中華民國第四十五屆中小學科學展覽會
作品說明書

高中組 數學科

最佳(鄉土)教材獎

040417
多面體的探討(巴克球為最接近球的多面體?)

國立花蓮高級中學

作者姓名：
高二 蔡卓明 高二 束昀 高二 謝宗翰
高二 陳彥齊

指導老師：
王湧和 陳貞康

壹、研究動機

在高中數學第三冊中我們剛了解圓與球的性質，再加上國中常接觸到許多正多邊形其內切圓及外接圓的問題。這令我們聯想到：是否所有多面體都有內切球與外接球？若有，它們間的關係又是什麼？ 恰巧，化學老師在課堂上提到了由六十個碳原子構成的 C-60 模型，而我們發現，以數學的角度來看，”C-60 ”是由數個正五邊形與正六邊形所構成的立體圖形。在我們與數學老師討論後得知這種由十二個正五邊形與二十個正六邊形所構成的立體圖形就是所謂的”巴克球”，且從數學刊物上看到”巴克球為最接近球體的多面體”。這引發了我們的興趣，因此我們決定就這方面的問題展開討論。

貳、研究目的

一、探討究竟能找出多少種類似”巴克球”這類由不同正多邊形所拼湊成的立體圖形。

二、由平面延伸到立體，研究正多面體的邊長與其內切球、外接球半徑的關係。

三、在”正多面體的邊長與其內切球、外接球半徑的關係”之討論中找出方法解決巴克球的邊長與其內切球、外接球半徑的關係。

參、研究器材

紙、筆、尺、計算機、圓規、模型、電腦。

肆、研究問題

一、由不同正多邊形所組成的多面體有哪些？

二、正多面體有哪些？

三、正多面體其內切球、外接球半徑與邊長關係？

四、巴克球與其餘截角多面體是否有內切球與外接球？若有，其內切球、外接球半徑與邊長關係？

五、”特化截角多面體” 其內切球、外接球半徑與邊長關係？

伍、研究過程

問題一、由不同正多邊形所組成的多面體有哪些？

兩種以上的正多邊形可拼成無限多種立體圖形，我們必須做一些限制來排除角錐、角柱那些把底面換一換，側面做適當改變就可轉變成另一種型態的立體圖形；再者，對於每個頂點，其周圍正多邊形無論是邊數、個數、排法都是一樣的立體圖形，也該視爲同一種。我們使用以下定理：

定理 1. 根據尤拉定理，設一多面體的邊數爲 E、頂點數爲 V、面數爲 F，則有 F+V-E=2

定理 2. 若我們將共用一頂點的數個正多邊形攤平(即展開圖)，則可得知共用一頂點的正多邊形其內角和不得超過 360°

定理 3. 由定理 2：因爲最小正多邊形爲正三角形(任一內角爲 60°)，$\because n \cdot 60° < 360° \therefore n \le 5$ ，故一個頂點只能由三到五個正多邊形所共用

根據定理 3，我們決定以共用一頂點的面數分三個情況討論：

(一) 由三個正多邊形共用一個頂點

設共用一個頂點的三個多邊形爲正 n_1、n_2、n_3 邊形(以後皆定義 a_i 表正 n_i 邊形一內角)，且 $3 \le a_1 \le a_2 \le a_3$ ，根據”定理 2”，因爲共用一頂點的內角和必須小於 360° ，由於 $a_1 + a_1 + a_1 \le a_1 + a_2 + a_3 < 360°, \therefore a_1 < 120°$ ，即 n_1 可爲 3、4 或 5。在用三個多邊形構成一個頂點的狀況下，我們發現：(其理由見附錄一)

當 n_1、n_2、n_3 其中一個爲奇數邊時，另外兩個必相等。

所以 n_1、n_2、n_3 不可能出現兩個奇數的情況，而若三個都爲奇數時三個必相等就變成正多面體了。所以我們只需要考慮三個都爲偶數或其中一個爲奇數而另外兩個爲相等的偶數之情況即可。

(a) 當 $n_1=3$ 時 $\because a_2=a_3 \wedge a_1=60° \therefore a_2+a_2 \le a_2+a_3<(360°-60°)$

$\Rightarrow a_2=a_3<150° \Rightarrow (180°-150°)<\dfrac{360°}{a_2} \Rightarrow n_2<12$(且爲偶數)

即 (n_1,n_2,n_3) 可爲 (3,4,4) , (3,6,6) , (3,8,8) , (3,10,10)

(b) 當 $n_1=4$ 時 $\because a_1=90°$ 若 $n_2=4 \Rightarrow a_3<(360°-2\cdot 90°)=180°$

$\Rightarrow n_3$可爲大於5 的任意正整數

即 (n_1,n_2,n_3) 可爲 $(4,4,5\sim\infty)$

(c) 當$n_1=4$ 時 $a_1=90°$ 若 $n_2=6 \Rightarrow a_3<(360°-90°-120°)=150°$

$\Rightarrow n_3$可爲 6,8,10

即 (n_1,n_2,n_3) 可爲 (4,6,6) , (4,6,8) , (4,6,10)

(d) 當$n_1=5$ 時 $\because a_2=a_3 \wedge a_1=108° \therefore 2\cdot a_2 \le a_2+a_3<(360°-108°)$

$\Rightarrow a_2=a_3<126° \Rightarrow (180°-126°)<\dfrac{360°}{a_2} \Rightarrow n_2<7$(且爲偶數)

即 (n_1,n_2,n_3) 可爲 (5,6,6)

結果有(3,4,4)、(3,6,6)、(3,8,8)、(3,10,10)、(4,4,5~無限大)、(4,6,6)、(4,6,8)、(4,6,10)、(5,6,6)。其中(3,4,4)、(4,4,5~無限大)爲角柱體，故不在討論範圍內。

接下來就上面各值利用”定理 1”來求頂點數、邊數及各種多邊形的面數。以 (5,6,6)、(4,6,6)、(4,6,8)及(4,6,10)爲例：

1. $(n_1,n_2,n_3)=(5,6,6)$

設正五邊形有 x 個，正六邊形有 y 個 $\Rightarrow F=x+y$，

$\because$ 每個正五邊形提供 $5x$ 條邊，正六邊形提供 $6y$ 條邊，又兩面共用一邊

$\therefore E=\dfrac{5x+6y}{2}$，而每個頂點由一個正五邊形與兩個正六邊形所共用

$\therefore V=5x=\dfrac{6y}{2} \Rightarrow$ 代入尤拉公式：$V-E+F=2 \Rightarrow$

$$\begin{cases}(x+y)-(\dfrac{5x+6y}{2})+(5x)=2\\ 5x=3y\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x=12\\ y=20\end{cases} \Rightarrow V=60，E=90，F=32$$

2. $(n_1,n_2,n_3) = (4,6,6)$

設正四邊形有 x 個，正六邊形有 y 個 $\Rightarrow F = x + y$，

$\because$ 每個正四邊形提供 $4x$ 條邊，正六邊形提供 $6y$ 條邊，又兩面共用一邊

$\therefore E = \dfrac{4x+6y}{2}$，而每個頂點由一個正四邊形與兩個正六邊形所共用

$\therefore V = 4x = \dfrac{6y}{2} \Rightarrow$ 代入尤拉公式：$V - E + F = 2 \Rightarrow$

$$\begin{cases}(x+y)-(\dfrac{4x+6y}{2})+(4x)=2\\4x=3y\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x=6\\y=8\end{cases} \Rightarrow V=24，E=36，F=14$$

3. $(n_1,n_2,n_3) = (4,6,8)$

設正四邊形有 x 個，正六邊形有 y 個，正八邊形有 z 個 $\Rightarrow F = x + y + z$

$\because$ 每個正四邊形提供 $4x$ 條邊，正六邊形提供 $6y$ 條邊，正八邊形提供 $8z$ 條邊，又兩面共用一邊 $\therefore E = \dfrac{4x+6y+8z}{2}$，而每個頂點由一個正四邊形、一個正六邊形與一個正八邊形所共用 $\therefore V = 4x = 6y = 8z \Rightarrow$ 代入尤拉公式

$$\begin{cases}(x+y)-(\dfrac{4x+6y+8z}{2})+(4x)=2\\2x=3y=4z\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x=12\\y=8\\z=6\end{cases} \Rightarrow V=48，E=72，F=26$$

4. $(n_1,n_2,n_3) = (4,6,10)$

設正四邊形有 x 個，正六邊形有 y 個，正十邊形有 z 個 $\Rightarrow F = x + y + z$

$\because$ 每個正四邊形提供 $4x$ 條邊，正六邊形提供 $6y$ 條邊，正十邊形提供 $10z$ 條邊，又兩面共用一邊 $\therefore E = \dfrac{4x+6y+10z}{2}$，而每個頂點由一個正四邊形、一個正六邊形與一個正十邊形所共用 $\therefore V = 4x = 6y = 10z \Rightarrow$ 代入尤拉公式

$$\begin{cases}(x+y)-(\dfrac{4x+6y+10z}{2})+(4x)=2\\2x=3y=5z\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x=30\\y=20\\z=12\end{cases} \Rightarrow V=120，E=180，F=62$$

其它以此類推。

(二) 由四個正多邊形共用一個頂點

設四個正多邊形為正n_1、n_2、n_3、n_4邊形，且 $3 \le n_1 \le n_2 \le n_3 \le n_4$，根據"定理 2" $\because \frac{360^\circ}{4} = 90^\circ \therefore n_1 = 3$；又 $\because \frac{(360^\circ - 60^\circ)}{3} = 100^\circ \therefore n_2 = 3 \vee 4$

(a) 若 $n_2 = 3$，共用去120°，$\therefore n_3 = 3 \vee 4 \vee 5$

(i) $n_3 = 3$，剩 $180^\circ \Rightarrow n_4 = 4 \sim \infty$ (3不合)

(ii) $n_3 = 4$，剩 $150^\circ \Rightarrow n_4 = 4 \sim 11$

(iii) $n_3 = 5$，剩 $132^\circ \Rightarrow n_4 = 5 \vee 6 \vee 7$

(b) 若 $n_2 = 4$，共用去150°，$\therefore n_3 = 4 \Rightarrow n_4 = 4 \vee 5$

此時，所有的可能為(3,3,3,4~無限大)、(3,3,4,4~11)、(3,3,5,5~7)、(3,4,4,4 或 5)。由三種多邊形拼成的有(3,3,4,5~11)、(3,3,5,6 或 7)、(3,4,4,5)，而在用四個多邊形圍成一個頂點的狀況下，我們發現：**(3,3,4,5~11)及(3,3,5,6 或 7)是不存在的。**(其理由見附錄二)

最後只剩下的(3,3,3,4~無限大)、(3,3,4,4)、(3,3,5,5)、(3,4,4,4)、(3,4,4,5)，其中(3,3,3,4~無限大)是類角柱多面體，故不在討論範圍內。

就上面各值利用"定理 1"來求頂點數、邊數及各種多邊形的面數。

1. (n_1,n_2,n_3) = (3,3,4,4)

設正三角形有 x 個，正四邊形有 y 個$\Rightarrow F = x + y$，

$\because$ 每個正三角形提供 $3x$ 條邊，正四邊形提供 $4y$ 條邊，又兩面共用一邊

$\therefore E = \frac{3x+4y}{2}$，而每個頂點由兩個正三角形與兩個正四邊形所共用

$\therefore V = \frac{3x}{2} = \frac{4y}{2} \Rightarrow$ 代入尤拉公式：$V - E + F = 2 \Rightarrow$

$$\begin{cases} (x+y) - (\frac{3x+4y}{2}) + (\frac{3x}{2}) = 2 \\ 3x = 4y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 8 \\ y = 6 \end{cases} \Rightarrow V = 12，E = 24，F = 14$$

2. $(n_1,n_2,n_3) = (3,3,5,5)$

設正三角形有 x 個，正五邊形有 y 個 $\Rightarrow F = x + y$，

$\because$ 每個正三角形提供 $3x$ 條邊，正五邊形提供 $5y$ 條邊，又兩面共用一邊

$\therefore E = \dfrac{3x+5y}{2}$，而每個頂點由兩個正三角形與兩個正五邊形所共用

$\therefore V = \dfrac{3x}{2} = \dfrac{5y}{2} \Rightarrow$ 代入尤拉公式：$V - E + F = 2 \Rightarrow$

$$\begin{cases}(x+y)-(\dfrac{3x+5y}{2})+(\dfrac{3x}{2})=2\\ 3x=5y\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x=20\\ y=12\end{cases} \Rightarrow V=30，E=60，F=32$$

3. $(n_1,n_2,n_3) = (3,4,4,4)$

設正三角形有 x 個，正四邊形有 y 個 $\Rightarrow F = x + y$，

$\because$ 每個正三角形提供 $3x$ 條邊，正四邊形提供 $4y$ 條邊，又兩面共用一邊

$\therefore E = \dfrac{3x+4y}{2}$，而每個頂點由一個正三角形與三個正四邊形所共用

$\therefore V = 3x = \dfrac{4y}{3} \Rightarrow$ 代入尤拉公式：$V - E + F = 2 \Rightarrow$

$$\begin{cases}(x+y)-(\dfrac{3x+4y}{2})+(3x)=2\\ 9x=4y\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x=8\\ y=18\end{cases} \Rightarrow V=24，E=48，F=26$$

4. $(n_1,n_2,n_3) = (3,4,4,5)$

設正三角形有 x 個，正四邊形有 y 個，正五邊形有 z 個 $\Rightarrow F = x + y + z$

$\because$ 每個正三角形提供 $3x$ 條邊，正四邊形提供 $4y$ 條邊，正五邊形提供 $5z$ 條邊，又兩面共用一邊 $\therefore E = \dfrac{3x+4y+5z}{2}$，而每個頂點由一個正三角形、兩個正四邊形與一個正五邊形所共用 $\therefore V = 3x = \dfrac{4y}{2} = 5z \Rightarrow$ 代入尤拉公式

$$\begin{cases}(x+y)-(\dfrac{3x+4y+5z}{2})+(3x)=2\\ 3x=2y=5z\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x=20\\ y=30\\ z=12\end{cases} \Rightarrow V=60，E=120，F=62$$

其他以此類推·

(3) 用五個正多邊形共用一個頂點

設五個多邊形為正n_1、n_2、n_3、n_4、n_5邊形，且 $3\le n_1\le n_2\le n_3\le n_4\le n_5$ 根據定理 2，$n_1=n_2=n_3=n_4=3$，$n_5=3$、4 或 5。則排除正多面體後只剩兩種可能：(3,3,3,3,4)、(3,3,3,3,5)。

就上面各值利用"定理 1"來求頂點數、邊數及各種多邊形的面數。

1. (n_1,n_2,n_3) = (3,3,3,3,4)

設正三角形有 x 個，正四邊形有 y 個 $\Rightarrow F=x+y$，

$\because$ 每個正三角形提供 $3x$ 條邊，正四邊形提供 $4y$ 條邊，又兩面共用一邊

$\therefore E=\dfrac{3x+4y}{2}$，而每個頂點由四個正三角形與一個正四邊形所共用

$\therefore V=\dfrac{3x}{4}=4y\Rightarrow$ 代入尤拉公式：$V-E+F=2\Rightarrow$

$$\begin{cases}(x+y)-(\dfrac{3x+4y}{2})+(4y)=2\\3x=16y\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=32\\y=6\end{cases}\Rightarrow V=24，E=60，F=38$$

2. (n_1,n_2,n_3) = (3,3,3,3,5)

設正三角形有 x 個，正五邊形有 y 個 $\Rightarrow F=x+y$，

$\because$ 每個正三角形提供 $3x$ 條邊，正五邊形提供 $5y$ 條邊，又兩面共用一邊

$\therefore E=\dfrac{3x+5y}{2}$，而每個頂點由四個正三角形與一個正五邊形所共用

$\therefore V=\dfrac{3x}{4}=5y\Rightarrow$ 代入尤拉公式：$V-E+F=2\Rightarrow$

$$\begin{cases}(x+y)-(\dfrac{3x+5y}{2})+(5y)=2\\3x=20y\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=80\\y=12\end{cases}\Rightarrow V=60，E=150，F=92$$

問題二、正多面體有哪些？

以之前問題一的觀點來看，設正多面體共用一個頂點共有 m 個正 n 邊形，則 m、 n 必須滿足：

$$\frac{(n-2)\pi}{n}\cdot m < 2\pi \Rightarrow (n-2)\cdot m - 2n < 0 \Rightarrow (n-2)(m-2) < 4 \wedge n、m \in N$$

這式子的有五組解，即：

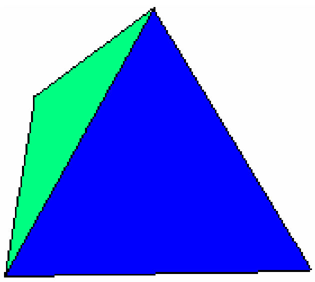
(一) n=3, m=3 ：共用一個頂點共有3個正3邊形，此為正四面體

(二) n=3, m=4 ：共用一個頂點共有 4 個正3邊形，此為正八面體

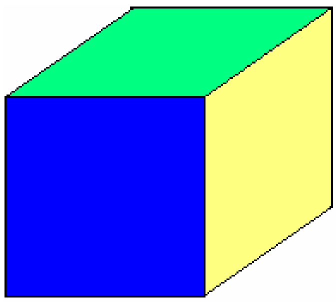
(三) n=3, m=5 ：共用一個頂點共有5個正3邊形，此為正二十面體

(四) n=4, m=3 ：共用一個頂點共有3個正4邊形，此為正六面體

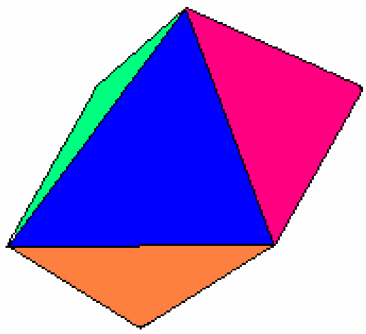
(五) n=5, m=3 ：共用一個頂點共有3個正5邊形，此為正十二面體



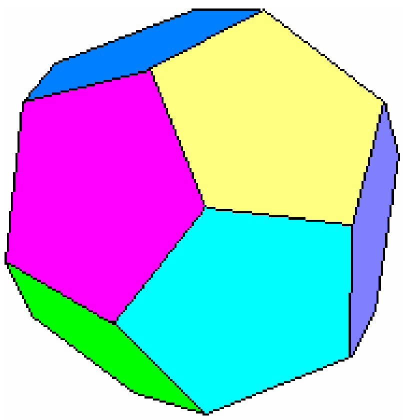
正四面體



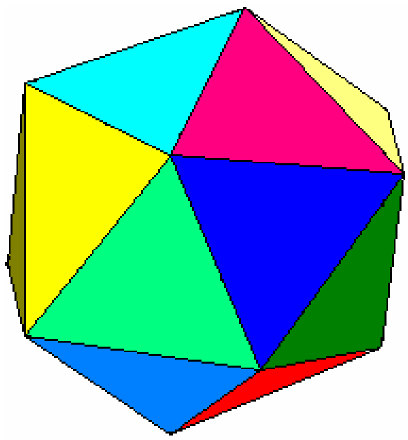
正六面體



正八面體



正十二面體

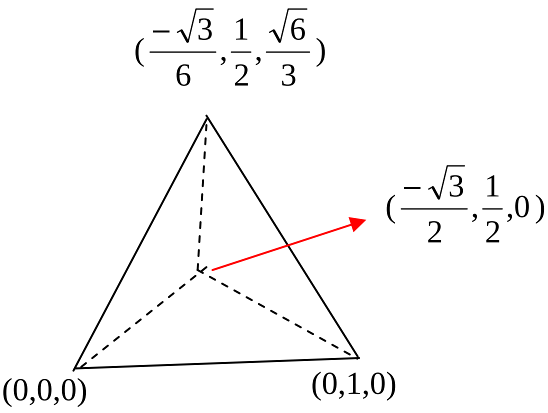


正二十面體

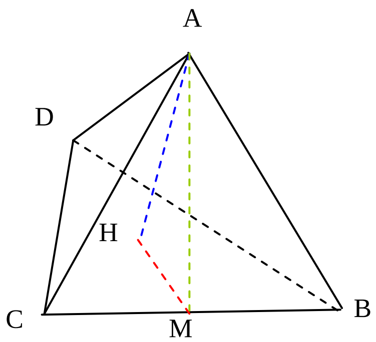
故得知正多面體只有五種，接下來，我們更進一步探討正多面體的性質。

問題三、正四面體內切球、外接球半徑與邊長關係？

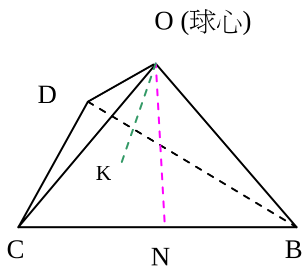
(一) 正四面體



圖一



圖二



圖三

$PF\ 1$:

由解析幾何，令座標分別如上圖一，知球心為 $\frac{\sum_{1}^{4} P_m}{4}=(-\frac{\sqrt{3}}{6},\frac{1}{2},\frac{\sqrt{6}}{12})$

$\therefore$ 外接球半徑平方 $R^2=\frac{3}{36}+\frac{1}{4}+\frac{6}{144},\ R=\frac{\sqrt{6}}{4}$

$\therefore$ 內切球半徑平方 $r^2=\left[(-\frac{\sqrt{3}}{6},\frac{1}{2},\frac{\sqrt{6}}{12})-(-\frac{\sqrt{3}}{6},\frac{1}{2},0)\right]^2=\frac{6}{144},\ r=\frac{\sqrt{6}}{12}$

$PF\ 2$:

由體積分割法 (見上圖二、圖三)，令 $\overline{AH}$ 為正四面體 $ABCD$ 對於 ΔBCD 的高，

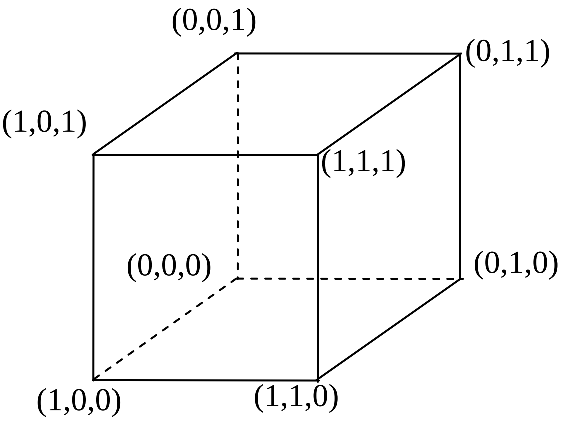
由畢氏定理可求得 $\overline{AH}=\sqrt{(\frac{\sqrt{3}}{2})^2-(\frac{\sqrt{3}}{6})^2}=\frac{\sqrt{6}}{3}$，體積為 $\Delta BCD\times\overline{AH}\times\frac{1}{3}$

又將球心向各頂點連線，必可將正四面體$ABCD$割成四個以原正三角形為底、內切球半徑為高的全等四面體 (如 四面體$OBCD$)，而這四個四面體的體積和又等於原本正四面體之體積　(以上稱體積分割定理)

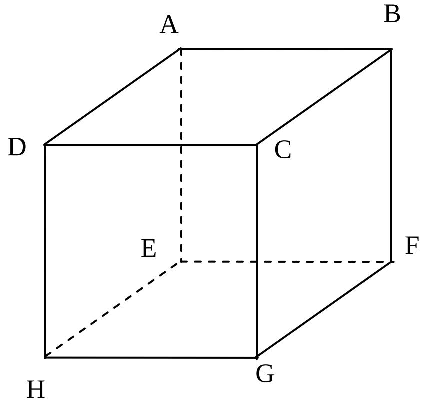
$$\therefore \text{正四面體}ABCD=\frac{\sqrt{3}}{4}\times\frac{\sqrt{6}}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{\sqrt{2}}{12}=(\frac{\sqrt{3}}{4}\times r\times\frac{1}{3})\times 4\quad\Rightarrow r=\frac{\sqrt{6}}{12}$$

$$\text{又}\left(\sqrt{R^2-(\frac{1}{2})^2}\right)^2=r^2+\overline{KN}^2\ (\because R=\overline{OB},r=\overline{OK})\quad\Rightarrow R=\sqrt{\frac{1}{24}+\frac{1}{12}+\frac{1}{4}}=\frac{\sqrt{6}}{4}$$

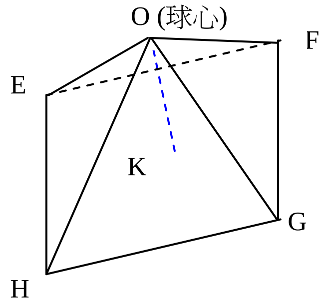
(二) 正六面體



圖一



圖二



圖三

$PF\ 1:$

由解析幾何，令座標分別如上圖一，知球心為 $\dfrac{\sum_{1}^{8} P_m}{8} = (\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2})$

$\therefore$ 外接球半徑平方$R^2 = \dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{4},\ R = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$\therefore$ 內切球半徑平方$r^2 = \left[(\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}) - (\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2},0)\right]^2 = \dfrac{1}{4},\ r = \dfrac{1}{2}$

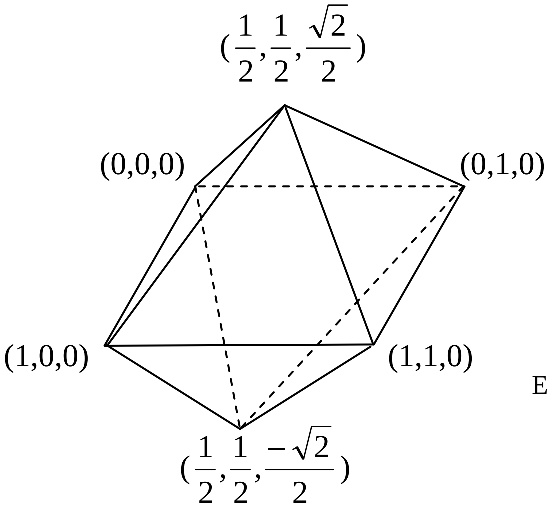
$PF\ 2:$

由體積分割法將正六面體分割 (見上圖二、圖三)，即將球心向各頂點連線，將正六面體$ABCDEFGH$割成六個以原正方形為底、內切球半徑為高的全等四角錐 (如 四角錐$OEFGH$)，而這六個四角錐的體積和又等於原本正六面體之體積 (體積分割定理)

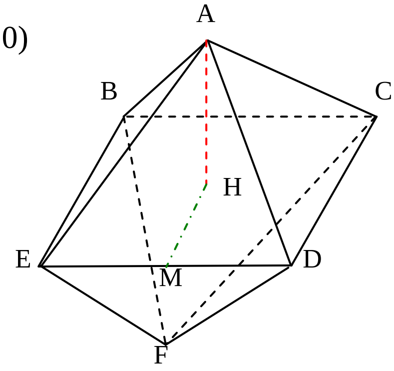
$\therefore$ 正六面體$ABCDEFGH = 1 = (1 \times r \times \dfrac{1}{3}) \times 6 \quad \Rightarrow r = \dfrac{1}{2}$

又 $\left(\sqrt{R^2 - (\dfrac{1}{2})^2}\right)^2 = r^2 + (\dfrac{1}{2})^2\ (\because R = \overline{OE}, r = \overline{OK}) \quad \Rightarrow R = \sqrt{\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{4}} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

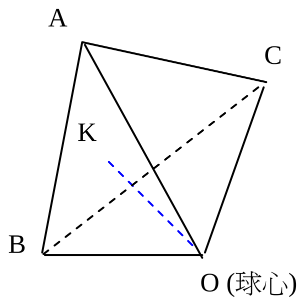
(三) 正八面體



圖一



圖二



圖三

$PF\ 1:$

由解析幾何，令座標分別如上圖一，知球心為 $\dfrac{\sum_{1}^{6} P_m}{6} = (\frac{1}{2},\frac{1}{2},0)$

$\therefore$ 外接球半徑平方 $R^2 = \frac{1}{4}+\frac{1}{4}+0,\ R = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\therefore$ 內切球半徑平方 $r^2 = \left[(\frac{1}{2},\frac{1}{2},0)-(\frac{1}{2},\frac{1}{6},\frac{\sqrt{2}}{6})\right]^2 = \frac{1}{6},\ r = \frac{\sqrt{6}}{6}$

$PF\ 2:$

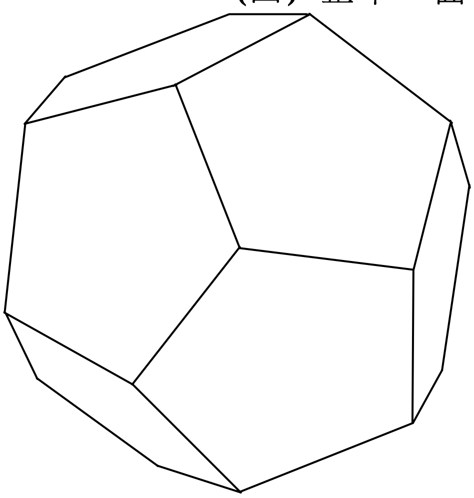
由體積分割法 (見上圖二、圖三)，令 $\overline{AH}$ 為正四角錐 $ABCDE$ 對於正方形 $BCDE$ 的高，由畢氏定理可求得 $\overline{AH} = \sqrt{(\frac{\sqrt{3}}{2})^2-(\frac{1}{2})^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

又將球心向各頂點連線，必可將正八面體 $ABCDEF$ 割成八個以原正三角形為底、內切球半徑為高的全等四面體 (如 四面體$OABC$)，而這八個四面體的體積和又等於原本正八面體之體積 (體積分割定理)

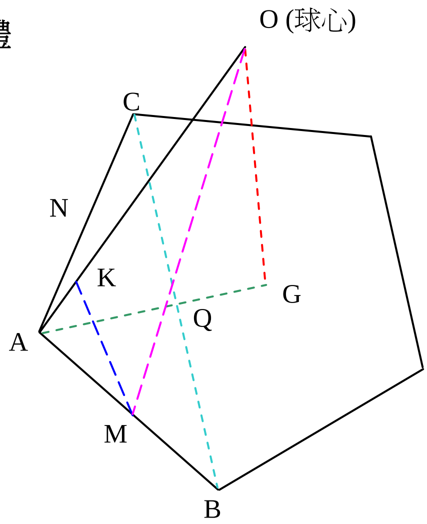
$$\therefore \text{正八面體}ABCDEF = (1\times\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{1}{3})\times 2 = \frac{\sqrt{2}}{3} = (\frac{\sqrt{3}}{4}\times r\times\frac{1}{3})\times 8 \quad \Rightarrow r = \frac{\sqrt{6}}{6}$$

$$\text{又}\left(\sqrt{R^2-(\frac{1}{2})^2}\right)^2 = r^2+(\frac{\sqrt{3}}{6})^2\ (\because R=\overline{OB},\ r=\overline{OK}) \quad \Rightarrow R = \sqrt{\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

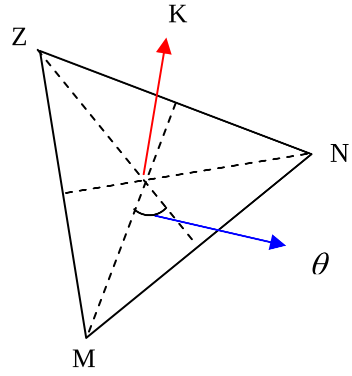
(四) 正十二面體



正十二面體



正十二面體其中的一面



共用頂點(A)之三邊中點所構成的正三角形

PF：

由於之前的解析幾何與體積分割定理在本證明皆有其操作上的困難，所以我們決定採取另一種方式處理

令 M, N 分別為 $\overline{AB}, \overline{AC}$ 中點; a 為正十二面體邊長

$$\because \frac{1}{2}\overline{BC} = \overline{AB}\cos\angle ABC,\ 而\ \angle ABC = \frac{\pi}{2} - \angle GAB = \frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi - \frac{2\pi}{5}}{2}\right) = \frac{\pi}{5}$$

$$\therefore \frac{1}{2}\overline{BC} = \overline{AB}\cos\frac{\pi}{5} \Rightarrow \frac{1}{2}\overline{MN} = \overline{AM}\cos\frac{\pi}{5}$$

又 $\because$ 共用任意頂點(如 A 點) 的邊有三個，將這三個邊中點兩兩連線，即產生一個邊長為原來1/2的正三角形；而 $\overline{OA} \perp$ 平面$E: MNZ$ (Z 為另一邊中點) 令 $K \in \overline{OA} \wedge K \in$ 平面$E: MNZ$

$$(\therefore \overline{MK} \perp \overline{OA}) \Rightarrow \overline{KM} = \frac{1}{2}\overline{MN}\csc\theta, \theta = \frac{\pi}{3} \quad \therefore \overline{KM} = \frac{1}{2}\overline{MN}\csc\frac{\pi}{3} = \overline{AM}\cos\frac{\pi}{5}\csc\frac{\pi}{3}$$

再者 $\because \Delta OAM \approx \Delta MAK \therefore \dfrac{\overline{OM}}{\overline{AM}} = \dfrac{\overline{MK}}{\overline{AK}} \Rightarrow \overline{OM} = \dfrac{\overline{MK} \times \overline{AM}}{\overline{AK}} = \dfrac{(\overline{AM}\cos\frac{\pi}{5}\csc\frac{\pi}{3}) \times \overline{AM}}{\sqrt{\overline{AM}^2 - \overline{MK}^2}}$

$$= \frac{\overline{AM}^2\cos\frac{\pi}{5}\csc\frac{\pi}{3}}{\sqrt{\overline{AM}^2 - \overline{AM}^2\cos^2\frac{\pi}{5}\csc^2\frac{\pi}{3}}} = \frac{\overline{AM}\cos\frac{\pi}{5}\csc\frac{\pi}{3}}{\sqrt{1-\cos^2\frac{\pi}{5}\csc^2\frac{\pi}{3}}},\ 又\ \overline{AM} = \frac{1}{2}a$$

$$\therefore \overline{OM} = \frac{1}{2}a\frac{\cos\frac{\pi}{5}\csc\frac{\pi}{3}}{\sqrt{1-\cos^2\frac{\pi}{5}\csc^2\frac{\pi}{3}}}$$

而我們所求(外接球半徑) $\Rightarrow R^2 = \overline{OA}^2 = \overline{OM}^2 + \overline{AM}^2 = \frac{1}{4}a^2\left(1+\frac{\cos^2\frac{\pi}{5}\csc^2\frac{\pi}{3}}{1-\cos^2\frac{\pi}{5}\csc^2\frac{\pi}{3}}\right)$

$$= \frac{1}{4}a^2\left(\frac{1}{1-\cos^2\frac{\pi}{5}\csc^2\frac{\pi}{3}}\right) \Rightarrow R = \frac{1}{2}a\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2\frac{\pi}{5}\csc^2\frac{\pi}{3}}}$$

又 $r = \overline{OG} = \overline{OM}\sqrt{1-\frac{\overline{GM}^2}{\overline{OM}^2}}$

$$= \left(\frac{1}{2}a\frac{\cos\frac{\pi}{5}\csc\frac{\pi}{3}}{\sqrt{1-\cos^2\frac{\pi}{5}\csc^2\frac{\pi}{3}}}\right)\times\left(\sqrt{1-\frac{\overline{AM}^2\cot^2\frac{\pi}{5}}{\overline{AM}^2\cos^2\frac{\pi}{5}\csc^2\frac{\pi}{3}\Big/1-\cos^2\frac{\pi}{5}\csc^2\frac{\pi}{3}}}\right)$$

$$= \left(\frac{1}{2}a\frac{\cos\frac{\pi}{5}\csc\frac{\pi}{3}}{\sqrt{1-\cos^2\frac{\pi}{5}\csc^2\frac{\pi}{3}}}\right)\times\left(\sqrt{\frac{\csc^2\frac{\pi}{3}-\csc^2\frac{\pi}{5}\left(1-\cos^2\frac{\pi}{5}\csc^2\frac{\pi}{3}\right)}{\csc^2\frac{\pi}{3}}}\right)$$

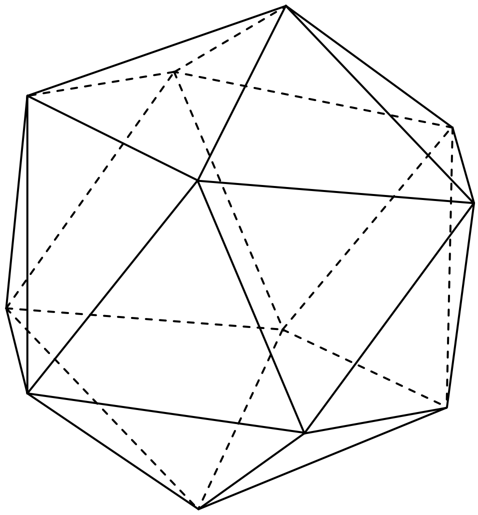
$$= \left(\frac{1}{2}a\frac{\cos\frac{\pi}{5}\csc\frac{\pi}{3}}{\sqrt{1-\cos^2\frac{\pi}{5}\csc^2\frac{\pi}{3}}}\right)\times\left(\sqrt{\frac{1-\csc^2\frac{\pi}{5}\left(\sin^2\frac{\pi}{3}-\cos^2\frac{\pi}{5}\right)}{1}}\right)$$

$$= \left(\frac{1}{2}a\frac{\cos\frac{\pi}{5}\csc\frac{\pi}{3}}{\sqrt{1-\cos^2\frac{\pi}{5}\csc^2\frac{\pi}{3}}}\right)\times\left(\sqrt{\frac{\sin^2\frac{\pi}{5}-\left(\sin^2\frac{\pi}{3}-\cos^2\frac{\pi}{5}\right)}{\sin^2\frac{\pi}{5}}}\right)$$

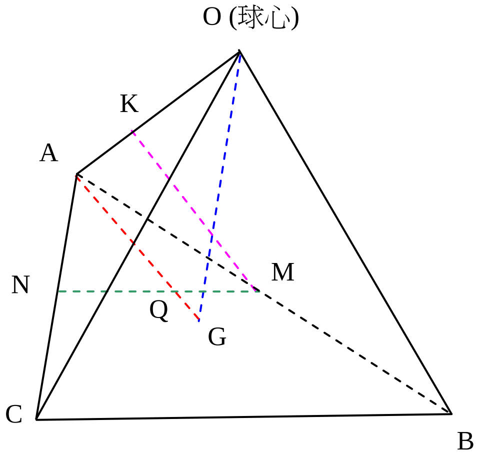
$$= \left(\frac{1}{2}a\frac{\cos\frac{\pi}{5}\csc\frac{\pi}{3}}{\sqrt{1-\cos^2\frac{\pi}{5}\csc^2\frac{\pi}{3}}}\right)\times\left(\sqrt{\frac{1-\sin^2\frac{\pi}{3}}{\sin^2\frac{\pi}{5}}}\right) = \left(\frac{1}{2}a\frac{\cos\frac{\pi}{5}\csc\frac{\pi}{3}}{\sqrt{1-\cos^2\frac{\pi}{5}\csc^2\frac{\pi}{3}}}\right)\times\left(\frac{\cos\frac{\pi}{3}}{\sin\frac{\pi}{5}}\right)$$

$$= \frac{1}{2}a\frac{\cot\frac{\pi}{5}\cot\frac{\pi}{3}}{\sqrt{1-\cos^2\frac{\pi}{5}\csc^2\frac{\pi}{3}}}$$

(五) 正二十面體



正二十面體



正二十面體其中一面
所構成的正三角形

PF :

由於以之前的解析幾何與體積分割定理在本證明皆有其操作上的困難，所以我們決定採用與正十二面體同一種處理方式

令 M, N 分別爲$\overline{AB}, \overline{AC}$ 中點; a爲正二十面體邊長

$$\because \frac{1}{2}\overline{MN} = \overline{AM}\cos\angle ABC, \text{而} \angle ABC = \frac{\pi}{2} - \angle GAB = \frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi - \frac{2\pi}{3}}{2}\right) = \frac{\pi}{3}$$

$$\therefore \frac{1}{2}\overline{MN} = \overline{AM}\cos\frac{\pi}{3}$$

又 $\because$ 共用任意頂點 (如A點) 的邊有五個，將這五個邊中點兩兩連線，即產生一個邊長爲原來1/2的正五邊形；而$\overline{OA} \perp$ 平面$E: MNXYZ$ (X, Y, Z爲另三邊中點) 令$K \in \overline{OA}$ $\wedge K \in$ 平面$E: MNXYZ$($\therefore \overline{MK} \perp \overline{OA}$) $\Rightarrow \overline{KM} = \frac{1}{2}\overline{MN}\csc\theta, \theta = \frac{\pi}{5}$(證法同正十二面體)

$$\therefore \overline{KM} = \frac{1}{2}\overline{MN}\csc\frac{\pi}{5} = \overline{AM}\cos\frac{\pi}{3}\csc\frac{\pi}{5}$$

再者 $\because \Delta OAM \approx \Delta MAK \therefore \frac{\overline{OM}}{\overline{AM}} = \frac{\overline{MK}}{\overline{AK}} \Rightarrow \overline{OM} = \frac{\overline{MK}\times\overline{AM}}{\overline{AK}} = \frac{(\overline{AM}\cos\frac{\pi}{3}\csc\frac{\pi}{5})\times\overline{AM}}{\sqrt{\overline{AM}^2 - \overline{MK}^2}}$

$$= \frac{\overline{AM}\cos\frac{\pi}{3}\csc\frac{\pi}{5}}{\sqrt{1-\cos^2\frac{\pi}{3}\csc^2\frac{\pi}{5}}}, \text{又} \overline{AM} = \frac{1}{2}a \therefore \overline{OM} = \frac{1}{2}a\frac{\cos\frac{\pi}{3}\csc\frac{\pi}{5}}{\sqrt{1-\cos^2\frac{\pi}{3}\csc^2\frac{\pi}{5}}}$$

而我們所求(外接球半徑)$\Rightarrow R^2=\overline{OA}^2=\overline{OM}^2+\overline{AM}^2=\frac{1}{4}a^2\left(1+\frac{\cos^2\frac{\pi}{3}\csc^2\frac{\pi}{5}}{1-\cos^2\frac{\pi}{3}\csc^2\frac{\pi}{5}}\right)$

$$=\frac{1}{4}a^2\left(\frac{1}{1-\cos^2\frac{\pi}{3}\csc^2\frac{\pi}{5}}\right)\Rightarrow R=\frac{1}{2}a\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2\frac{\pi}{3}\csc^2\frac{\pi}{5}}}$$

又$r=\overline{OG}=\overline{OM}\sqrt{1-\frac{\overline{GM}^2}{\overline{OM}^2}}$

$$=\left(\frac{1}{2}a\frac{\cos\frac{\pi}{3}\csc\frac{\pi}{5}}{\sqrt{1-\cos^2\frac{\pi}{3}\csc^2\frac{\pi}{5}}}\right)\times\left(\sqrt{1-\frac{\overline{AM}^2\cot^2\frac{\pi}{3}}{\overline{AM}^2\cos^2\frac{\pi}{3}\csc^2\frac{\pi}{5}\Big/1-\cos^2\frac{\pi}{3}\csc^2\frac{\pi}{5}}}\right)$$

$$=\left(\frac{1}{2}a\frac{\cos\frac{\pi}{3}\csc\frac{\pi}{5}}{\sqrt{1-\cos^2\frac{\pi}{3}\csc^2\frac{\pi}{5}}}\right)\times\left(\sqrt{\frac{\csc^2\frac{\pi}{5}-\csc^2\frac{\pi}{3}\left(1-\cos^2\frac{\pi}{3}\csc^2\frac{\pi}{5}\right)}{\csc^2\frac{\pi}{5}}}\right)$$

$$=\left(\frac{1}{2}a\frac{\cos\frac{\pi}{3}\csc\frac{\pi}{5}}{\sqrt{1-\cos^2\frac{\pi}{3}\csc^2\frac{\pi}{5}}}\right)\times\left(\sqrt{\frac{1-\sin^2\frac{\pi}{5}}{\sin^2\frac{\pi}{3}}}\right)=\left(\frac{1}{2}a\frac{\cos\frac{\pi}{3}\csc\frac{\pi}{5}}{\sqrt{1-\cos^2\frac{\pi}{3}\csc^2\frac{\pi}{5}}}\right)\times\left(\frac{\cos\frac{\pi}{5}}{\sin\frac{\pi}{3}}\right)$$

$$=\frac{1}{2}a\frac{\cot\frac{\pi}{3}\cot\frac{\pi}{5}}{\sqrt{1-\cos^2\frac{\pi}{3}\csc^2\frac{\pi}{5}}}$$

我們發現，若使用正十二面體的求法，亦可解決所有正多面體其內切球與外接球半徑。

令 M,N 分別爲$\overline{AB}$、$\overline{AC}$ 中點； a爲正多面體(邊形)邊長
 (A爲任意頂點，B、C 爲同一面上相鄰 A另外二頂點)

$$\because \frac{1}{2}\overline{MN} = \overline{AM}\cos\angle ABC, \text{而} \angle ABC = \frac{\pi}{2} - \angle GAB = \frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi - \frac{2\pi}{n}}{2}\right) = \frac{\pi}{n}$$

$$\therefore \frac{1}{2}\overline{MN} = \overline{AM}\cos\frac{\pi}{n}$$

又 $\because$ 共用任意頂點 (如 A點) 的邊有m條，將這m個正n邊中點兩兩連線，即產生一個邊常爲原來$1/2$的正m邊形；而$\overline{OA} \perp$ 平面$E: MNX_1X_2...X_m$

$(X_1, X_2, ..., X_m$爲另m邊中點) 令$K \in \overline{OA} \wedge K \in$ 平面$E: MNX_1X_2...X_m(\therefore \overline{MK} \perp \overline{OA})$

$$\Rightarrow \overline{KM} = \frac{1}{2}\overline{MN}\csc\theta, \theta = \frac{\pi}{m}$$

$$\therefore \overline{KM} = \frac{1}{2}\overline{MN}\csc\frac{\pi}{g} = \overline{AM}\cos\frac{\pi}{n}\csc\frac{\pi}{m}$$

再者$\because \Delta OAM \approx \Delta MAK \therefore \frac{\overline{OM}}{\overline{AM}} = \frac{\overline{MK}}{\overline{AK}}$

$$\Rightarrow \overline{OM} = \frac{\overline{MK}\times\overline{AM}}{\overline{AK}} = \frac{(\overline{AM}\cos\frac{\pi}{n}\csc\frac{\pi}{m})\times\overline{AM}}{\sqrt{\overline{AM}^2 - \overline{MK}^2}} = \overline{AM}\frac{\cos\frac{\pi}{n}\csc\frac{\pi}{m}}{\sqrt{1-\cos^2\frac{\pi}{n}\csc^2\frac{\pi}{m}}}, \text{又} \overline{AM} = \frac{1}{2}a$$

$$\therefore \overline{OM} = \frac{1}{2}a\frac{\cos\frac{\pi}{n}\csc\frac{\pi}{m}}{\sqrt{1-\cos^2\frac{\pi}{n}\csc^2\frac{\pi}{m}}}$$

而我們所求(外接球半徑) $\Rightarrow R_i^2=\overline{OA}^2=\overline{OM}^2+\overline{AM}^2=\dfrac{1}{4}a^2\left(1+\dfrac{\cos^2\dfrac{\pi}{n}\csc^2\dfrac{\pi}{m}}{1-\cos^2\dfrac{\pi}{n}\csc^2\dfrac{\pi}{m}}\right)$

$$=\frac{1}{4}a^2\left(\frac{1}{1-\cos^2\dfrac{\pi}{n}\csc^2\dfrac{\pi}{m}}\right)\Rightarrow R_i=\frac{1}{2}a\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2\dfrac{\pi}{n}\csc^2\dfrac{\pi}{m}}}$$

又 $r_i=\left(\dfrac{1}{2}a\dfrac{\cos\dfrac{\pi}{n}\csc\dfrac{\pi}{m}}{\sqrt{1-\cos^2\dfrac{\pi}{n}\csc^2\dfrac{\pi}{m}}}\right)\times\left(\sqrt{1-\dfrac{\overline{AM}^2\cot^2\dfrac{\pi}{n}}{\overline{AM}^2\cos^2\dfrac{\pi}{n}\csc^2\dfrac{\pi}{m}\Big/1-\cos^2\dfrac{\pi}{n}\csc^2\dfrac{\pi}{m}}}\right)$

$$=\left(\frac{1}{2}a\frac{\cos\dfrac{\pi}{n}\csc\dfrac{\pi}{m}}{\sqrt{1-\cos^2\dfrac{\pi}{n}\csc^2\dfrac{\pi}{m}}}\right)\times\left(\sqrt{\frac{\csc^2\dfrac{\pi}{m}-\csc^2\dfrac{\pi}{n}\left(1-\cos^2\dfrac{\pi}{n}\csc^2\dfrac{\pi}{m}\right)}{\csc^2\dfrac{\pi}{m}}}\right)$$

$$\left(\frac{1}{2}a\frac{\cos\dfrac{\pi}{n}\csc\dfrac{\pi}{m}}{\sqrt{1-\cos^2\dfrac{\pi}{n}\csc^2\dfrac{\pi}{m}}}\right)\times\left(\sqrt{\frac{1-\sin^2\dfrac{\pi}{m}}{\sin^2\dfrac{\pi}{n}}}\right)$$

$$=\left(\frac{1}{2}a\frac{\cos\dfrac{\pi}{n}\csc\dfrac{\pi}{m}}{\sqrt{1-\cos^2\dfrac{\pi}{n}\csc^2\dfrac{\pi}{m}}}\right)\times\left(\frac{\cos\dfrac{\pi}{m}}{\sin\dfrac{\pi}{n}}\right)$$

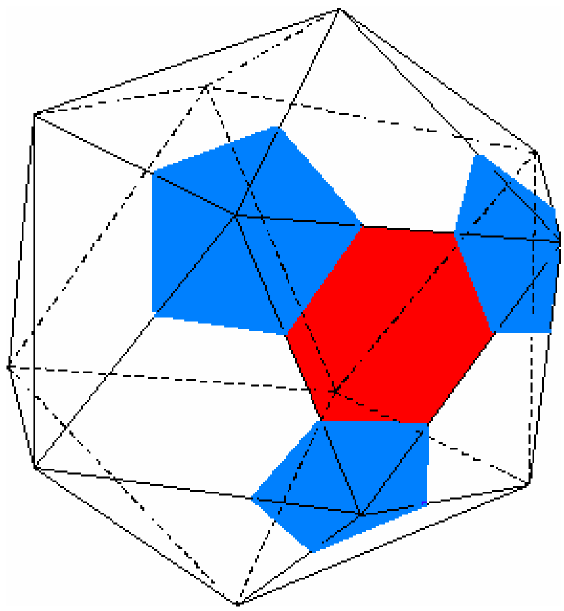
$$=\frac{1}{2}a\frac{\cot\dfrac{\pi}{n}\cot\dfrac{\pi}{m}}{\sqrt{1-\cos^2\dfrac{\pi}{n}\csc^2\dfrac{\pi}{m}}}$$

$\Rightarrow$ 即求得：$\dfrac{R_i}{r_i}=\tan\dfrac{\pi}{n}\tan\dfrac{\pi}{m}$

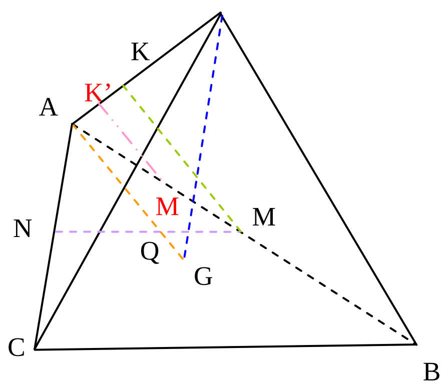
問題四、巴克球與其餘截角多面體是否有內切球與外接球？若有，其內切球、外接球半徑與邊長關係？

對於這問題，我們嘗試用直接破題的方式解決，但我們發現有我們無法克服的地方。於是，我們決定以反面思考的方式去處理。

觀察正二十面體，若我們將共用一頂點的五個正三角形其離頂點 1/3 邊長處連線，即可得到一個正五邊形(此正五邊形之邊長爲原正二十面體邊常之 1/3)。我們將正二十面體的十二個頂點(或說是二十個正三角形)都以此方法處理，即可得到一個邊長爲原正二十面體邊長的 1/3 的巴克球(因爲將三角形的三個角以上述方式截掉，會得到邊長爲原 1/3 的正六邊形)



我們先假設巴克球有內切球。由上圖可知，我們把巴克球視爲截角後的正二十面體，則其球心至正六邊形與正五邊形之重心的距離需相等。又因爲正二十面體內切球半徑爲球心至正三角形重心的距離；而正三角形被截成正六邊形時，其重心不變(且球心亦不變) ，所以正二十面體截角後所得的巴克球，其內切球半徑與原正二十面體之內切球半徑必等長。故只需求球心至正五邊形重心距離即可知巴克球是否有內切球



正二十面體其中一
面所構成的四面體

考慮：若球心至正五邊形重心之距離等於球心至正六邊形重心之距離，即可證明巴克球有內切球

令 M,N 分別爲$\overline{AB},\overline{AC}$中點; a 爲正二十面體邊長 ($\overline{AM'}=\frac{1}{3}a$)

$$\because \frac{1}{2}\overline{MN}=\overline{AM}\cos\angle ABC, 而\angle ABC=\frac{\pi}{2}-\angle GAB=\frac{\pi}{2}-(\frac{\pi-\frac{2\pi}{3}}{2})=\frac{\pi}{3}$$

$$\therefore \frac{1}{2}\overline{MN}=\overline{AM}\cos\frac{\pi}{3}$$

又 $\because$ 共用任意頂點 (如A點) 的邊有五個，將這五個邊中點兩兩連線，即產生一個邊常爲原來1/2的正五邊形；而$\overline{OA}\perp$平面$E:MNXYZ$ (X,Y,Z爲另三邊中點) 令

$$K\in\overline{OA}\wedge K\in 平面E:MNXYZ(\therefore \overline{MK}\perp\overline{OA})\Rightarrow \overline{KM}=\frac{1}{2}\overline{MN}\csc\theta,\theta=\frac{\pi}{5}$$

$$\therefore \overline{KM}=\frac{1}{2}\overline{MN}\csc\frac{\pi}{5}=\overline{AM}\cos\frac{\pi}{3}\csc\frac{\pi}{5}$$

$$再者\because \Delta OAM\approx\Delta MAK\ \therefore \frac{\overline{OM}}{\overline{AM}}=\frac{\overline{MK}}{\overline{AK}}\Rightarrow \overline{OM}=\frac{\overline{MK}\times\overline{AM}}{\overline{AK}}=\frac{(\overline{AM}\cos\frac{\pi}{3}\csc\frac{\pi}{5})\times\overline{AM}}{\sqrt{\overline{AM}^2-\overline{MK}^2}}$$

$$=\frac{\overline{AM}\cos\frac{\pi}{3}\csc\frac{\pi}{5}}{\sqrt{1-\cos^2\frac{\pi}{3}\csc^2\frac{\pi}{5}}}, 又\overline{AM}=\frac{1}{2}a\ \therefore \overline{OM}=\frac{1}{2}a\frac{\cos\frac{\pi}{3}\csc\frac{\pi}{5}}{\sqrt{1-\cos^2\frac{\pi}{3}\csc^2\frac{\pi}{5}}}$$

$$\because \overline{OK'}=r_5\wedge\overline{OK'}=\overline{OA}-\overline{AK'}=R\ (二十面體外接球半徑)-\frac{2}{3}\overline{AK}$$

$$而\ \overline{AK}=\frac{\overline{AM}^2}{\overline{OA}\,(R)}\Rightarrow \overline{OK'}=\overline{OA}-\frac{2}{3}\frac{\overline{AM}^2}{\overline{OA}}=\frac{3\overline{OA}^2-2\overline{AM}^2}{3\overline{OA}}$$

$$\Rightarrow 3\overline{OA}\cdot\overline{OK'}=3(\overline{AM}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2\frac{\pi}{3}\csc^2\frac{\pi}{5}}})^2-2\overline{AM}^2=\overline{AM}^2\cdot(\frac{3}{1-\cos^2\frac{\pi}{3}\csc^2\frac{\pi}{5}}-2)$$

$$\because \overline{OK'}=\overline{AM}\ \frac{(\frac{3}{1-\cos^2\frac{\pi}{3}\csc^2\frac{\pi}{5}}-2)}{3\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2\frac{\pi}{3}\csc^2\frac{\pi}{5}}}}\neq\overline{AM}\ \frac{\cot\frac{\pi}{3}\cot\frac{\pi}{5}}{\sqrt{1-\cos^2\frac{\pi}{3}\csc^2\frac{\pi}{5}}}=r$$

故得：(1) 巴克球有外接球卻無內切球

由上述證明可得知巴克球無內切球，故我們決定討論其球心至各面重心距離與至各頂點距離的關係，以求得巴克球之最大內含球・

令球心至正六邊形重心距離為r_6，至正五邊形重心距離為r_5，至頂點距離為R_b

由上述可知：($\overline{AM}$ 為原正二十面體邊長$1\!\!\diagup\!\!2 \Rightarrow$ 即 $\frac{1}{2}a$)

$$\begin{cases} r_6 = \dfrac{a}{2}\dfrac{\cot\frac{\pi}{3}\cot\frac{\pi}{5}}{\sqrt{1-\cos^2\frac{\pi}{3}\csc^2\frac{\pi}{5}}} \\ r_5 = \dfrac{a}{2}\dfrac{\left(\dfrac{3}{1-\cos^2\frac{\pi}{3}\csc^2\frac{\pi}{5}}-2\right)}{\dfrac{3}{\sqrt{1-\cos^2\frac{\pi}{3}\csc^2\frac{\pi}{5}}}} \end{cases} \Rightarrow \frac{r_6}{r_5} = \frac{\frac{0.79465}{0.52573}}{\frac{8.85410}{5.70634}} = \frac{1.511}{1.551} < 1$$

$\therefore$ 我們得知：到正六邊形重心之距離為半徑(r_6)所構成的球較小 $\Leftrightarrow$

$\because$ 巴克球有外接球 $\therefore$若我們能證明其外接球半徑與最大內含球之半徑比較其他正多面體更接近"1"，即可證明巴克球較接近球。

巴克球外接球半徑：

$$R_b = \sqrt{(r_b)^2 + (\frac{a}{3})^2} = \sqrt{\frac{a^2\cdot\cot^2\frac{\pi}{3}\cot^2\frac{\pi}{5}}{4\cdot(1-\cos^2\frac{\pi}{3}\csc^2\frac{\pi}{5})} + \frac{a^2}{9}} = \frac{a}{2}\sqrt{\frac{\cot^2\frac{\pi}{3}\cot^2\frac{\pi}{5}}{(1-\cos^2\frac{\pi}{3}\csc^2\frac{\pi}{5})} + \frac{4}{9}}$$

$$\Rightarrow \frac{R_b}{r_b} = \frac{1.652}{1.511} = 1.093 < \frac{R_{20}}{r_{20}} = \tan\frac{\pi}{3}\tan\frac{\pi}{5} = 1.258$$

故得：(2) 巴克球較正多面體更接近球

我們發現：類似"巴克球"的這些 "截角多面體"都可以用同樣的方式導出其最大內含球與外接球公式。

設截角前的正多面體是由正n邊形組成且m個邊共用一個頂點、每邊邊長為 a，設截去長度x、截後長度剩y，而截後原面變為正 $2n$ 邊形，故可得：

$$\cos(\pi - \frac{2\pi}{n}) = \frac{2x^2 - y^2}{2x^2} \Rightarrow y = 2 \cdot \cos\frac{\pi}{n} \cdot x$$

$$\because 2x + y = a \therefore a = \left(1 + \frac{1}{\cos\frac{\pi}{n}}\right) \cdot y \Rightarrow y = \left(\frac{\cos\frac{\pi}{n}}{1 + \cos\frac{\pi}{n}}\right) \cdot a$$

$$\Rightarrow R_i^c = \sqrt{(r_i)^2 + \left(\frac{a}{2} \cdot \cot\frac{\pi}{n}\right)^2 + \left(\frac{y}{2}\right)^2}$$

(令 R_i^c 為截角多面體的外接球半徑，r_i 表原正多面體內切球半徑)

$\because$ 截角多面體有外接球　$\therefore$ 由球心至正m邊形之距離可得：

$$\left(r_i^m\right)^2 = \left(R_i^c\right)^2 - \left(\frac{y}{2} \cdot \csc\frac{\pi}{m}\right)^2 = (r_i)^2 + \left(\frac{a}{2} \cdot \cot\frac{\pi}{n}\right)^2 + \left(\frac{y}{2}\right)^2 - \left(\frac{y}{2} \cdot \csc\frac{\pi}{m}\right)^2$$

$$= (r_i)^2 + \left(\frac{a}{2} \cdot \cot\frac{\pi}{n}\right)^2 + \frac{y^2}{4} \cdot \left(1 - \csc^2\frac{\pi}{m}\right) = (r_i)^2 + \left(\frac{a}{2} \cdot \cot\frac{\pi}{n}\right)^2 - \frac{y^2}{4} \cdot \left(\cot^2\frac{\pi}{m}\right)$$

$$= (r_i)^2 + \left(\frac{a}{2} \cdot \cot\frac{\pi}{n} + \frac{y}{2} \cdot \cot\frac{\pi}{m}\right) \cdot \left(\frac{y}{2}\right) \cdot \left(\left(\frac{1}{\cos\frac{\pi}{n}} + 1\right) \cdot \cot\frac{\pi}{n} - \cot\frac{\pi}{m}\right)$$

(i) $n \geq m \Rightarrow \because \cot\theta$ 為減函數$(0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2})$　$\therefore r_i^m > r_i$

(ii) $n < m \Rightarrow (n, m) = (3,4) \vee (3,5)$

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{\cos\frac{\pi}{n}} + 1\right) \cdot \cot\frac{\pi}{n} - \cot\frac{\pi}{m} = \sqrt{3} - \cot\frac{\pi}{m} = \cot\frac{\pi}{6} - \cot\frac{\pi}{m} > 0$$

故 $r_i^m > r_i \Rightarrow$ 取r_i為r_i^c

即取 R_i^c 為截角多面體的外接球半徑，r_i^c 為截角多面體的最大內含球半徑

由上面的討論可知：截角多面體是以$(2n,2n,m)$共用一頂點的立體圖形。倘若我們在截角時截取原來邊長的$1/2$，又是怎樣的立體圖形？

$\because$ 截去邊長為原來$1/2$，故兩個角共截去所有邊長 $\Rightarrow$ 即共用一頂點的面數不再為三個面$(2n,2n,m)$，而是(n,n,m,m)，我們暫稱此類圖形為"截盡角正多面體"。

其中截盡角正四面體較為特殊

$\because$ 其$n=m=3$ $\therefore$ 皆截$1/2$邊長後產生的新圖形為$(3,3,3,3)$，即正八面體。

而截盡角正六面體與截盡角正八面體，雖其(n,m)分別為$(3,4)$與$(3,4)$，但因新圖形為(n,n,m,m) $\Rightarrow$ 即兩者皆為$(3,3,4,4)$；同理，截盡角正十二面體與截盡角正二十面體所產生的新圖形皆為$(3,3,5,5)$。

而其內球與外接球半徑的求法，我們可比照之前截角正多面體的做法。

$(3,3,4,4) \Rightarrow \because$ 取正六面體與正八面體皆可截成 $\therefore$ 我們先取正六面體

$\because$ 我們取原正六面體，故其 $r_4^6 = r_6$

(在此r_i^j表正j面體內切球球心至截後正i邊形距離)

又 $R_6^a = \sqrt{(r_6)^2 + (\frac{a}{2}\cdot\cot\frac{\pi}{4})^2} = \frac{a}{\sqrt{2}}$

而 $r_3^6 = \sqrt{(R_6^a)^2 - (\frac{a}{2\sqrt{2}}\cdot\csc\frac{\pi}{3})^2} = \frac{a}{\sqrt{3}} > \frac{a}{2} = r_4^6$

$\therefore$ 取 $r_4^6 = r_6 = r_6^a \Rightarrow \frac{R_6^a}{r_6^a} = \sqrt{2}$

而 $r_3^8 = r_8 = \frac{a}{\sqrt{6}}$，$R_8^a = \sqrt{(r_8)^2 + (\frac{a}{2}\cdot\cot\frac{\pi}{3})^2} = \frac{a}{2}$，$r_4^8 = \sqrt{(R_8^a)^2 - (\frac{a}{4}\cdot\csc\frac{\pi}{4})^2} = \frac{a}{2\sqrt{2}}$

$\because$ $r_4^8 = \frac{a}{2\sqrt{2}} < \frac{a}{\sqrt{6}} = r_3^8$ $\therefore$ 取 r_4^8 為 $r_8^a \Rightarrow \frac{R_8^a}{r_8^a} = \sqrt{2} = \frac{R_6^a}{r_6^a}$

$(3,3,5,5) \Rightarrow \because$ 取正十二面體與正二十面體皆可截成 $\therefore$ 我們先取正十二面體

$\because$ 我們取原正十二面體來截，故其 $r_5^{12} = r_{12} = 1.11352$

又 $R_{12}^a = \sqrt{(r_{12})^2 + (\frac{a}{2}\cdot\cot\frac{\pi}{5})^2} = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\cdot\frac{\cot\frac{\pi}{5}\cot\frac{\pi}{3}}{\sqrt{1-\cos^2\frac{\pi}{5}\csc^2\frac{\pi}{3}}}\right)^2 + (\frac{a}{2}\cdot\cot\frac{\pi}{5})^2} = 1.30902$

而截出正三角形邊長 $= a\cdot\cos\frac{\pi}{5}$

$\Rightarrow r_3^{12} = \sqrt{(R_{12}^a)^2 - (\frac{a}{2}\cdot\cos\frac{\pi}{5}\cdot\csc\frac{\pi}{3})^2} = 1.22285 > 1.11352 = r_4^{12}$

$\therefore$ 取 $r_4^{12} = r_{12} = r_{12}^a \Rightarrow \frac{R_{12}^a}{r_{12}^a} = 1.176$

而 $r_3^{20} = r_{20} = \frac{1}{2}a\frac{\cot\frac{\pi}{3}\cot\frac{\pi}{5}}{\sqrt{1-\cos^2\frac{\pi}{3}\csc^2\frac{\pi}{5}}} = 0.75576$

$R_{20}^a = \sqrt{(r_{20})^2 + (\frac{a}{2}\cdot\cot\frac{\pi}{3})^2} = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\cdot\frac{\cot\frac{\pi}{3}\cot\frac{\pi}{5}}{\sqrt{1-\cos^2\frac{\pi}{3}\csc^2\frac{\pi}{5}}}\right)^2 + (\frac{a}{2}\cdot\cot\frac{\pi}{3})^2} = 0.80902$

$r_5^{20} = \sqrt{(R_{20}^a)^2 - (\frac{a}{4}\cdot\csc\frac{\pi}{5})^2} = 0.68819$

$\because\ r_5^{20} = 0.68819 < 0.75576 = r_3^{20}$ $\therefore$ 取 $r_5^{20} = r_{20}^a \Rightarrow \frac{R_{20}^a}{r_{20}^a} = 1.176$

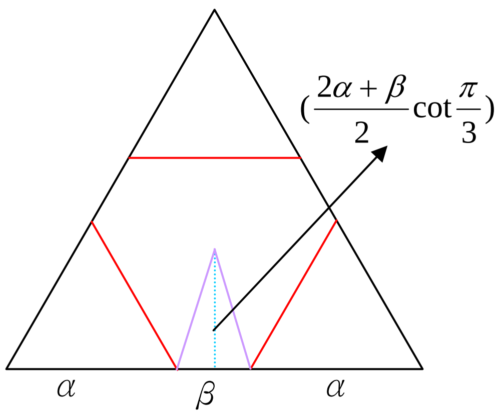
問題五、”特化截角多面體” 其內切球、外接球半徑與邊長關係？

之前巴克球是取正二十面體 $1/3$ 邊長截成的。若今取不同比例，勢必可找到一種狀況使得新的正五邊形與原正二十面體的內切球 (由 r_6 爲半徑的球) 相切 $\Rightarrow$ 此時內切球半徑不變，且亦有外接球半徑，我們稱此時的巴克球爲 "特化巴克球"。

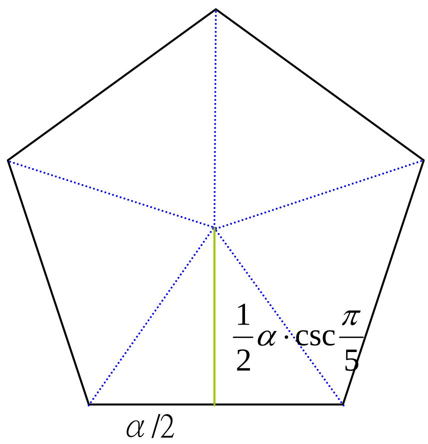
令 "特化巴克球"其外接球半徑 R_s、內切球半徑 r_s、$a = 2\alpha + \beta$

(α 爲截去長度，β 爲剩餘長度)

$$\begin{cases} R_s = \sqrt{(r_s)^2 + [(\frac{\beta}{2})^2 + (\frac{2\alpha+\beta}{2} \cdot \cot\frac{\pi}{3})^2]} \\ r_s = r_b = r_6 = r \end{cases}$$



圖一 (正二十面體的面)



圖二 (特化截面)

由圖一與圖二可得聯立：

$$\begin{cases} r_s^2 + \frac{\beta^2}{4} + \frac{4\alpha^2 + 4\alpha\beta + \beta^2}{4} \cdot \cot^2\frac{\pi}{3} = R_s^2 \\ r_s^2 + \frac{\alpha^2}{4} \cdot \csc^2\frac{\pi}{5} = R_s^2 \end{cases} \Rightarrow \frac{\beta^2}{4} + \frac{4\alpha^2 + 4\alpha\beta + \beta^2}{4} \cdot \cot^2\frac{\pi}{3} = \frac{\alpha^2}{4} \cdot \csc^2\frac{\pi}{5}$$

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{-2\cot^2\frac{\pi}{3} - \sqrt{\csc^2\frac{\pi}{5}(1+\cot^2\frac{\pi}{3}) - 4\cot^2\frac{\pi}{3}}}{4\cot^2\frac{\pi}{3} - \csc^2\frac{\pi}{5}}$$

$$\Rightarrow a = 2\alpha + \beta = (2 + \frac{4\cot^2\frac{\pi}{3} - \csc^2\frac{\pi}{5}}{-2\cot^2\frac{\pi}{3} - \sqrt{\csc^2\frac{\pi}{5}(1+\cot^2\frac{\pi}{3}) - 4\cot^2\frac{\pi}{3}}}) \cdot \alpha$$

$$\because\ r_s^2+\frac{\alpha^2}{4}\cdot\csc^2\frac{\pi}{5}=R_s^2$$

$$\therefore R_s=\frac{a}{2}\sqrt{\frac{\cot^2\frac{\pi}{3}\cot^2\frac{\pi}{5}}{1-\cos^2\frac{\pi}{3}\csc^2\frac{\pi}{5}}+\frac{\csc^2\frac{\pi}{5}}{\left(2+\frac{4\cot^2\frac{\pi}{3}-\csc^2\frac{\pi}{5}}{-2\cot^2\frac{\pi}{3}-\sqrt{\csc^2\frac{\pi}{5}(1+\cot^2\frac{\pi}{3})-4\cot^2\frac{\pi}{3}}}\right)^2}}$$

$$故\ \frac{R_s}{r_s}=\frac{\sqrt{\frac{\cot^2\frac{\pi}{3}\cot^2\frac{\pi}{5}}{1-\cos^2\frac{\pi}{3}\csc^2\frac{\pi}{5}}+\frac{\csc^2\frac{\pi}{5}}{\left(2+\frac{4\cot^2\frac{\pi}{3}-\csc^2\frac{\pi}{5}}{-2\cot^2\frac{\pi}{3}-\sqrt{\csc^2\frac{\pi}{5}(1+\cot^2\frac{\pi}{3})-4\cot^2\frac{\pi}{3}}}\right)^2}}}{\left(\frac{\cot\frac{\pi}{3}\cot\frac{\pi}{5}}{\sqrt{1-\cos^2\frac{\pi}{3}\csc^2\frac{\pi}{5}}}\right)}$$

$$=\sqrt{1+\frac{\frac{\csc^2\frac{\pi}{5}}{\left(2+\frac{4\cot^2\frac{\pi}{3}-\csc^2\frac{\pi}{5}}{-2\cot^2\frac{\pi}{3}-\sqrt{\csc^2\frac{\pi}{5}(1+\cot^2\frac{\pi}{3})-4\cot^2\frac{\pi}{3}}}\right)^2}}{\frac{\cot^2\frac{\pi}{3}\cot^2\frac{\pi}{5}}{1-\cos^2\frac{\pi}{3}\csc^2\frac{\pi}{5}}}}$$

我們發現：類似"特化巴克球"的這些 "特化截角多面體"都可以用同樣的方式導出其內切球與外接球公式。

設截角前的正多面體是由正n邊形組成且m個邊共用一個頂點、每邊邊長為 a，令α為截去長度，β為剩餘長度 ($a = 2\cdot\alpha+\beta$)，γ為截出面邊長，則：

$$\gamma = 2\cdot\cos\frac{\pi}{n}\cdot\alpha \quad \wedge\ R_i^s = \sqrt{(r_i)^2 + \left[\left(\frac{\beta}{2}\right)^2 + \left(\frac{2\alpha+\beta}{2}\cdot\cot\frac{\pi}{n}\right)^2\right]}$$

由球心至兩種截角後的多邊形之距離可得聯立：

$$\begin{cases} r_i^2 + \dfrac{\beta^2}{4} + \dfrac{4\alpha^2+4\alpha\beta+\beta^2}{4}\cdot\cot^2\dfrac{\pi}{n} = \left(R_i^s\right)^2 \\ r_i^2 + \alpha^2\cdot\cos^2\dfrac{\pi}{n}\cdot\csc^2\dfrac{\pi}{m} = \left(R_i^s\right)^2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \beta^2 + \left(4\alpha^2+4\alpha\beta+\beta^2\right)\cdot\cot^2\frac{\pi}{n} = 4\cdot\alpha^2\cdot\cos^2\frac{\pi}{n}\cdot\csc^2\frac{\pi}{m}$$

$$\Rightarrow \left(4\cot^2\frac{\pi}{n} - 4\cos^2\frac{\pi}{n}\csc^2\frac{\pi}{m}\right)\cdot\alpha^2 + 4\cot^2\frac{\pi}{n}\cdot\alpha\beta + \csc^2\frac{\pi}{n}\cdot\beta^2 = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\alpha}{\beta} = \frac{-\cot^2\frac{\pi}{n} - \cot\frac{\pi}{n}\cdot\cot\frac{\pi}{m}}{2\cdot\cos^2\frac{\pi}{n}\cdot\left(\csc^2\frac{\pi}{n} - \csc^2\frac{\pi}{m}\right)}$$

$$\Rightarrow a = 2\alpha+\beta = \left[2 + \frac{2\cdot\cos^2\frac{\pi}{n}\cdot\left(\csc^2\frac{\pi}{n} - \csc^2\frac{\pi}{m}\right)}{-\cot^2\frac{\pi}{n} - \cot\frac{\pi}{n}\cdot\cot\frac{\pi}{m}}\right]\cdot\alpha$$

$$\Rightarrow \alpha = \frac{a}{2\cdot\left(1 + \dfrac{\cos^2\frac{\pi}{n}\cdot\left(\csc^2\frac{\pi}{n} - \csc^2\frac{\pi}{m}\right)}{-\cot^2\frac{\pi}{n} - \cot\frac{\pi}{n}\cdot\cot\frac{\pi}{m}}\right)}$$

討論：當 $n \geq m \Rightarrow \because \cot\frac{\pi}{n} + \cot\frac{\pi}{m}$ 與 $\csc\frac{\pi}{n} - \csc\frac{\pi}{m}$ 同號 $(\rightarrow\leftarrow)$

$$\because\ r_i^2+\alpha^2\cdot\cos^2\frac{\pi}{n}\cdot\csc^2\frac{\pi}{m}=\left(R_i^s\right)^2$$

$$\therefore R_i=\frac{a}{2}\cdot\sqrt{\frac{\cot^2\frac{\pi}{n}\cot^2\frac{\pi}{m}}{1-\cos^2\frac{\pi}{n}\csc^2\frac{\pi}{m}}+\frac{\cos^2\frac{\pi}{n}\cdot\csc^2\frac{\pi}{m}}{\left(1+\frac{\cos^2\frac{\pi}{n}\cdot\left(\csc^2\frac{\pi}{n}-\csc^2\frac{\pi}{m}\right)}{-\cot^2\frac{\pi}{n}-\cot\frac{\pi}{n}\cdot\cot\frac{\pi}{m}}\right)^2}}$$

故 $\frac{R_i}{r_i}$

$$=\frac{\sqrt{\frac{\cot^2\frac{\pi}{n}\cot^2\frac{\pi}{m}}{1-\cos^2\frac{\pi}{n}\csc^2\frac{\pi}{m}}+\frac{\cos^2\frac{\pi}{n}\cdot\csc^2\frac{\pi}{m}}{\left(1+\frac{\cos^2\frac{\pi}{n}\cdot\left(\csc^2\frac{\pi}{n}-\csc^2\frac{\pi}{m}\right)}{-\cot^2\frac{\pi}{n}-\cot\frac{\pi}{n}\cdot\cot\frac{\pi}{m}}\right)^2}}}{\left(\frac{\cot\frac{\pi}{n}\cot\frac{\pi}{m}}{\sqrt{1-\cos^2\frac{\pi}{n}\csc^2\frac{\pi}{m}}}\right)}$$

$$=\sqrt{1+\frac{\frac{\cos^2\frac{\pi}{n}\cdot\csc^2\frac{\pi}{m}}{\left(1+\frac{\cos^2\frac{\pi}{n}\cdot\left(\csc^2\frac{\pi}{n}-\csc^2\frac{\pi}{m}\right)}{-\cot^2\frac{\pi}{n}-\cot\frac{\pi}{n}\cdot\cot\frac{\pi}{m}}\right)^2}}{\frac{\cot^2\frac{\pi}{n}\cot^2\frac{\pi}{m}}{1-\cos^2\frac{\pi}{n}\csc^2\frac{\pi}{m}}}}$$

陸、研究結果

一、在限制對於每個頂點所接的正多面體格局都是一樣的情況下，正多邊形可圍成的立體圖形有(3,6,6)、(3,8,8)、(3,10,10,)、(4,6,6)、(4,6,8)、(4,6,10)、(5,6,6)、(3,3,4,4)、(3,3,5,5)、(3,4,4,4)、(3,4,4,5)、(3,3,3,3,4)、(3,3,3,3,5)，而它們的頂點數、面數、邊數及各多邊形面數如下：

(n)	V	E	F、各多邊形面數
(5,6,6)	60	90	F5=12, F6=20, F=32
(4,6,10)	120	180	F4=30, F6=20, F10=12, F=62
(4,6,8)	48	72	F4=12, F6=8, F8=6, F=26
(4,6,6)	24	36	F4=6, F6=8, F=14
(3,10,10)	60	90	F3=20, F10=12, F=32
(3,8,8)	24	36	F3=8, F8=6, F=14
(3,6,6)	12	18	F3=4, F6=4, F=8
(3,4,4,5)	60	120	F3=20, F4=30, F5=12, F=62
(3,4,4,4)	24	48	F3=8, F4=18, F=26
(3,3,5,5)	30	60	F3=20, F5=12, F=32
(3,3,4,4)	12	24	F3=8, F4=6, F=14
(3,3,3,3,4)	24	60	F3=32, F4=6, F=38
(3,3,3,3,5)	60	150	F3=80, F5=12, F=92

二、正多面體、截角多面體與特化截角多面體其內切、外接求半徑比：

正四面體： $\frac{R_4}{r_4} = 3.000$

正六面體： $\frac{R_6}{r_6} = 1.732$

正八面體： $\frac{R_8}{r_8} = 3.000$

正十二面體： $\frac{R_{12}}{r_{12}} = 1.258$

正二十面體： $\frac{R_{20}}{r_{20}} = 1.258$

截角四面體： $\frac{R_4^c}{r_4^c} = 1.915$

截角六面體： $\frac{R_6^c}{r_6^c} = 1.474$

截角八面體： $\frac{R_8^c}{r_8^c} = 1.291$

截角十二面體： $\frac{R_{12}^c}{r_{12}^c} = 1.193$

截角二十面體： $\frac{R_{20}^c}{r_{20}^c} = 1.093$ (巴克球)

截盡角六面體： $\frac{R_6^a}{r_6^a} = 1.414$

截盡角八面體： $\frac{R_8^a}{r_8^a} = 1.414$

截盡角十二面體： $\frac{R_{12}^a}{r_{12}^a} = 1.176$

截盡角二十面體： $\frac{R_{20}^a}{r_{20}^a} = 1.176$

特化截角四面體： $\frac{R_4^s}{r_4^s} = *.***$(無解)

特化截角六面體： $\frac{R_6^s}{r_6^s} = *.***$(無解)

特化截角八面體： $\frac{R_8^s}{r_8^s} = 1.239$

特化截角十二面體： $\frac{R_{12}^s}{r_{12}^s} = *.***$(無解)

特化截角二十面體： $\frac{R_{20}^s}{r_{20}^s} = 1.084$

柒、討論

一、原本處理這個題目時曾想過：巴克球是由兩種正多邊形拼成，會不會有三種、四種、五種……正多邊形拼成的多面體呢？在我們所限制的情況下，最多只能找到由三種正多邊形所組成的多面體。而不能由四種正多邊形組成的原因是因爲如果用四種正多邊形共用一頂點的話，其內角和最小的組合是(3,4,5,6)，但內角和很明顯超過 360°，而五個多邊形圍成一個頂點的狀況就更不用說了。

二、我們在求特化截角多面體的內切球與外接球半徑比值時，發現有些情況是不合理的(即長度出現負值)·其原因爲截角時總截去長度大於等於原邊長，以致產生矛盾·其詳細證明請看附錄四至附錄六·

三、在”研究結果 二”中，我們很清楚的看到”特化截角多面體”較”巴克球”更接近球體。其原因在於，對於同樣的正二十面體而言，”特化截角二十面體”所截去的長度大於巴克球(截角二十面體)所截去的長度。因爲內切球(內球)半徑不變，而截去的長度越長會使外接球半徑越短，故”特化截角二十面體”較”截角二十面體”更接近球體。而這個結論，明顯的推翻了之前在數學刊物上所看到的內容。

四、我們用截角的方式處理正多面體得到五個”截角多面體”，其原圖形都是由三個面共用一頂點。我們發現，當我們截角時截去的邊長度等於原邊長的一半，會出現另外一種多面體，即所謂的”截盡角多面體”而這種多面體是由四個面共用一頂點所組成的。然而，對於其他的圖形，我們該如何截成？又他們是否真是由”截角”這種方式所構成的？而他們是否較”特化截角多面體”更接近球？由於時間關係，這些都將列入我們往後的探討目標。

捌、參考資料

一、高中數學課本第三冊、數學乙上冊

二、趙文敏著 幾何學辭典 九章出版社

三、 不貞市郎著 幾何學辭典 九章出版社

中華民國第四十五屆中小學科學展覽會
評　　語

高中組 數學科

最佳(鄉土)教材獎

040417
多面體的探討(巴克球為最接近球的多面體?)

國立花蓮高級中學

評語：
1. 本研究為相當不錯高中教材之推廣及延伸
2. 有關問題與 Johnson Solids 之探討有密切的關係。