中華民國第四十五屆中小學科學展覽會
作品說明書

高中組 數學科

040418
錐求完美

國立台東女子高級中學

作者姓名：
高二 黃羿綺 高二 曾奕心 高二 鍾逸亭
高二 林亭瑩

指導老師：
林志全

中華民國第四十五屆中小學科學展覽會

作品說明書

科　　別：數學科

組　　別：高中組

作品名稱：錐求完美

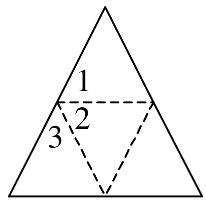
關 鍵 詞：三角錐

編　　號：

錐求完美

壹、摘要

本研究主要在探討三角錐的性質。我們採用了三平角的三角錐展開圖來做以下的討論。



（定義：$\angle 1+\angle 2+\angle 3=180^\circ$　$\angle 1+\angle 2+\angle 3$ 即爲平角。）

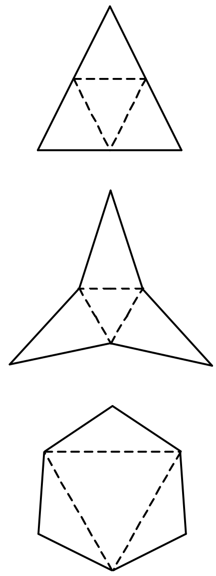
我們首先探討三角錐之折法，並討論是否任意三角形（銳角三角形、直角三角形、鈍角三角形）皆能折成三角錐。再者，我們更進一步的研究三角錐的相關性質，如：三角錐四個頂點所相鄰三個角之角度、三角錐的兩面角和三角錐的體積…等。

本研究發現如下：

1. 三角錐之折法：取三邊中點，沿兩兩中點之連線對折，即可折成三角錐。
2. 並非任意三角形皆可折成三角錐，但任意銳角三角形皆可折成爲三角錐。
3. 此三角錐四個頂點各所相鄰三個角角度和皆 180°。
4. △ABC 面積固定，當△ABC 爲正三角形時，所折成的三角錐其體積爲最大。

根據以上的發現，我們發現了三角錐的其他的特性。

貳、研究動機



在數學第三冊－空間概念中，我們接觸到了正四面體，也想到了和它相類似的三角錐，因此老師列舉了有關三角錐的題目，我們發現三角錐的展開圖圖形，原來有許多種，如右圖中的三平角、三凹角、三凸角等等……。其中以展開圖爲三平角的三角錐引起了我們的好奇心，既然三角錐的展開圖有可能是三平角即(平面三角形)，那麼，是否我們只要拿任意的平面三角形，即可將其折成一立體三角錐，其折法爲何？這樣的三角錐又有何特殊的地方呢？於是我們就繼續研究下去。

參、研究目的

探討平面三角形所折成的三角錐其相關性質。

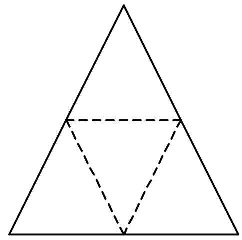
肆、研究設備及器材

紙、筆、電腦、三角錐模型。

伍、名詞定義

一、三角錐：

此處我們所討論的三角錐指由平面三角形如圖【一】的型式，沿虛線向上對折而形成三角錐。



圖【一】

二、平角、凹角、凸角：

(一)平角

三角錐展開圖如下頁圖【二】，平面三角形中，∠1+∠2+∠3＝180°

∠1+∠2+∠3 為平角。

(二) 凹角

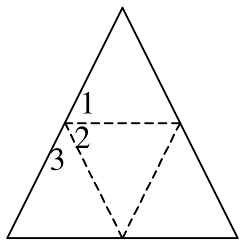
三角錐展開圖如下圖【三】，平面三角形中，∠1+∠2+∠3＞180°

∠1+∠2+∠3 為凹角。

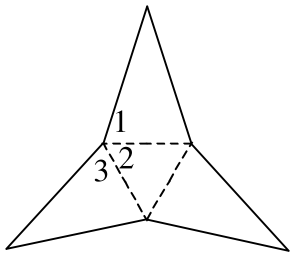
(三)凸角

三角錐展開圖如下圖【四】，平面三角形中，∠1+∠2+∠3＜180°

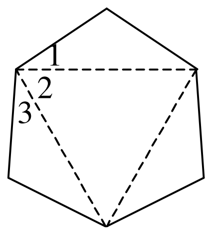
∠1+∠2+∠3 為凸角。



圖【二】



圖【三】

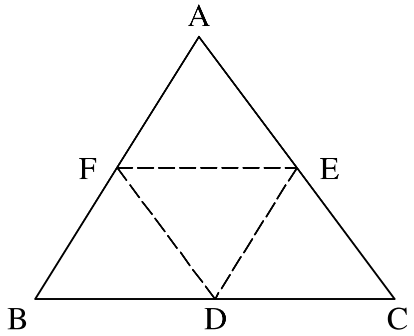


圖【四】

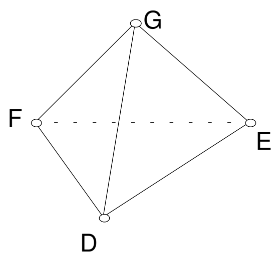
陸、研究過程

一、三角錐的折法

(一)選取一△ABC，並在三邊上分別選取 D、E、F 三點。如下圖【五】。



圖【五】



圖【六】

(二)沿$\overline{EF}$將△AEF折起，沿$\overline{DF}$將△BDF折起，沿$\overline{DE}$將△CDE折起；A、B、C重合爲一點G。如上圖【六】。

(三)說明：

因爲沿$\overline{EF}$將△AEF折起，沿$\overline{DF}$將△BDF折起，沿$\overline{DE}$將△CDE折起，A、B、C三點重合爲一點G，所以$\overline{AF}=\overline{BF}=\overline{GF}$，$\overline{BD}=\overline{CD}=\overline{GD}$，$\overline{AE}=\overline{CE}=\overline{GE}$，所以D、E、F爲三邊中點。

二、是否任意三角形皆可折成三角錐？探討銳角三角形、直角三角形、鈍角三角形是否能折成三角錐？

(一) 因爲D、E、F爲三邊中點，所以$\overline{DE}//\overline{AB}$，$\overline{DF}//\overline{AC}$，$\overline{EF}//\overline{BC}$。

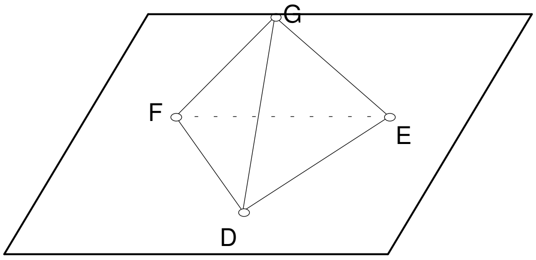
(二) A點必沿著過A點且垂直$\overline{EF}$的平面上移動（設此平面爲E_1），又$\overline{EF}//\overline{BC}$；

B點必沿著過B點且垂直$\overline{DF}$的平面上移動（設此平面爲E_2），又$\overline{DF}//\overline{AC}$；

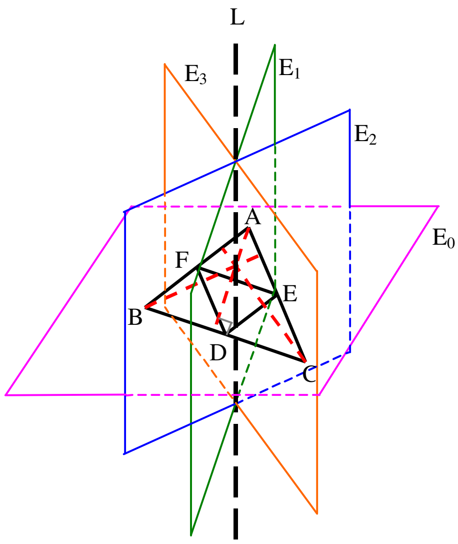
C點必沿著過C點且垂直$\overline{DE}$的平面上移動（設此平面爲E_3），又$\overline{DE}//\overline{AB}$。

$\therefore E_1$過A點且垂直$\overline{BC}$；E_2過B點且垂直$\overline{AC}$；E_3過C點且垂直$\overline{AB}$

(三)又已知△ABC三垂線$\overline{AH_1}$、$\overline{BH_2}$、$\overline{CH_3}$交於垂心H，所以E_1、E_2、E_3交於直線L上，其中L過△ABC垂心H，且L⊥平面ABC，因此若△ABC可折成三角錐，則A、B、C三點折起後將重合在直線L上。如下圖【七】【八】。



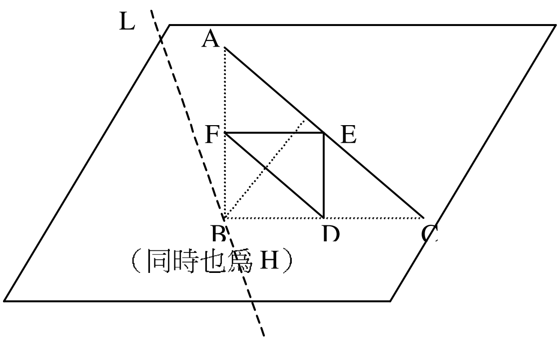
圖【七】



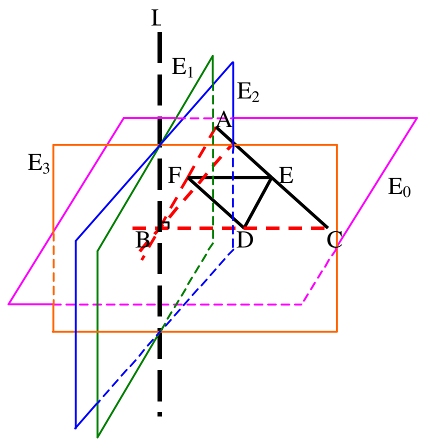
圖【八】

(四)因此若△ABC 爲直角三角形，則垂心落在直角頂點上。如下圖【九】【十】。

因此，直角三角形顯然不能折成爲三角錐。

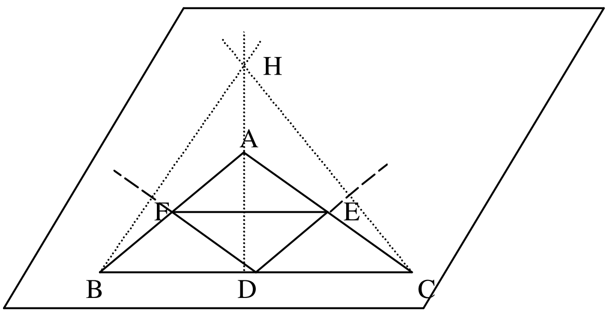


圖【九】

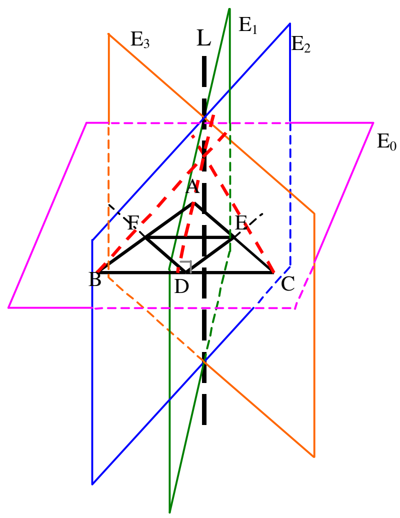


圖【十】

(五)若△ABC 爲鈍角三角形，則垂心落在三角形△ABC 外。如圖【十一】【十二】。因此，鈍角三角形顯然不能折成爲三角錐。

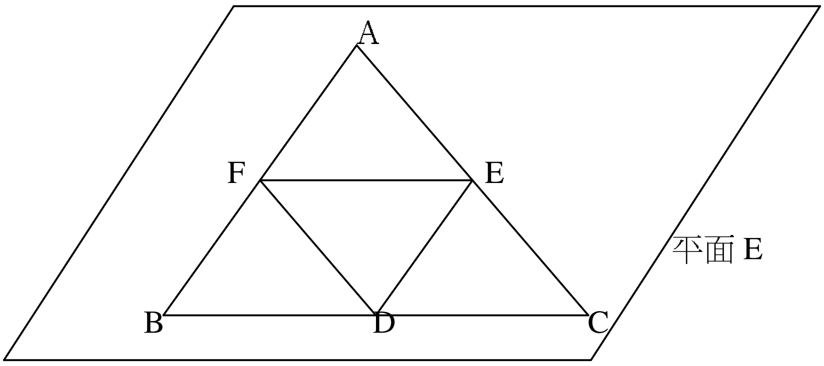


圖【十一】

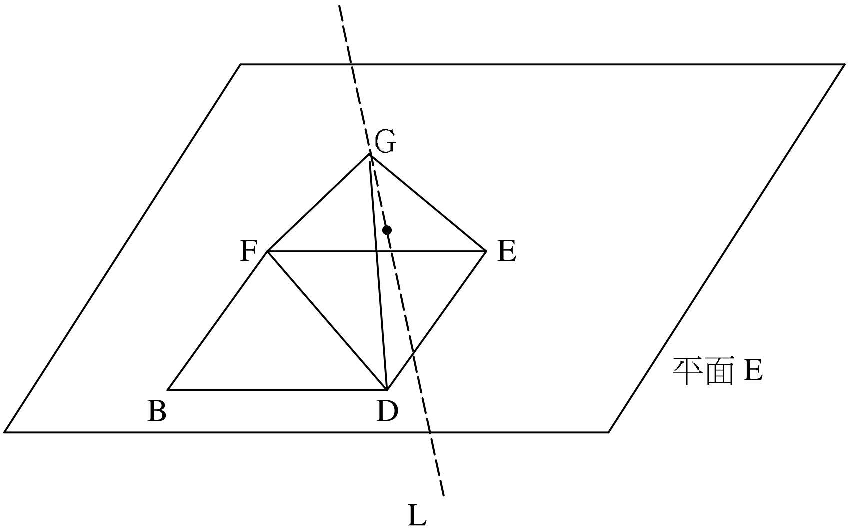


圖【十二】

(六) 那麼是否任意銳角三角形即能以此法折成三角錐呢？



圖【十三】



圖【十四】

1. 說明：

將△AEF 沿 $\overline{EF}$ 折起，將△CDE 沿 $\overline{DE}$ 折起；A、C 二點重合為一點 G，又

$\overline{AF}=\overline{BF}$ ，$\overline{BD}=\overline{CD}$ ，所以△GFD≅△BFD，即△BFD 折起後剛好可和

△ GFD 重合。

所以任意銳角三角形即能以此法折成三角錐。

三、特性

(一)∵D、E、F 分別為 $\overline{BC}$ 、 $\overline{AC}$ 、 $\overline{AB}$ 中點

∴可以很容易證明出△AEF≅△FDB≅△ECD≅△DFE
因此，所折成的三角錐其四個面皆為全等三角形。
(※可將其任意翻轉)

(二)因為 $\overline{AF}$ 、 $\overline{BF}$ 折起後重疊為 $\overline{GF}$ ，又根據三角形全等， $\overline{DE}=\overline{AF}=\overline{BF}$

∴在三角錐中 $\overline{GF}=\overline{ED}$

同理 $\overline{GD}=\overline{EF}$ 、 $\overline{GE}=\overline{DF}$

即在此三角錐上任一組歪斜線等長。

(三)此三角錐的三頂點 D、E、F，因其展開圖各為平角
∴頂點 D、E、F 相鄰的三個角度和為 180° 頂點 G 其所相鄰的三角度分別為
∠A、∠B、∠C，顯然∠A+∠B+∠C=180°
∴此三角錐頂點 G、D、E、F 各所相鄰三個角角度和皆 180°。

(四)兩面角
經過實際的嘗試發現，以此法所折成的三角錐，可得如正四面體，任兩面的夾角
皆小於 90°，但亦可得兩面角大於或等於 90° 的三角錐。
要探討此問題，在不失一般性的情況下 $a \ge b \ge c$，且因為△ABC 必為銳角三角形，
所以 $a^2 \le b^2+c^2$。

∵頂點 G 的所在位置為通過△ABC 的垂心 H 的垂直線上，因此若垂心 H 落在 $\overline{EF}$
上，則可知折起之

三角錐頂點 G 在 $\overline{EF}$ 的上方，∴平面 EFG⊥平面 DEF

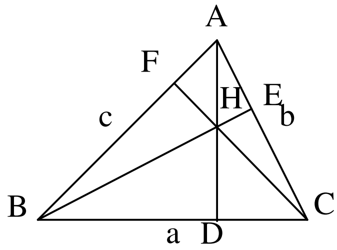
同理

三角錐頂點 G 在 $\overline{DF}$ 的上方，∴平面 BDF⊥平面 DEF

三角錐頂點 G 在 $\overline{DE}$ 的上方，∴平面 GDE⊥平面 DEF

若垂心 H 在△DEF 內，則任兩面角小於 90°
若垂心 H 在△DEF 外，則其中有兩面角大於 90°
如 H 在△AEF 內，則平面 GEF 和平面 DEF 夾角大於 90°
因此接下來將探討如何判別所給定的△ABC 其兩面角的關係。

1. 首先希望用三邊長表示出$\overrightarrow{AH}$



已知垂心性質 $\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$

說明：

$$\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{AB}=\left|\overrightarrow{AH}\right|\left|\overrightarrow{AB}\right|\cos\angle FAH$$

$$=\left|\overrightarrow{AF}\right|\left|\overrightarrow{AB}\right|=\left|\overrightarrow{AC}\right|\cos\angle A\left|\overrightarrow{AB}\right|=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$$

$$\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{AC}=\left|\overrightarrow{AH}\right|\left|\overrightarrow{AC}\right|\cos\angle EAH$$

$$=\left|\overrightarrow{AE}\right|\left|\overrightarrow{AC}\right|=\left|\overrightarrow{AB}\right|\cos\angle A\left|\overrightarrow{AC}\right|=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$$

又 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\left|\overrightarrow{AB}\right|\left|\overrightarrow{AC}\right|\cos\angle A=c\cdot b\cdot\dfrac{c^2+b^2-a^2}{2\cdot c\cdot b}=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2}$

設 x $\overrightarrow{AB}$ +y $\overrightarrow{AC}$

$$\Rightarrow\begin{cases}\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{AB}=x\left|\overrightarrow{AB}\right|^2+y\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}\\ \overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{AC}=x\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+y\left|\overrightarrow{AC}\right|^2\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2}=x\cdot c^2+y\cdot\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2}\\ \dfrac{b^2+c^2-a^2}{2}=x\cdot\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2}+y\cdot b^2\end{cases}$$

$\times 2$

$$\Rightarrow\begin{cases}b^2+c^2-a^2=\left(2c^2\right)\cdot x+\left(b^2+c^2-a^2\right)\cdot y & \text{—— (A)}\\ b^2+c^2-a^2=\left(b^2+c^2-a^2\right)\cdot x+\left(2b^2\right)\cdot y & \text{—— (B)}\end{cases}$$

(A)$\div\ 2c^2$

$$\Rightarrow\frac{b^2+c^2-a^2}{2c^2}=x+\frac{b^2+c^2-a^2}{2c^2}\cdot y$$

$$\Rightarrow x=\frac{b^2+c^2-a^2}{2c^2}-\frac{b^2+c^2-a^2}{2c^2}\cdot y \quad \text{代入(B)}$$

(B)

$$\Rightarrow b^2+c^2-a^2=\left(b^2+c^2-a^2\right)\cdot\left(\frac{b^2+c^2-a^2}{2c^2}-\frac{b^2+c^2-a^2}{2c^2}\cdot y\right)+2b^2y$$

同除以$\left(b^2+c^2-a^2\right)$

$$\Rightarrow 1=\frac{b^2+c^2-a^2}{2c^2}+\left(\frac{2b^2}{b^2+c^2-a^2}-\frac{b^2+c^2-a^2}{2c^2}\right)\cdot y$$

$$\Rightarrow 1-\frac{b^2+c^2-a^2}{2c^2}=\frac{c^2-b^2+a^2}{2c^2}=\frac{2c^2\cdot 2b^2-\left(b^2+c^2-a^2\right)^2}{\left(b^2+c^2-a^2\right)\cdot\left(2c^2\right)}\cdot y$$

$$\Rightarrow \frac{\left(c^2-b^2+a^2\right)\cdot\left(b^2+c^2-a^2\right)}{\left(b^2+c^2-a^2\right)\cdot\left(2c^2\right)}=\frac{4b^2c^2-\left(b^2+c^2-a^2\right)^2}{\left(b^2+c^2-a^2\right)\cdot\left(2c^2\right)}\cdot y$$

$$\Rightarrow y=\frac{b^2c^2+c^4-a^2c^2-b^4-b^2c^2+a^2b^2+a^2b^2+a^2c^2-a^4}{4b^2c^2-\left(b^4+b^2c^2-a^2b^2+b^2c^2+c^4-a^2c^2-a^2b^2-a^2c^2+a^4\right)}$$

$$\Rightarrow y=\frac{c^4-a^4-b^4+2a^2b^2}{4b^2c^2-\left(a^4+b^4+c^4-2a^2b^2+2b^2c^2-2a^2c^2\right)}$$

$$\Rightarrow y=\frac{c^4-a^4-b^4+2a^2b^2}{2\left(a^2b^2+b^2c^2+a^2c^2\right)-\left(a^4+b^4+c^4\right)}$$

$$\Rightarrow y=\frac{c^4-\left(a^4+b^4-2a^2b^2\right)}{2\left(a^2b^2+b^2c^2+a^2c^2\right)-\left(a^4+b^4+c^4\right)}$$

$$\Rightarrow y=\frac{c^4-\left(a^2-b^2\right)^2}{2\left(a^2b^2+b^2c^2+a^2c^2\right)-\left(a^4+b^4+c^4\right)}$$

$$\Rightarrow y=\frac{\left(c^2+a^2-b^2\right)\left(c^2-a^2+b^2\right)}{2\left(a^2b^2+b^2c^2+a^2c^2\right)-\left(a^4+b^4+c^4\right)}$$

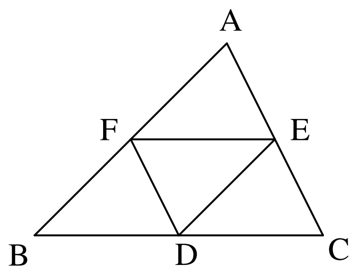
$$\Rightarrow y=\frac{(c^2+a^2-b^2)(c^2-a^2+b^2)}{[a^4-(a^2-b^2)^2][b^4-(b^2-c^2)^2][c^4-(c^2-a^2)^2]}$$

同理可證

$$x=\frac{b^4-a^4-c^4+2a^2c^2}{2(a^2b^2+b^2c^2+a^2c^2)-(a^4+b^4+c^4)}$$

$$\Rightarrow x=\frac{(b^2+a^2-c^2)(b^2-a^2+c^2)}{[a^4-(a^2-b^2)^2][b^4-(b^2-c^2)^2][c^4-(c^2-a^2)^2]}$$

2.



$$\overrightarrow{AH}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$$

$$=x\left(2\overrightarrow{AF}\right)+y\left(2\overrightarrow{AE}\right)$$

$$=2x\overrightarrow{AF}+2y\overrightarrow{AE}$$

(1)若 H 在$\overline{EF}$上，根據共線定理

2x+2y=1

$\Rightarrow$ x+y=$\frac{1}{2}$

$$\Rightarrow \frac{b^4-a^4-c^4+2a^2c^2}{2\left(a^2b^2+b^2c^2+a^2c^2\right)-\left(a^4+b^4+c^4\right)}+\frac{c^4-a^4-b^4+2a^2b^2}{2\left(a^2b^2+b^2c^2+a^2c^2\right)-\left(a^4+b^4+c^4\right)}=\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{-a^4+2a^2\left(b^2+c^2\right)}{2\left(a^2b^2+b^2c^2+a^2c^2\right)-\left(a^4+b^4+c^4\right)}=\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow -2a^4+4a^2b^2+4a^2c^2=2a^2b^2+2b^2c^2+2a^2c^2-a^4-b^4-c^4$$

$$\Rightarrow -a^4+b^4+c^4+2a^2b^2+2a^2c^2-2b^2c^2=0$$

$$\Rightarrow a^4-b^4-c^4-2a^2b^2-2a^2c^2+2b^2c^2=0 \qquad \text{----(A)}$$

同理根據對稱性

若 H 在$\overline{DF}$上，則$\Rightarrow b^4-a^4-c^4-2a^2b^2-2b^2c^2+2a^2c^2=0$ ----(B)

若 H 在$\overline{DE}$上，則$\Rightarrow c^4-a^4-b^4-2b^2c^2-2a^2c^2+2a^2b^2=0$ ----(C)

當△**ABC** 三邊長滿足**(A)**時，此三角錐側平面△**GEF** 垂直底面△**DEF**
當△**ABC** 三邊長滿足**(B)**時，此三角錐側平面△**GDF** 垂直底面△**DEF**
當△**ABC** 三邊長滿足**(C)**時，此三角錐側平面△**GDE** 垂直底面△**DEF**

(2)當 2x+2y＜1

$\Rightarrow a^4-b^4-c^4-2a^2b^2-2a^2c^2+2b^2c^2>0$

此時△**ABC** 的垂心落在△**GEF** 內，即平面 **GEF** 和平面 **DEF** 的夾角超過 **90** 度。

同理

$\Rightarrow b^4-a^4-c^4-2a^2b^2-2b^2c^2+2a^2c^2>0$

此時△**ABC** 的垂心落在△**GDF** 內，即平面 **GDF** 和平面 **DEF** 的夾角超過 **90** 度。

$\Rightarrow c^4-a^4-b^4-2b^2c^2-2a^2c^2+2a^2b^2>0$

此時△**ABC** 的垂心落在△**GDE** 內，即平面 **GDE** 和平面 **DEF** 的夾角超過 **90** 度。

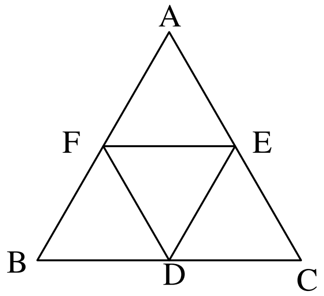
(3)

$$\text{當}\begin{cases} a^4-b^4-c^4-2a^2b^2-2a^2c^2+2a^2b^2<0 \\ b^4-a^4-c^4-2a^2b^2-2b^2c^2+2a^2c^2<0 \text{時，} \\ c^4-a^4-b^4-2b^2c^2-2a^2c^2+2a^2b^2<0 \end{cases}$$

△**ABC** 垂心 **H** 落在△**DEF** 內，平面 **AEF**、**BDF**、**CDE** 和平面 **DEF** 的夾角小於 **90** 度，即此時任一兩面角小於 **90** 度。

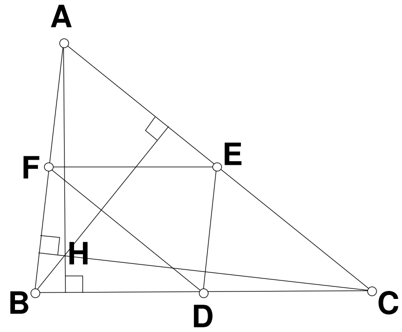
3. 由以上討論可知當△ABC 的邊長 a、b、c 滿足以上條件時，可分別判別出其兩面角的關係，但是否存在這樣的銳角三角形，分別滿足這三條件呢？我們做以下的討論：

(1)取△ABC 爲正三角形，則其垂心落在重心的位置，顯然在△DEF 內。如圖【十五】



圖【十五】

(2)△ABC，當∠B→90°時，可以看出垂心 H 往頂點 B 靠近，所以只要讓∠B 的角度接近 90°，即很容易得其垂心在△BDF 中 。如圖【十六】



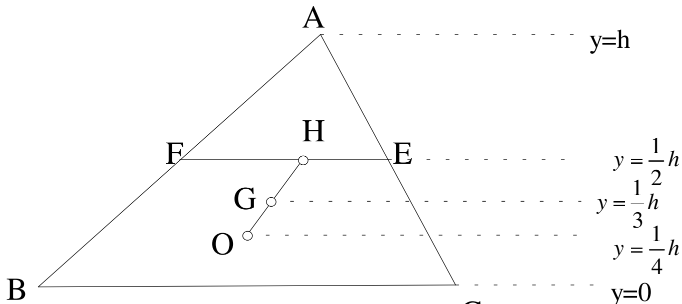
圖【十六】

(3)

如何找出△ABC 使其垂心落在 $\overline{DE}$ or $\overline{EF}$ or $\overline{DF}$ 上呢？

將△ABC 的 $\overline{BC}$ 邊至於 y=0 的直線上，並設其高爲 h (h＞0)，即 A 在 y=h 的直線上。

若 H 在 $\overline{EF}$ 上（即 H 在 $y=\frac{1}{2}h$ 上）

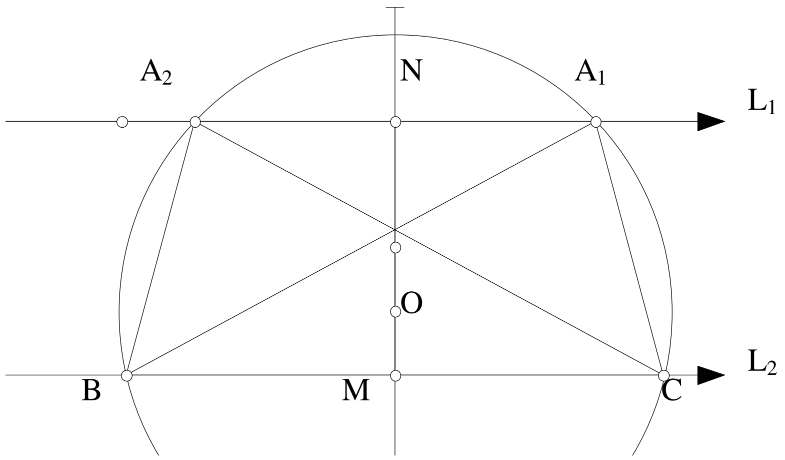


圖【十七】

根據重心性質，重心 G 在 $y=\frac{1}{3}h$ 的直線上，另根據尤拉定理外心 O、重心 G、垂心 H 三點共線，且 $\overline{OG}$ ：$\overline{GH}$ =1：2

$\therefore$O 在 $y=\frac{1}{4}h$ 直線上($\left(\frac{1}{3}h-\frac{1}{4}h\right)$ ：$\left(\frac{1}{2}h-\frac{1}{3}h\right)=\frac{1}{12}h$ ：$\frac{1}{6}h$=1：2)

反之若 O 在 $y=\frac{1}{4}h$ 的直線上時，即可得 H 在 $\overline{EF}$ 上，因此我們以此觀念來做出△ABC。



圖【十八】

作法：

Ⅰ.找一組平行線 $L_1//L_2$，且 $d(L_1,L_2)=h$。

Ⅱ.在 L_2 上選定 B、C 兩點，使 $\overline{BC} > \sqrt{2}h$ 。

Ⅲ.取 $\overline{BC}$ 中點 M，並作 $\overline{BC}$ 的中垂線，交於 L_1 於 N。

Ⅳ.在 $\overline{MN}$ 上取一點 O，使 $\overrightarrow{MO}=\frac{1}{4}\overrightarrow{MN}$ 。

Ⅴ.以 O 為圓心，$\overline{OC}$ 長為半徑畫弧，交 L_1 於 A_1、A_2 兩點。

Ⅵ連接△A_1BC 或△A_2BC 即為所求。

(五)體積：

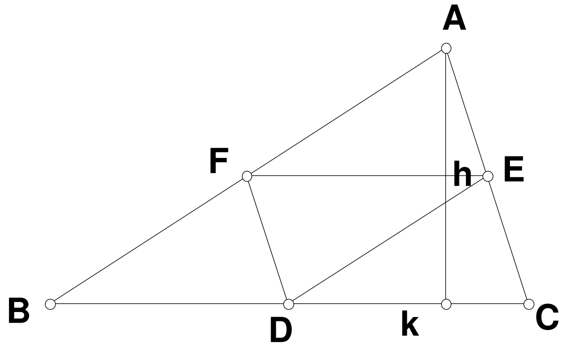
在此，我們感興趣的是當給定的銳角△ABC 面積固定時，由△ABC 所折成的三角錐在何種情形下會得到最大的體積？

錐體的體積公式：$\frac{1}{3}$×底面積×高

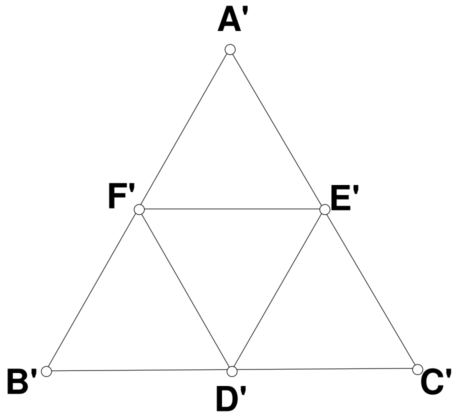
顯然當△ABC 面積固定，△DEF(=$\frac{1}{4}$△ABC)面積也跟著固定，因此要探討體積的問題，只需要探討在所折成的錐體 G-DEF 的高 h 的大小即可。

至於 h 在何時會產生最大值呢？

1. 由於此四面體的高取決於 A 點所折起的高度，因此我們先考慮兩種情況，一是「兩面角爲 90 度時的三角錐」，其展開如圖【十九】的△ABC，一是「正四面體」，其展開如圖【二十】的△A'B'C'，比較同樣底面積的情形下兩個三角錐高的大小。



圖【十九】



圖【二十】

先假設△ABC 中，高爲 h，$\overline{CD}$=k（$k > \frac{\sqrt{2}}{2}h$）

由於△ABC 所折成的三角錐兩面角爲 90 度，所以此三角錐高爲$\frac{1}{2}h$

又△D'E'F'的面積=△DEF 的面積=$\frac{1}{4}$△ABC=$\frac{1}{4}\times\frac{2k\times h}{2}=\frac{1}{4}kh$

假設$\overline{D'E'}$=a，則$\frac{\sqrt{3}}{4}a^2=\frac{1}{4}kh \Rightarrow a=\sqrt{\frac{kh}{\sqrt{3}}}$

則由△A'B'C'所折成的的正四面體高爲$\frac{\sqrt{6}}{3}a=\frac{\sqrt{6}}{3}\times\sqrt{\frac{kh}{\sqrt{3}}}$

所以兩者的高分別爲$\frac{1}{2}h$ 及$\frac{\sqrt{6}}{3}\times\sqrt{\frac{kh}{\sqrt{3}}}$

由$(\frac{\sqrt{6}}{3}\times\sqrt{\frac{kh}{\sqrt{3}}})^4=\frac{36}{81}\times\frac{k^2h^2}{3}=\frac{4}{27}k^2h^2 > \frac{4}{27}(\frac{\sqrt{2}}{2}h)^2h^2=\frac{2}{27}h^4 \geq \frac{1}{16}h^4=(\frac{1}{2}h)^4$

$\therefore \frac{\sqrt{6}}{3}\times\sqrt{\frac{kh}{\sqrt{3}}} > \frac{1}{2}h$

∴正四面體的體積＞兩面角爲 90 度時的三角錐

因此我們先大膽猜測：「**△ABC** 面積固定，當**△ABC** 爲正三角形時，所折成的三角錐其體積爲最大。」

2. 要證明這猜測之前，我們先證明：

「若△ABC 爲圓內三角形，當△ABC 爲正三角形時，其面積爲最大。」

pf：

設△ABC 爲圓內接最大面積的三角形，且△ABC 不爲正三角形

∵△ABC 不爲正三角形

∴△ABC 必存在兩不相等的邊，假設其爲

$\overline{AB}$ 、 $\overline{AC}$

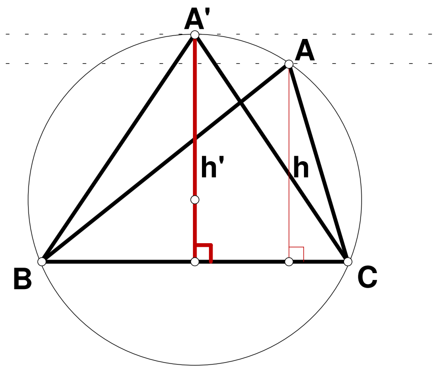
作 $\overline{BC}$ 中垂線交圓於點 A’，並連接 $\overline{A'B}$ 及

$\overline{A'C}$ ，可得另一圓內接三角形△A’BC，h’

爲高，如圖【廿一】，顯然 h’＞h

∴△A’BC 面積＞△ABC→←與假設矛盾

所以△ABC 爲正三角形。



圖【廿一】

3. 因此當△DEF 爲圓 O_1(半徑爲 r_1)內接正三角形，△D’E’F’不爲正三角形，且面積與△DEF 相等時，則△D’E’F’必不爲圓 O_1 的內接三角形，所以若△D’E’F’的外接圓 O_2 半徑爲 r_2，則 $r_2 > r_1$。

4. 接下來我們將證明我們的猜測了：

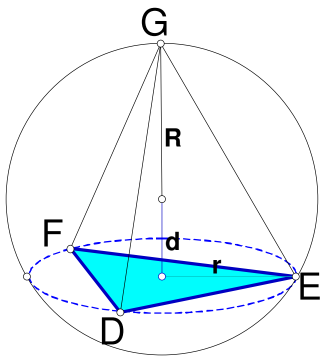
「**△ABC 面積固定，當△ABC 爲正三角形時，所折成的三角錐其體積爲最大。**」

pf：

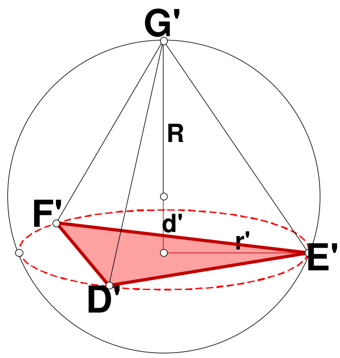
(1)G、D、E、F 爲不共線且不共平面的四點，因此必存在一球面，使得 G、D、E、F 四點都在此球面上，且由對稱性的情形可知球心會落在三角錐內部。

(2)平面 DEF 和此球面上截一圓 C_1，C_1 爲△DEF 的外接圓，假設其半徑爲 r，球心距爲 d，如下圖【廿二】。

(3)在球面上任意找出三點 D’、E’、F’，使得△D’E’F’不爲正三角形，且△D’E’F’面積=△DEF 的面積，此時平面 D’E’F’和此球面上截一圓 C_2，C_2 爲△D’E’F’的外接圓，假設其半徑爲 r’，球心距爲 d’，如下圖【廿三】。



圖【廿二】



圖【廿三】

(4)當△ABC 爲正三角形時，△DEF 亦爲正三角形，運用前面的引理，其外接圓半徑必小於△D’E’F’的半徑(r≤r’)，所以其圓心距

d=$\sqrt{R^2-r^2}$ ＞$\sqrt{R^2-r'^2}$ =d’。

(5)以△DEF 爲底面的三角錐 G-DEF 其高 h 最大爲 R+d_1，而以△D’E’F’爲底面的三角錐其高 h 最大爲 R+d_2，顯然 R+d_1≥R+d_2。

根據錐體公式可得

G-DEF 體積

$=\frac{1}{3}\times$(△DEF 面積)×(R+d)＞$\frac{1}{3}\times$(△D’E’F’面積)×(R+d’)=G’-D’E’F’體積

故得證。

柒、結論

一、三角錐之折法：取三邊中點，沿兩兩中點之連線對折，即可折成三角錐。

二、並非任意三角形皆可折成三角錐，銳角三角形可折成三角錐，直角三角形及鈍角三角形則否。任意銳角三角形皆可折成爲三角錐。

三、特性

(一)取任一銳角三角形，所折成的三角錐其四個面皆爲全等三角形。

(二)在此三角錐上任一組歪斜線等長。

(三)此三角錐四個頂點各所相鄰三個角角度和皆 180°。

(四)兩面角：(設△ABC 三邊長爲 a、b、c)

1. 若 H 在$\overline{EF}$上，$\Rightarrow a^4-b^4-c^4-2a^2b^2-2a^2c^2+2b^2c^2=0$ ----(A)

若 H 在$\overline{DF}$上，則$\Rightarrow b^4-a^4-c^4-2a^2b^2-2b^2c^2+2a^2c^2=0$ ----(B)

若 H 在$\overline{DE}$上，則$\Rightarrow c^4-a^4-b^4-2b^2c^2-2a^2c^2+2a^2b^2=0$ ----(C)

當△ABC 三邊長滿足(A)時，此三角錐側平面△GEF 垂直底面△DEF

當△ABC 三邊長滿足(B)時，此三角錐側平面△GDF 垂直底面△DEF

當△ABC 三邊長滿足(C)時，此三角錐側平面△GDE 垂直底面△DEF

2. $\Rightarrow a^4-b^4-c^4-2a^2b^2-2a^2c^2+2b^2c^2>0$

此時△ABC 的垂心落在△GEF 內，即平面 GEF 和平面 DEF 的夾角超過 90 度。

$\Rightarrow b^4-a^4-c^4-2a^2b^2-2b^2c^2+2a^2c^2>0$

此時△ABC 的垂心落在△GDF 內，即平面 GDF 和平面 DEF 的夾角超過 90 度。

$\Rightarrow c^4-a^4-b^4-2b^2c^2-2a^2c^2+2a^2b^2>0$

此時△ABC 的垂心落在△GDE 內，即平面 GDE 和平面 DEF 的夾角超過 90 度。

3. 當$\begin{cases} a^4 - b^4 - c^4 - 2a^2b^2 - 2a^2c^2 + 2a^2b^2 < 0 \\ b^4 - a^4 - c^4 - 2a^2b^2 - 2b^2c^2 + 2a^2c^2 < 0 \\ c^4 - a^4 - b^4 - 2b^2c^2 - 2a^2c^2 + 2a^2b^2 < 0 \end{cases}$時，

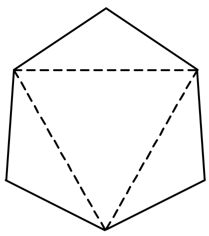
△ABC 垂心 H 落在△DEF 內，平面 AEF、BDF、CDE 和平面 DEF 的夾角小於 90 度，即此時任一兩面角小於 90 度。

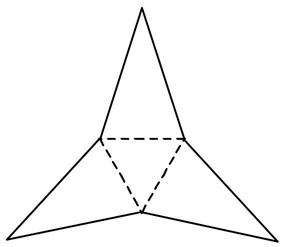
(五)△ABC 面積固定，當△ABC 爲正三角形時，所折成的三角錐其體積爲最大。

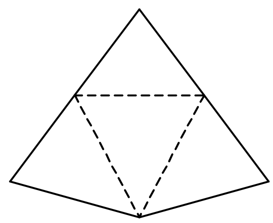
玖、未來展望

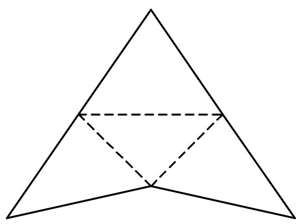
依此定義的三角錐展開圖共有 10 種(H_3^3=10)，本研究僅就三平角的部分做討論，未來可就其他 9 種展開圖，來探討其存在性及相關性質。

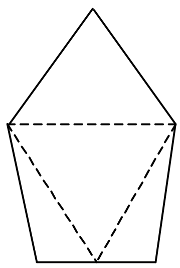
(一)三凸角（如圖【廿四】)
(二)三凹角（如圖【廿五】)
(三)二平角一凸角（如圖【廿六】)
(四)二平角一凹角（如圖【廿七】)
(五)二凸角一平角（如圖【廿八】)
(六)二凸角一凹角（如圖【廿九】)
(七)二凹角一凸角（如圖【三十】)
(八)二凹角一平角（如圖【卅一】)
(九)一凸角一平角一凹角（如圖【卅二】)

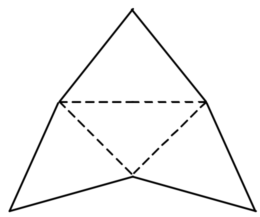

圖【廿四】

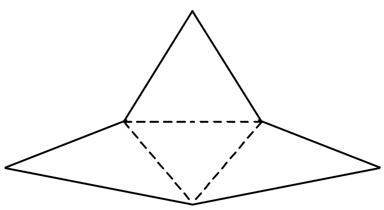

圖【廿五】

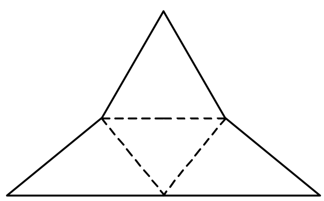

圖【廿六】

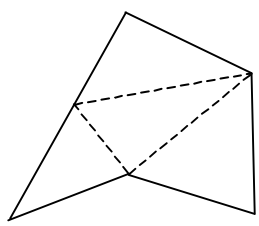

圖【廿七】


圖【廿八】


圖【廿九】


圖【三十】


圖【卅一】


圖【卅二】

拾、參考資料及其他

一、柳賢、左太政等。高中幾何學（下）。翰林出版社。P.26。
二、黃家禮。幾何明珠。一版。台北市。九章出版社。P.119~P.123。2000。

中華民國第四十五屆中小學科學展覽會
評　　語

高中組 數學科

040418
鍾求完美

國立台東女子高級中學

評語：

1. 製作具體摸型輔助展示，增添幾何空間的直觀性
2. 本作品試圖獲得四個全等三角形為面的三角錐的充分必要條件，並已獲得部份代數結果。