中華民國第四十五屆中小學科學展覽會
作品說明書

高中組 數學科

040416

發現凱特蘭數

國立桃園高級中學

作者姓名：
高一 賴胤竹 高一 呂宥儒 高一 陳均白
高一 陳文浚

指導老師：
郭儒鍾 陳清風

中華民國第 45 屆中小學科學展覽會

作品說明書

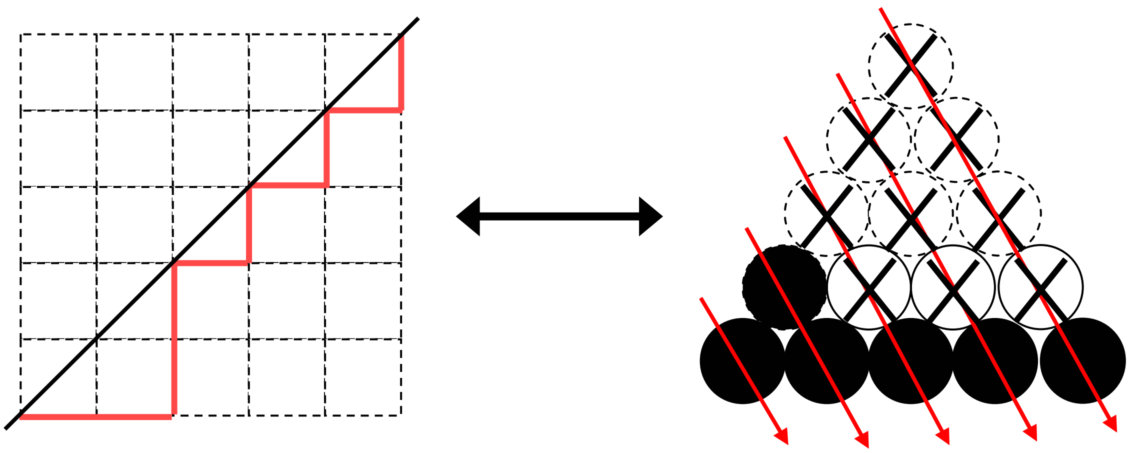
科別：數學科

組別：高中

作品名稱：發現凱特蘭數

關鍵詞：catalan、球塔、數列

編號：



壹、摘要

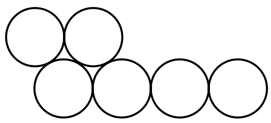
一、　本研究的最初來源系出自 *Crux Mathematicorum* 的第 1367 題, 原題目為：

在 n 個並列圓的圖形上，放置數個相同的圓，放置的要求為：

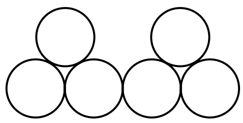
(1) 為了使圖形中的圓穩固，上一列的圓必須與下一列的兩個圓相切。

(2) 任一列的圓必須相連。

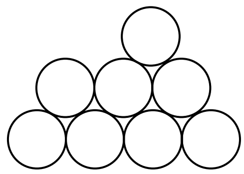
例如：圖一與圖二是不被允許的，而圖三則符合要求。



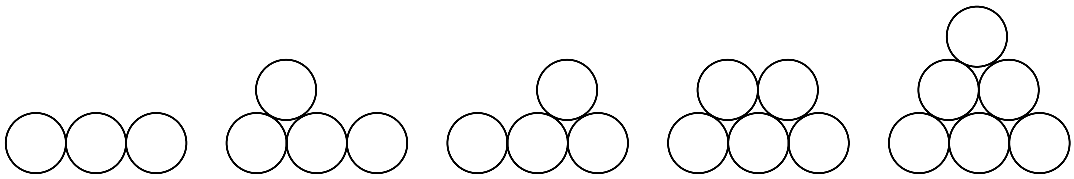
圖一



圖二



因此，當 $n = 3$ 時，共有下列 5 種不同的方式。



試問：令 a_n 為底座是 n 個並列圓的放置的方法數，求 a_n 的一般公式。

由於翻譯時漏了第(2)個條件，竟意外的得到一個美妙的結果：

在此問題中,

若要求相連，則得到費氏數(***Fibonacci Numbers***)；

若要求可不相連，則得到凱特蘭數(***Catalan Numbers***)。

即

(1) 要求相連時（n 階圓塔），放置方法數的一般項

$$a_n=\frac{1}{\sqrt{5}}[(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^{2n-1}-(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^{2n-1}]$$；

(2) 要求可不相連時（n 階廣義圓塔），放置方法數的一般項

$$b_n=\frac{C_n^{2n}}{n+1}$$。

二、 接著將底座改成放置在平面上的球（有正方形放置或正三角形擺放兩種），

(1) 正方形放置的（方形球塔），其放置方法數的遞迴式為

$c_1 = 1$, $c_2 = 2$, $c_3 = 7$, $c_n= 4c_{n-1} - 2\ c_{n-2} + c_{n-3}, (n \ge 4)$

(2) 正三角形放置的（三角球塔），其放置方法數的遞迴式為

$$d_1=1, d_2=2, d_3=7, d_n=4d_{n-1}-2d_{n-2}+d_{n-3}+d_{\left[\frac{n}{2}\right]}, (n\ge 4)$$

其中$[x]$為高斯符號。

貳、研究動機

老師教完遞迴數列後，給我們練習一題『圓塔』的問題，思考一週後仍沒有具體成果，經老師加一個條件後才解出。解出之後老師才爆出內幕，原來是老師從原文書翻譯過來時，把『任一列的圓必須相連』這個條件漏掉了。雖然真相如此，但心中卻出現了一個疑問：『少了一個條件是否也有令人驚喜的答案呢？』，於是我們開始招兵買馬，一同為解決這個問題而奮鬥，並進而希望將其推廣到『球塔』。

參、研究目的

希望能找出『n 階圓塔』及『n 階廣義圓塔』的一般式，並接著將底座改成放置在平面上的球（有正方形放置或正三角形擺放兩種），進而找出『方形球塔』

及『三角球塔』的一般式。

肆、研究設備與器材

紙、筆、電腦與網球。

伍、研究過程

一、 n 階圓塔

(一) 遊戲規則：

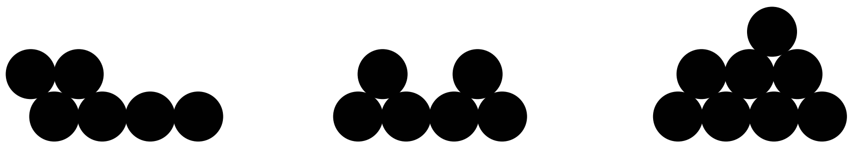
在 n 個並列圓的圖形上方，放置數個相同的圓，放置的要求為：

1. 為了使圖形中的圓穩固，上一列的圓必須與下一列的兩個圓相切。

2. 任一列的圓必須相連。

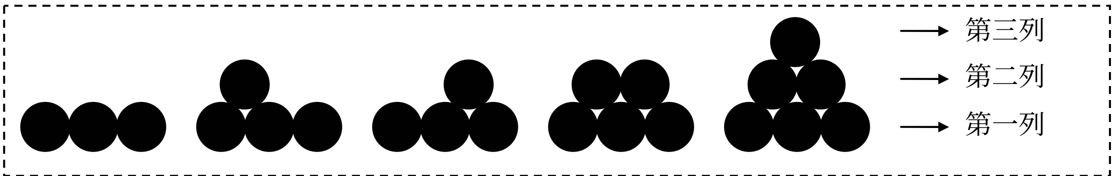
並將符合上述條件的圖形稱為『n 階圓塔』。

例如：圖一與圖二是不被允許的，而圖三則符合要求。



圖一　　　圖二　　　圖三

因此，當 $n = 3$ 時，有下列 5 種不同的『3 階圓塔』。

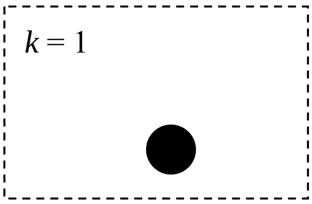


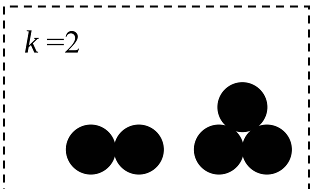
接下來我們要探討的是：『n 階圓塔』的個數有多少呢？

(二) 推導過程：

首先我們以『a_k』表示『k 階圓塔』的個數。 $(k \in N)$

3. 顯然 $a_1 = 1, a_2 = 2$

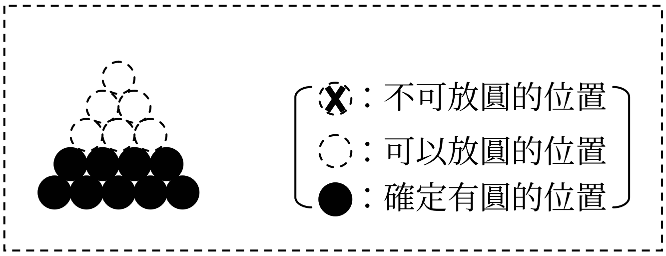




4.

(1) 考慮 $k=5$ 時的情形：

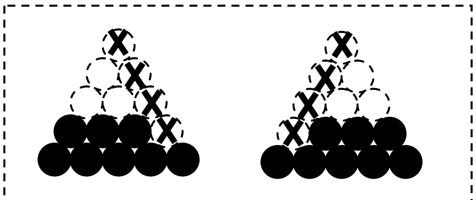
①當第二列恰有 4 個圓時，此時相當於 $k=4$ 的情形。



$\Rightarrow$ 共有 a_4 種排法

②當第二列恰有 3 個圓時，因為 3 個圓要相連，所以共有 2 種放置法，

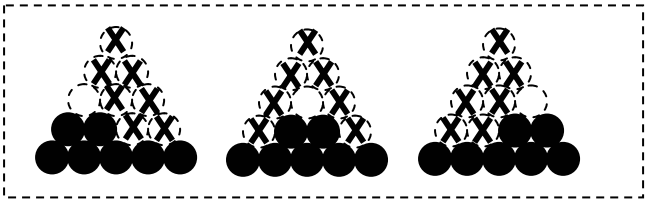
而每種放置法皆有相當於 $k=3$ 的情形。



$\Rightarrow$ 共有 $2\times a_3$ 種排法

③當第二列恰有 2 個圓時，有 3 種放置法，且皆有相當於 $k=2$ 的情

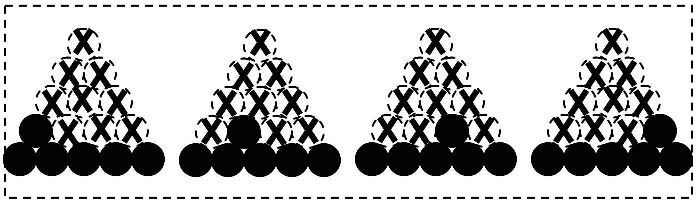
形。



$\Rightarrow$ 共有 $3\times a_2$ 種排法

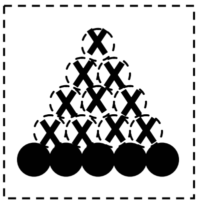
④當第二列恰有 1 個圓時，有 4 種放置法，且皆有相當於 $k=1$ 的情

形。



$\Rightarrow$ 共有 $4\times a_1$ 種排法

⑤當第二列恰有 0 個圓時，只有 1 種圓塔。



$\Rightarrow$ 1 種排法

⑥綜合以上①~⑤，可得 $a_5 = a_4 + 2a_3 + 3a_2 + 4a_1 + 1$

(2) 接著考慮一般情形：

當第一列共 n 個圓，且第二列恰有 m 個圓時 $(1 \le m \le n-1)$，因為此 m 個圓須相連，所以共有$(n-m)$種不同的放法。而當這 m 個圓固定後，由定義知其上方排列的圓塔共有 a_m 種。又當 $m = 0$，即第二列 0 個圓時，也算 1 種圓塔。所以

$a_n = a_{n-1} + 2\,a_{n-2} + 3\,a_{n-3} + \ldots + (n-1)\,a_1 + 1\;,\;(n \ge 2)$

5. 求 a_n 的一般式：

$$
\begin{aligned}
\text{令}\alpha_k &= a_{k+1} - a_k \\
&= (\,a_k + 2a_{k-1} + 3a_{k-2} + \ldots + k\,a_1 + 1) \\
&\qquad\qquad - (a_{k-1} + 2a_{k-2} + \ldots + (k-1)\,a_1 + 1) \\
&= a_k + a_{k-1} + a_{k-2} + \ldots + a_1 \quad (k \in N)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\text{則}\alpha_{k+1} - \alpha_k &= (a_{k+1} + a_k + a_{k-1} + \ldots + a_1) - (a_k + a_{k-1} + a_{k-2} + \ldots + a_1) \\
&= a_{k+1}
\end{aligned}
$$

即 $\begin{cases} a_{k+1} = \alpha_k + a_k \\ \alpha_{k+1} = a_{k+1} + \alpha_k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_k = \alpha_{k-1} + a_{k-1} \\ \alpha_k = a_k + \alpha_{k-1} \end{cases}$，其中 $a_1 = 1,\ \alpha_1 = a_2 - a_1 = 1$

因此數列 $< a_1, \alpha_1, a_2, \alpha_2, a_3, \alpha_3, a_4, \alpha_4, \ldots >$為費氏數列(*Fibonacci Sequence*)

所以數列$\langle a_n \rangle$為費氏數列的奇數項所成的數列。

故 $a_n = \dfrac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{2n-1} - \left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{2n-1}\right]$，

也就是說，『n 階圓塔』的個數 $= \dfrac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{2n-1} - \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{2n+1}\right]$。

二、 n 階廣義圓塔

(一) 遊戲規則：

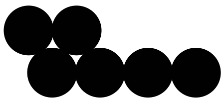
在 n 個並列圓的圖形上方，放置數個相同的圓，放置的要求為：

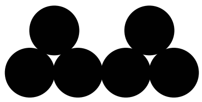
1. 為了使圖形中的圓穩固，上一列的圓必須與下一列的兩個圓相切。

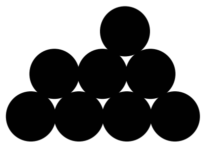
2. 任一列的圓可以不相連。

並將符合上述條件的圖形稱為『n 階廣義圓塔』。

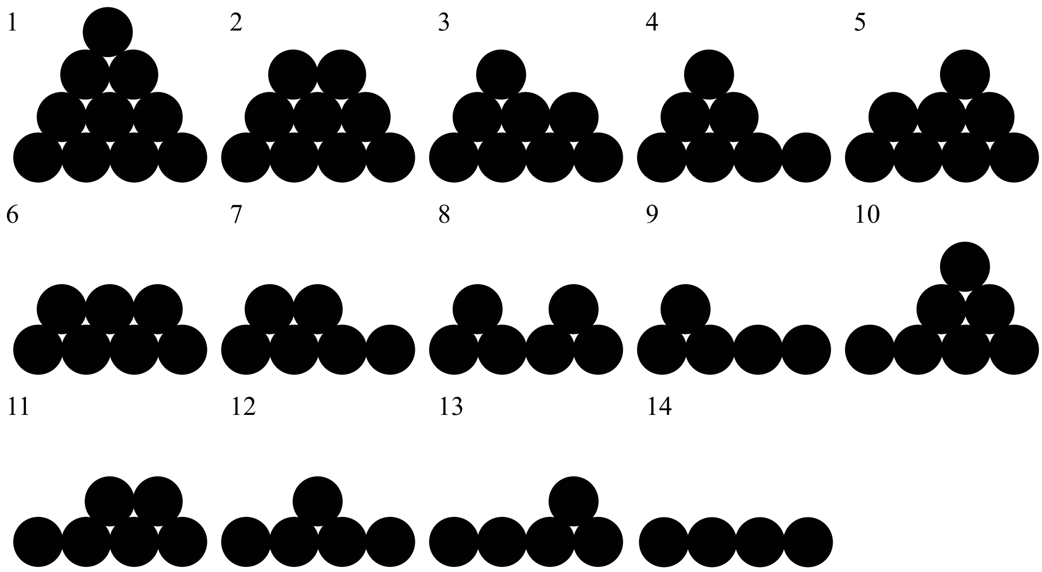
例如：圖一是不被允許的，而圖二及圖三則符合要求。


圖一


圖二


圖三

因此，當 $n = 4$ 時，有下列 14 種不同的『4 階廣義圓塔』。

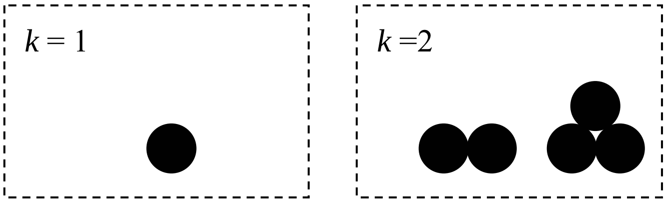


接下來我們要探討的是：『n 階廣義圓塔』的個數有多少呢？

(二) 推導過程：

首先以『b_k』表示『k 階廣義圓塔』的個數。($k \in N$)

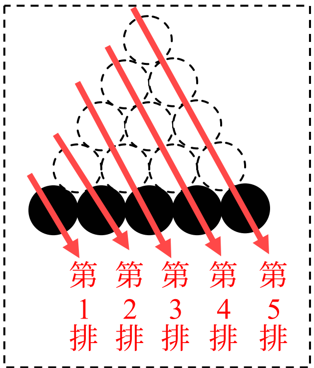
1. 顯然 $b_1 = 1, b_2 = 2$



2.

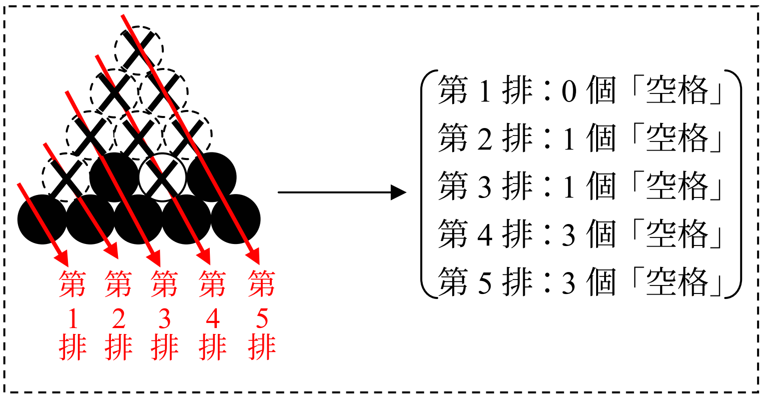
(1) 考慮 $k = 5$ 時的情形：

①如下圖所示，將最右側邊的 5 個圓稱為第 5 排，其次的 4 個圓稱為第 4 排，其餘依序編號第 3 排、第 2 排及第 1 排。



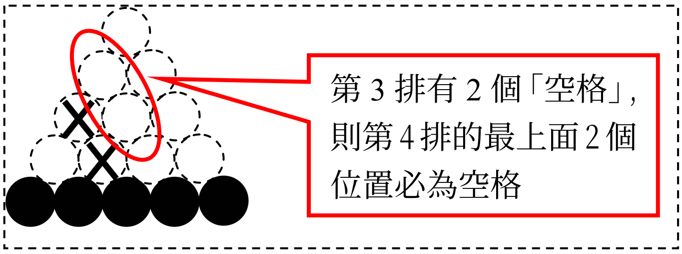
②將每一排中，不放圓的位置稱為『空格』。因為每一排的最底下一個位置，一定要放圓，因此第 m 排最多有$(m-1)$個『空格』。

例如：



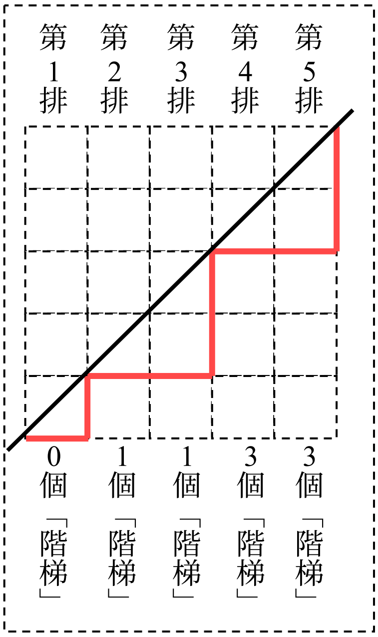
③每一排的『空格』數必定大於或等於其前一排的『空格』數。

例如：



(2) 考慮 5×5 方格中，由點 $A(0, 0)$取捷徑走到 $B(5, 5)$，且不超過對角線(可碰到對角線)的情形：

①如下圖，由左至右，依序將每排編號，並將每一種捷徑走法中，被所走路線包圍下方的方格稱為『階梯』。



②因為所走的路徑不超過對角線，因此第 m 排下方的『階梯』最多$(m-1)$格。

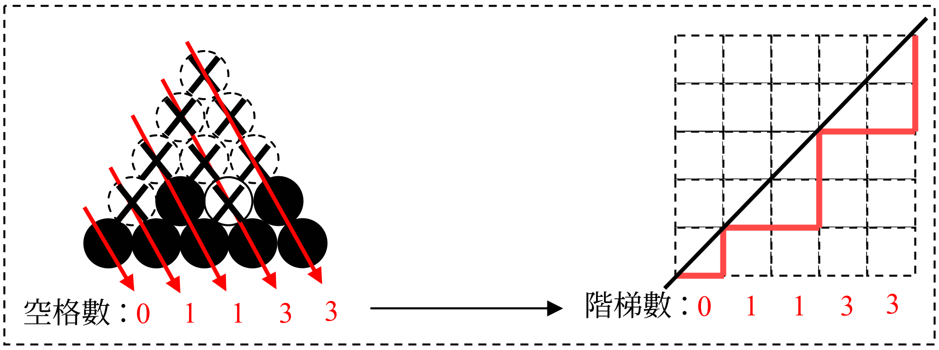
③因為捷徑只能往右或往上走，所以每一排的『階梯』數必定大於或等於其前一排的『階梯』數。

(3) 將每一種『5 階廣義圓塔』，與『5×5 方格中的每一種不超過對角線的捷徑路線』作對應：

①將『5 階廣義圓塔』中，每一排的『空格』數，對應到 5×5 方格中，

每一排的『階梯』數，即形成一種不超過對角線的捷徑路線。

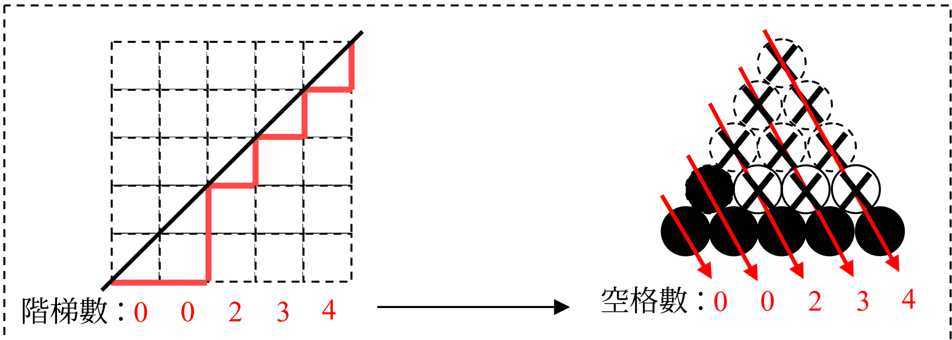
例如：



也就是說，任一個『5 階廣義圓塔』，都可以找到一個『5×5 不超過對角線的捷徑路線』與其對應。

②若將 5×5 方格中的每一種不超過對角線的捷徑路線中，每一排的『階梯』數，對應到 $k = 5$ 的堆圓中每一排的『空格』數，也可形成一種『5 階廣義圓塔』。

例如：



也就是說，任一個『5×5 不超過對角線的捷徑路線』都可以找到一個『5 階廣義圓塔』與其對應。

③綜合①、②知兩者一對一對應，因此『5 階廣義圓塔的個數』=『5×5 方格中不超過對角線的捷徑走法數』。

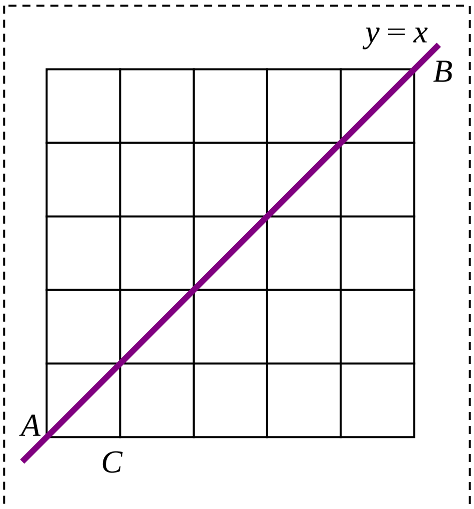
(4) 一般而言，『n 階廣義圓塔』與『$n\times n$ 的方格中，由點 $A(0, 0)$取捷徑

走到點 $B(n, n)$，且不超過對角線的捷徑路線』是可以一對一對應的。

也就是說，『n 階廣義圓塔數』等於『$n\times n$ 的方格中，由點 $A(0, 0)$取捷徑走到點 $B(n, n)$，且不超過對角線的捷徑走法數』。

3. 接著我們探討，在 $n\times n$ 方格中，由點 $A(0, 0)$取捷徑走到點 $B(n, n)$，且不超過對角線的方法數：

下圖為正方形($n\times n$)棋盤街道，若要求不可越過直線 $y = x$（可碰到），則由 A 到 B 取捷徑的走法有幾種？

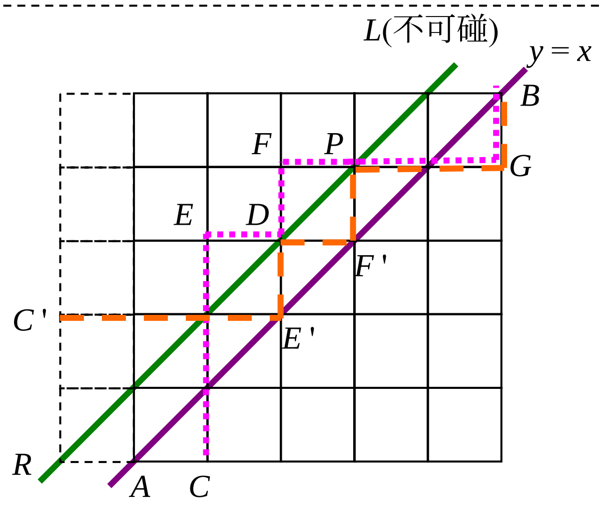


(1) 由於不可越過直線 $y = x$，因此第一步必由 A 走到 C 點。於是，

所求 $=$ (C 到 B 的捷徑走法數) $-$(C 到 B 的**越區**捷徑走法數)

其中『越區』是指路徑中有超越直線 $y = x$ 的情形。

(2) 如下圖，若以直線 L 為對稱軸，將 C 對應到 C'，則 $C\to B$ 任一越區的捷徑路線必恰與 $C'\to B$ 的捷徑路線一對一對應。



C 至 B 的越區路線：

$C \to E \to D \to F \to P \to G \to B$

對應 C'至 B 的捷徑路線：

$C' \to E' \to D \to F' \to P \to G \to B$

理由如下：

因為 $C \to B$ 任一越區的捷徑路線必與對稱軸 L 至少有一交點。令最後一個離開 L 的交點為 P, 則以線段 $\overline{RP}$ 為對角線所形成的正方形內, 將越區的路線對直線 L 作對稱路線, 而 P 到 B 的路線維持不變。

例如：越區路線 $C \to E \to D \to F \to P \to G \to B$

其對應路線為 $C' \to E' \to D \to F' \to P \to G \to B$

如此, 每一個($C \to B$ 的越區捷徑路線)都可以找到一個($C' \to B$ 的捷徑路線)與之對應；相反地, 每一個($C' \to B$ 的捷徑路線)經對稱後, 便形成一個($C \to B$ 的越區捷徑路線)。因此, 這兩種路線一對一對應。故 ($C \to B$ 的越區捷徑走法數) = ($C' \to B$ 的捷徑走法數)。

(3) 所求 = ($C \to B$ 的捷徑走法數) –($C \to B$ 的越區捷徑走法數)

= ($C \to B$ 的捷徑走法數) –($C' \to B$ 的捷徑走法數)

$$= \frac{((n-1)+n)!}{(n-1)!n!} - \frac{((n+1)+(n-2))!}{(n+1)!(n-2)!}$$

$$= \frac{(2n-1)!}{(n-1)!n!} - \frac{(2n-1)!}{(n+1)!(n-2)!}$$

$$= \frac{(2n-1)!}{(n+1)!n!} \times ((n+1)\cdot n - n\cdot(n-1))$$

$$= \frac{(2n-1)!}{(n+1)!n!} \times 2n$$

$$= \frac{(2n)!}{(n+1)!n!}$$

$$= \frac{(2n)!}{n!n!} \times \frac{1}{n+1}$$

$$= \frac{C_n^{2n}}{n+1} 。$$

4. 由 2, 3 討論得知：

b_n =『n 階廣義圓塔數』=『$n \times n$ 的方格中，由點 $A(0, 0)$取捷徑走到點 $B(n, n)$，且不超過對角線的走法數』$= \frac{C_n^{2n}}{n+1}$

即『n 階廣義圓塔』的個數 $= \frac{C_n^{2n}}{n+1}$

此數在數學上是有名的『凱特蘭數』。

三、 n 階方形球塔

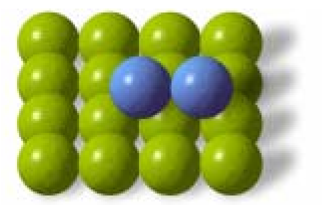
(一) 遊戲規則：

在以 n^2 個球排成邊長為 n 的正方形上方，放置數個相同的球，放置的要求為：

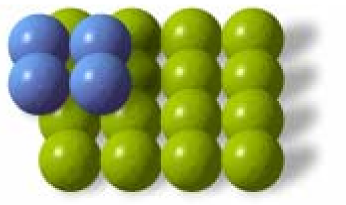
1. 每一層都需排成正方形(或是不排任何球)，且恰一個正方形。(若該層只有一顆球，則視為 1×1 的正方形。)
2. 每一球必需與下一層的四球相切。
3. 為了使此球塔穩固，上一層的邊長必須小於下一層的邊長。

並將符合上述條件的圖形稱為『n 階方形球塔』。

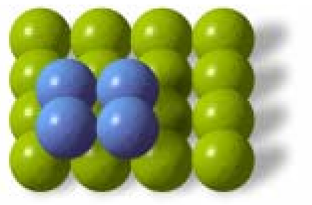
例如:圖一與圖二是不被允許的，而圖三則符合規定。



圖一

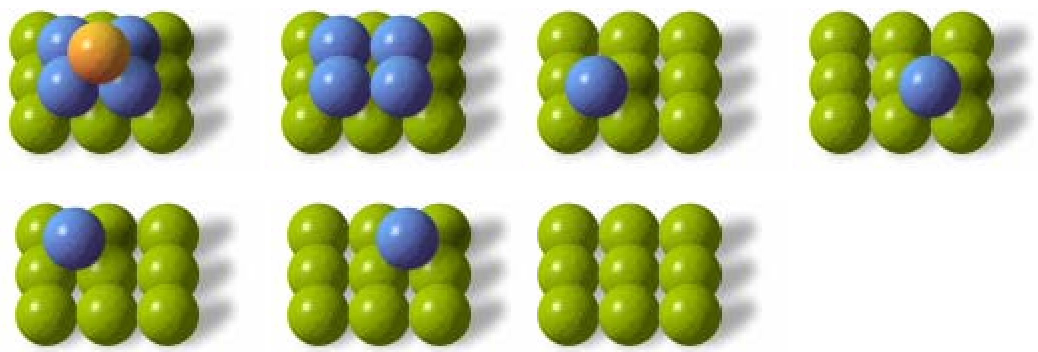


圖二



圖三

因此，當 $n = 3$ 時，有下列 7 種不同的『3 階方形球塔』。



接下來我們要探討的是：『n 階方形球塔』的個數有多少呢？

(二) 推導過程：

中華民國第四十五屆中小學科學展覽會
評　　語

高中組 數學科

040416
發現凱特蘭數

國立桃園高級中學

評語：
1. 題目為「發現凱特蘭數」，然而在數學文獻當中，討論凱特蘭數之性質的文章已多。因此本研究改名為「重新發現凱特蘭數」或許更為巧當。
2. 本研究所探討的主題「凱特蘭數」的組合對應頗為新穎。