
| 1.6521        | 1.4095449        | 80.408136                          |
| 1.6522        | 1.4086175        | 80.406614                          |
| 1.6523        | 1.4076899        | 80.405375                          |
| 1.6524        | 1.406762         | 80.404421                          |
| 1.6525        | 1.405834         | 80.403752                          |
| <b>1.6526</b> | <b>1.4049057</b> | <b>80.403367</b>                   |
| <b>1.6527</b> | <b>1.4039772</b> | <b>80.403268</b>                   |
| 1.6528        | 1.4030486        | 80.403454                          |
| 1.6529        | 1.4021197        | 80.403926                          |
| 1.6530        | 1.4011906        | 80.404684                          |

這部分計算是利用 excel 軟體，所求出的近似值為  $a=1.6527$ 、 $b=1.4039772$ ，故簽注

金額 Y 對上一期頭獎累計獎金 X 的迴歸曲線為

$$y = f(x) = 1.6527^x + 1.4039772 \text{ (億)} \circ \dots \dots \dots \langle \text{定理一} \rangle$$

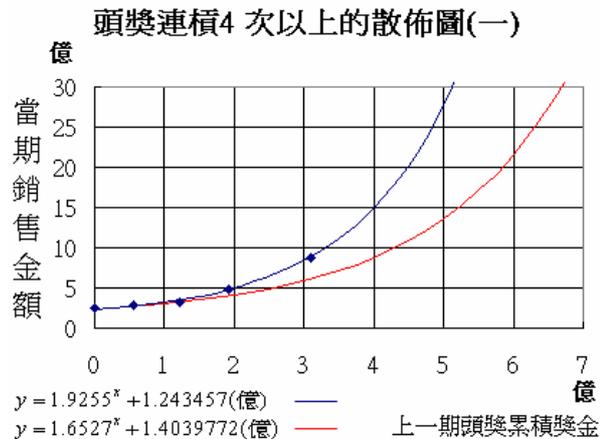
以下散佈圖是將迴歸曲線  $y = f(x) = 1.6527^x + 1.4039772$  以紅色曲線描繪在散佈圖上的對照圖：



三、爲了清楚「上一期頭獎累計獎金」與「本期銷售金額」的關係，我們將頭獎連槓 4 次以上者，單獨畫成散佈圖(紅色線條爲總散佈圖與之比較)。

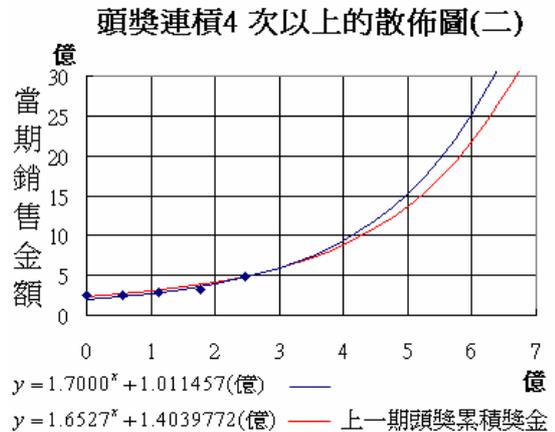
(一) 93 年 第 31~35 期的數據與散佈圖：

| 93 年 第 31~35 期的數據 |           |
|-------------------|-----------|
| 累積獎金              | 銷售金額      |
| 0                 | 253281800 |
| 55227214          | 286129550 |
| 122120022         | 316141050 |
| 192532068         | 490977800 |
| 308792293         | 879582450 |



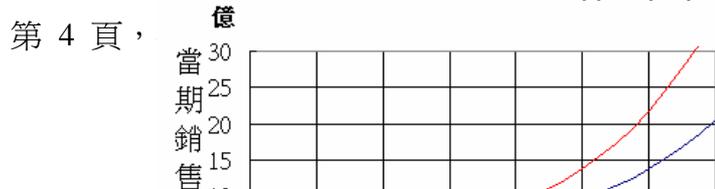
(二) 93 年 第 46~50 期的數據與散佈圖：

| 93 年 第 46~50 期的數據 |           |
|-------------------|-----------|
| 累積獎金              | 銷售金額      |
| 0                 | 248252300 |
| 56103158          | 248271050 |
| 112947356         | 288595200 |
| 178016367         | 325355550 |
| 247356610         | 487867750 |



(三) 93 年 第 51~55 期的數據與散佈圖：

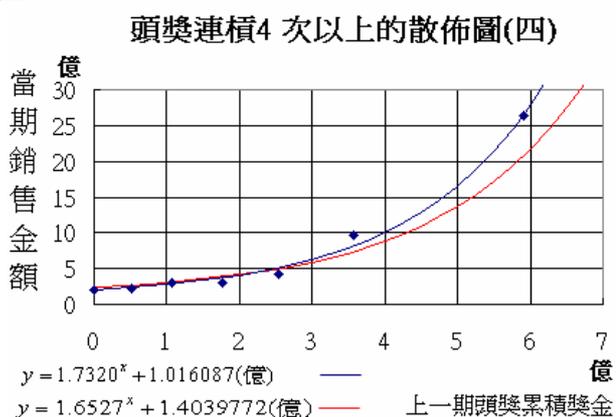
頭獎連槓4次以上的散佈圖(三)



| 93年 第51~55期的數據 |           |
|----------------|-----------|
| 累積獎金           | 銷售金額      |
| 0              | 218349950 |
| 51688823       | 245622600 |
| 109584804      | 261376350 |
| 172532566      | 309753550 |
| 245836410      | 398868050 |

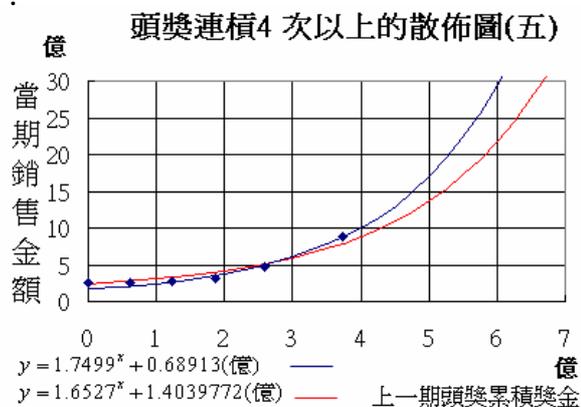
(四) 93年 第56~62期的數據與散佈圖：

| 93年 第56~62期的數據 |            |
|----------------|------------|
| 累積獎金           | 銷售金額       |
| 0              | 205629300  |
| 51147208       | 230059900  |
| 108053256      | 295879750  |
| 176810871      | 304890800  |
| 253153742      | 429128500  |
| 357295399      | 956783800  |
| 590252515      | 2642708250 |



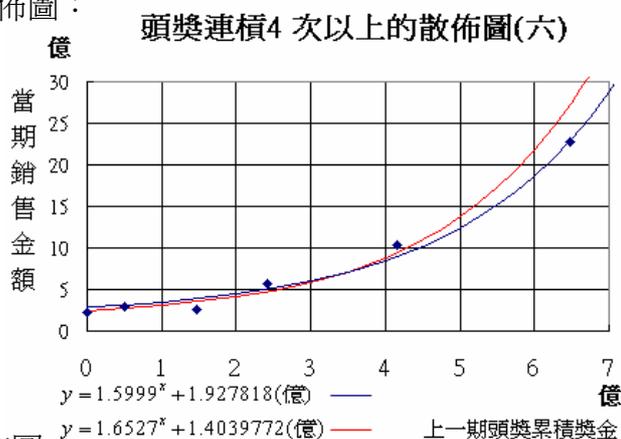
(五) 93年 第66~71期的數據與散佈圖：

| 93年 第66~71期的數據 |           |
|----------------|-----------|
| 累積獎金           | 銷售金額      |
| 0              | 258889500 |
| 62312216       | 253123950 |
| 122967188      | 269867900 |
| 186510557      | 316364400 |
| 259109801      | 477632750 |
| 373951502      | 890955850 |



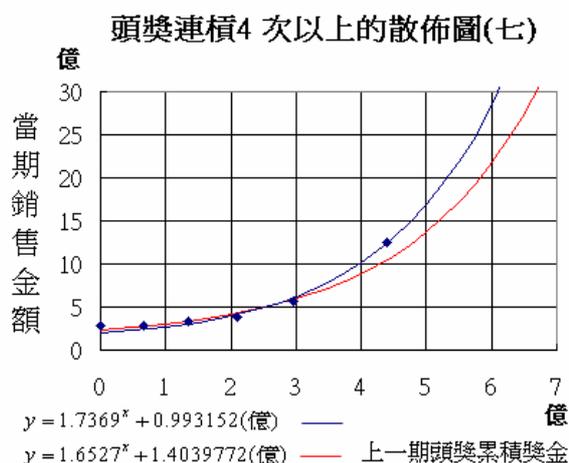
(六) 93年 第83~88期的數據與散佈圖：

| 93年 第83~88期的數據 |            |
|----------------|------------|
| 累積獎金           | 銷售金額       |
| 0              | 223958300  |
| 51080505       | 292100050  |
| 146172401      | 256761800  |
| 241948832      | 561470550  |
| 416322019      | 1029881000 |
| 648231442      | 2272510400 |



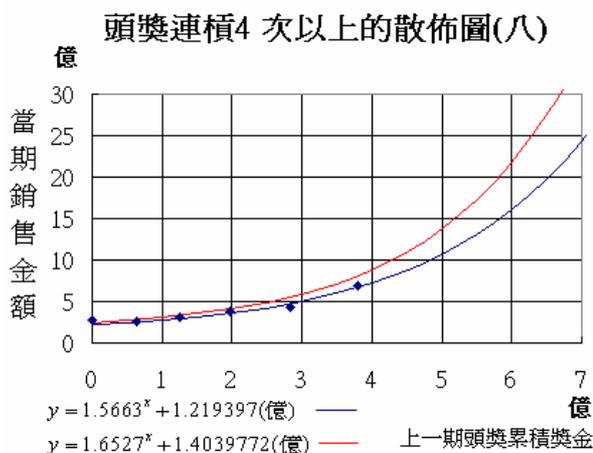
(七) 93年 第94~99期的數據與散佈圖：

| 93年 第94~99期的數據 |            |
|----------------|------------|
| 累積獎金           | 銷售金額       |
| 0              | 282325900  |
| 65711835       | 287266700  |
| 134178117      | 328818450  |
| 210128709      | 380807950  |
| 296823422      | 571776550  |
| 439899856      | 1249724550 |



(八) 94年 第3~8期的數據與散佈圖：

| 94年 第3~8期的數據 |           |
|--------------|-----------|
| 累積獎金         | 銷售金額      |
| 0            | 268177800 |
| 63073329     | 262293000 |
| 125418470    | 302103450 |
| 197350786    | 382893700 |
| 284184615    | 429795000 |
| 380479611    | 692636400 |



雖然總散佈圖的迴歸線與各子散佈圖的迴歸線並不完全吻合，囿於學識的我們也不會求曲線相關係數，但以散佈圖判斷上一期頭獎累計獎金與樂透的銷售金額兩者之間相關性似乎還頗高，我們仍可用於預測當期樂透之簽注總金額。

四、樂透中獎方式、獎項簽中機率及獎金之分配情形，說明如下表：

| 獎項 | 中獎方式               | 簽中機率         |                                   |
|----|--------------------|--------------|-----------------------------------|
| 頭獎 | 與當期中獎號碼完全相同者〈順序不限〉 | 1/13983816.0 | $1/C_6^{49}$                      |
| 貳獎 | 對中當期中獎號碼之其中任五碼+特別號 | 1/2330636.0  | $C_5^6 C_1^1 / C_6^{49}$          |
| 參獎 | 對中當期中獎號碼之其中任五碼     | 1/55491.3    | $C_5^6 C_1^{42} / C_6^{49}$       |
| 肆獎 | 對中當期中獎號碼之其中任四碼+特別號 | 1/22196.5    | $C_4^6 C_1^1 C_1^{42} / C_6^{49}$ |
| 伍獎 | 對中當期中獎號碼之其中任四碼     | 1/1082.8     | $C_4^6 C_2^{42} / C_6^{49}$       |
| 陸獎 | 對中當期中獎號碼之其中任三碼+特別號 | 1/812.1      | $C_3^6 C_1^1 C_2^{42} / C_6^{49}$ |
| 普獎 | 對中當期中獎號碼之其中任三碼     | 1/60.9       | $C_3^6 C_3^{42} / C_6^{49}$       |

### 【獎金分配】

- (一)「總獎金」是當期總投注金額(銷售金額)乘以總獎金分配比率得之。
- (二)「總獎金分配比率」定為 57%
- (三)陸獎及普獎採固定獎額方式分配，陸獎每注獎金為新台幣 1000 元，普獎為每注新台幣 400 元。
- (四)頭獎金額至伍獎是「總獎金」減除陸獎、普獎之總額後，依下列比率分配：

| 獎項   | 頭獎  | 貳獎 | 參獎  | 肆獎 | 伍獎  | 合計   |
|------|-----|----|-----|----|-----|------|
| 分配比率 | 56% | 9% | 10% | 5% | 20% | 100% |

(以上資料，摘錄自『中華民國公益彩券網站：<http://www.roclotto.com.tw/>』)

五、頭獎預估金額、頭獎獎金之期望值：

(一)六獎及普獎獎金期望值之和為  $\frac{1}{812.1} \times 1000 + \frac{1}{60.9} \times 400 = 7.7995$  (元)

(二)六獎及普獎獎金佔總簽注金額的  $\frac{7.7995}{50} = 15.6\%$

(三)頭獎至伍獎的獎金總額佔總簽注金額的比率為  $57\% - 15.6\% = 41.4\%$

(四)更進一步頭獎與二獎的獎金總額佔總簽注金額的比率為

1. 頭獎： $41.4\% \times 56\% = 23.184\%$

2. 二獎： $41.4\% \times 9\% = 3.726\%$

(五)本期頭獎獎金是上一期累積獎金加上本期所增加的金額，設上一期的累積獎金為  $x$ ，本期的銷售金額為  $y$ ，而  $y$  中有 23.184% 作為頭獎獎金，故本期頭獎獎金總額為  $x + 0.23184y$  …………… <定理二>

(六)頭獎中獎機率  $p = \frac{1}{C_6^{49}}$

頭獎中獎注數 = 總注數  $\times p = np$  …………… <定理三>

在預期頭獎中獎人分配到的頭獎金額時：

1. 若  $np \geq 1$ ，則每注中頭獎獎金期望值 =  $\frac{\text{頭獎}}{np} = \frac{x + 0.23184y}{np}$  …………… <定理四>

2. 若  $np < 1$ ，即不滿一注，所以視為一注，則每注中頭獎獎金期望值

=  $\frac{\text{頭獎}}{1} = x + 0.23184y$  …………… <定理五>

六、我們將中頭獎之機率設為  $p$  ( $p = \frac{1}{C_6^{49}} = \frac{1}{13983816}$ )，並假設任兩人樂透的簽注行為

都互不影響，則在總投注數為  $n$  注的情形下，頭獎均沒人中獎之機率則為

$(1 - p)^n \doteq e^{-np}$  …………… <定理六>

【證明】：設頭獎中獎機率為  $p$ ，不中獎機率則為  $1 - p$ ，

則  $n$  注均不中獎機率為  $(1 - p)^n$ 。

又  $\because e = \lim_{x \rightarrow 0} (1 + \frac{1}{x})^x$

$$\therefore (1-p)^n = [(1-p)^{\frac{1}{p}}]^{-np} \doteq e^{-np}$$

$$(\because p = \frac{1}{C_6^{49}} = \frac{1}{13983816} \text{ 非常接近 } 0)$$

同理，貳獎的中獎機率為  $\frac{C_5^6 C_1^1}{C_6^{49}} = 6p$

則  $n$  注均沒有人中獎的機率為  $(1-6p)^n \doteq e^{-6np}$

參獎中獎之機率為  $\frac{C_5^6 C_1^{42}}{C_6^{49}} = 252p$

則沒有人中獎的機率為  $(1-252p)^n \doteq e^{-252np}$ ，依此類推...

七、頭獎連  $k$  槓之機率：

(一) 由定理六，頭獎沒人中獎之機率為  $e^{-np}$ ，所以頭獎連槓之機率就是將每一期沒人中獎之機率連乘起來即可。設連  $k$  槓的簽注數分別為  $n_1, n_2, n_3, \dots, n_k$ ，所以連  $k$  槓之機率為

$$e^{-n_1 p} \times e^{-n_2 p} \times e^{-n_3 p} \times \dots \times e^{-n_k p} = e^{-(n_1+n_2+n_3+\dots+n_k)p} \dots\dots\dots < \text{定理七} >$$

(二) 以史上頭獎獎金最高的 93056~93062 為例：

|            | 銷售金額       | 注數 $n$   | 當期沒人中獎機率    | 連 $k$ 槓之機率  |
|------------|------------|----------|-------------|-------------|
| 93056(k=1) | 205629300  | 4112586  | 0.745205008 | 0.745205008 |
| 93057(k=2) | 230059900  | 4601198  | 0.719616285 | 0.536261660 |
| 93058(k=3) | 295879750  | 5917595  | 0.654964488 | 0.351232343 |
| 93059(k=4) | 304890800  | 6097816  | 0.646577585 | 0.227098960 |
| 93060(k=5) | 429128500  | 8582570  | 0.541317229 | 0.122932580 |
| 93061(k=6) | 956783800  | 19135676 | 0.254510047 | 0.031287577 |
| 93062(k=7) | 2642708250 | 52854165 | 0.022830355 | 0.000714306 |

實際上，只槓了 6 期，而第 7 期槓龜之機率僅 0.022830355，連 7 槓的機率更只有 0.000714306。

(三) 預估之連槓機率：

我們由頭獎累計 0 開始計算，先帶入函數  $y = f(x) = 1.6527^x + 1.4039772$  求出本期預估銷售金額，然後再利用上方的定理二頭獎獎金總額為  $x + 0.23184y$  求出下一期之簽注數。最後利用連  $k$  槓之機率為

$$e^{-n_1 p} \times e^{-n_2 p} \times e^{-n_3 p} \times \dots \times e^{-n_k p} = e^{-(n_1+n_2+n_3+\dots+n_k)p} \text{ , 即可求解。}$$

| 期數 | 頭獎累積金額 $x$ (億) | 預估的銷售金額 $y$ (元) | 總注數 $n$    | 當期沒人中獎機率    | 連槓之機率       |
|----|----------------|-----------------|------------|-------------|-------------|
| 1  | 0              | 240397720.0     | 4807954    | 0.709054744 | 0.709054744 |
| 2  | 0.557338074    | 272712341.5     | 5454247    | 0.677030007 | 0.480051339 |
| 3  | 1.189594367    | 322184537.0     | 6443691    | 0.630781347 | 0.302807430 |
| 4  | 1.936546997    | 404969176.4     | 8099384    | 0.560348394 | 0.169677657 |
| 5  | 2.875427536    | 564432142.7     | 11288643   | 0.446076736 | 0.075689255 |
| 6  | 4.184007015    | 958721817.3     | 19174436   | 0.253805573 | 0.019210355 |
| 7  | 6.406707677    | 2640198207.0    | 52803964   | 0.022912462 | 0.000440157 |
| 8  | 12.5277432     | 54275472272     | 1085509445 | 0.000000000 | 0.000000000 |

八、期望值：

(一) 一開始我們單純認為既然總獎金分配比率為 57% ，故每注樂透的期望值為  $50 \times 57\% = 28.5$ (元)

(二) 但深入一想，難道每一期樂透的期望值都相同嗎？假設上一期的累積獎金為  $x$ ，

本期的銷售金額為  $y$ ，則總注數  $n = \frac{y}{50}$ ，則

1. 頭獎總獎金為  $x + 0.23184y$ ；
2. 至少一人中頭獎機率為  $1 - e^{-np}$ ；
3. 貳獎總獎金為  $0.03726y$ ；
4. 至少一人中貳獎機率為  $1 - e^{-6np}$ ；
5. 其他獎項總獎金為  $y(0.57 - 0.23184 - 0.03726)$ ；
6. 其他獎項沒人中獎的機率可視為 0

故期望值  $E(x, y)$

= 預期的總獎金 / 總簽注數

$$= \frac{1}{n} [(x + 0.23184y)(1 - e^{-np}) + (0.03726y)(1 - e^{-6np}) + y(0.57 - 0.23184 - 0.03726) \times 1]$$

$$= \frac{y \times (57\% - 0.23184 \times e^{-np} - 0.03726 \times e^{-6np})}{n} + \frac{x \times (1 - e^{-np})}{n} \text{。} \dots \dots \dots \text{<定理八>}$$

(三) 舉例說明，

1. 當  $x = 0$  時（上一期頭獎累積獎金為 0），則

這一期預期的簽注金額為  $y = f(0) = 1.6527^0 + 1.4039772 = 2.4039772$ （億）

此時簽注數為  $n = \frac{2.4039772 \times 10^8}{50} = 4807954.4$ （注）

可以預期頭獎金額上看

$$(x + 0.23184y) \times 10^8 = (2.4039772 \times 0.23184) \times 10^8 = 55733807.4 \text{ (元)}$$

以及樂透的期望值為  $E(0, 2.4039772 \times 10^8)$

$$= \frac{2.4039772 \times 10^8 (57\% - 0.232 \times e^{-np} - 0.03726 \times e^{-6np})}{n}$$

$$\doteq 20.038 \text{ (元)。$$

2. 當頭獎累計獎金為 3 億時， $x = 3$ (億)，則

下一期預期的簽注金額為  $y = f(3) = 1.6527^3 + 1.4039772 = 5.918190555$ （億）

此時簽注數為  $n = \frac{5.918190555 \times 10^8}{50} = 11836381.11$ （注）

可以預期頭獎金額上看

$$(x + 0.23184y) \times 10^8 = (3 + 5.918190555 \times 0.23184) \times 10^8 = 437207329.8 \text{ (元)}$$

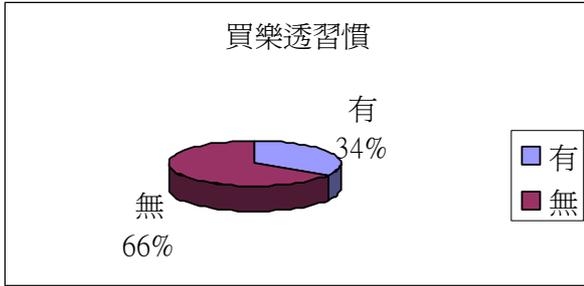
以及樂透的期望值為

$$\frac{5.918190555 \times 10^8 \times (57\% - 0.23184 \times e^{-np} - 0.03726 \times e^{-6np})}{n} + \frac{3 \times 10^8 \times (1 - e^{-np})}{n}$$

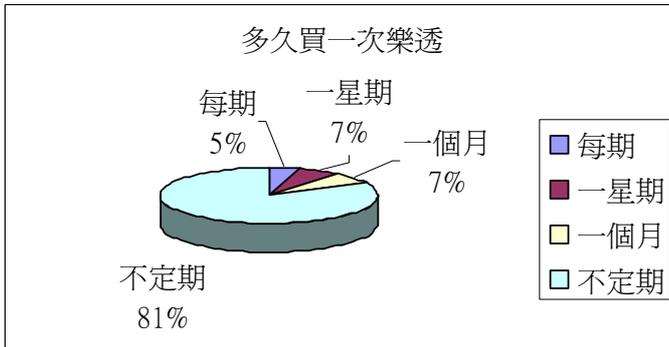
$$\doteq 37.986 \text{ (元)。$$

九、問卷調查分析：爲了解民眾投注情形，以解釋全民瘋樂透的原因，我們到嘉義市區數間投注站發出問卷 200 份，回收有效問卷 117 份，以下爲統計結果：

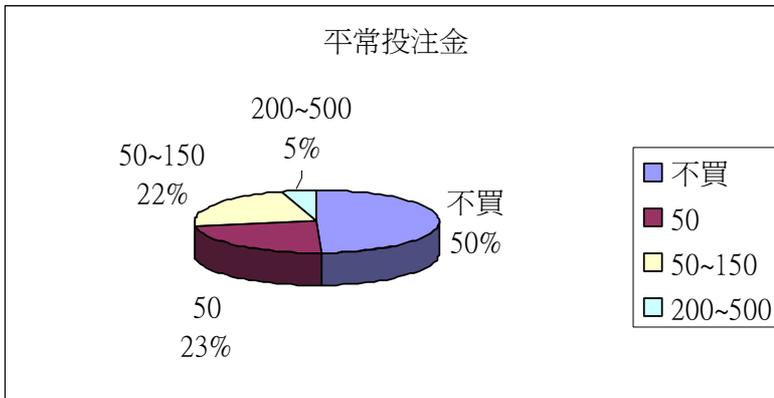
(一) 買樂透的習慣：



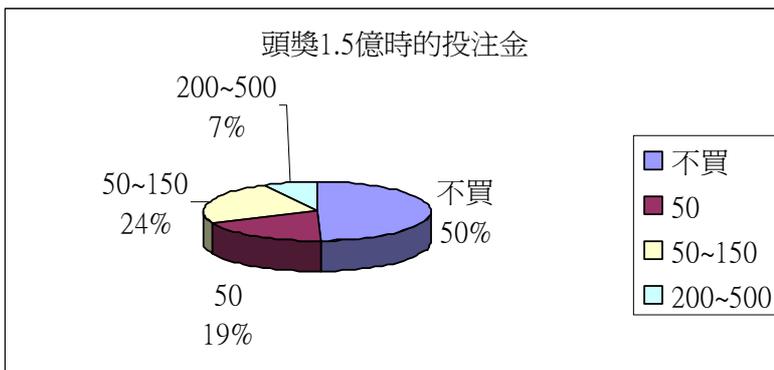
(二) 多久買一次樂透：



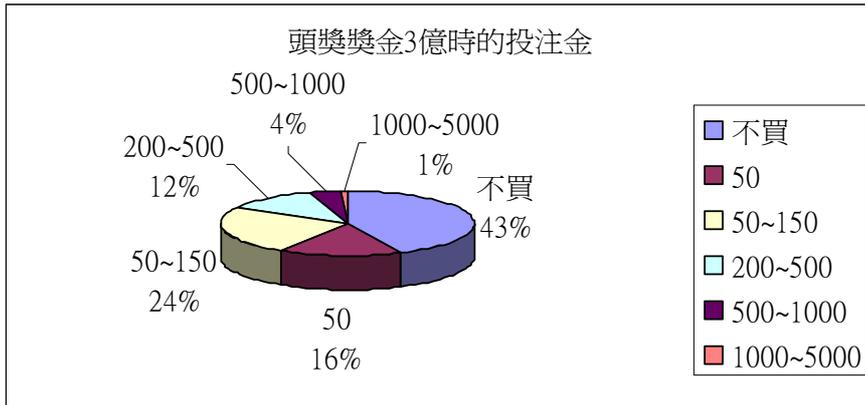
(三) 平常投注的金額：



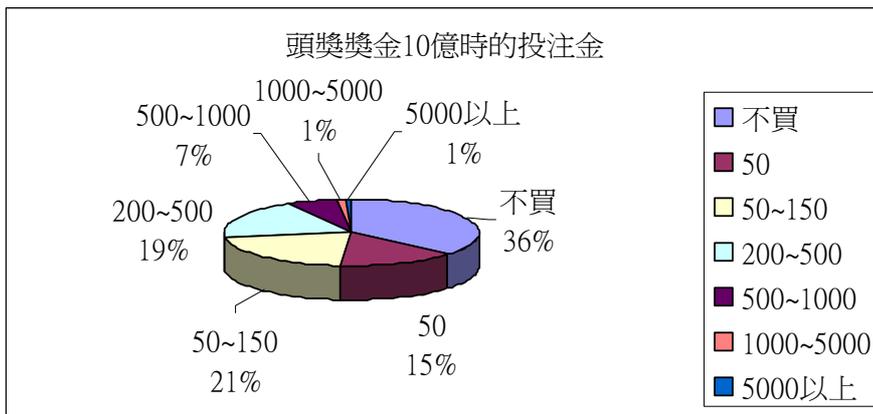
(四) 頭獎 1.5 億時的投注金：



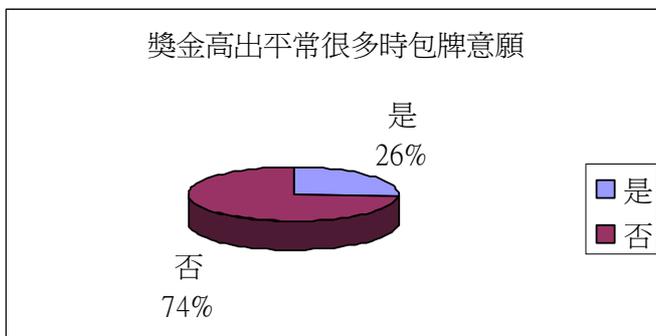
(五) 頭獎 3 億時的投注金額：



(六) 頭獎 10 億時的投注金：



(七) 當累積獎金增高很多時是否會增加包牌意願：



伍、結 論：

- 一、影響彩券買氣的主要原因，主要為頭彩累計金額的多寡，由指數函數特性知，當頭彩累計金額等差增加時，下一期樂透簽注總金額幾乎會以等比增加。
- 二、在上一期頭獎累積獎金已知的情況下，可預估此期投注金額為  

$$y = f(x) = 1.6527^x + 1.4039772$$
 其中  $x$  為上一期的頭獎累積獎金。
- 三、在  $x$  (上一期頭獎累積獎金) 給定的情況下，此時本期頭獎預估金額為  $x + 0.23184y$ ，其中  $y$  為本期銷售金額。
- 四、在總注數為  $n$  的情形下，頭獎均沒人之機率為  $e^{-np}$ ， $n$  為總注數、 $p$  為頭彩中獎機率。
- 五、連  $k$  槓之機率為  $e^{-n_1p} \times e^{-n_2p} \times e^{-n_3p} \times \dots \times e^{-n_kp} = e^{-(n_1+n_2+n_3+\dots+n_k)p}$ 。
- 六、頭獎中獎人數的期望值為  $np$ ，頭獎獎金之期望值為  $\frac{x + 0.23184y}{np}$ 。

七、期望值：

期望值公式：
$$\frac{y \times (57\% - 0.23184 \times e^{-np} - 0.03726 \times e^{-6np})}{n} + \frac{x \times (1 - e^{-np})}{n}$$
，其中 y

為本期的銷售金額、x 為上一期的頭彩累積獎金、n 為總注數、p 為頭彩中獎機率、0.23184 為本期頭獎分配比率的期望值、0.03726 為貳獎的分配比率的期望值。

八、在上一期頭獎獎金 X 給定下，當期簽注金額、簽注數、頭獎上看金額、頭獎開出機率、頭獎中獎人數期望值、頭獎獎金期望值、每注分配到頭獎獎金，所有結果分析如下：

X 為上一期頭獎累積獎金、Y 為簽注金額、n 為總注數。

| X    | Y           | n          | 頭獎上看        | 頭獎<br>開出機率 | 預估頭獎<br>中獎人數 | 頭獎獎金<br>期望值 | 每注分配<br>頭獎獎金 |
|------|-------------|------------|-------------|------------|--------------|-------------|--------------|
| 0    | 240397720   | 4807954    | 55733807    | 0.290945   | 1.0000       | 20.03821417 | 55733807     |
| 0.5  | 268955100   | 5379102    | 112354550   | 0.319322   | 1.0000       | 23.38701350 | 112354550    |
| 1    | 305667720   | 6113354    | 170866004   | 0.354140   | 1.0000       | 26.66570884 | 170866004    |
| 1.5  | 352864502   | 7057290    | 231808106   | 0.396298   | 0.5047       | 29.83004408 | 231808106    |
| 2    | 413539449   | 8270789    | 295874986   | 0.446478   | 0.5915       | 32.82206934 | 295874986    |
| 2.5  | 491541571   | 9830831    | 363958998   | 0.504909   | 0.7030       | 35.56945873 | 363958998    |
| 3    | 591819056   | 11836381   | 437207330   | 0.571058   | 0.8464       | 37.98646995 | 437207330    |
| 3.5  | 720733163   | 14414663   | 517094776   | 0.643282   | 1.0308       | 39.97765413 | 501639066    |
| 4    | 886461761   | 17729235   | 605517295   | 0.718561   | 1.2678       | 41.44626311 | 477597726    |
| 4.5  | 1099518106  | 21990362   | 704912278   | 0.792486   | 1.5726       | 42.30973752 | 448258357    |
| 5    | 1373417761  | 27468355   | 818413174   | 0.859745   | 1.9643       | 42.52277062 | 416644504    |
| 5.5  | 1725535982  | 34510720   | 950048262   | 0.915238   | 2.4679       | 42.10296630 | 384961549    |
| 6    | 2178209942  | 43564199   | 1104996193  | 0.955636   | 3.1153       | 41.14714006 | 354696376    |
| 6.5  | 2760155725  | 55203115   | 1289914503  | 0.980700   | 3.9476       | 39.82356189 | 326755605    |
| 7    | 3508289979  | 70165800   | 1513361949  | 0.993380   | 5.0176       | 38.33353188 | 301608122    |
| 7.5  | 4470071775  | 89401436   | 1786341440  | 0.998327   | 6.3932       | 36.85568744 | 279412404    |
| 8    | 5706513256  | 114130265  | 2122998033  | 0.999715   | 8.1616       | 35.50422292 | 260120432    |
| 8.5  | 7296050031  | 145921001  | 2541516239  | 0.999971   | 10.4350      | 34.32455765 | 243557098    |
| 9    | 9339516866  | 186790337  | 3065273590  | 0.999998   | 13.3576      | 33.31821043 | 229477726    |
| 9.5  | 11966544294 | 239330886  | 3724323629  | 1.000000   | 17.1148      | 32.46939935 | 217607753    |
| 10   | 15343781933 | 306875639  | 4557302403  | 1.000000   | 21.9451      | 31.75864902 | 207668743    |
| 10.5 | 19685470163 | 393709403  | 5613879403  | 1.000000   | 28.1546      | 31.16694164 | 199394416    |
| 11   | 25267030809 | 505340616  | 6957908423  | 1.000000   | 36.1375      | 30.67674963 | 192539661    |
| 11.5 | 32442538947 | 648850779  | 8671478230  | 1.000000   | 46.4001      | 30.27236437 | 186884812    |
| 12   | 41667184225 | 833343685  | 10860119991 | 1.000000   | 59.5934      | 29.93998211 | 182236840    |
| 12.5 | 53526146526 | 1070522931 | 13659501811 | 1.000000   | 76.5544      | 29.66765364 | 178428649    |
| 13   | 68771717778 | 1375434356 | 17244035050 | 1.000000   | 98.3590      | 29.44515598 | 175317282    |

- 註：1. 依上方的表格可看出上一期的頭獎累積獎金為 5 億時，期望值有最大值，此時買樂透最有利，與直覺上期望值會隨頭獎累計獎金增加而遞增有所出入。
2. 目前數據中，上一期頭獎累計獎金  $X$  最多將近 6 億元，本期簽注金額  $Y$  最多為 26 億元。尚並無出現  $X \geq 6$  億元、 $Y \geq 27$  億元之情形。所以上表中綠色部分即為  $X \geq 7$  億元之情形，但是目前並未出現，只是我們的推論。
3. 雖然上一期頭獎累計獎金增加時，頭獎總金額會迅速增加，但中獎人數也會隨之增加，所以每人所分得的頭獎獎金未必最多。

#### 六、問卷調查：

- (一) 經分析資料可知每期都買的人占 5%，所以為何當頭獎累計獎金為 0 時，還是有一定的銷售金額，因為他們是大樂透的死忠客戶。
- (二) 當頭獎累積金額逐漸增加時，發現不買的人數有減少的趨勢，但買 200~1000 元的人卻逐漸增加，尤其頭獎金額在 3 或 10 億時增加得特別驚人。
- (三) 由函數  $f(x) = a^x + b$  可知，當  $x = 0$  時， $1 + b$  為其最小值，而這項數值即為每期都買的人所造成。當  $x$  越大時， $y$  值也就會越大，意即累積獎金越多時，不買的人會越少，而有買的人之投注金額會有上升的趨勢，由問卷調查可印證我們的假設是正確的。

#### 陸、參考資料：

- 一、余文卿（民 90）。數學（四）（135-141 頁）（154-157 頁）。
- 二、楊維哲、蔡聰明、吳隆盛（民 90）。數學甲（上冊）（20-29 頁）臺北市：三民書局。
- 三、中華民國公益彩券網站：<http://www.roclotto.com.tw/>。
- 四、V.I. SMIRMOV（民 75）。高等數學教程 第一卷 微積分。臺北市：九章出版社。

柒、附 錄：

一、上期頭獎累積獎金(X)與當期銷售金額(Y)總資料表：

| 期 別   | X<br>上期頭獎<br>累積獎金 | Y<br>當 期<br>銷售金額 | 期 別   | X<br>上期頭獎<br>累積獎金 | Y<br>當 期<br>銷售金額 |
|-------|-------------------|------------------|-------|-------------------|------------------|
| 93031 | 0                 | 253281800        | 93068 | 122967188         | 269867900        |
| 93032 | 55227214          | 286129550        | 93069 | 186510557         | 316364400        |
| 93033 | 122120022         | 316141050        | 93070 | 259109801         | 477632750        |
| 93034 | 192532068         | 490977800        | 93071 | 373951502         | 890955850        |
| 93035 | 308792293         | 879582450        | 93083 | 0                 | 223958300        |
| 93046 | 0                 | 248252300        | 93084 | 51080505          | 292100050        |
| 93047 | 56103158          | 248271050        | 93085 | 146172401         | 256761800        |
| 93048 | 112947356         | 288595200        | 93086 | 241948832         | 561470550        |
| 93049 | 178016367         | 325355550        | 93087 | 416322019         | 1029881000       |
| 93050 | 247356610         | 487867750        | 93094 | 0                 | 282325900        |
| 93051 | 0                 | 218349950        | 93095 | 65711835          | 287266700        |
| 93052 | 51688823          | 245622600        | 93096 | 134178117         | 328818450        |
| 93053 | 109584804         | 261376350        | 93097 | 210128709         | 380807950        |
| 93054 | 172532566         | 309753550        | 93098 | 296823422         | 571776550        |
| 93055 | 245836410         | 398868050        | 93099 | 439899856         | 1249724550       |
| 93056 | 0                 | 205629300        | 94003 | 0                 | 268177800        |
| 93057 | 51147208          | 230059900        | 94004 | 63073329          | 262293000        |
| 93058 | 108053256         | 295879750        | 94005 | 125418470         | 302103450        |
| 93059 | 176810871         | 304890800        | 94006 | 197350786         | 382893700        |
| 93060 | 253153742         | 429128500        | 94007 | 284184615         | 429795000        |
| 93061 | 357295399         | 956783800        | 94008 | 380479611         | 692636400        |
| 93062 | 590252515         | 2642708250       |       |                   |                  |
| 93066 | 0                 | 258889500        |       |                   |                  |
| 93065 | 118733468         | 324087850        |       |                   |                  |
| 93067 | 62312216          | 253123950        |       |                   |                  |

二、問卷樣本：

## 大樂透問卷調查

1. 請問您是從事何種職業？

- 金融／保險    政府機關    軍警    教育／研究    資訊  
製造／供應商    醫療    法律相關行業    交通／運輸／旅遊  
傳播    農漁牧    學生    其他\_\_\_\_\_

2. 請問您有買大樂透的習慣嗎？

- 有    無

3. 請問您多久買一次樂透？

- 每期都買    一個禮拜    一個月    不定期

4. 請問您平常都投注多少？

- 不買    50    50~150    200以上

5. 承上題，當頭獎累積到1.5億時，您會投注多少？

- 不買    50    50~150    200~500

累積至3億時

- 不買    50    50~150    200~500  
500~1000    1000~5000

累積至10億時

- 不買    50    50~150    200~500  
500~1000    1000~5000    5000以上

6. 當獎金比平常高出許多時，是否會增加您包牌的意願？

- 是    否

中華民國第四十五屆中小學科學展覽會  
評 語

---

高中組 數學科

040423

來搞 BL

國立嘉義高級中學

評語：

選擇模型過於樂觀，較缺少最適性的說服力。