中華民國第四十五屆中小學科學展覽會
作品說明書

高中組 數學科

040412

我折、我折、我折折折

國立臺中第一高級中學

作者姓名：

高二 古哲明 高二 黃子昕 高二 陳依樞

高二 黃茂軒

指導老師：

李吉彬 黃金火

作品名稱：我折、我折、我折折折

壹、摘要

AIME2004 考題：一張長 1024 單位、寬 1 單位的細長紙條，將其分成 1024 個單位正方形。將這紙條重複對摺。第一次對摺時，將這張紙的右邊邊緣疊合在左邊邊緣的上面，使其成為長 512 單位、寬 1 單位的紙條，厚度為最初紙條的兩倍。第二次對摺時，也將這張紙的右邊邊緣疊合在左邊邊緣的上面，使其成為長 256 單位、寬 1 單位的紙條，厚度為最初紙條的四倍。如此動作，再重複 8 次。於完成最後的摺紙活動後，這張細長紙條已變成厚度為最初紙條 1024 倍的單位正方形。試問在原來從左邊數起第 942 個單位正方形的下面有多少個正方形？

這種題目說實在真的很煩，但是到底怎麼算呢？本次的研究核心集中在折數、排序、紙條上的數值，以及許多迷人的結果及它們之間錯綜複雜的函數關係，並將嘗試進一步解開折數是 5、6、7…等其他高次方與任意序數之數值。

貳、研究動機

暑假時和班上同學們一起組隊報名 TRML，賽前準備時做了一份 AIME 的考題（如摘要），其中有一題是有關摺紙的問題，雖然賽前沒有充裕的時間來思考這個題目，考完 TRML 之後仍然對這個題目感到頭痛萬分。我們看過各屆的科展之後，發現有學長已經做出了「摺痕數列」這個主題。可惜，因為當時所發現的性質有點狹隘，經過本組討論後，決定從別的角度切入再做深入的探討研究，因為我們總覺得還有一些秘密躲在裡面……

參、研究目的

利用實作的方法先寫出折數是 1、2、3 的結果，並歸納找出規律，最後加以一般化，讓我們可以輕易、迅速的寫出已知折數與排序條件的原來數字。並嘗試更高次折數與其它折法的連通性，最後歸納出一些衍伸的神奇性質。

肆、研究設備及器材

紙、筆、Visual Basic、GSP、Ms Excel

伍、研究方法與過程

一、觀察數列、找出數據、分析數據、推測公式與證明之。

二、化簡公式，拓展性質與應用。

三、翻閱前屆科展、上網、相關書籍的資料。

四、統籌所有資料並打成書面報告。

陸、研究結果

研究結果目錄：

規律與公式的發現

1 與 0 的循環

規律的証明

偶乘二、奇乘二減一、加減一、群組看

公式的化簡

人工計算、電腦程式

性質推廣

反函數、和的性質、不動點、其他折法

應用

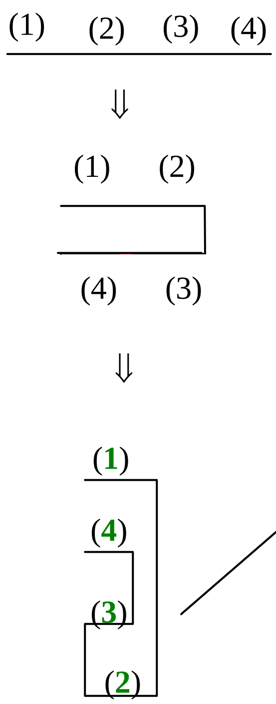
VB、GSP、密碼技術

一、規律與公式的發現

(一)

我們對折後的數列，就是在探討對折的次數與數的排序對應數值的關係，因此我們觀察後得：

以下為紙張經折疊後的剖面圖



排序	折一次	折二次	折三次	折四次
1	1	1	1	1
2	2	4	8	16
3		3	5	9
4		2	4	8
5			3	5
6			6	12
7			7	13
8			2	4
9				3
10				14
11				11
12				6
13				7
14				10
15				15
16				2

暫且稱為 ”二分對折法”

P.S.

一般在折紙時，都向上翻，而我們只要把結果倒過來就可以了。

(二)

我們把紙條對折後，由側面剖開寫出數列，又若要使折的次數與排序扯上關係，我們試著以２的次方項的減法來表示(因爲折一次數列會變有 2^1 個數，兩次數列變有 2^2 個數，....依此類推，且在這個數列中，最大的數值也等於 2^n ，其中 n 爲折數)，則可把上頁數列寫爲下表：

折一次	折二次	折三次	折四次
$1=2^1-2^0$	$1=2^2-2^1-2^0$	$1=2^3-2^2-2^1-2^0$	$1=2^4-2^3-2^2-2^1-2^0$
$2=2^1$	$4=2^2$	$8=2^3$	$16=2^4$
	$3=2^2-2^0$	$5=2^3-2^1-2^0$	$9=2^4-2^2-2^1-2^0$
	$2=2^2-2^1$	$4=2^3-2^2$	$8=2^4-2^3$
		$3=2^3-2^2-2^0$	$5=2^4-2^3-2^1-2^0$
		$6=2^3-2^1$	$12=2^4-2^2$
		$7=2^3-2^0$	$13=2^4-2^1-2^0$
		$2=2^3-2^2-2^1$	$4=2^4-2^3-2^2$
			$3=2^4-2^3-2^2-2^0$
			$14=2^4-2^1$
			$11=2^4-2^2-2^0$
			$6=2^4-2^3-2^1$
			$7=2^4-2^3-2^0$
			$10=2^4-2^2-2^1$
			$15=2^4-2^0$
			$2=2^4-2^3-2^2-2^1$

p.s. 折 n 次後

$$\begin{cases}\text{會有}n+1\text{個項(上述新表示法)表示數列中任一個數}\\ \text{數列中會有}2^n\text{個數字}\end{cases}$$

p.s.

上述的表示方式，是二進位的變形，爲了確保能正確發揮功用，我們必須證明這個表示法可以表示任意數，不然可能只是能剛好表示 1 到 16 罷了

理由是這樣的:舉折四次時排序 13 的數，$7 = 16-(9) = 2^4-2^3-2^0 = 2^4-(2^3+2^0)$，因爲 16 以下的數 1 到 15 都可以用二進位表示(如紅字部分)。所以欲用新表示法表示出 1 到 2^n 所有的數，只要能用二進位表示 1 到 2^n-1 就可永遠成立了。

(三)

由於上頁規則還是不明顯，因此以二進位表示（１＝有，就是存在一個；0＝沒有，除第一項係數爲正，其他爲負）：

折一次		折二次			折三次				折四次				
2^1	2^0	2^2	2^1	2^0	2^3	2^2	2^1	2^0	2^4	2^3	2^2	2^1	2^0
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	0	1	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0
		1	0	1	1	0	1	1	1	0	1	1	1
		1	1	0	1	1	0	0	1	1	0	0	0
					1	1	0	1	1	1	0	1	1
					1	0	1	0	1	0	1	0	0
					1	0	0	1	1	0	0	1	1
					1	1	1	0	1	1	1	0	0
									1	1	1	0	1
									1	0	0	1	0
									1	0	1	0	1
									1	1	0	1	0
									1	1	0	0	1
									1	0	1	1	0
									1	0	0	0	1
									1	1	1	1	0

即

$5=2^3-2^1-2^0$

$=1$個2^3 -0個2^2 -1個2^1 -1個2^0

$=1\ 0\ 1\ 1$

但切記除了第一項，其他係數都是負的

(四)

經觀察上表關係後，發現竟然暗藏規律：(把前一頁所有折數的結果全部疊合)

→ $(n+1)$個 1

↓ 2^n 個 1

1	1	1	1	1
1	0	0	0	0
1	0	1	1	1
1	1	0	0	0
1	1	0	1	1
1	0	1	0	0
1	0	0	1	1
1	1	1	0	0
1	1	1	0	1
1	0	0	1	0
1	0	1	0	1
1	1	0	1	0
1	1	0	0	1
1	0	1	1	0
1	0	0	0	1
1	1	1	1	0
↑永遠是 1	↑以(1001)作循環	↑以(10100101)作循環	↑…(1010100101010101)……	↑以(10)循環填滿最後一項

(1)第一項，即 2^n 永遠是寫 1

(2)第二項，即 2^{n-1} 是以(10,01)四個一循環

(3)第三項，即 2^{n-2} 是以(1010,0101)八個一循環 ……

(4)第四項，即 2^{n-3} 是以(101010,010101)十六個一循環

⋮ ⋮

(5)最後一項，即 2^0 以(10)兩個填滿最後一排

(五)

若以上循環的規則能成立的話，那麼我們就可以寫出公式了：

定義
1. n表折數 ,X表折後數列中數字的排序(n和X皆是正整數) ,且 $X \le 2^n$
2. 整除時,係數直接寫 1,因爲已完成一個循環了
3. $f_n(X)$爲所求的數值 , 且 $f_n(X) \le 2^n$
4. 定義 $r(\frac{A}{B})$ 表 A(正整數) 除以 B(正整數) 的餘數r ,且 $0 < r(\frac{A}{B}) \le B$

$$f_n(X) = 2 - \left\{ r(\tfrac{X}{4}) \begin{matrix} = 1\text{或}4\text{係數寫}1 \\ = 2\text{或}3\text{係數寫}0 \end{matrix} \right\} \cdot 2^{n-1} - \left\{ r(\tfrac{X}{8}) \begin{matrix} = 1\text{或}3\text{或}6\text{或}8\text{係數寫}1 \\ = 2\text{或}4\text{或}5\text{或}7\text{係數寫}0 \end{matrix} \right\} \cdot 2^{n-2}$$

$$- \left\{ r(\tfrac{X}{16}) \begin{matrix} = 1,3,5,7,10,12,14,16\text{係數寫}1 \\ = 2,4,6,8,9,11,13,15\text{係數寫}0 \end{matrix} \right\} \cdot 2^{n-3}$$

$$-\ldots\ldots - \left\{ r(\tfrac{X}{2^{n+1}}) \begin{matrix} = 1,3,5,\ldots\ldots,2^{n-1}+2,2^{n-1}+4,\ldots\ldots\ldots\ldots\ \text{係數寫}1 \\ = 2,4,6,\ldots\ldots,2^{n-1}+1,2^{n-1}+3,\ldots\ldots\ldots\ldots\text{係數寫}0 \end{matrix} \right\} \cdot 2^0$$

規律與原始公式的發現END！！！

二、規律的證明

目標：

證明循環的規則

1　1　1　1　→
1　0　0　0　→
1　0　1　1　→
1　1　0　0　→
1　1　0　1　→
1　0　1　0　→
1　0　0　1　→
1　1　1　0　→
↓　↓　↓　↓

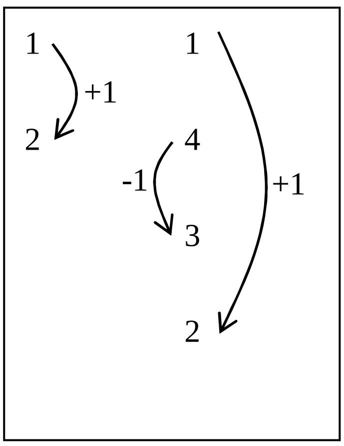
方法：

用上述的 10010101…的抽象數字證明難度頗高，有點抽象，我們選擇回到原本的數列對折著手。其實”10010101…”所表示的其實就是原來”對折所得的數列”，而且互為唯一表示法，故只要證明對折數列的關鍵規律，再去解釋 10010101…即可。

1	$\xrightarrow{\times 2-1}$	1	$\xrightarrow{\times 2-1}$	1	→
2	$\xrightarrow{\times 2}$	4	$\xrightarrow{\times 2}$	8	→
		3	$\xrightarrow{\times 2-1}$	5	→
		2	$\xrightarrow{\times 2}$	4	→
				3	→
				6	→
				7	→

從 n=1 起，由 n 折數列到 n+1 折數我們的方向同數學歸納法道理)；證明需要的關鍵規律，這些規律是可以完整組裝數列必要的規律：

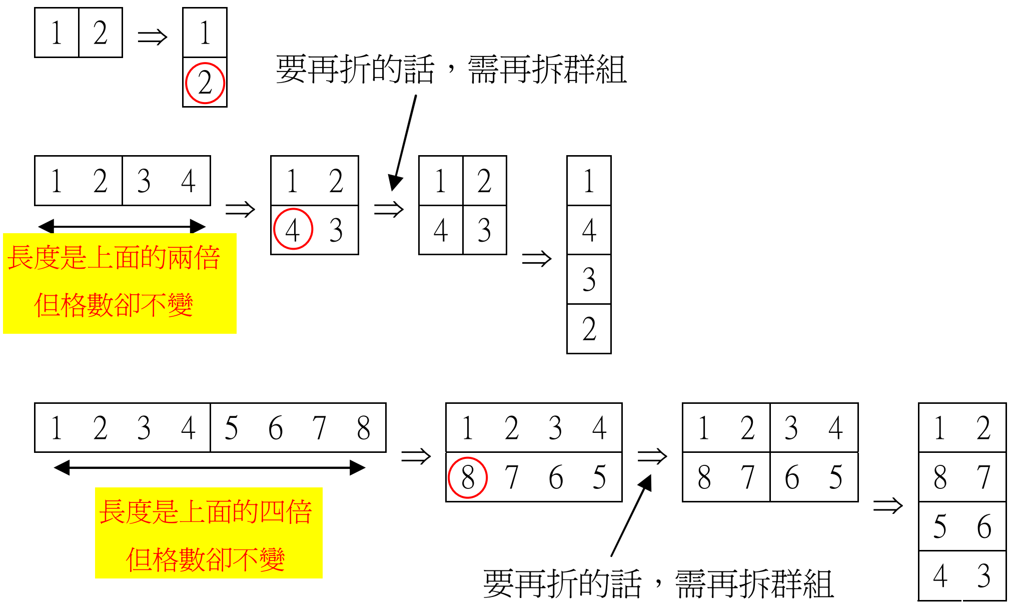
1.偶排序的值會乘以二
2.奇排序的值會乘以二再減一
3.做多折一次數列的下半列，用＋１，－１，＋１，－1......



(一)偶排序的值會 x2

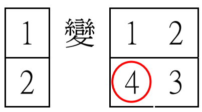
(一)與(二)的主旨：群組看

∵ 舉例



∴排序 X(偶數) 乘以二就是多折一次時的排序 X 的值。

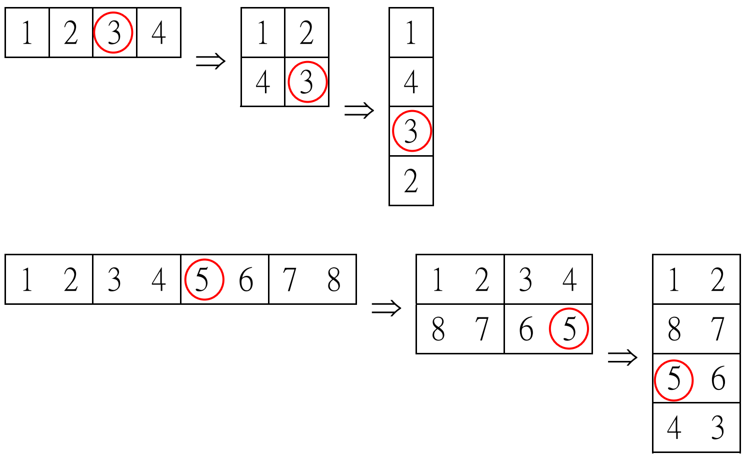
p.s.



需取 4 而非 3，因為 3 還未固定下來，
還會被翻下去。

(二)奇排序的值乘會成以 2 再減 1

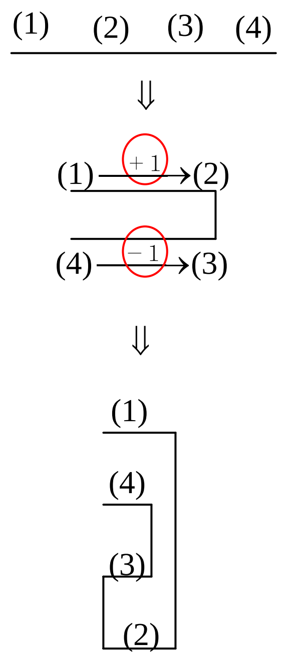
∵ 舉例



道理完全相同，格子位置不變只是長度變長，以「群組」看紙條

∴排序 X(奇數) 乘以二再減一就是多折一次時的排序 X 的值。

(三)做多折一次數列的下半列，用＋1、－1、＋1、－1、……

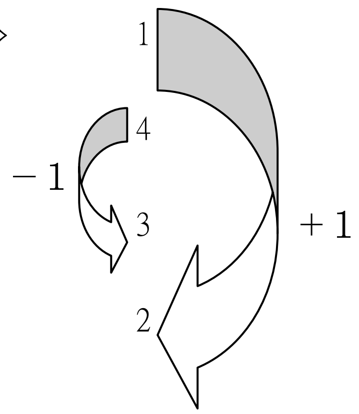


紙條的對折，總是先取頭 (1)，再取尾(4)，
再取尾的旁邊(3)，再取頭的旁邊(2)。

∵由折的過程可知：

每當對折到剩下最後左右兩區時
下一步都會”把右區的數在翻下去”
而右區的數即是”左區數的±1形成的”，

∴當一折下後⇒



(四)轉換成 10010101…

1.排序 X(偶數) 乘以二就是多折一次時的排序 X 的值。

即 $2\,(2^{n} - d_1 2^{n-1} - d_2 2^{n-2} - d_3 2^{n-3} - \cdots\cdots - d_n 2^{0})$ 其中 $d_i \in \{0,1\}$, $i=1, 2, 3, \cdots, n$

$= 2^{n+1} - d_1 2^{n} - d_2 2^{n-1} - d_3 2^{n-2} - \cdots\cdots - d_n 2^{1} - 0\,2^{0}$

也就是表示法進位（左移一格），最後一項寫 0

1 1		1 1 1		1 1 1 1
1 0	⇒	1 0 0		1 0 0 0
		1 0 1		1 0 1 1
		1 1 0	⇒	1 1 0 0
				1 1 0 1
				1 0 1 0
				1 0 0 1
				1 1 1 0

2. 排序 X(奇數) 乘以二再減一就是多折一次時的排序 X 的值。

即 $2\,(2^{n}-d_1 2^{n-1}-d_2 2^{n-2}-d_3 2^{n-3}-\cdots\cdots-d_n 2^{0})-1$ 其中 $d_i\in\{0,1\},\ i=1,2,3,\cdots,n$

$=2^{n+1}-d_1 2^{n}-d_2 2^{n-1}-d_3 2^{n-2}-\cdots\cdots-d_n 2^{1}-1\ 2^{0}$

也就是表示法進位（左移一格），再減 $2^0=1$（最後一項寫 1）

$$\begin{array}{cc} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{ccc} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{cccc} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}$$

3.用 $\begin{matrix}+1\\-1\end{matrix}$ 做多折一次數列的下半列。

$$\begin{cases} \text{數字}+1=\text{數字少減}1\text{(即尾數1變0)} \\ \text{數字}-1=\text{數字多減 }1\text{(即尾數0變1)} \end{cases}$$

即

$$\begin{array}{cc} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{ccc} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{array}\ \begin{array}{c} \\ \\ -1\ \ +1 \\ \\ \end{array} \Rightarrow \begin{array}{cccc} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\ \begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ -1\ \ +1\ \ -1\ \ +1 \\ \\ \\ \\ \end{array}$$

(五)

我們已經成功的証明下面這三條關鍵規律並翻譯成 10010101…

$$\begin{cases} \text{1.偶排序的值會乘以二} \\ \text{2.奇排序的值會乘以二再減一} \\ \text{3.做多折一次 數列的下半列，用}+1,\ -1,\ +1,\ -1\ldots\ldots \end{cases}$$

規律的証明 END！！！

三、公式的化簡

(一)

這是我們之前亟待化簡的東西：

$$f_n(X)=2-\left\{r(\frac{X}{4})\begin{matrix}=1\text{或}4\text{係數寫}1\\=2\text{或}3\text{係數寫}0\end{matrix}\right\}\cdot 2^{n-1}-\left\{r(\frac{X}{8})\begin{matrix}=1\text{或}3\text{或}6\text{或}8\text{係數寫}1\\=2\text{或}4\text{或}5\text{或}7\text{係數寫}0\end{matrix}\right\}\cdot 2^{n-2}$$

$$-\left\{r(\frac{X}{16})\begin{matrix}=1,3,5,7,10,12,14,16\text{係數寫}1\\=2,4,6,8,9,11,13,15\text{係數寫}0\end{matrix}\right\}\cdot 2^{n-3}$$

$$-\ldots\ldots-\left\{r(\frac{X}{2^{n+1}})\begin{matrix}=1,3,5,\ldots\ldots,2^{n-1}+2,2^{n-1}+4,\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\text{係數寫}1\\=2,4,6,\ldots\ldots,2^{n-1}+1,2^{n-1}+3,\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\text{係數寫}0\end{matrix}\right\}\cdot 2^{0}$$

這個公式是用變形二進位寫出來的，就算是問你兩千多的排序，你也僅僅只要算 10 個項的係數(0 或 1)，就可以了，雖然簡單很多，但正是這種結構，讓這個公式註定要一項一項的分別寫出；可惜這個結構是得乖乖的寫 10 次，所以需要進一步簡化（上面的公式計算目前沒有實用的價值，看到就頭昏）：

先舉 2^{n-1} 的係數來看（ $r\left(\frac{X}{2^2}\right)$ 代表 X 除以 2^2 的餘數，就是 1 , 0, 0 ,1 數列中的排序），

發現 1001 是以<u>中間軸對稱</u>，就是以排序 2 和 3 中間那條線上下對稱，

所以取中間排序 2 或 3，

讓其他排序來減減看（我們取 2），

$r\left(\frac{X}{2^2}\right)=1 \Rightarrow 1$

$r\left(\frac{X}{2^2}\right)=2 \Rightarrow 0$

$r\left(\frac{X}{2^2}\right)=3 \Rightarrow 0$

$r\left(\frac{X}{2^2}\right)=4 \Rightarrow 1$

$$r\left(\frac{X}{2^2}\right)-2^1=\begin{matrix}1-2=-1\\2-2=\ \ 0\\3-2=+1\\4-2=+2\end{matrix}\Rightarrow\text{想辦法變}\ \begin{matrix}1\\0\\0\\1\end{matrix}$$

這樣一算，$r\left(\frac{X}{2^2}\right)-2^1$ 爲「負奇」和「正偶」的係數可寫 1；「正奇」和「負偶」的係數可寫 0，就可用奇偶配合正負作很有效率的計算。注意！整除餘數要算 2^2，不要用餘數 0 去算，亦即 $r\left(\frac{4}{2^2}\right)$=4。即：

$$\left\{(r(\frac{X}{2^2})-2^1)\xrightarrow{\text{負奇數 或 正偶數}}\text{就寫1(其他寫0)}\right\}$$

所以原本很難算的式子已經變成很簡單快速的手算公式了：

$$f_n(X)=2-\left\{(r(\frac{X}{2^2})-2^1)\xrightarrow{\text{負奇數 或 正偶數}}\text{就寫}1\right\}\cdot 2^{n-1}-\left\{(r(\frac{X}{2^3})-2^2)\xrightarrow{\text{負奇數 或 正偶數}}\text{就寫}1\right\}\cdot 2^{n-2}$$

$$-\left\{(r(\frac{X}{2^4})-2^3)\xrightarrow{\text{負奇數 或 正偶數}}\text{就寫}1\right\}\cdot 2^{n-3}-\ldots\ldots-\left\{(r(\frac{X}{2^{n+1}})-2^n)\xrightarrow{\text{負奇數 或 正偶數}}\text{就寫}1\right\}\cdot 2^{0}$$

(二)

剛剛那是在生活週遭或數學競賽使用的手算公式，但是要用 Visual Basic 寫成程式，還得設計出下面的方程式：

$$r\left(\frac{\left| r\left(\frac{x}{2^2}\right)-2^1+\dfrac{\dfrac{r\left(\frac{x}{2^2}\right)-2^1}{\left|r\left(\frac{x}{2^2}\right)-2^1\right|}+1}{2}\right|}{2}\right)$$

左邊這一堆和 $\left\{(r(\frac{x}{2^2})-2^1)\xrightarrow{\text{負奇數 或 正偶數}}\text{就寫1}\right\}$ 是完全一樣的(經下方的修正後)，都是用 $r\left(\frac{X}{2^2}\right)-2^1$ 爲單位去運算。試著利用「正負、奇偶、絕對值、除以 2、餘數、加減 1…等」設計出左邊的方程式，讓 -1、$+2$ 代入會變成正奇數；$+1$、0 代入會變成正偶數，然後再除以 2，偶數餘爲 0；奇數餘 1。

修正，這樣才不會有特殊條件：(本頁最下面紅色圈圈處。兩小圈表 1.；一大圈表 2.)

1.分母 $r\left(\frac{X}{2^2}\right)-2^1$ 代入 0 後變成無意義，所以加修正項 h ($-1<h<+1$ 才不會影響奇偶性)。

2.又剛剛在整除時都用 $r\left(\frac{X}{2^2}\right)=4$ 代入運算，爲了讓整除時也成立(要滿足數學的定義，不修正的話 $r\left(\frac{X}{2^2}\right)-2^1$ 會變「負偶」)，需要再補加上一項 $\left[2^{-r\left(\frac{X}{2^2}\right)}\right]$ 高斯符號，修正以後 $r\left(\frac{X}{2^2}\right)$ 代 4 或代 0 都正確了。

統一使它整體爲 2 的次方項，h 取 -2^{-1}，且 $r\left(\frac{m}{n}\right)$ 以 $r_n(m)$ 表示

所以最後完整的電腦公式是這樣的：

$$f_n(X)=2^n-\sum_{k=1}^{n}\left\{r_2\left(\left|r_{2^{k+1}}(X)-2^k+\frac{\dfrac{r_{2^{k+1}}(X)-2^k-\frac{1}{2}}{\left|r_{2^{k+1}}(X)-2^k-\frac{1}{2}\right|}+1}{2}\right|\right)+\left[2^{-r_{2^{k+1}}(X)}\right]\right\}\times 2^{n-k}$$

高斯符號

(三)

上一頁寫的洋洋灑灑，公式真是複雜(雖然只是電腦輸入用)，舊方法即使很好用，到頭來還真的多繞一大圈。就讓我來爲大家介紹新方法吧！下面用折 3 次的爲例：

$r(\frac{X}{8})$					再減 0.5	除以 2 的餘數	對應到的 1，0
1		-3		3.5	3	1	1
2		-2		2.5	2	0	0
3	$\xrightarrow{r(\frac{X}{8})-4}$	-1	$\xrightarrow{\text{減0.5再取絕對值}}$	1.5	1	1	1
4		0		0.5	0	0	0
5		1		0.5	0	0	0
6		2		1.5	1	1	1
7		3		2.5	2	0	0
8		4		3.5	2	1	1

修正部份同上頁，爲使 $r\left(\frac{X}{2^3}\right)$=8 代入運算，需要再補加上一項 $\left[2^{-r\left(\frac{X}{2^3}\right)}\right]$

爲什麼說是多繞一圈呢？因爲以前不知道可用±0.5 來運算，只會呆呆的用「奇數、偶數、正負、絕對值…等」硬算，後來發現所有算式都是爲了配出±0.5 罷了！

因此我們取代了舊公式：

$$\text{定義}\begin{cases} \text{n表折數;X表折後數列中數字的排序(n ,X皆是正整數) ,且} X \le 2^n \\ f_n(X)\text{爲所求的函數值 , 且} f_n(X) \le 2^n \\ \text{定義} R_k(X) \text{表示} X \div 2^k \text{之餘數 ,且} 0 \le R_k(X) < 2^k \end{cases}$$

$$\boxed{f_n(X) = 2^n - \sum_{k=1}^{n} d_k \cdot 2^{n-k}}$$

$$\text{其中 } d_k = R_1\left\{\left|R_{k+1}(X) - 2^k - 0.5\right| - 0.5\right\} + \left[2^{-R_{k+1}(X)}\right]$$

公式的化簡 END！！！

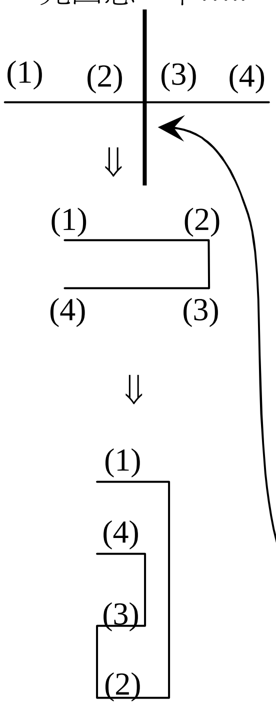
四、性質推廣

(一) 反函數　$f_n(a) = b$; $f_n(b) = a$　即 $f_n = f_n^{-1}$

在這裡補充說明：我們發現對折函數其實就是其本身的反函數，如：

$f_8(17)=3 \Leftrightarrow f_8(3)=17$

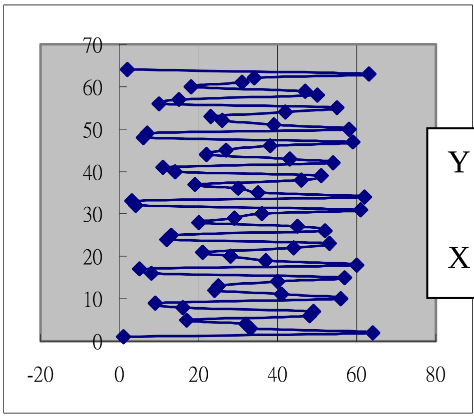
先回想一下…..



舉兩折為例，紙條的對折，總是先取頭 (1)，再取尾(4)，再取中間的右邊(3)，再取中間的左邊(2)。

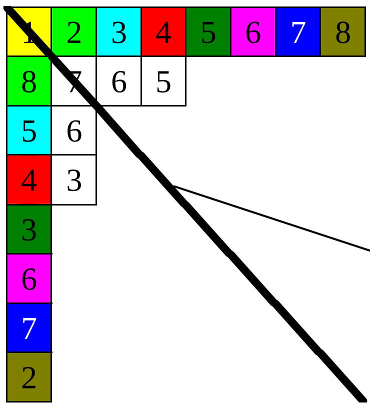
∵由下面數列中數字取出的先後圖可知：

找一個折數多的例子來看，



Y 軸(↓)：取數的順序

X 軸(⟶)：原數列



取數字時總是以中軸對稱來取數字，如：最後一個數是第二個被取、而第二個數卻是最後一個被取，就是這種關係，讓反函數恰等於原函數。(若欲仔細解釋，只要用到前面的「群組看」觀念就可以了)。把這抽象的觀念用平面表示，就會得到左方這個圖：

對稱軸：根據實際折法畫出，原紙條數列會和對折數列的移動路線，會以此軸作對稱；而對折數列也可用此軸展回原紙條數列…

故：對折函數其實就是其本身的反函數

(二) 同折數 **n**，第 **1**、**2** 序項，第 **3**、**4** 序項，**..**之和為定值 2^n+1。

如，折三次的數列、即 8 個數為例：1、8、5、4、3、6、7、2

$1+8 = 5+4 = 3+6 = 7+2 = 9 = 2^3+1$

1	1	1	1	相加 →	2 1 1 1
1	0	0	0		
1	0	1	1	相加 →	2 1 1 1
1	1	0	0		
1	1	0	1	相加 →	2 1 1 1
1	0	1	0		
1	0	0	1	相加 →	2 1 1 1
1	1	1	0		

為什麼那麼巧呢?????
因為
第一排永遠是 1
第二排以(1001)作循環
第三排以(10100101)作循環
…(101010010101)………
最後一排以(10)循環填滿最後一項
第 a 奇數序和第 a+1 序
根據第 7 頁到第 12 頁的數列的由來
發現剛剛好 1 與 0 會錯開…所以得証。

(三) 不動點 $f_n(X) = X$

1.我們發現有些數字，在折完後，其排序與其本身數恰同，即 $f_n(X) = X$。

2.第一個規律(推出下一列所有不動點的前半)：

折奇數次之間和折偶數次之間可推出不動點的前半(即 X＝1.3.5.7…之間或 X＝2.4.6.8…X 為折幾次)。若第 X 列第某個不動點是奇數，則第 X+2 列同樣第某個不動點會是那個奇數乘以二減一；若第某個不動點是偶數，就直接乘以二。

3.第二個規律(推出下一列所有不動點的後半)：

這必須要分成 X＝奇數或 X＝偶數來分開討論；

X＝奇數時，找到不動點之後，寫成兩排(第一排由左寫到右，第二排由右寫到左)。

舉例；X＝5 這樣就可以推出後半部的不動點。

1	8	12	13
31	26	22	19
兩兩之和為 2^5	兩兩之和為 2^5+2	兩兩之和為 2^5+2	兩兩之和為 2^5

X＝偶數時，和均是 2^5

P.S.：若超過八個不動點(例：X=7 時，就有 16 個不動點)，

還是要寫成兩排，再同樣以上下各四個(八個)為單位。

4.不動點的個數為 2、2、4、4、8、8、16、16、…即 $N(x) = 2^{\left[\frac{x+1}{2}\right]}$

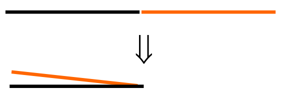
5.後續研究將朝這個方向研究，證明不動點的規律。

(四)折法推廣

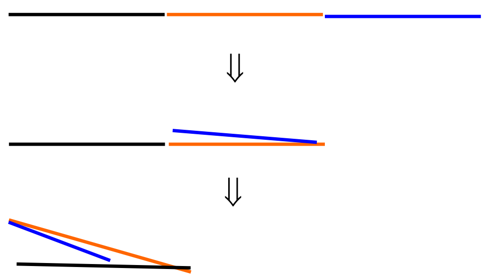
對折數列的性質，是否能推廣至其他折法呢？經過我們小組的研究，也發現了三分對折法數列的規律。這種可任意拓展的連貫性質，實在令我們驚訝……

1.先來說說我們對”對摺數列”的定義與分類：

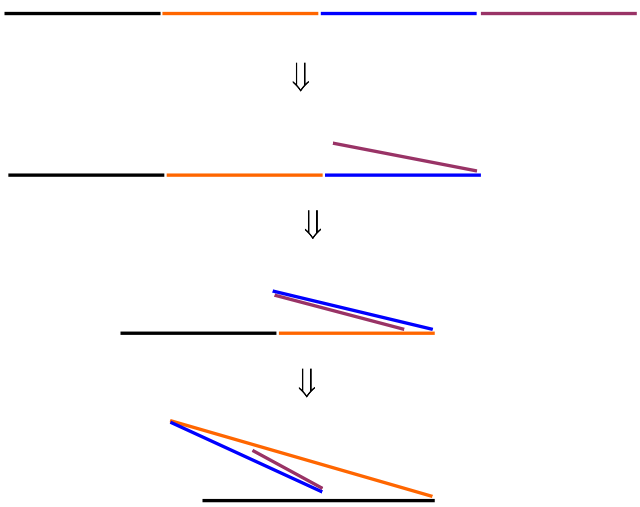
本次**探討**的主角：對摺數列，二分對折法(我們**簡稱 ”對折”**)



三分對折法：



四分對折法：(誇張地畫)



依此類推，會有

「五分折法」、「六分折法」、「七分折法」、「八分折法」、「九分折法」…的數列相繼出現…

2.三分對折法規律如下：（當然還是要用三進位變形表示法）

三分折一次：

$1=1\times3^{1}-2\times3^{0}$

$3=1\times3^{1}-0\times3^{0}$

$2=1\times3^{1}-1\times3^{0}$

三分折兩次：

$1=1\times3^{2}-2\times3^{1}-2\times3^{0}$

$7=1\times3^{2}-0\times3^{1}-2\times3^{0}$

$6=1\times3^{2}-1\times3^{1}-0\times3^{0}$

$3=1\times3^{2}-2\times3^{1}-0\times3^{0}$

$9=1\times3^{2}-0\times3^{1}-0\times3^{0}$

$4=1\times3^{2}-1\times3^{1}-2\times3^{0}$

$5=1\times3^{2}-1\times3^{1}-1\times3^{0}$

$8=1\times3^{2}-0\times3^{1}-1\times3^{0}$

$2=1\times3^{2}-2\times3^{1}-1\times3^{0}$

三分折三次：

$1=1\times3^{3}-2\times3^{2}-2\times3^{1}-2\times3^{0}$

$19=1\times3^{3}-0\times3^{2}-2\times3^{1}-2\times3^{0}$

$18=1\times3^{3}-1\times3^{2}-0\times3^{1}-0\times3^{0}$

$7=1\times3^{3}-2\times3^{2}-0\times3^{1}-2\times3^{0}$

$25=1\times3^{3}-0\times3^{2}-0\times3^{1}-2\times3^{0}$

$12=1\times3^{3}-1\times3^{2}-2\times3^{1}-0\times3^{0}$

$13=1\times3^{3}-1\times3^{2}-1\times3^{1}-2\times3^{0}$

$24=1\times3^{3}-0\times3^{2}-1\times3^{1}-0\times3^{0}$

$6=1\times3^{3}-2\times3^{2}-1\times3^{1}-0\times3^{0}$

$3=1\times3^{3}-2\times3^{2}-2\times3^{1}-0\times3^{0}$

$21=1\times3^{3}-0\times3^{2}-2\times3^{1}-0\times3^{0}$

$16=1\times3^{3}-1\times3^{2}-0\times3^{1}-2\times3^{0}$

$9=1\times3^{3}-2\times3^{2}-0\times3^{1}-0\times3^{0}$

$27=1\times3^{3}-0\times3^{2}-0\times3^{1}-0\times3^{0}$

$10=1\times3^{3}-1\times3^{2}-2\times3^{1}-2\times3^{0}$

$15=1\times3^{3}-1\times3^{2}-1\times3^{1}-0\times3^{0}$

$22=1\times3^{3}-0\times3^{2}-1\times3^{1}-2\times3^{0}$

$4=1\times3^{3}-2\times3^{2}-1\times3^{1}-2\times3^{0}$

$5=1\times3^{3}-2\times3^{2}-1\times3^{1}-1\times3^{0}$

$23=1\times3^{3}-0\times3^{2}-1\times3^{1}-1\times3^{0}$

$14=1\times3^{3}-1\times3^{2}-1\times3^{1}-1\times3^{0}$

$11=1\times3^{3}-1\times3^{2}-2\times3^{1}-1\times3^{0}$

$26=1\times3^{3}-0\times3^{2}-0\times3^{1}-1\times3^{0}$

$8=1\times3^{3}-2\times3^{2}-0\times3^{1}-1\times3^{0}$

$17=1\times3^{3}-1\times3^{2}-0\times3^{1}-1\times3^{0}$

$20=1\times3^{3}-0\times3^{2}-2\times3^{1}-1\times3^{0}$

$2=1\times3^{3}-2\times3^{2}-2\times3^{1}-1\times3^{0}$

依照第 **6** 頁的方法合併係數：

1	2	2	2
1	0	2	2
1	1	0	0
1	2	0	2
1	0	0	2
1	1	2	0
1	1	1	2
1	0	1	0
1	2	1	0
1	2	2	0
1	0	2	0
1	1	0	2
1	2	0	0
1	0	0	0
1	1	2	2
1	1	1	0
1	0	1	2
1	2	1	2
1	2	1	1
1	0	1	1
1	1	1	1
1	1	2	1
1	0	0	1
1	2	0	1
1	1	0	1
1	0	2	1
1	2	2	1

3.由上頁的情況配合實際演練的觀察，我們歸納出一系列的規律：

設　$f_n(X)_3$ 代表 3 分對折法折 n 次求第 X 序的值~

$$f_n(X)_3 = 3^n - d_1 \times 3^{n-1} - d_2 \times 3^{n-2} - d_3 \times 3^{n-3} - \cdots\cdots - d_n \times 3^0$$

則 d_1 規律如下:

201

⇓

201，201，102

⇓

201 201 102，201 201 102，201 102 102

就是循環規律重複寫一次再倒著寫回來……d_1 規律不變

則 d_2 規律如下:

220

⇓

220，002，111

⇓

220 002 111，220 002 111，111 200 022

就是循環規律重複寫一次再倒著寫回來…….

則 d_3 規律如下:

220

⇓

220，220，200

⇓

220 220 200，002 002 022，111 111 111

就是循環規律重複寫一次再倒著寫回來…….

但是從 d_2 和 d_3 開始數字會<u>稍微改變</u>，但並不是沒有規律或是規律失效，因為在我們實際手算後發現，稍微改變的數字間是有一定規律出現的，這表示只要適當的加入修正項，就可以再寫出 ”三分對折法” 的公式；就如化學週期表的’’過渡元素’’和’’內過渡元素’’的電子組態的道理一樣，因為同一段紙條在使用三分對折法時，又會在雙重摺疊，導致數列關係複雜。當然，四分對折法更為複雜喲！！

五、應用：

(一)

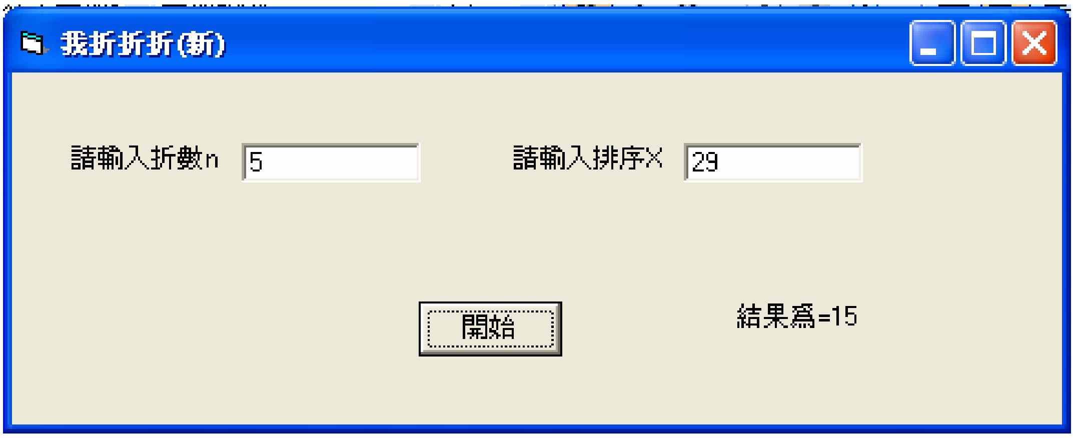
1.回到對折主題了，我們試著把函數電腦程式化：

$$\text{定義}\begin{cases} n\text{表折數};X\text{表折後數列中數字的排序}(n\,,X\text{皆是正整數})\,,\text{且}X \le 2^n \\ f_n(X)\text{爲所求的函數値}\,,\text{且}f_n(X) \le 2^n \\ \text{定義}R_k(X)\text{表示}X \div 2^k\text{之餘數}\,,\text{且}0 \le R_k(X) < 2^k \end{cases}$$

$$f_n(X) = 2^n - \sum_{k=1}^{n} d_k \cdot 2^{n-k}$$

$$\text{其中}\,d_k = R_1\left\{\left|R_{k+1}(X) - 2^k - 0.5\right| - 0.5\right\} + \left[2^{-R_{k+1}(X)}\right]$$

成果如下：若對折 n 次，問第 29 個數什麼…………答案是 15 !!!



Visual Basic 程式碼：

```
a1 = 2 ^ n
For k = 1 To X
    b1 = Abs(X Mod (2 ^ (k + 1)) - 2 ^ k - 0.5)
    b2 = b1 - 0.5
    c1 = Int(2 ^ -(X Mod (2 ^ (k + 1))))
    d1 = b2 Mod 2
    e1 = d1 + c1
    ff = e1 * 2 ^ (n - k)
    dd = dd + ff
Next k
output = a1 - dd
```

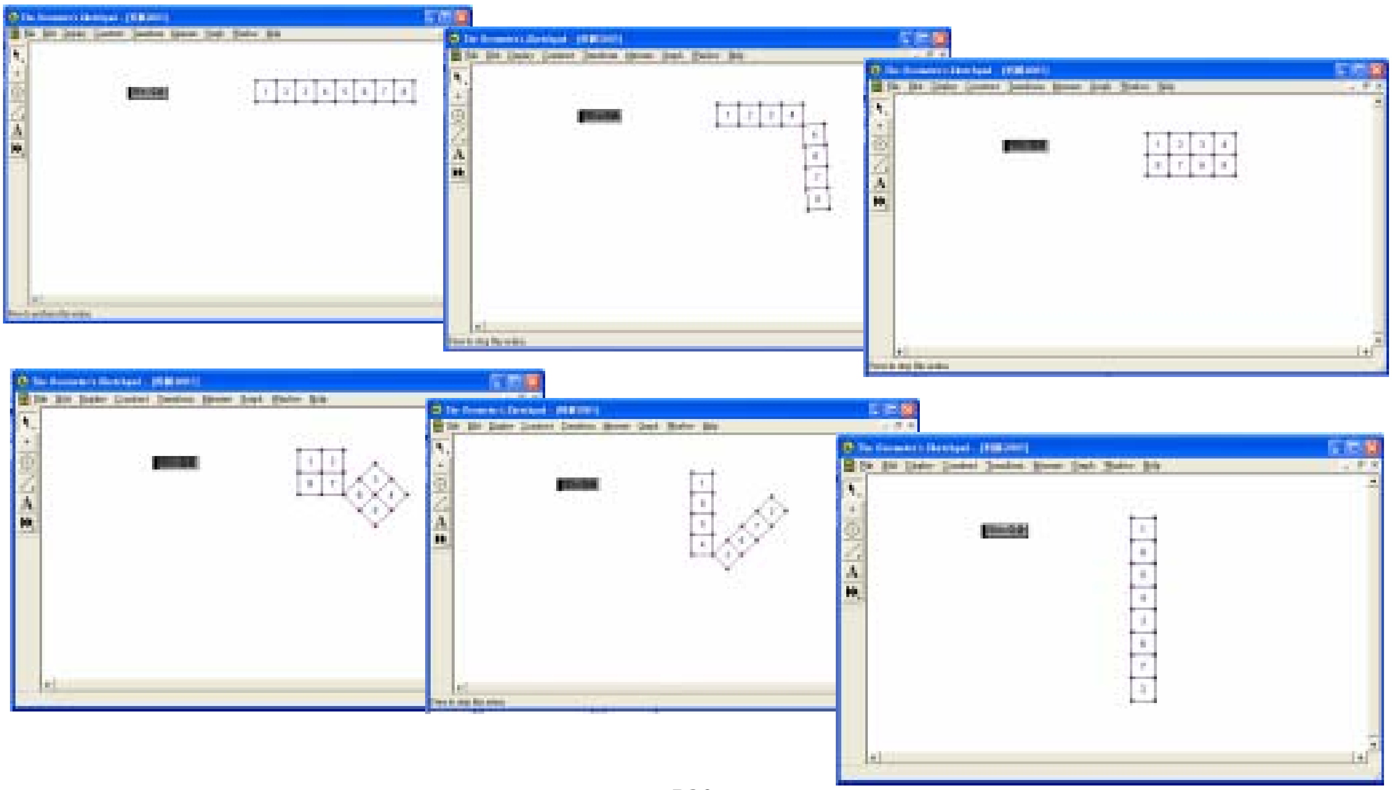
2.順便試試看以前的舊程式碼：果然比較長一點

$$f_n(X)=2^n-\sum_{k=1}^{n}\left\{r_2\left(\left|r_{2^{k+1}}(X)-2^k+\frac{\dfrac{r_{2^{k+1}}(X)-2^k-\frac{1}{2}}{\left|r_{2^{k+1}}(X)-2^k-\frac{1}{2}\right|}+1}{2}\right|\right)+\left[2^{-r_{2^{k+1}}(X)}\right]\right\}\times 2^{n-k}$$

```
a1 = 2 ^ n
For k = 1 To X
    b1 = Abs(X Mod (2 ^ (k + 1)) - (2 ^ k) - 0.5)
    b2 = X Mod (2 ^ (k + 1)) - (2 ^ k) - 0.5
    c1 = ((b2 / b1) + 1) / 2
    c2 = X Mod ((2 ^ (k + 1))) - (2 ^ k)
    c3 = Abs(c1 + c2)
    d1 = c3 Mod 2
    d2 = Int(2 ^ -(X Mod (2 ^ (k + 1))))
    sg = d1 + d2
    ee = 2 ^ (n - k)
    sg2 = sg * ee
    sm = sm + sg2
Next k
output = a1 – sm
```

(二)動畫

GSP 目前成果：按下”Action Button”後…



(三)

1941 年日本發動太平洋戰爭，直接攻擊美國。但到了 1942 年春，中途島戰役扭轉了戰爭的方向，四艘日本航空母艦沉屍海底，終止了日軍前進，日本從此由進攻變成防守。然而當時日本卻擁有最優秀的零式戰鬥機、8 艘航母；而美國卻只有一兩艘航母與一些臨時拼湊的年輕飛行員而已。歸咎其失敗主因，只是日本的通訊密碼被破解……

現在我們的二分對折法函數也可以應用來進行加密訊息….

例如：先把 ABC...Z 分別編碼成 1、2、3、…、26，如果長官下一道指令：

「ATTACK THE PEARL HARBOR」

變成「1,20,20,1,3,11,20,8,5,16,5,1,18,12,8,1,18,2,15,18」

那麼我們就分別代入 P19 的電腦函數， 若 n=9，得：

「1 224 224 1 257 54 321 224 128 129 64 129 480 192 128 1 480 5 12 449 480 123」

那麼收方該如何解密呢?還記得這個**函數等於它的反函數**吧！

所以只要將「1 224 224 1 257 54 321 224 128 129 64 129 480 192 128 1 480 5 12 449 480 123」再**代回，就可以迅速還原指令了**。這個方法的優點算很多！因為函數等於反函數，所以在翻譯指令時很方便；又 n 值在發出前可以隨機選定，把 n 值藏在句子某處再送出，每句話 n 值隨時在變，敵方不能歸納，因為 n 不一樣，句子就不一樣，誤導解讀方向。上例用參數 m=123 指示 6n=54(9 的 6 倍)的位置，亦即將 n 的值儲存在動態位址，用另一個參數 m 表示位址，更可增加破解的難度。現有的編碼技術搭配我們的函數，更能增加編碼的安全性。

柒、討論

本次研究中，所謂 10010101‧‧‧‧的規則循環佔了舉足輕重的地位，因爲它是連接傳統折法與函數關係的關鍵。真實摺紙操作，在折數很大時，容易混亂，速度也會非常慢，準確度更是不佳。但現在我們只需用紙筆算，就可以準確、迅速的求出數值，不用親自動手摺紙、抄錄，且最大的優點就是折數、序數在隨意指定時，仍可迅速且正確的算出(也有電腦程式可用)。還有，不管是幾分對折法，或是「谷折配合山折」也好，爲什麼幾乎都有循環呢？這幾類不同的摺紙方式之間到底有什麼關聯？而且爲什麼折數由少到多時，多折數列的係數永遠與折數少的吻合？這值得做更進一步的研究與探討。

捌、結論

<u>一、我們已知 ”折數 n” 與 “序數 X” 時，只要帶入”手算專用公式 ” 即可:</u>

$$f_n(X) = 2^n - \sum_{k=1}^{n}\left\{(r(\frac{X}{2^{k+1}}) - 2^k) \xrightarrow{\text{負奇數 或 正偶數}} \text{寫}1(\text{其他寫}0)\right\} \times 2^{n-k}$$

<u>二、當我們已知 ”折數 n” 與 “序數 X” 時，只要帶入”電腦算專用公式 ” 即可:</u>

$$f_n(X) = 2^n - \sum_{k=1}^{n} d_k \cdot 2^{n-k}$$

$$\text{其中}\, d_k = R_1\left\{\left|R_{k+1}(X) - 2^k - 0.5\right| - 0.5\right\} + \left[2^{-R_{k+1}(X)}\right]$$

三、*函數等於其反函數*　$f_n(a) = b\,;\, f_n(b) = a$　即 $f_n = f_n^{-1}$

四、對折數列在同折數 n，第 1、2 序項，第 3、4 序項，..之和爲定值 $2^n + 1$。

五、已找到且需要進一步證明的性質：

(一)需要再證明所發現的 ”序、值不動點” 規則 $f_n(X) = X$

(二)正如「柒、討論」所言，雖然我們好不容易找到對折數列公式，但從本主題二分對折的數列，進一步推廣到其他種類的摺紙數列，應有一個更廣義的函數可以用來描述此現象，就如 F=ma 是 $F = \frac{dm}{dt}v + \frac{dv}{dt}m$ 的狹義部份罷了，也就可以整合所有摺紙數列。

玖、參考資料及附件

一、中華民國第四十四屆中小學科展、數學科、作品名稱：摺出排列的奧妙－摺紙的規則與探討。

二、高級中數學課本一年級上學期第一章：函數與反函數

三、高級中數學課本一年級上學期第三章：數列與級數

四、旗標出版公司 Visual Basic.NET 教本；王國榮著

五、國中幾何動動動（二）；作者：邢維禮；聯經出版事業股份有限公司；用 GSP 幾何繪圖軟體，簡易的構圖、圖形的變換，與各種測量和運算

附件一：實際操作的範例：

$$1,2 \Rightarrow \begin{array}{c}1\\2\end{array}$$

$$1,2,3,4 \Rightarrow \begin{array}{cc}1&2\\4&3\end{array} \Rightarrow \begin{array}{c}1\\4\\3\\2\end{array}$$

$$1,2,3,4,5,6,7,8 \Rightarrow \begin{array}{cccc}1&2&3&4\\8&7&6&5\end{array} \Rightarrow \begin{array}{cc}1&2\\8&7\\5&6\\4&3\end{array} \Rightarrow \begin{array}{c}1\\8\\5\\4\\3\\6\\7\\2\end{array}$$

$$1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15,16 \Rightarrow \begin{array}{cccccccc}1&2&3&4&5&6&7&8\\16&15&14&13&12&11&10&9\end{array} \Rightarrow \begin{array}{cccc}1&2&3&4\\16&15&14&13\\9&10&11&12\\8&7&6&5\end{array}$$

$$\Rightarrow \begin{array}{cc}1&2\\16&15\\9&10\\8&7\\5&6\\12&11\\13&14\\4&3\end{array} \Rightarrow \begin{array}{c}1\\16\\9\\8\\5\\12\\13\\4\\3\\14\\11\\6\\7\\10\\15\\2\end{array}$$

附件二：本次折紙數列的一些例子:　（紅字是不動點）

折 1 折

1	1
2	2

折 2 折

1	1
2	4
3	3
4	2

折 3 折

1	1
2	8
3	5
4	4
5	3
6	6
7	7
8	2

折 4 折

1	1
2	16
3	9
4	8
5	5
6	12
7	13
8	4
9	3
10	14
11	11
12	6
13	7
14	10
15	15
16	2

折 5 折

1	1
2	32
3	17
4	16
5	9
6	24
7	25
8	8
9	5
10	28
11	21
12	12
13	13
14	20
15	29
16	4
17	3
18	30
19	19
20	14
21	11
22	22
23	27
24	6
25	7
26	26
27	23
28	10
29	15
30	18
31	31
32	2

折 6 折

1	1
2	64
3	33
4	32
5	17
6	48
7	49
8	16
9	9
10	56
11	41
12	24
13	25
14	40
15	57
16	8
17	5
18	60
19	37
20	28
21	21
22	44
23	53
24	12
25	13
26	52
27	45
28	20
29	29
30	36
31	61
32	4
33	3
34	62
35	35
36	30
37	19
38	46

折 7 折

1	1
2	128
3	65
4	64
5	33
6	96
7	97
8	32
9	17
10	112
11	81
12	48
13	49
14	80
15	113
16	16
17	9
18	120
19	73
20	56
21	41
22	88
23	105
24	24
25	25
26	104
27	89
28	40
29	57
30	72
31	121
32	8
33	5
34	124
35	69
36	60
37	37
38	92

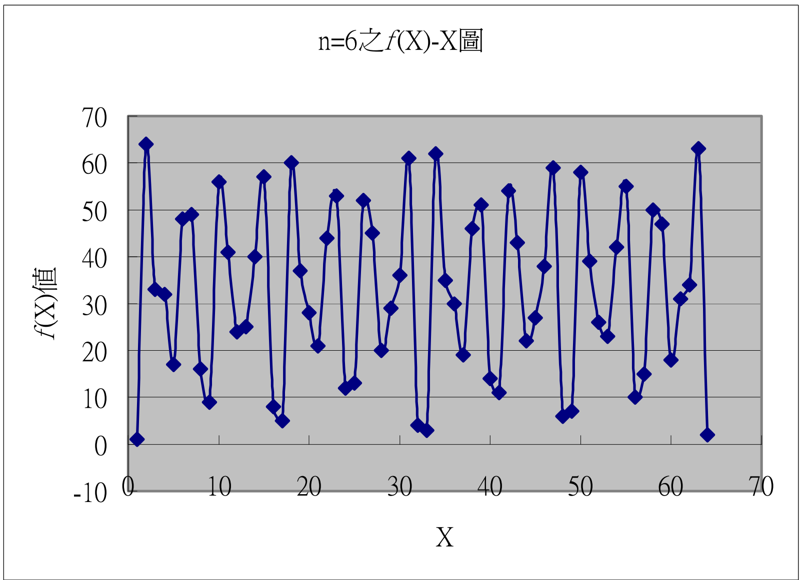
39	51
40	14
41	11
42	54
43	43
44	22
45	27
46	38
47	59
48	6
49	7
50	58
51	39
52	26
53	23
54	42
55	55
56	10
57	15
58	50
59	47
60	18
61	31
62	34
63	63
64	2

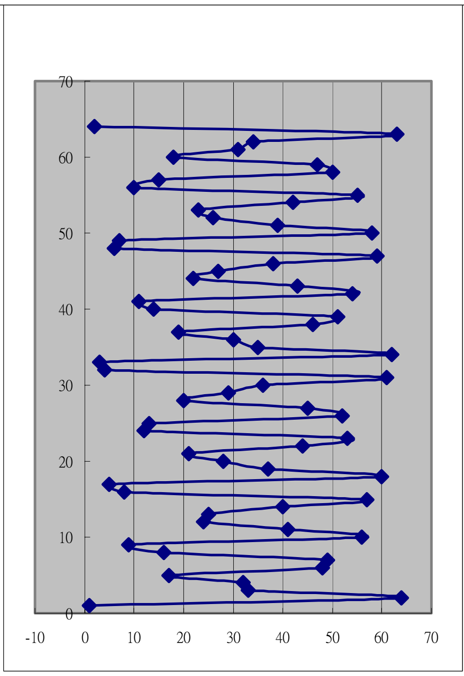
39	101
40	28
41	21
42	108
43	85
44	44
45	53
46	76
47	117
48	12
49	13
50	116
51	77
52	52
53	45
54	84
55	109
56	20
57	29
58	100
59	93
60	36
61	61
62	68
63	125
64	4
65	3
66	126
67	67
68	62
69	35
70	94
71	99
72	30
73	19
74	110
75	83
76	46
77	51
78	78

79	115
80	14
81	11
82	118
83	75
84	54
85	43
86	86
87	107
88	22
89	27
90	102
91	91
92	38
93	59
94	70
95	123
96	6
97	7
98	122
99	71
100	58
101	39
102	90
103	103
104	26
105	23
106	106
107	87
108	42
109	55
110	74
111	119
112	10
113	15
114	114
115	79
116	50
117	47
118	82

119	111
120	18
121	31
122	98
123	95
124	31
125	63
126	66
127	127
128	2

附件三：





這是對折六次的紙條，兩個圖分別代表固定 n 的時候， X 對 $f_n(X)$(上) 與 $f_n(X)$ 對 X(下) 在疊合之後是對稱於 X=Y

中華民國第四十五屆中小學科學展覽會
評　　語

高中組 數學科

040412

我折、我折、我折折折

國立臺中第一高級中學

評語：

1. 優點：設計電腦程式來輔助數字運算。
2. 恰當數學符號使用，能引發數學分析。