

中華民國第四十五屆中小學科學展覽會
作品說明書

高中組 數學科

040420

棋盤上的馬步

臺北市立麗山高級中學

作者姓名：

高二 黃右嫻 高二 潘建融 高二 陳柏諺

指導老師：

黃靜寧

中華民國第四十五屆中小學科學展覽會
作品說明書

科 別：數學科

組 別：高中組

作品名稱：棋盤上的馬步

關 鍵 詞： 棋盤、馬步、漢米爾頓

編 號：

目錄

壹、	摘要·····	P. 2
貳、	研究動機·····	P. 2
參、	研究目的·····	P. 2
肆、	研究設備及器材·····	P. 2
伍、	研究方法·····	P. 3
陸、	研究結果與討論·····	P. 6
柒、	結論·····	P. 25
捌、	參考資料·····	P. 26

棋盤上的馬步

壹、摘要

馬步的走法有八種，下面我們討論以馬步不重複地一次走完整個棋盤的可行性，已證明出的結果如下：

- 一、在 $n \times m$ 的矩陣中，除 3×3 ， 3×5 ， 3×6 和 4×4 為無解外，其餘的我們已證出均至少有一解。
- 二、在 n 、 m 均大於 4 且 $n \times m$ 為偶數時，可以以任一格為起點。
- 三、在 n 、 m 均大於 4 且 $n \times m$ 為奇數時，可以以套色後格數多一格的顏色格子為起點。
- 四、對於無解的矩陣，我們改以虧格的形式討論，也找出虧格在適當位置時可有解的情形。
- 五、有虧格的大矩陣，在總格子數為偶數時，可以以任一格為起點；總格子數為奇數時，可以以任一套色後格數多一格的顏色格子為起點。

貳、研究動機

在高一的數學研究方法課程中，配合整數單元我們曾經討論過奇數與偶數的主題。當時，我們討論下面的問題：

- 一、在中國象棋的棋盤上，馬能否從某些點出發，可以不重複地跳遍半個棋盤；而從另外一些點出發，卻不能完成。(這與高二下排列組合中是否有一筆劃路徑的課程相關)

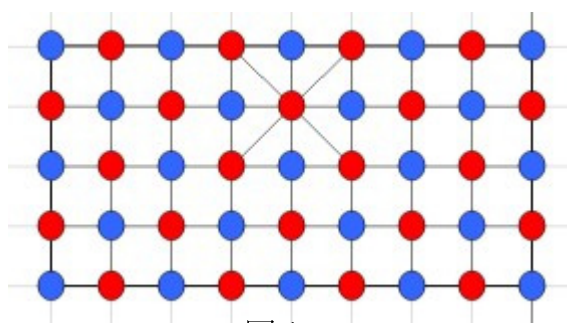


圖 1

圖 1 中，半個棋盤裏，紅點有 22 個，藍點有 23 個，若馬步由紅點開始，下一步必須走到藍點，很明顯的最後會有一個藍點落單，無法完成馬步走完半個棋盤，所以必須由藍點出發。

- 二、上述的題目，加上跳回原出發點的條件，其結果會有什麼不同呢？
- 三、前列兩題，題中的半個棋盤若改為整個棋盤情況又將如何？

參、研究目的

- 一、討論在 $n \times m$ 的矩陣中是否能有馬步路徑的解？
- 二、討論有解的 $n \times m$ 矩陣中有哪些格子可做起點，哪些不行？
- 三、討論在無解的矩陣中有一虧格時能否有解？
- 四、討論大的矩陣中有一虧格時的情況。

肆、研究設備及器材

人腦、紙、筆、電腦、Microsoft Visual FoxPro5.0、Dev-C++4、Visual Basic 6.0、GSP4.03

伍、研究方法

一、文獻探討

(一) 漢米爾頓路徑與迴圈

給一圖 G (圖 2)，以 V 來表示所有頂點的集合， E 表示所有邊的集合，記成 $G=(V,E)$ ，通過途中的每一頂點且只通過一次的路徑稱為漢米爾頓路徑；若是要求必須再回到起始頂點的回路，則稱為漢米爾頓迴圈(如圖 3)。

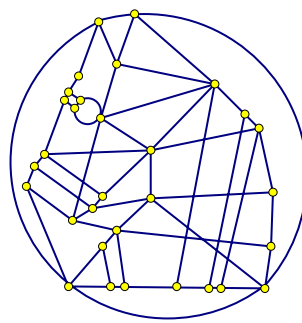


圖 2

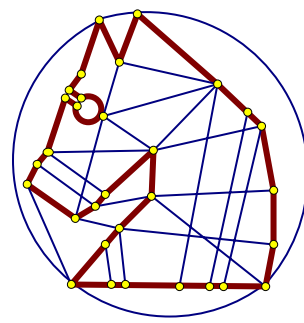


圖 3

(二) 古人研究

十八世紀時歐拉提出了是否能用騎士一次走完整個西洋棋的棋盤而不重複？開始了大家對騎士走 8×8 棋盤之討論。我們查閱了不少書籍、雜誌和網路資料，但大部份均為尋找解的個數之討論，如數學傳播季刊 10 卷 2 期林建宏所寫的 5 階棋盤之騎士漫遊僅有 112 個解，是用電腦程式找出所有解；28 卷 3、4 期中林克瀛所寫的，騎士漫遊方陣與魔方陣、六階棋盤上的騎士迴圈漫遊共有 1245 種，則是以推論方式得證解的個數。這些資料中對小矩陣之情況有豐富的探討，但不見其對不同棋盤中是否能解，或可有解之情形的證明與討論。

二、定義

(一) 方陣——行數、列數相同的方格圖

(二) 矩陣——行數、列數不等的方格圖

(三) 關鍵矩陣——連接數個矩陣時最重要的矩陣(例：圖 18)

三、找馬步矩陣解的方法

若將此類方格換成點，把馬步用線來取代，則要找的解就是一個漢米爾頓路徑或迴圈，但要確定此圖形是否有漢米爾頓路徑或迴圈是個很困難的問題。所以，我們運用下面幾種找解的方法，做為找較大矩陣的解或推理到 $n \times m$ 時必用的武器，下面是我們在研究過程中運用的幾種基本方法。

(一) 迴圈法

先找出方格中的迴圈，通常是以兩層為一圈(如圖 4)，再設法連接各迴圈。

例： 5×5 與 9×9 均可用迴圈法輕鬆的找到一解。

A	B	B	B	A	B	B	B	A
B	B	A	B	B	B	A	B	B
B	A	C	D	D	D	C	A	B
B	B	D	D	C	D	D	B	B
A	B	D	C	E	C	D	B	A
B	B	D	D	C	D	D	B	B
B	A	C	D	D	D	C	A	B
B	B	A	B	B	B	A	B	B
A	B	B	B	A	B	B	B	A

圖 4

7	12	17	22	5
18	23	6	11	16
13	8	25	4	21
24	19	2	15	10
1	14	9	20	3

圖 5

13	26	39	52	11	24	37	50	9
40	53	12	25	38	51	10	23	36
27	14	63	68	73	78	61	8	49
54	41	74	79	62	67	72	35	22
15	28	69	64	81	60	77	48	7
42	55	80	75	58	71	66	21	34
29	16	57	70	65	76	59	6	47
56	43	2	31	18	45	4	33	20
1	30	17	44	3	32	19	46	5

圖 6

迴圈法在方陣時很容易使用且可推廣至 $n \times n$ 的情況，但矩陣卻是它的剋星，原因是中間剩下的格子會隨著不同矩陣而變化，非常難掌握。

(二) 橋數法

馬步有八個方向，也就是在方格中橋數最多為 8，但在方格邊緣或有的位置已被前面的步占掉時橋數就會小於 8。因此在找解時我們通常會由橋數較小的開始，而遇到有兩個以上的橋可選擇時則選橋數小的先走。(如圖 7)

2	3	4	3	2
3	4	6	4	3
4	6	8	6	4
3	4	6	4	3
2	3	4	3	2

圖 7

例：

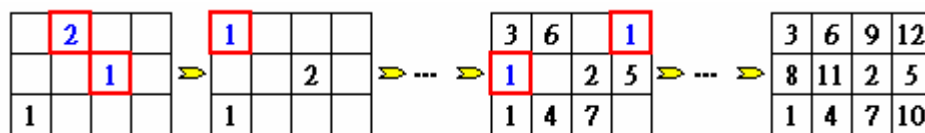


圖 8

圖 8 為 3×4 的矩陣以橋數法找解的過程，圖中紅色框中的數位為選中該格後下一步的橋數，而在遇到有兩格以上橋數都最小時，任意選其中一格走。

另外，我們也寫了一個程式顯示下一步或所有格子的橋數，在無其他的限制條件時，依橋數法的規則走幾乎都可找到解，非常好用。但若有限制條件，如：固定起點和終點，則必須靠下面的方法幫忙才容易找到需要的解。

(三) 前後呼應法

有時我們會需要固定起點和終點的解，或是比較特殊的方格直接從頭開始找會很不容易(有可能是無解)，這時除了從頭開始找，我們也會從結束點倒推回來。發現頭尾無法連接則無解，找到頭尾相接則得到一解。

例：

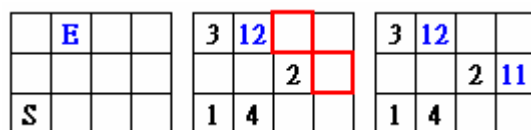


圖 9

若想要找 3×4 矩陣符合圖 9，S(起點)與 E(終點)的解，則 1 到 4 步因為都只有一條橋可以選，所以走法如圖 9。而到第 5 步時有兩個選擇(圖 9 中紅框)，

這時換從終點走回來會發現，12 倒著走只能走到圖中 11 的位置，但走到 11 後就沒有橋可繼續走，所以得證，在 3×4 的矩陣中無法有符合圖中 S 與 E 的路徑。

(四) 先分割後連接法

在比較大的矩陣不太可能用前面的方法慢慢的找，所以在大的矩陣或在要推證到 $n \times m$ 時，我們將大矩陣分割成小矩陣，再利用小矩陣間的連接加以完成。

3	6	9	12	3	6	9	12
8	11	2	5	8	11	2	5
1	4	7	10	1	4	7	10

圖 10

例：將 3×8 的矩陣先分成兩個 3×4 的矩陣，即圖 10 的紅色矩陣和藍色矩陣，因為走完紅色矩陣後在 12 的位置剛好可與藍色矩陣的 1 連接，所以只要再把藍色矩陣走完就得到了 3×8 矩陣的一組解。

若使用這種方法多接幾個矩陣，一直延伸下去，就可用來證明 $n \times m$ 時的情況。所以，此種方法雖對小的矩陣沒有用，但在尋找通解時卻不能沒有它。

(五) 電腦找解法

我們將棋盤座標化，以橫坐標與縱坐標的加減來表示馬步移動後的座標。用電腦依序判斷每一步的八個方位是否超出棋盤範圍或已經走過，通過判斷的就繼續走下一步，未通過的則試另一個方位，若全部未通過則倒退一步，繼續試前一步的另外 3 個後續位置，直到找出所有可能的解。(下頁中的圖 11 為電腦找解法之程式的流程圖)

電腦找解法之程式的流程圖

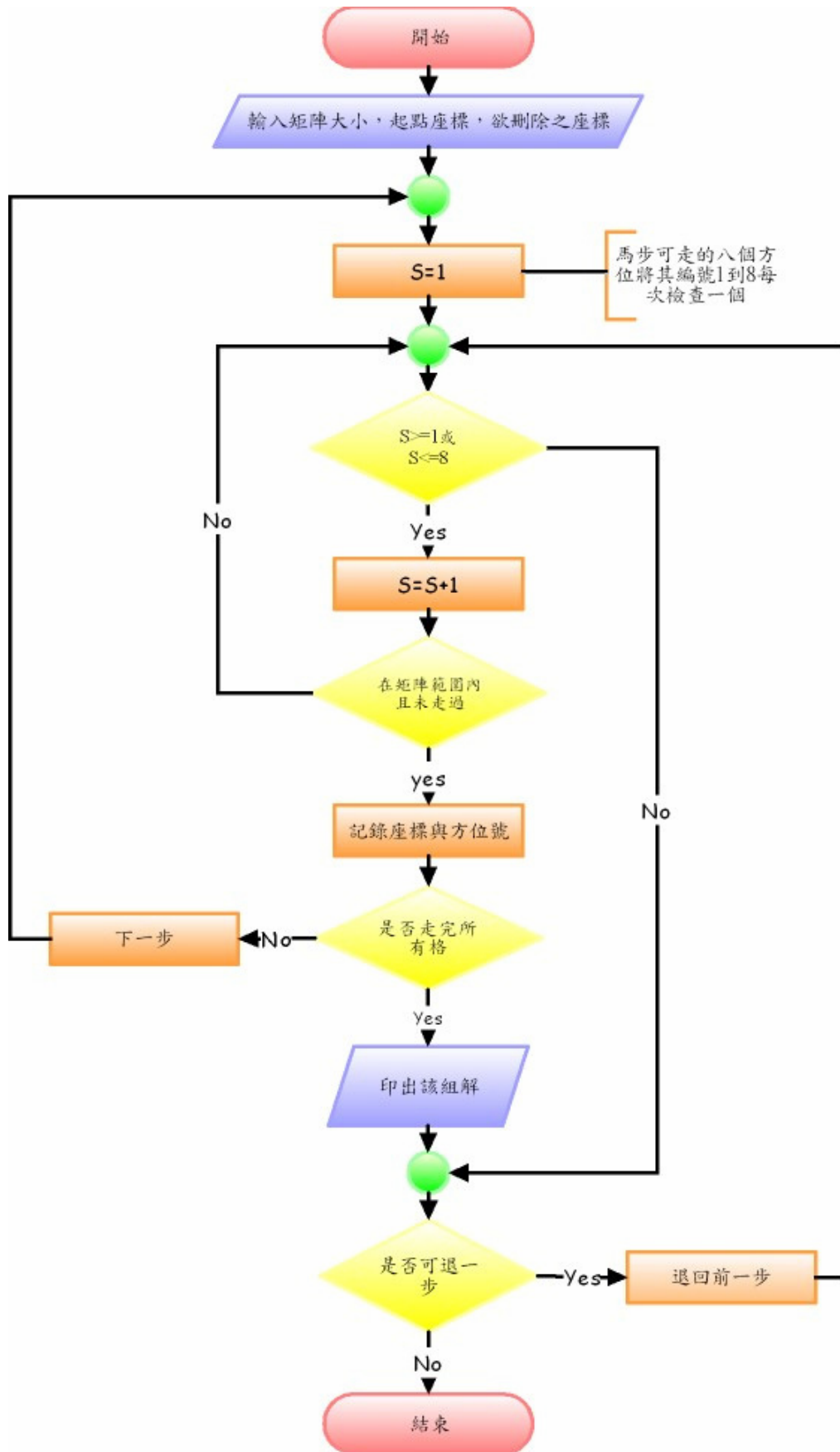


圖 11

陸、研究結果與討論

一、 $n \times m$ 矩陣與馬步路徑

(一) $n=3$ 時

1. $m=3$ (3×3)

圖 12 中，中間的點沒有橋，故 3×3 的方陣無解。

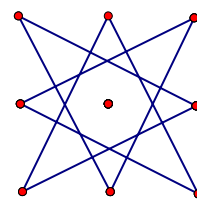


圖 12

2. $m=5$ (3×5)

圖 13 中，有 3×5 矩陣中的所有點和幾條橋，其中的橘色迴圈內點 A、B 必有一為起點或終點，否則將無法走到其他的點，因此點 C、D、E、F 中最多只能再有一個點做起點或終點，但圖中有一點有四條橋， $4-1=3$ 大於 2，所以 3×5 的矩陣是無解的。

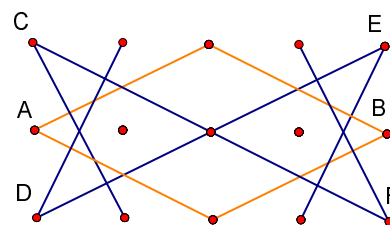


圖 13

3. $m=6$ (3×6)

承上所述起點與終點必為 A 或 B 與 C 或 D 中的一點，但此兩迴圈無法在走完其他所有的點後相連，所以 3×6 的矩陣是無解的。

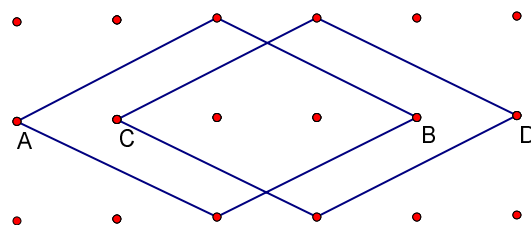


圖 14

4. 其他情況

由 3×4 矩陣的一組解，用連接法連接 k 個相同的矩陣(如圖 15)，可得 $3 \times 4k$ 矩陣的一組解。而同理可證 $m=4k+1$ ， $m=4k+2$ 和 $m=4k+3$ 時的情況。

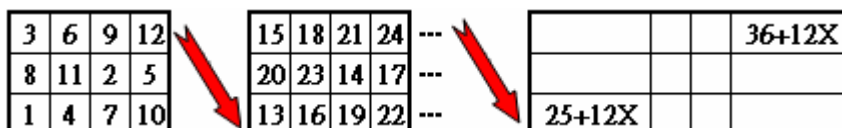


圖 15

(二) 方格為 $4 \times m$ 時

因為 $4=2+2$ ，若用兩格環繞的迴圈法，中間剛好不會有多餘的格子干擾，所以我們就以這種方法分兩類來證明。

1. $m=2c+3$ 且 $c \geq 1$

圖 16 為 $4 \times (4k+1)$ 時的情形，以左下角做起點而以起點右邊一格為終點的一組解。而 $4 \times (4k+3)$ 時同理可證。

$3m-1$	m	$4m-2$	...	$(3m+7)/2$	$(5m+3)/2$	$(m+5)/2$	$(7m+1)/2$	$(3m+3)/2$	$(5m-1)/2$
$4m-1$	$2m$	$3m-2$	...	$(m+7)/2$	$(7m+3)/2$	$(3m+5)/2$	$(5m+1)/2$	$(m+3)/2$	$(7m-1)/2$
$m+1$	$3m$	2	$2m+1$	$m+3$	$3m+2$	...	$(m-1)/2$	$(5m-3)/2$	$(3m+1)/2$
1	$4m$	$m+2$	$3m+1$	3	$2m+2$	...	$(3m-1)/2$	$(7m-3)/2$	$(m+1)/2$

圖 16

2. $m=2c+2$ 且 $c \geq 1$

$m=4k+2$ 的情形比 $m=4k+1$ 時複雜的多，無法直接從左下角開始就完成，不過我們發現將此四個迴圈若依下面順序連接

A1-A2-C1-C2-D1-D2-B1-B2(其中的 X1-X2

為以 X1 為起點、X2 為終點的方式走 X 迴圈，X=A、B、C、D)則剛好可得一組解。

$m=4k$ 時與此類似，唯 $k=1$ 時為無解。

D	C	B	A1	D2	---	A	D	C	B	A	D	C
B	A2	D1	C	B	---	C	B	A	D	C	B	A
C2	D	A	B1	C	D	A	---	D	A	B	C	D
A	B	C1	D	A	B2	C	---	B	C	D	A	B

圖 17

(三) n 、 m 均大於 4 時

因為最小的 $n \times n$ 馬步方陣為 5×5 的方陣，所以在 n 、 $m=5$ 開始我們用連接法將小矩陣連接成大矩陣。由關鍵矩陣(圖中左上紫色之矩陣，因其負責控制不同的餘數，為所有連接的矩陣中最重要的一個，故在此稱之為關鍵矩陣)的不同大小可把 $n \times m$ 的馬步方陣分成以下十五種情況(p 、 q 均為自然數，且 p 、 q 為連接的方格數)： $5p \times 5q$ ， $5p \times (5q+1)$ ， $5p \times (5q+2)$ ， $5p \times (5q+3)$ ， $5p \times (5q+4)$ ， $(5p+1) \times (5q+1)$ ， $(5p+1) \times (5q+2)$ ， $(5p+1) \times (5q+3)$ ， $(5p+1) \times (5q+4)$ ， $(5p+2) \times (5q+2)$ ， $(5p+2) \times (5q+3)$ ， $(5p+2) \times (5q+4)$ ， $(5p+3) \times (5q+3)$ ， $(5p+3) \times (5q+4)$ ， $(5p+4) \times (5q+4)$ 。

只要找到一個起點和終點可以符合圖中紅點(起點)與綠點(終點)，即可由圖中的路徑得到 $(5p+1) \times (5q+2)$ 時的解，其它十四種情況亦同。

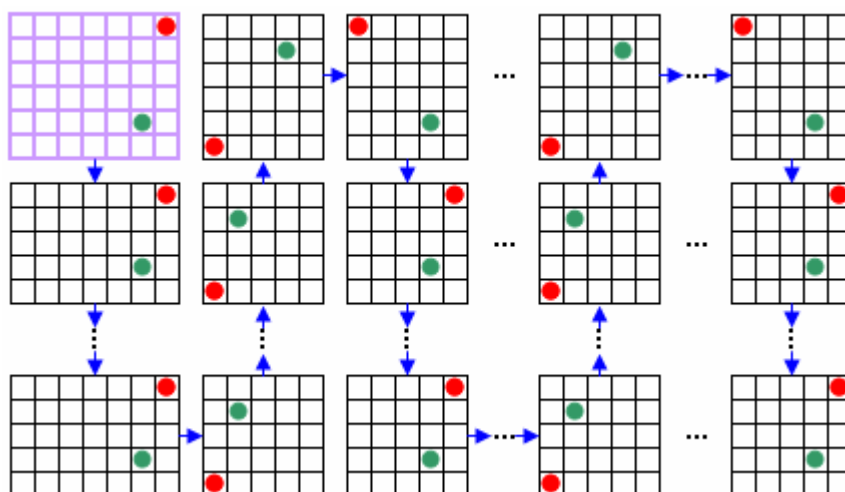


圖 18

只有在兩邊幫助連接的矩陣均為奇 $\times$ 偶矩陣時，因為此類矩陣之結束點不能在 X(見圖 19)的位置(因為開始點和結束點的顏色需不同)，無法用之前的連接方式一次證明，所以我們選擇用 E 做結束點將其分成每列奇數個矩陣、每列偶數個矩陣來討論，以解決此問題。

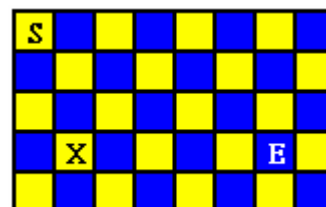


圖 19

1. 每列矩陣數為奇數

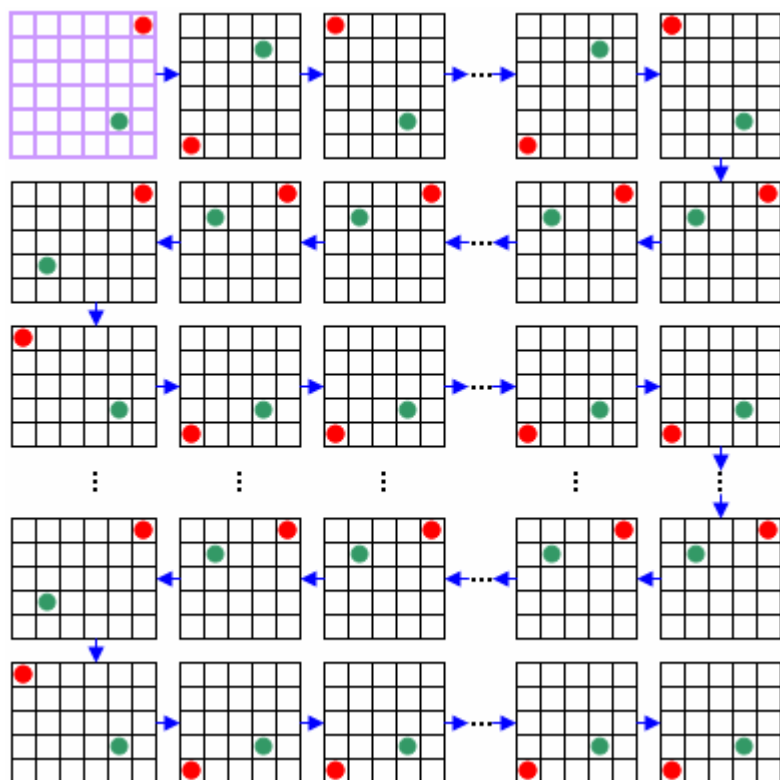


圖 20

2. 每列矩陣數為偶數

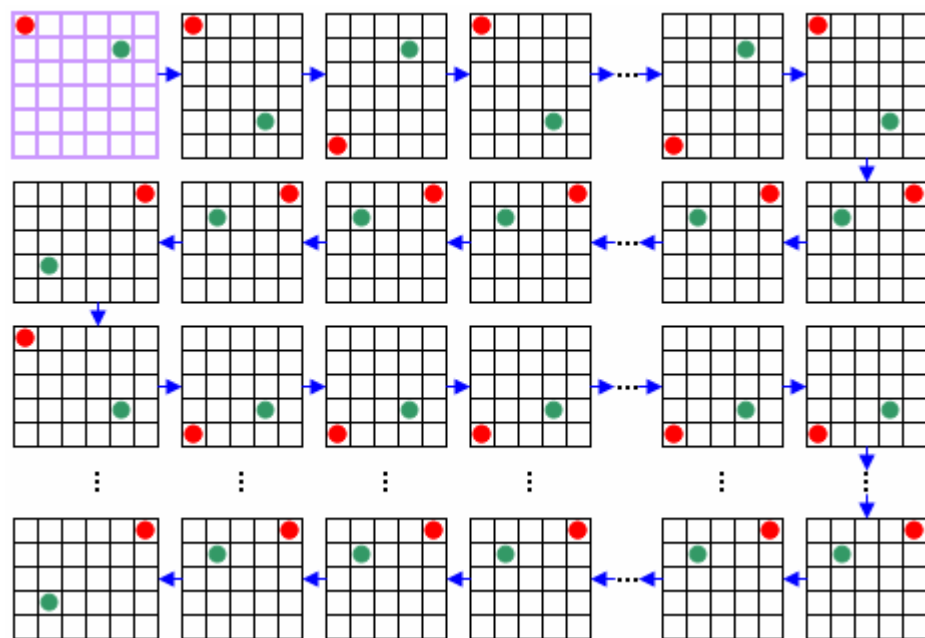


圖 21

已知的路徑可到達 **E**，且因為 **E** 可以再回到出發點的 **S**，所以得到一馬步迴圈的解。

4. $m=12+4k$, $k \geq 1$ 時

同上述 $m=10+4k$ 的解法，在此時我們一樣先找出 3×12 的馬步迴圈(如圖 27)，之後用歸納法將連接



圖 27

的矩陣無限延伸，而得到一馬步迴圈的解(如圖 28)。



圖 28

(三)、 $n=4$ 時

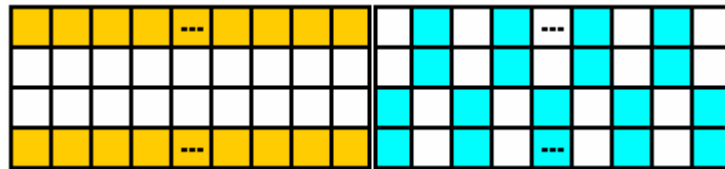


圖 29

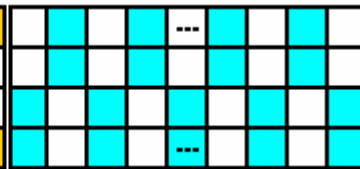


圖 30

同 4×4 無解的證明，在此不論 m 為奇數或偶數，若將格子套色如圖 29、30 的話，橘色格只能走到白色格，而若想要有迴圈就必須橘、白、橘、白的走才有可能。但圖 30 中，藍、白格要連接時，必須於圖 29 中的白格中連接，所以得證不可能有迴圈。同理可知若想要完成 $4 \times m$ 的矩陣，必須以橘色格為起點，走圖 30 中的同色格，直到走完後再接不同色格才能有機會完成。由此結果我們猜測若起點為圖 30 中的藍格，則必有至少一解，且終點的位置在任一白格與圖 29 中橘格交集之格子，下面我們用迴圈法來證明此猜測。

1. $m=2k+1$, $k \geq 1$

圖 31 中，**A** 迴圈在中間兩列時剛好都可以走到白格，而所有的白格又剛好是一個迴圈，所以可以結束結在任一格。

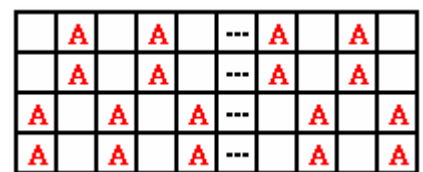


圖 31

2. $m=2k$, $k \geq 3$

圖 32、33 中，分別為兩種可能的情況，均是有兩個迴圈 **A**、**B**，且除了角落的 **A**、**B** 外均可互換(即 **A** 走到 **B** 或 **B** 走到 **A**)，所以不論從哪格開始都可走完 **A** 和 **B**。而當 **A**、**B**

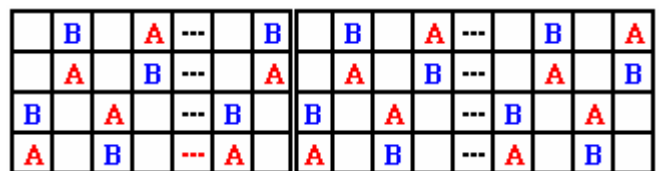


圖 32

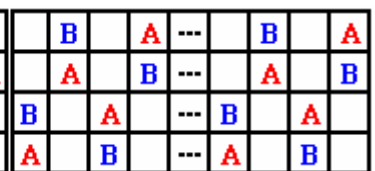


圖 33

在中間兩列時剛好都可以走到白格，所以此時可完成所以格而結束，得證上述猜想。另外，我們用程式找解時發現在 m 比較大後，任一個前面證出有解的點開始時，可以結束在圖 30 中一、四列與起點不同色的格子，不過目前還未得到完整的證明。

(四) n 、 m 均大於 4 時

同前面 $n \times m$ 路徑的證明，這一部份我們也是用連接法來證，不同的是這裡需要考慮

格子數不能為奇數和 p 、 q 之奇偶的影響。在此我們不再將十五種情況分別討論，而只考慮關鍵矩陣的奇偶和 p 、 q 的奇偶來證明。

1. 關鍵矩陣為奇 $\times$ 奇(圖中的關鍵矩陣均只以其中一個為例，其它情況可依此類推)

(1) p 為奇數、 q 為偶數

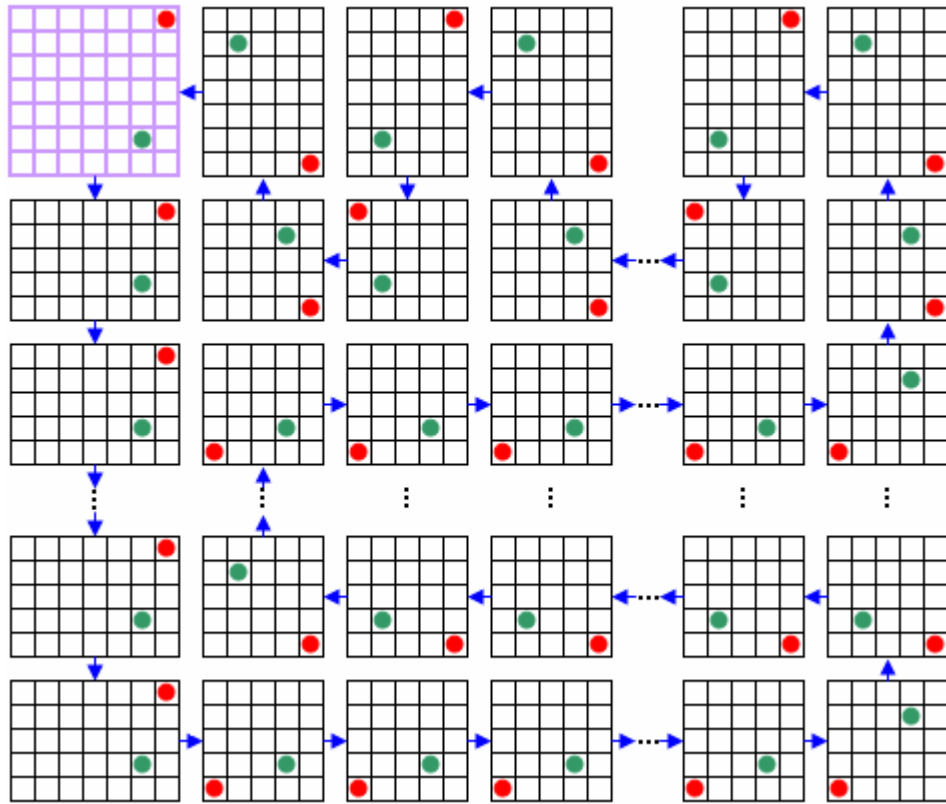


圖 34

(2) p 、 q 均為偶數

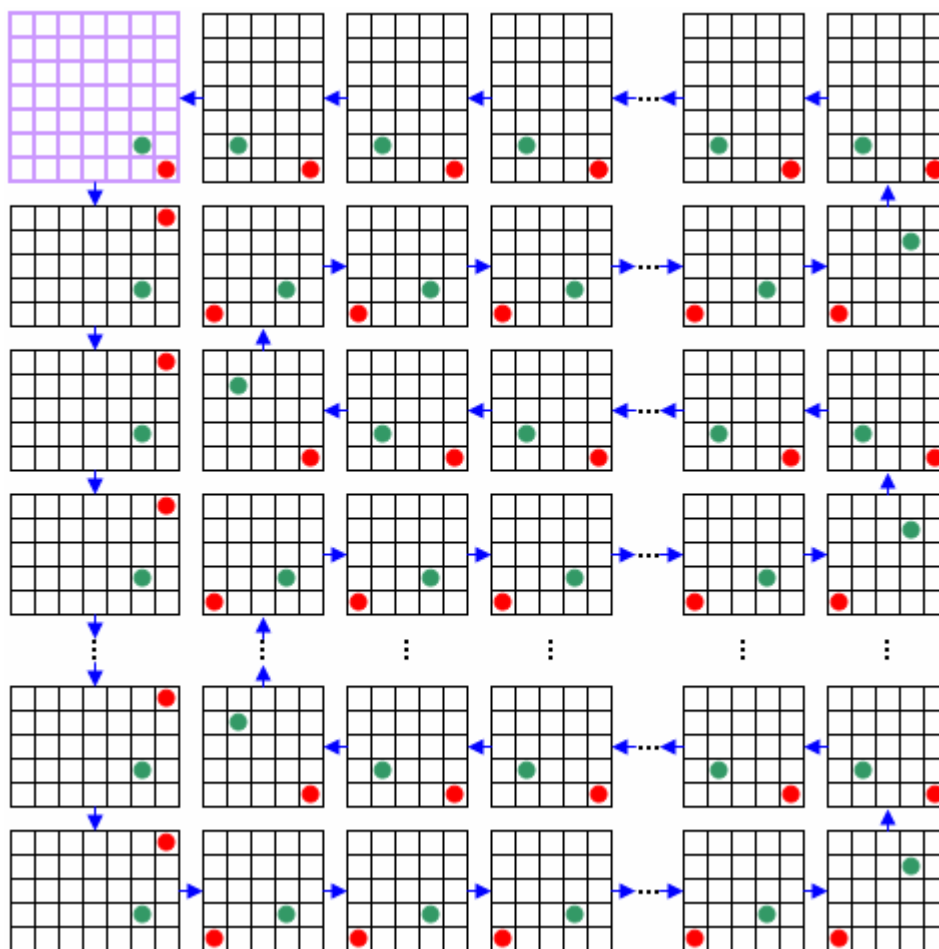


圖 35

2. 關鍵矩陣為偶 $\times$ 奇(奇 $\times$ 偶與偶 $\times$ 奇互為對稱，因此可以看為一組)

(1) p 為奇數、 q 為偶數

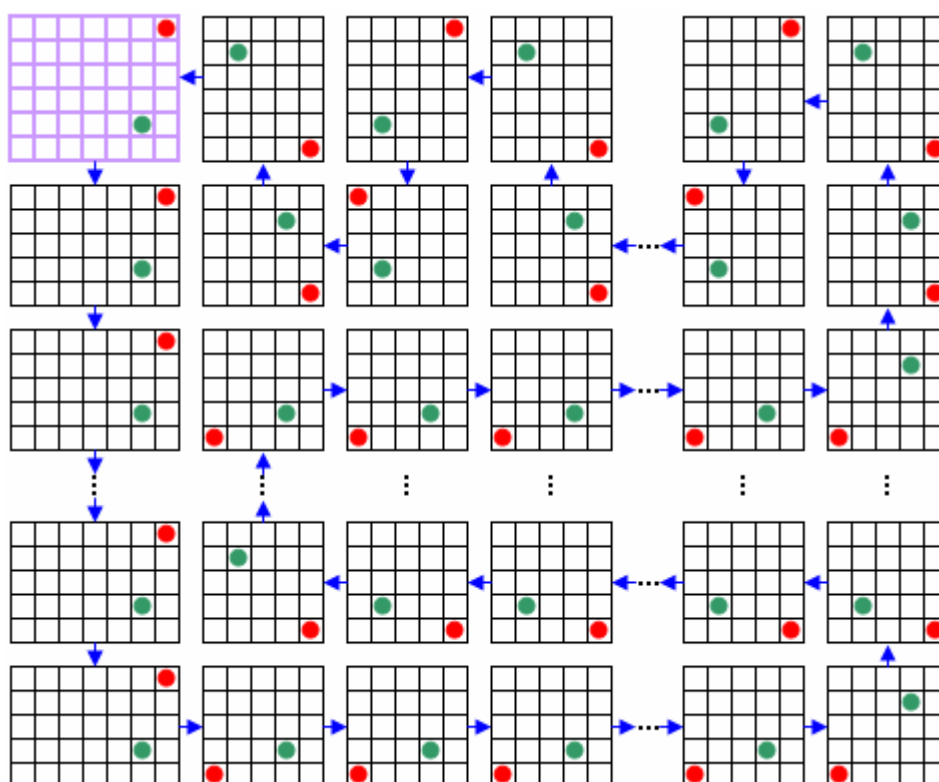


圖 36

在此若 $p=1$ 或 $q=1$ ，則用圖 36 之繞法將不能找到迴圈，所以我們用類似 $3 \times m$ 時的證法來補上 $p=1$ (圖 37)及 $q=1$ (圖 38)時的證明。

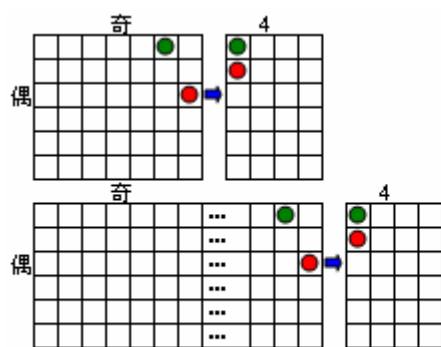


圖 37

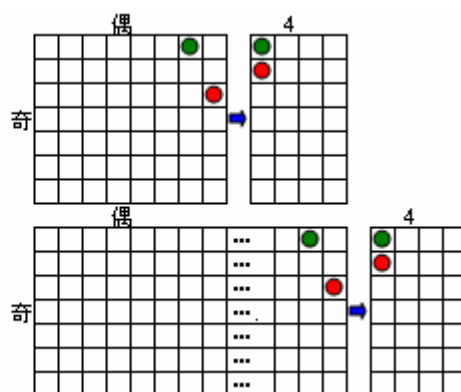


圖 38

(2) p, q 均為偶數

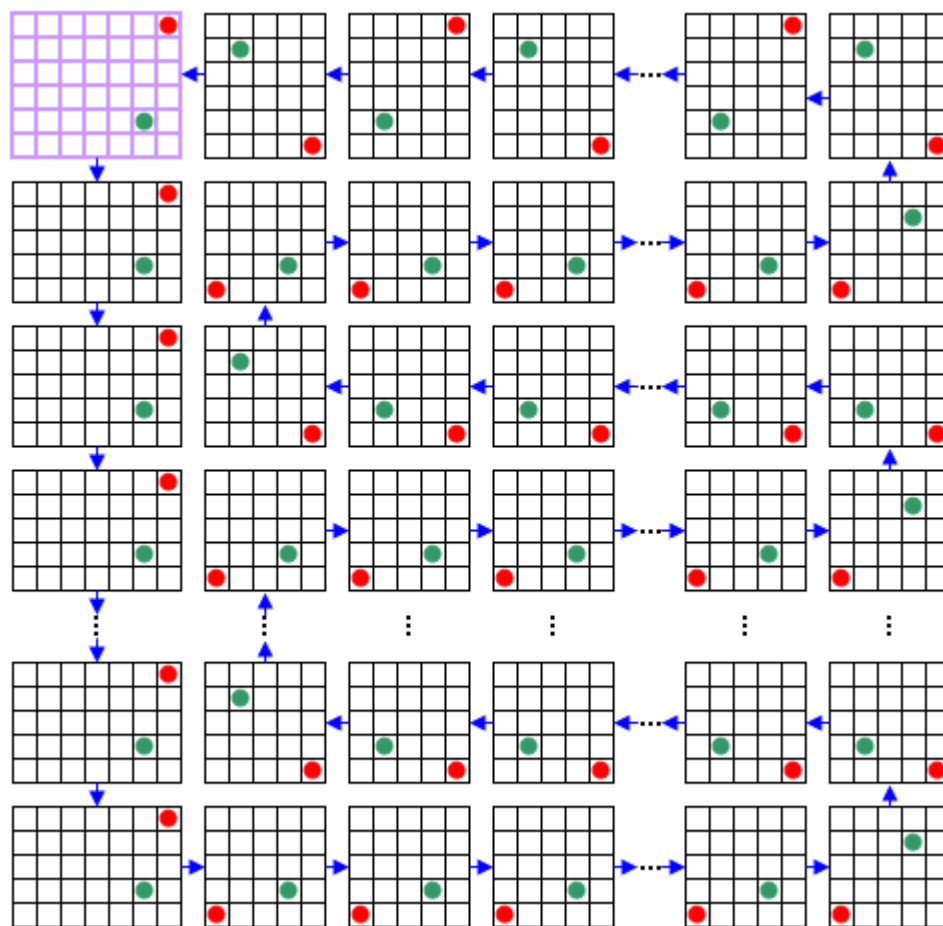


圖 39

(3) p 、 q 均為奇數

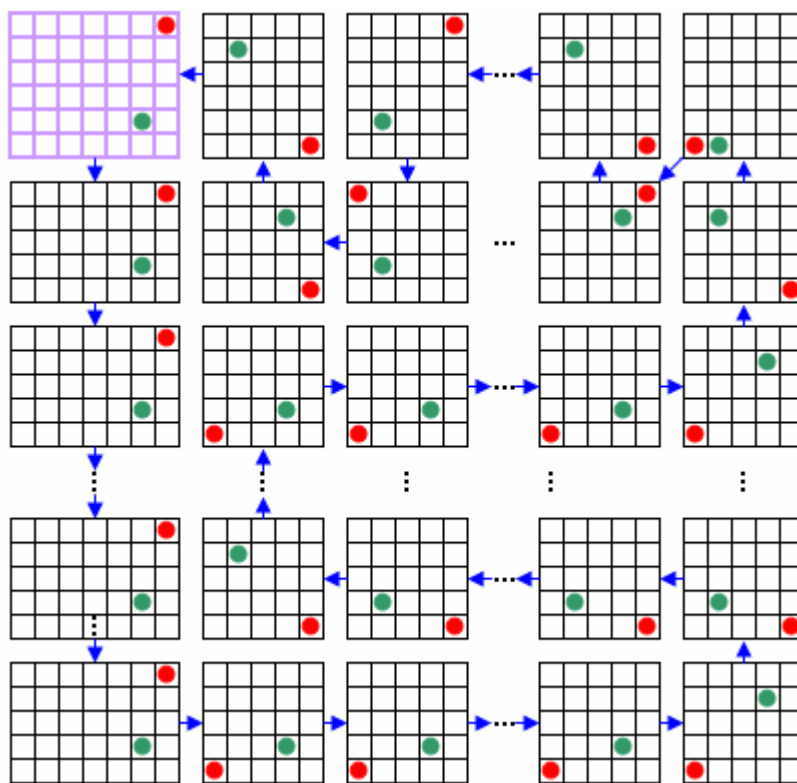


圖 40

3. 關鍵矩陣偶×偶

(1) p 為偶數、 q 為奇數

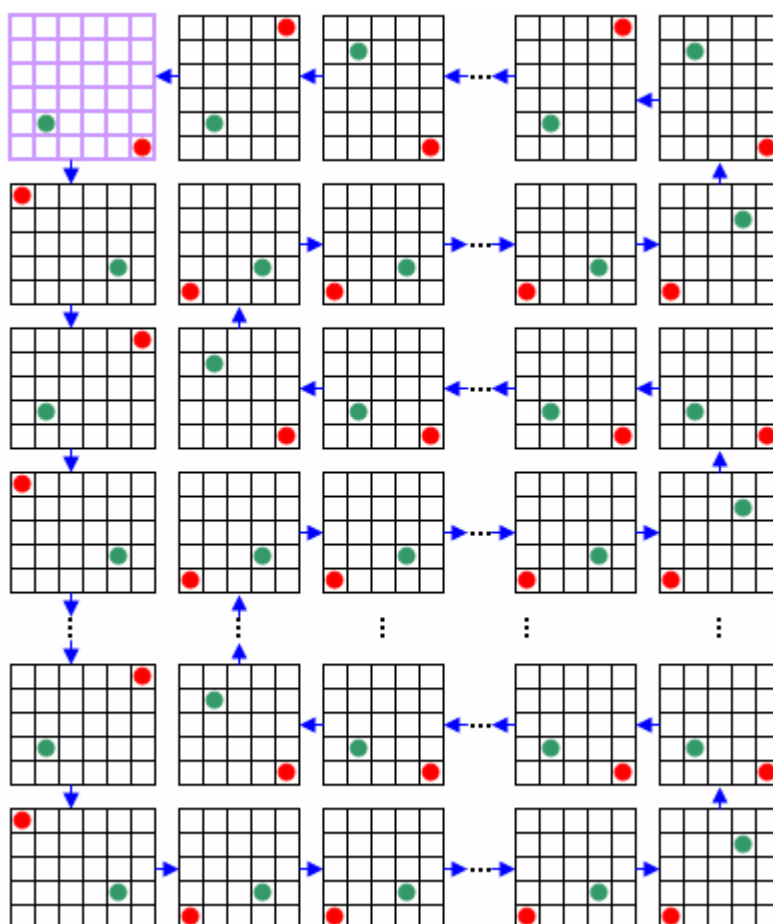


圖 41

偶 $\times$ 偶的情形在 $p=1$ 或 $q=1$ 時也無法從上圖得到迴圈，因此以圖 42 中之方法證明。

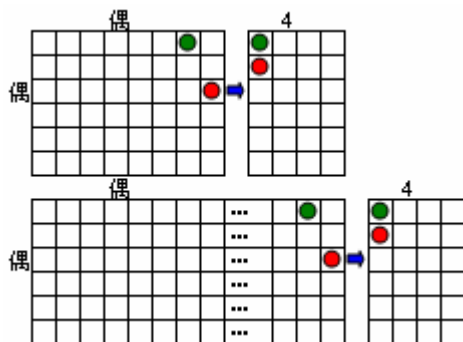


圖 42

(2) p, q 均為奇數

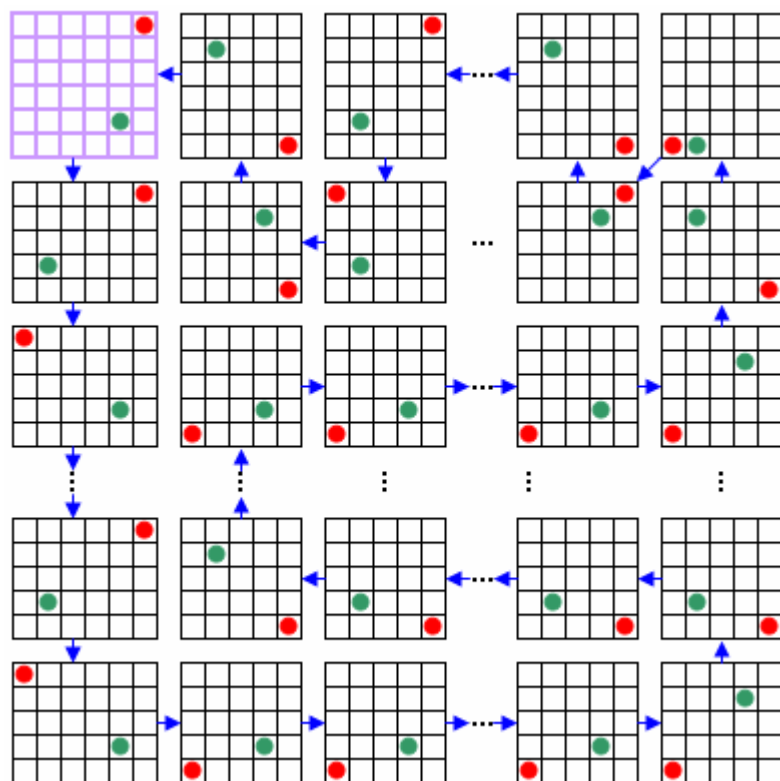


圖 43

三、 $n \times m$ 為奇數時的解

前面我們已用簡單的方法證明了必無解的情況，但尚未確定是否其它格子均可有解。一開始我們想用迴圈法來證明，但此種方法只適用於方陣無法推至矩陣，且證明方法複雜；後來我們又試著用上面 $n \times m$ 矩陣迴圈解的證法，但由於 5 為奇數，無法推證到所有格子。最後，我們將連接的 5×5 方陣改為偶數的 6×6 方陣，以解決此問題，且因為六為偶數不論增加奇、偶數個，整個大矩陣仍為奇 $\times$ 奇，也就可以不用考慮奇偶不同的影響。另外我們也用程式做較小矩陣的確認。

1. p 為偶數

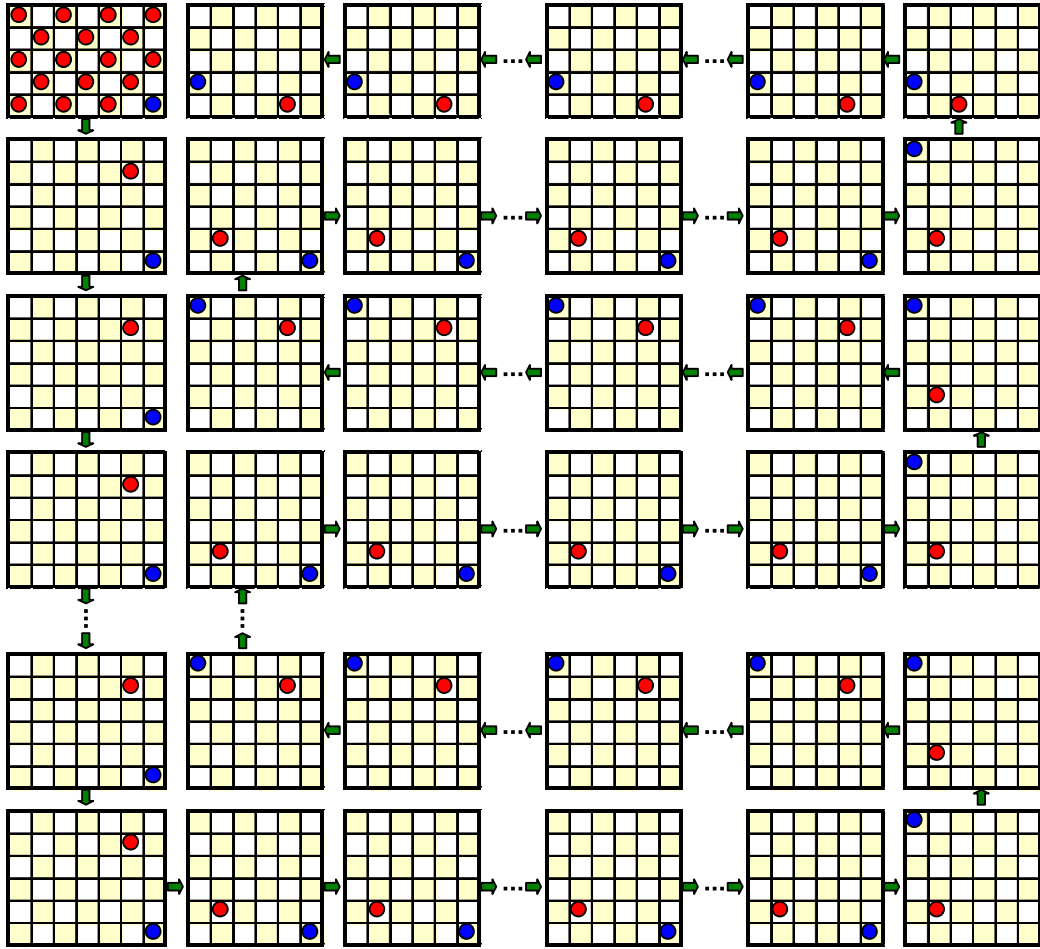


圖 44

第一次從關鍵矩陣中的任一黃格為起點，由已知的解得均可結束在藍點，而延綠色箭頭的方向走(圖 44)，每一矩陣均以紅點開始、藍點結束(從已知解得知可完成)，即得在關鍵矩陣中的黃格出發均可完成，但如果要推到其它格子的話，會受奇數格的影响必須用下面的方法倒著走回去。

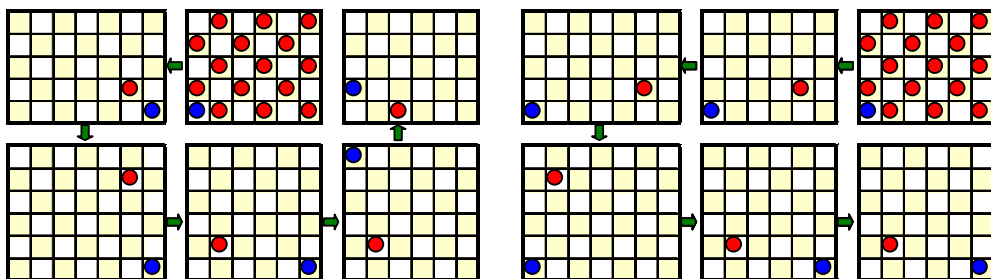


圖 45

如圖 45 左中，關鍵矩陣右邊的矩陣中，任意黃格開始均可結束在藍點，則可以繼續連下去，只有在連接路線碰到關鍵矩陣後，奇數格會使接下來的起點和終點格顏色改變(如圖 45 右)，所以必須有所變化，不過均可延此一規則延伸下去。

2.p 為奇數

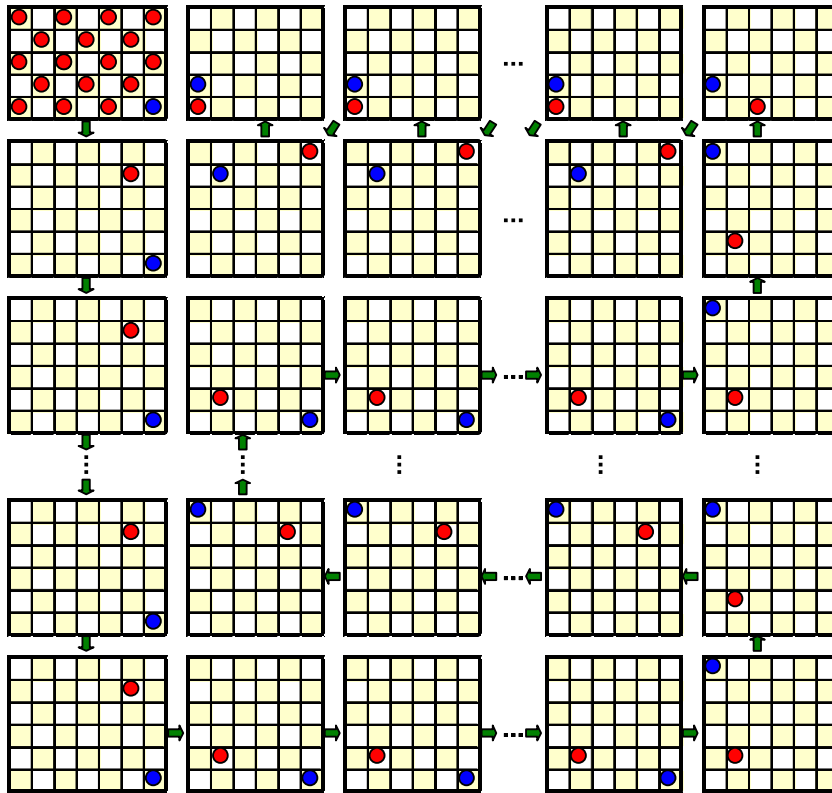


圖 46

由前面的證明可以確定在大的矩陣皆可完成，但若是連接矩陣只有一行或一列時就無法繞回前面那個迴圈，因此下面我們補充只有一行或一列時的證明。

3. $3 \times m$ 、 $5 \times m$ 、 $7 \times m$ 、 $9 \times m$ 時

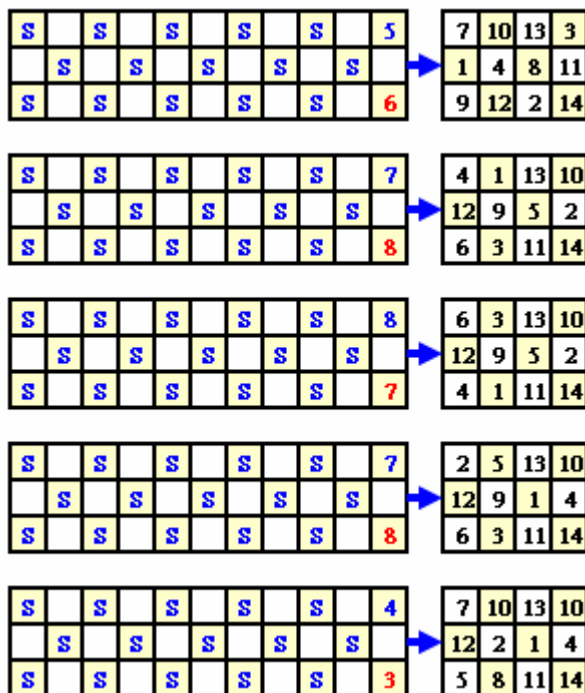


圖 47

我們找到小矩陣中若以藍字的格子開始皆可以結束在紅字的格子，則由前面的證明我們可以確定後面不論再接多少個 3×4 矩陣皆可完成。而每一接上的矩陣皆可依圖 47 中的數字順序走完(遇到紅或藍的數字時先走完原矩陣的所有方格再做連接)，所以不論 m 為多少時，只要該方陣是有解的即得由黃色格開始皆有解。而 $5 \times m$ 、 $7 \times m$ 、 $9 \times m$ 時也可以相同方式證明。

四、虧格條件

在前面我們討論了所有完整的矩陣的情況，其中有幾個較小的矩陣是無解的，這讓我們想到若將棋盤改為虧格的形式時是否可以有解？答案是肯定的！下面我們先說明可有解時的條件：

- (一) 奇數格的矩陣中虧格只能位於原先套色後格數多一格的顏色格子，而偶數格的矩陣則任一格均可做為虧格。
- (二) 若虧格位置在原矩陣中是可當起點的格子，則該虧格矩陣至少必有一馬步路徑解，由原先的第二步開始走即可完成。
- (三) 有虧格的矩陣中，橋數為 1 的格子須做為起點或終點(不得有格子之橋數小於 1)。因此若虧格造成有兩個可以馬步連結的格子或任三個以上的格子橋數為 1 時，該矩陣將無法完成。
- (四) 若有虧格後，使圖形中一點有超過二條必走路徑(不能刪的橋)，則必無法完成。
- (五) 在找解的過程中，若出現兩個格子只有 1 條橋，則必須先走其中一格且須以另一格為終點；若出現三個以上格子只有 1 條橋，該矩陣將無法完成。

五、有虧格的矩陣與馬步路徑

(一) 原先無解的矩陣

1. 3×3

圖 48 中，中間的格子無路徑相連，故虧格必須位於中間的格子，而在有虧格後可得到一迴圈。

1	6	3
4		8
7	2	5

圖 48

2. 3×5

在無虧格之前，因為中間的格子有超過 2 條必走路徑而無法完成。所以在有虧格後，必須讓該格的必走路徑小於 2，才有機會完成。在這些限制下我們得到可有解時虧格的位置必須在四個角落之一(圖 49 中灰色格為虧格位置)，可以圖 49 中相對於 S 的位置做為起點與終點。

				S
S				S
				S

圖 49

3. 3×6

如圖 50、51 中所示，可有解時虧格位置必須位於相對於灰色格的位置，且起點與終點在 S 的位置。

					S
S				S	
					S

圖 50

S					
	S				S
S					

圖 51

4. 4×4

虧格位於角落的格子時可使原無法相連的迴圈相連，故以圖 52 中 S 為起點時可有解。

	S		S
S			
			S
S		S	

圖 52

由上面的結果我們發現，原來較小的矩陣會因橋數限制而無法有解，但在有虧格時也有可能找到一個以上的解。

(二)在 n 、 m 大到一個程度後

前面討論了無解矩陣在有虧格時可以有解的情況，這也讓我們好奇在其它矩陣中有虧格時可以有解的情況又是如何？原本我們想用前面證明偶數格矩陣有迴圈和奇數格矩陣可有路徑的连接法，但發現情況非常的複雜，且若虧格可在矩陣中任一位置，要討論的次數就有矩陣格子數那麼多，如此一來就算是小矩陣也很難找出所有可能，在大矩陣就更是天方夜譚了。**失敗！**不過後來我們想到不見得一定要用小的連成大的，也可以把大的割成小的，而且發現用這種分割的方式只需找出一個小矩陣，確定它在有一虧格時可以有迴圈或套色後格數多一格的顏色格子均可開始，這樣就可以在割出該小矩陣後連接剩下的方格而證明出無限大時的情況。但是過程中我們又遇到了一些困難，這個「小矩陣」似乎不太小，它至少有一邊要大於 6，所以扣掉對稱後虧格位置至少有 9 種，而每一種必需找出 17 個不同開始點的解，總共需要 153 個解！根本不太可能用人工慢慢的一個一個找，還好我們有電腦幫忙，找了好幾天終於找到 6×6 的矩陣可以符合前面「小矩陣」的條件(以後稱該 6×6 矩陣關鍵矩陣)，於是就用先分割後連接法來完成這一部分的證明。**成功！**

1. 分割與連接的方式

將大的矩陣用直線與橫線分割(每次隔 6 格)直到均超過中線(如圖 53)，因為對稱的關係，只要確定圖中黃色區域的格子有虧格時的情況即可推至整個矩陣。又黃色域為多個 6×6 的矩陣，所以只須確定虧格位於這些 6×6 的矩陣時，可以有迴圈或在套色後可以以與虧格不同色的格子當起點，即可得到該大矩陣不論虧格位於何處的所有情況。

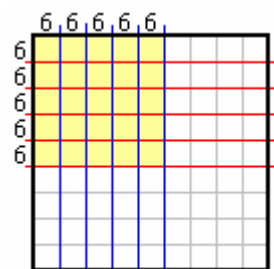


圖 53

而在用直線與橫線分割後，要讓小矩陣可以順利相連有三種不同的切割與連接方式。第一種為關鍵矩陣位於第一行，第二種為關鍵矩陣位於第一列，其它情況則為第三種。這三種情況的分割與連接方式如下面簡圖所示：

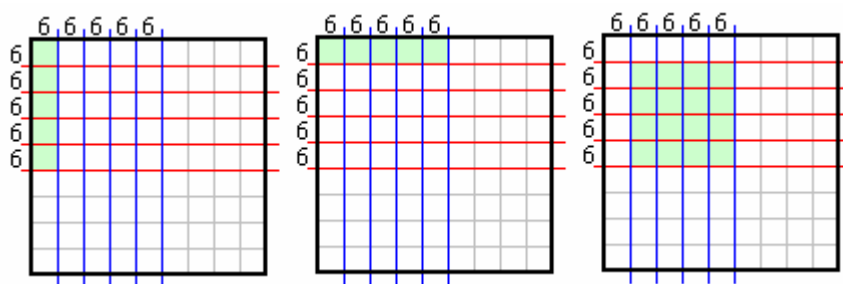


圖 54

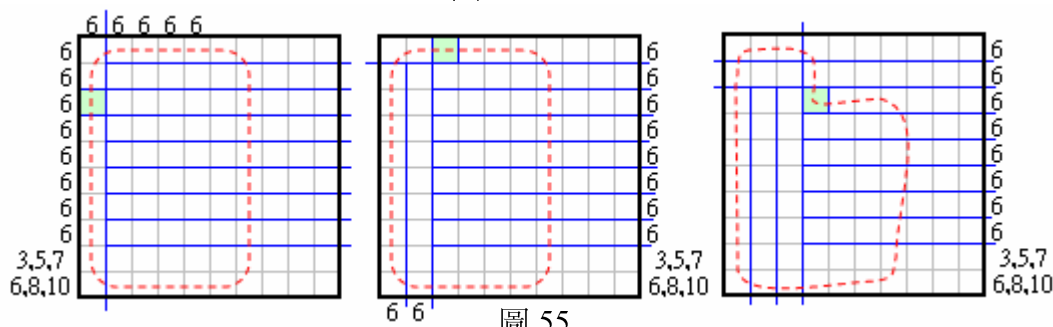


圖 55

圖 55 中藍線表示該情況的方割方法，紅線則是連接的方式。

2.有虧格後總格子數為偶數的矩陣

在奇數的矩陣套色後會有一種顏色的格子數較多，所以要有解的第一個條件是虧格位置只能在套色後格數多一格的顏色格子(在圖中為黃色的格子)。而在矩陣夠大時，因為橋數多，少幾條橋對矩陣的影響就相對減少，我們用上面介紹分割與連接的方式來證明：在大的奇數矩陣中，若虧格位於套色後黃色的格子，則可有迴圈，即每一格均可做為起點。(紅點與藍點為各小矩陣起點與終點的位置，綠色箭頭為連接方式)

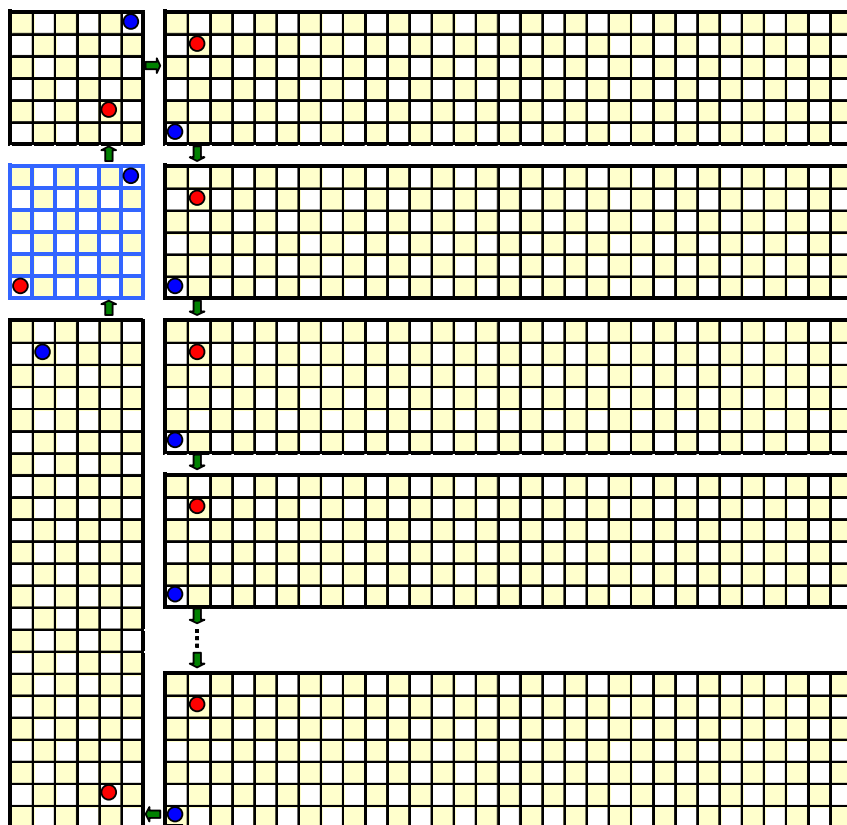


圖 56

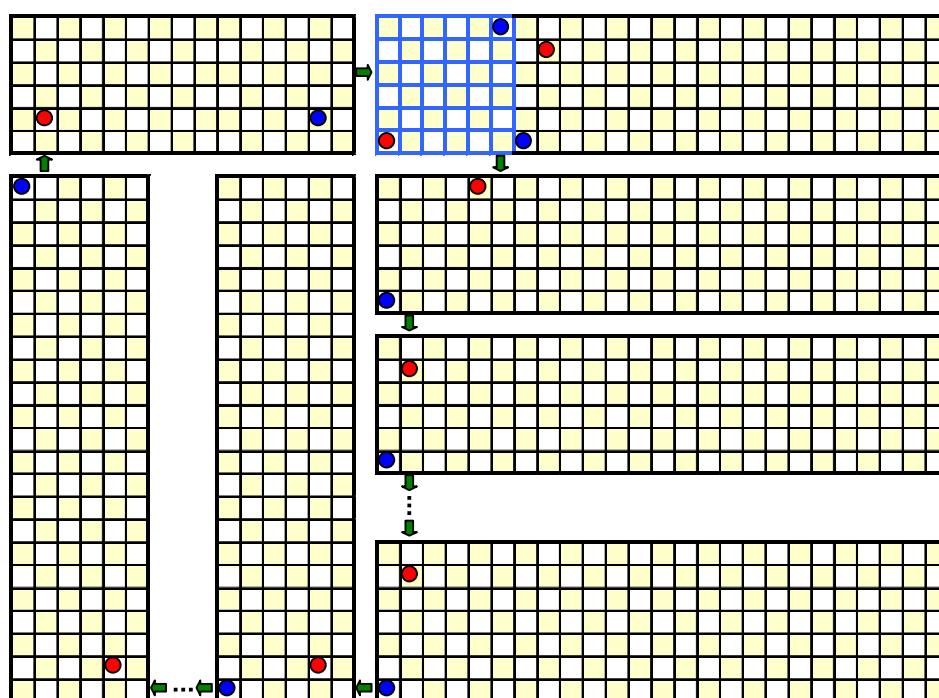


圖 57

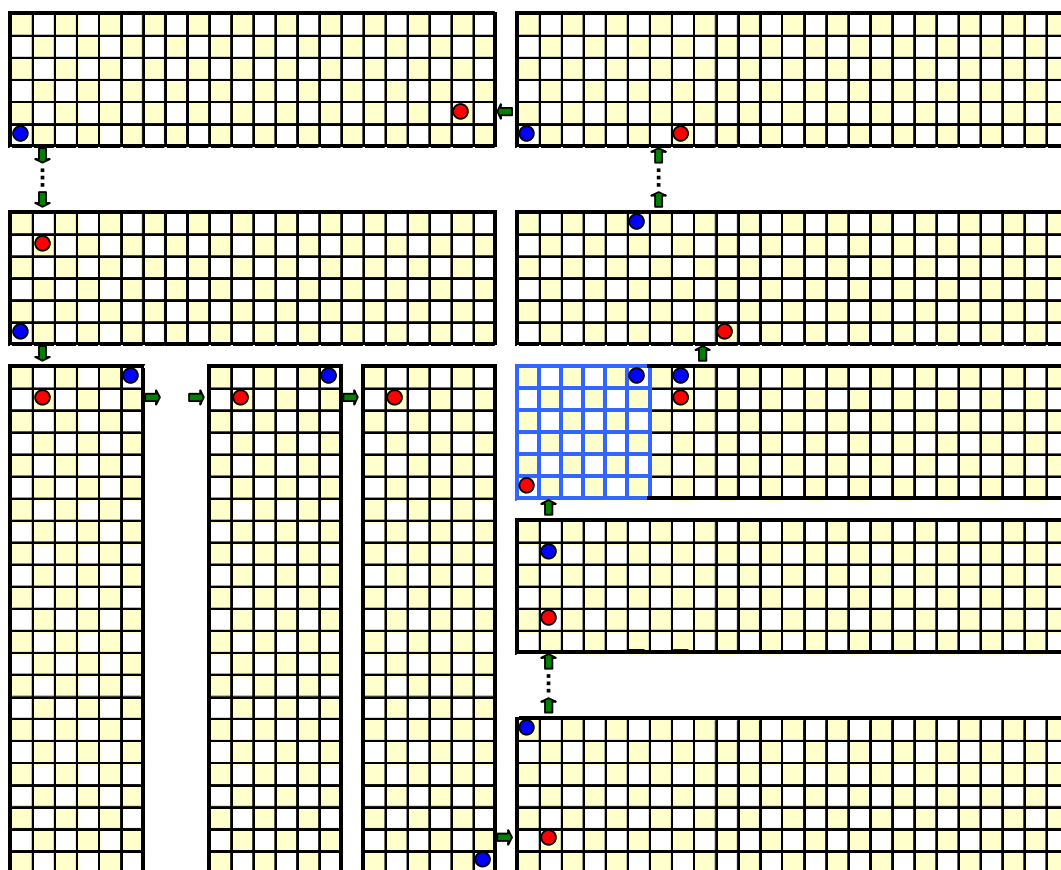


圖 58

依著圖 58 中提示的路線走，只要確定紅點與藍點的位置可以做為起點與終點即可。下面是 $6 \times m$ 時均可有解的證明。

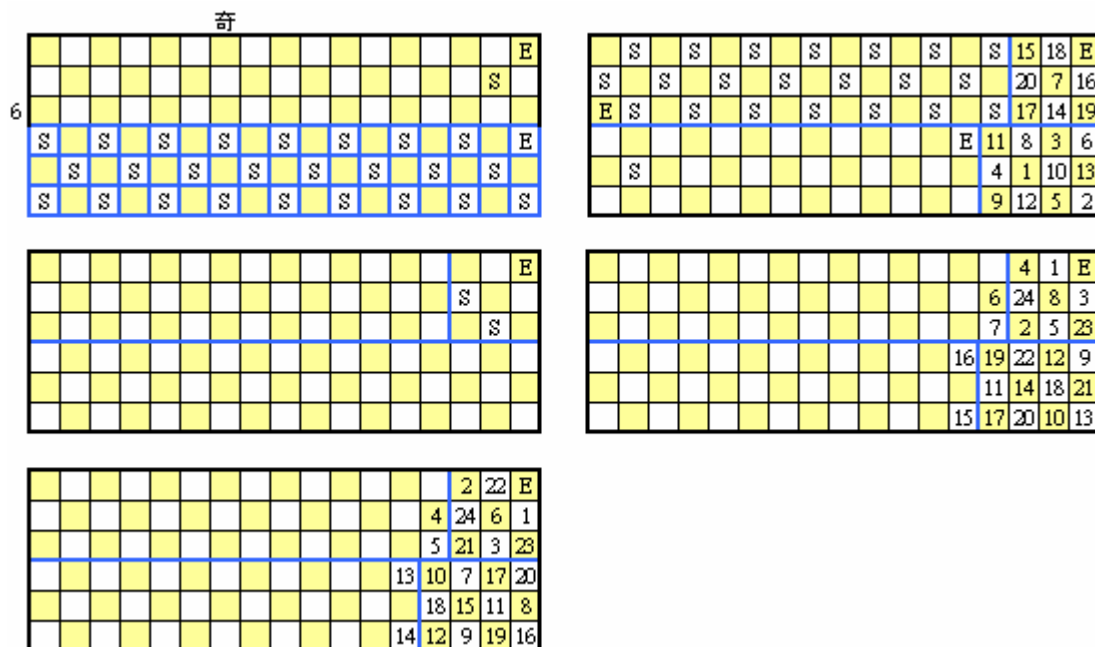


圖 59

如圖 59 中，因為 $3 \times m$ 的矩陣在 m 為奇數時，前面已經證明出均可以以套色後格數多一格的顏色格子開始而結束在角落；另外在偶數時，我們也用同樣的方法證出，現在我們利用已知 $3 \times m$ 矩陣的解，應用上圖的方法連接(**S** 為開始，**E** 為結束，數字依順序)即可得到 $6 \times m$ 的矩陣，可以任一格開始而結束在角落其他所需的解，我們也用同樣的方法證出，但礙於篇幅有限在此不一一列出。

3. 有虧格後總格數為奇數的矩陣

在奇數的矩陣中，因套色後兩種顏色的格子數一樣多，所以在大的矩陣虧格可以在任一個格子。證明的方式跟前面奇數矩陣有迴圈的相似，不過偶數的矩陣少了一格後格子數就變成奇數，因此不會有迴圈，所以不能像前面的證明繞一圈即完成，而必須一個矩陣一個矩陣的換，確定虧格在不同位置時任一個套色後格數多一格的顏色格子均可完成。

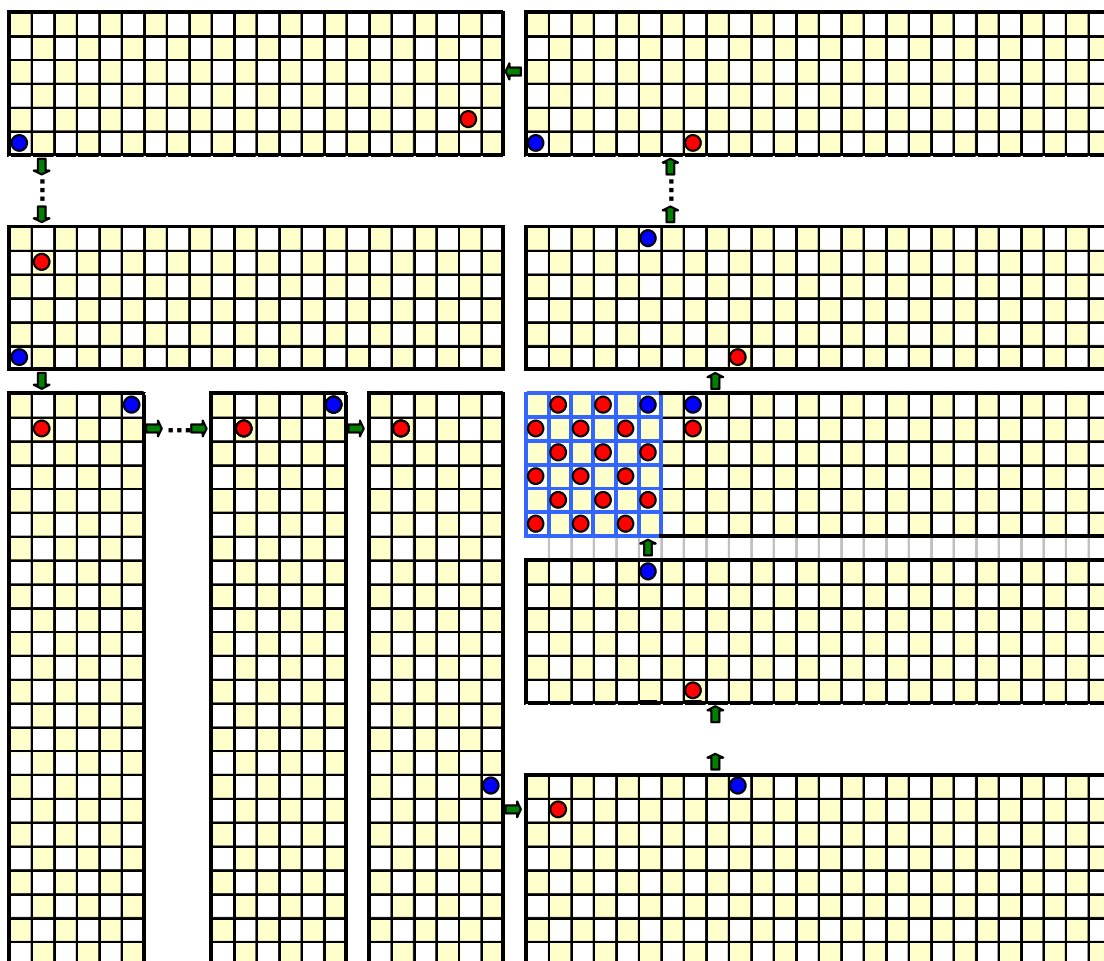


圖 60

圖中關鍵矩陣的任一紅格開始均可結束在藍格而依箭頭指示走紅的開始藍的結束即可走完所有格，接著一次一次的把開始點移到其它矩陣，同樣的以綠色箭頭指示方向走，只需將開始與結束位置稍微掉換一下(如下頁圖 61)。在此關鍵矩陣可自由的上下左右移動，所以當關鍵矩陣不是在第一行或第一列時均可得：虧格位置在任一個黃格時，任一個白格均可做為起點。不過若關鍵矩陣位在第一行、第一列，或虧格位置在黃格時就需要用到圖 62、63、64 的分割與連接方式才能得證。

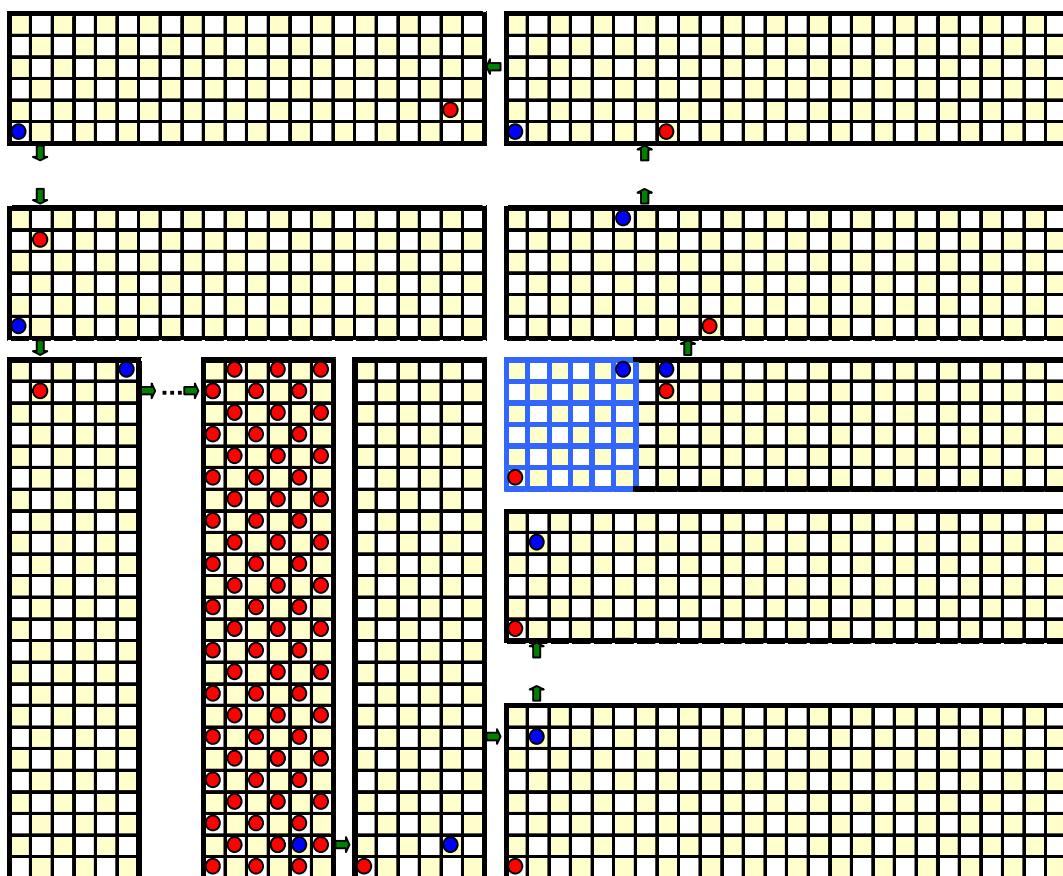


圖 61

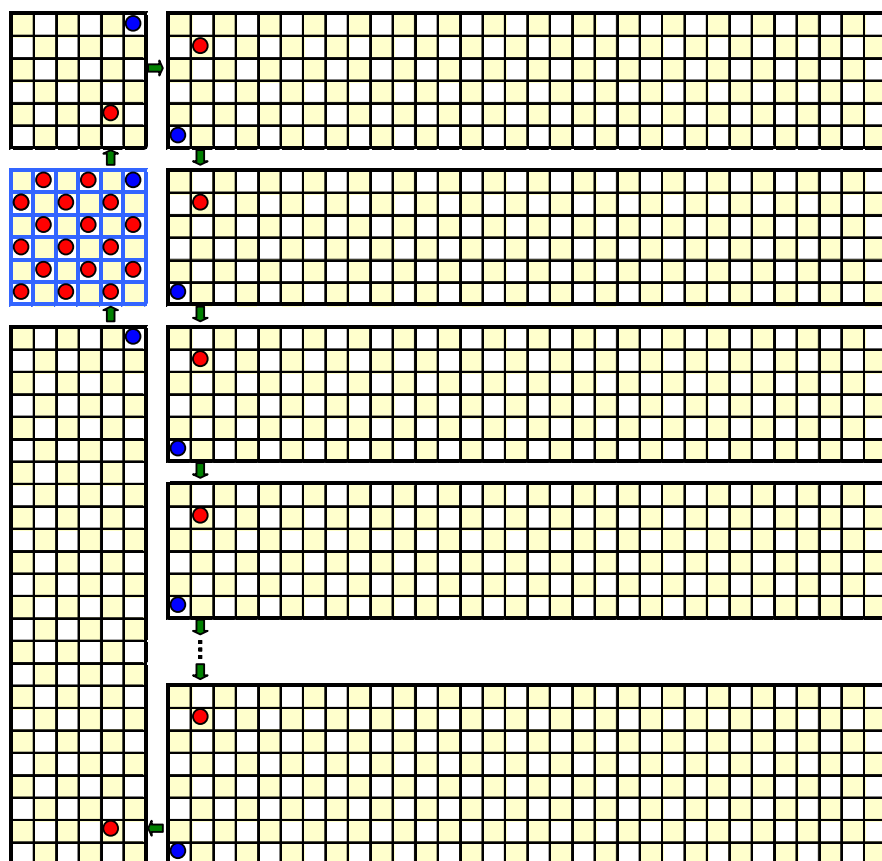


圖 62

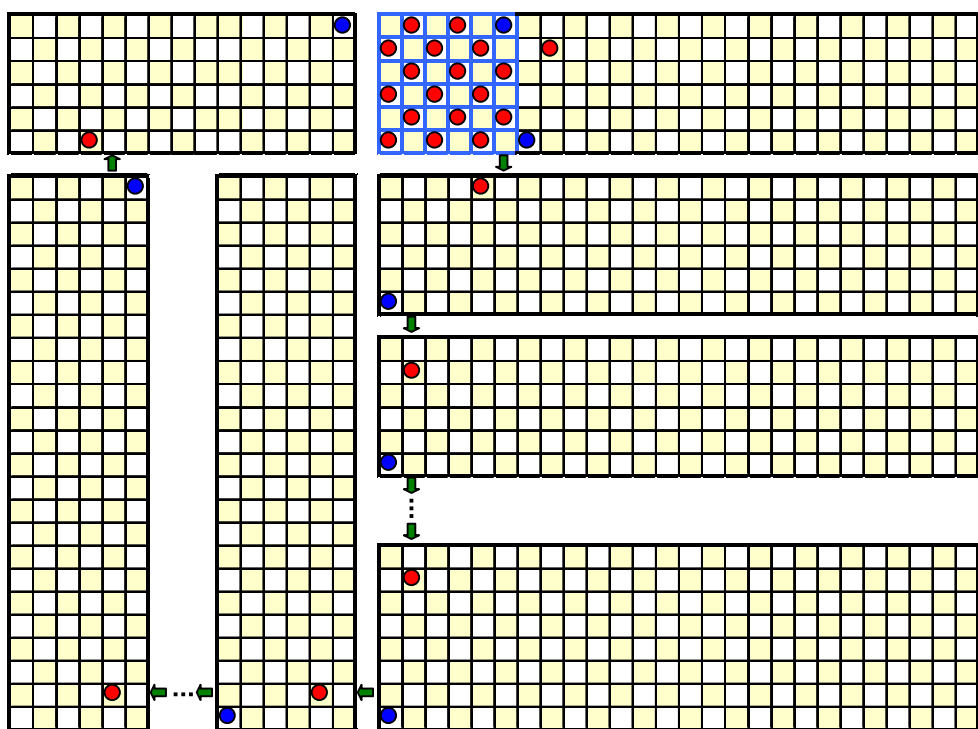


圖 63

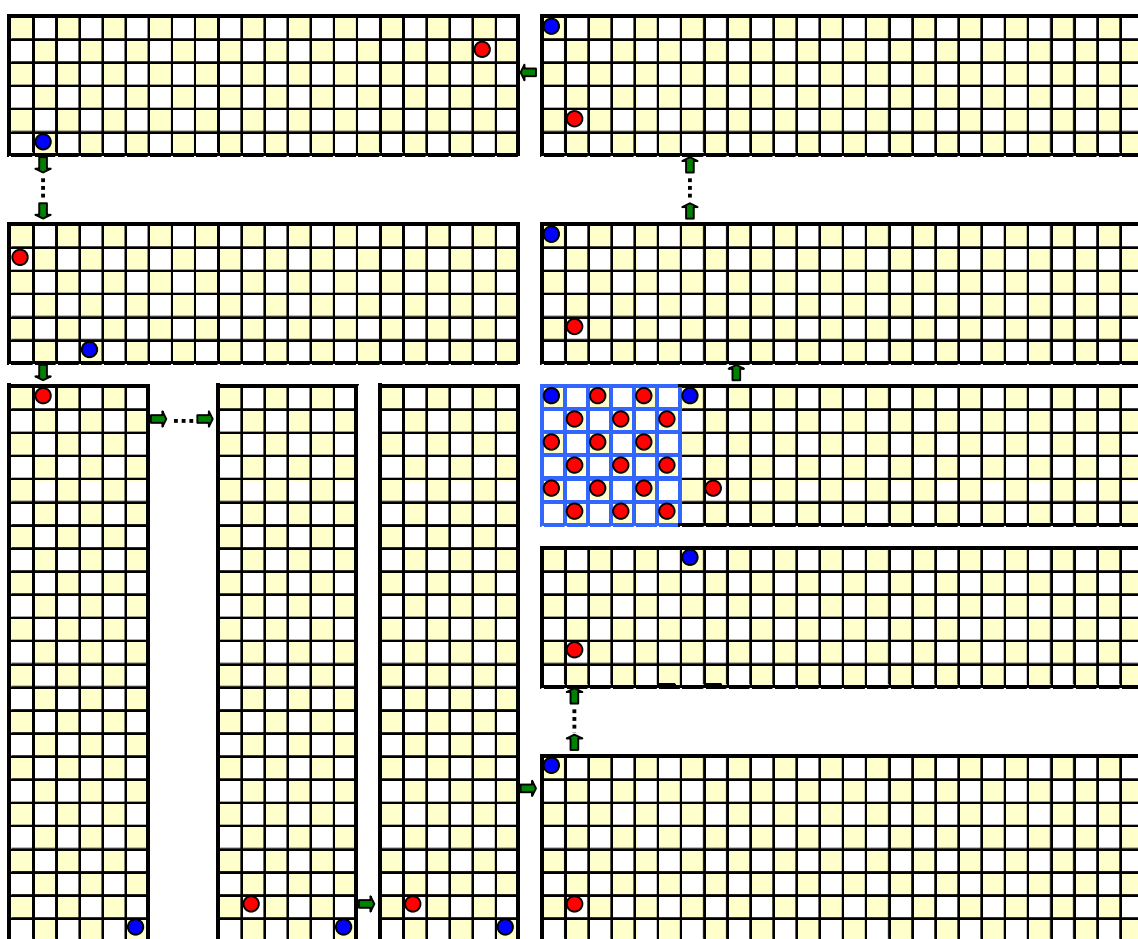


圖 64

上面證明了大矩陣有虧格的情況，但這些證明均不適用於小矩陣，因為小矩陣無法再分割。又如果想直接找出小矩陣的所有可能又會因橋數少，虧格不能位在特定的一些格子，造成有太多的狀況需要討論，所以目前還在研究如何證明小矩陣的較佳方法。

柒、結論

一、在 $n \times m$ 的矩陣中(限制 n 、 m 均為不小於 3 的整數且 n 大於等於 m)，至少有一馬步路徑解的條件有：

- (一)、 $n=3$ ， m 不等於 3、5、6
- (二)、 $n=4$ ， m 不等於 4

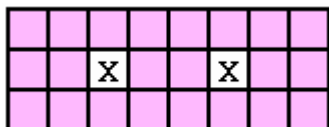
二、在有解的 $n \times m$ 矩陣中，可由任一格做為起點的條件有：

- (一)、 $n \times m$ 不為奇數
- (二)、 $n=3$ ， m 不等於 4、8
- (三)、 n 不等於 4

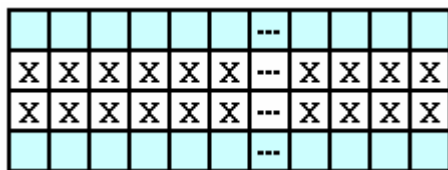
三、在 3×4 的矩陣中有馬步路徑解的條件是，下圖中有 X 的格子不可做為起點，其餘皆可。



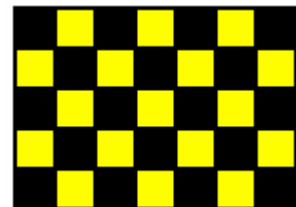
四、在 3×8 的矩陣中有馬步徑路解的條件是，下圖中有 X 的格子不可做為起點，其餘皆可。



五、在 $4 \times m$ 的矩陣中有馬步徑路解的條件是，下圖中白色的格子不可做為起點，其餘皆可。



六、在 n 、 m 均為奇數且 $n \times m$ 之矩陣不為無解，則其有馬步路徑解的必要條件是，將格子套色後格子數較少的顏色格子不可做為起點。



七、無解的矩陣在有虧格位於適當的位置時也可以有至少一組解。

八、在大的矩陣中有一虧格後，總格數為奇數的矩陣可以以套色後格數多一格的顏色格子為起點，總格數為偶數的矩陣則可以任一格為起點。

九、另外，在說明書及版面中未能呈現的，有藉由電腦程式的輔助幫我們找出固定起始點之所有解及人工不易找出的解。再者，我們也寫出棋盤上馬步的遊戲程式，可供初次接觸此主題的人玩，引導他們一窺馬步的奧秘，在我們現場的電腦中有展示出來可供大家參考。

十、希望未來能夠透過將棋盤座標化，找出最短路徑的函數模式，為做 IC 設計與快遞或宅急便之運輸路線規劃之利用。

捌、參考資料

- 一、林克瀛 (民 93)。騎士漫遊方陣與魔方陣。數學傳播 28 卷 3 期，64-68
- 二、林克瀛 (民 93)。六階棋盤上的騎士循環漫遊共有 1245 種。數學傳播 28 卷 4 期，63-69
- 三、林建宏 (民 75)。5 階棋盤之騎士漫遊僅有 112 個解。數學傳播 10 卷 2 期，20-27
- 四、胡咸編 (民 87)。離散數學。台北市：茂昌
- 五、徐力行 (民 92)。沒有數字的數學。台北市：天下
- 六、張遠南 (民 86)。使人聰明的智力遊戲。台北市：九章
- 七、單墀 (民 83)。趣味的圖論問題。新竹市：凡異
- 八、趙文敏 (民 82)。寓數學於遊戲(第一輯)。台北市：九章
- 九、有趣的數學旅行。台北市：親代叢書編
- 十、科學教授(數學)。台北市：牛頓出版社編
- 十一、<http://www.math.sinica.edu.tw/media/default.jsp>

中華民國第四十五屆中小學科學展覽會
評 語

高中組 數學科

040420

棋盤上的馬步

臺北市立麗山高級中學

評語：

1. 馬步問題頗為常見，研究問題不妨參考西方數學家的想法。
2. 透過數學軟體的強力計算，尋找可能分類的方式，以了解其對稱性及結構。