中華民國第四十五屆中小學科學展覽會
作品說明書

高中組 數學科

最佳創意獎

040411
切割三角形之必勝策略

國立彰化高級中學

作者姓名：
高二 游鎧蔚 高二 林易徵 高二 吳侑璁
高二 陳世哲

指導老師：
王聖輝

壹、研究動機

國小時就常和同學一起玩數學小遊戲，相當喜歡這種「想想看」的感覺。高一時考環球城市盃數學競賽，題目中有一題令我百思不解，後來和同學提起這個遊戲，發現大家對這題也都沒什麼好辦法，經過幾天討論之後，終於把題目解決了！不過我卻又發覺這個遊戲在加以變化之後，又可以有不同的玩法與解法！恰好當時我們也學到「排列組合」這一章，其中樹狀圖的概念和我當時的解法可說大同小異。當下我們就決定要繼續挑戰這個既繁且雜令人又愛又恨的遊戲。

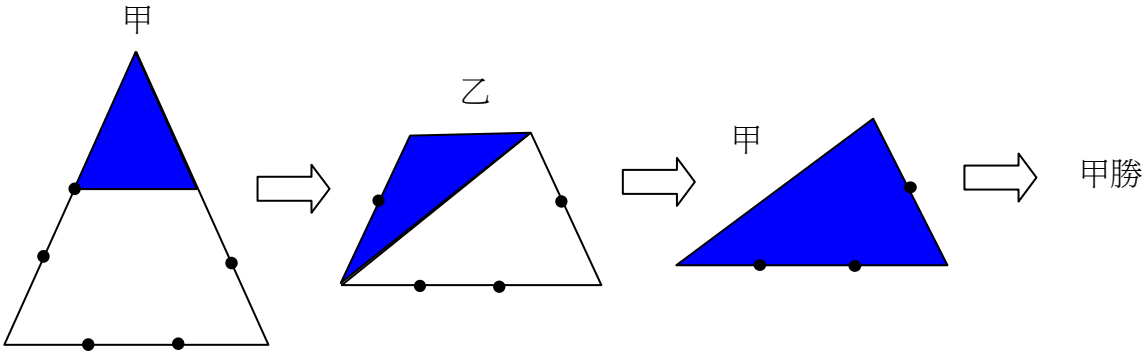
*因爲任意三角形被切掉一塊一塊的小三角形後，會剩下一塊凸多邊形，所以我們發展了下列三種不同的玩法

A 玩法：任意凸多邊形的邊上取任意多個點，玩家可以把這塊任意邊形沿著切割線切割成較小塊的三角形，然後取走自己切的這塊三角形，切到最後拿到最後一塊三角形的人就獲勝了。但遊戲規則有些基本規則如下：

一、必須切割三角形，可以切割任意大小的三角形。

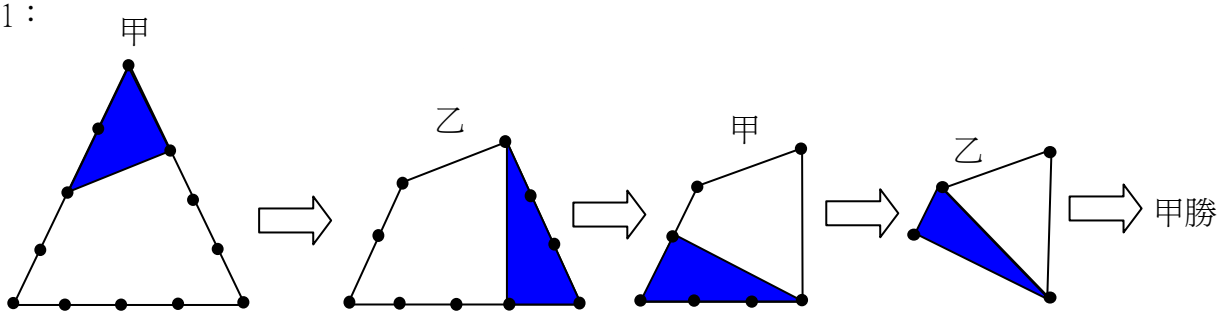
二、切割線必須是點（或頂點）和點的連線。

例：

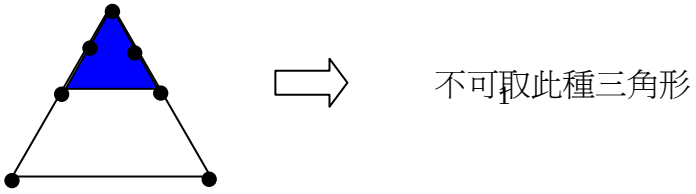


B 玩法：遊戲規則與 A 玩法相同，假設三角形各邊上的分點數不超過 n 個，限定每一次所能取的三角形只能一邊有分點，而分點數不超過 n，且其他二邊皆無點。如果某邊上還有分點，就必須再切割。

例 1：

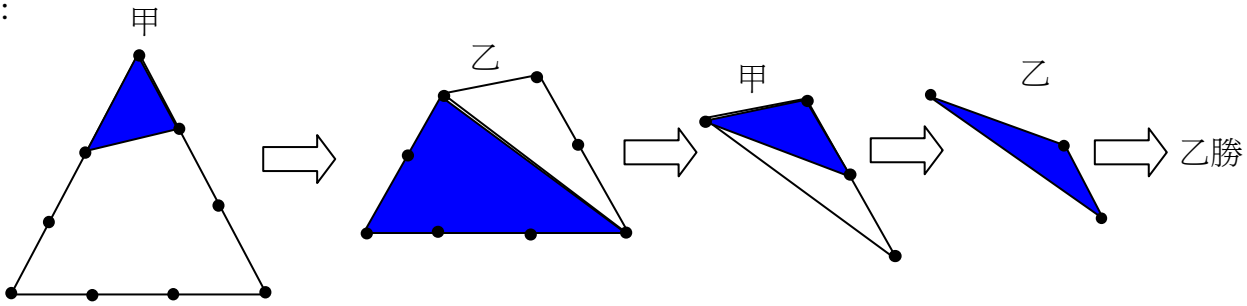


例 2：

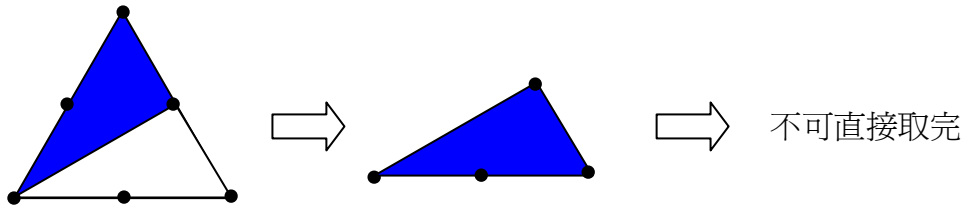


C 玩法：遊戲規則與 A 玩法相同，但若某邊上還有分點，就必須再切割。也就是說，必須切到邊上無分點爲止。

例 1：



例 2：



貳、研究目的

嘗試在 A、B、C 三種玩法中，找出

一、當圖形爲任意三角形時，先、後手之必勝策略。

二、當圖形爲凸 n 邊形，先後手必勝策略又會如何？

三、證明這些必勝策略，並比較這些必勝策略之間的關係。

四、寫出能應用此遊戲的程式

參、研究過程或方法

一、定義與符號

(一)若無特別聲明，本文所稱的多邊形均指凸 n 邊形。

(二)設凸n邊形其各邊上的點數依次爲a_1，a_2，、、、、，a_n(不包括頂點)，則將此凸n邊形表示爲(a_1，a_2，、、、、，a_n)。定義f_A(a_1，a_2，、、、、，a_n) = 0 爲A玩法中先手獲勝；f_A (a_1，a_2，、、、、，a_n) = 1 爲A玩法中後手獲勝。f_A (a_1，a_2，、、、、，a_n) = x爲進行A玩法時勝負未定。f_B 與f_C的定義同f_A。

(三)定義f_i (a_1，a_2，、、、、，a_n) = (b_1，b_2，、、、、，b_m)爲：經過一次切割的n邊形，邊上的點數由a_1，a_2，、、、、，a_n改變爲b_1，b_2，、、、、，b_m。若i=A，B，C，表示f的切割在何種玩法下進行。定義f_i (a_1，a_2，、、、、，a_n) = f_i (b_1，b_2，、、、、，b_m)爲：對(a_1，a_2，、、、、，a_n) 及 (b_1，b_2，、、、、，b_n)而言，兩者和f_i作用後會有相同的結果。

(四) f(a_1，a_2，、、、、，a_n)= x，若n爲奇數，則稱此函數爲奇邊函數。

$f(a_1，a_2，、、、、，a_n)= x$，若n爲偶數，則稱此函數爲偶邊函數。

(五)定義遊戲中甲爲先手，乙爲後手。

(六)定$f_i(a_1，a_2，、、、、，a_n)=f_A(b_1，b_2，、、、、，b_n)$表示$(a_1，a_2，、、、、，a_n)$與$(b_1，b_2，、、、、，b_n)$兩者同義(等價)。

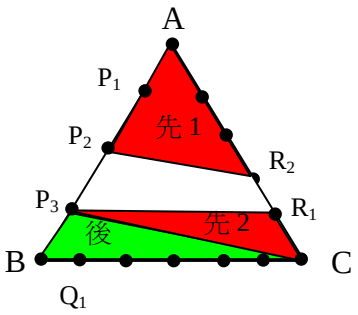
(七)定$f_i(x)= (a_1，a_2，、、、、，a_n)$表示，從任意圖形開始切割，均可對應到$(a_1，a_2，、、、、，a_n)$的結果。

二、A 規則的必勝策略

（一）三角形

若 n、m、k 中任兩數≥2，則先手必勝。其策略如下：

當$f_A(n，m，k) = (o，1，p，1)$時，$f_A(n，m，k) = 0$(且p可爲 n、m、k 中任一數)



（二）四邊形

1.$f_A(0，0，0，0) = x$，當$f_A(x) = (0，0，0)$時，$f_A(0，0，0，\ \ 0) = 1$

*我們定$f_A(0，0，0，0) = 1$爲A玩法四邊形公式 1

2.$f_A(0，n，0，n) = x$，當$f_A(x) = (0，0，0，0)$時，$f_A(0，n，0，n$ 三角形-1

***對稱切法：不論對方取什麼三角形，我方均跟著對方取相對位置相同的圖形**

*我們定$f_A(0，n，0，n) = 1$爲A玩法四邊形公式 2

3.當$f_A(0，n，m，k) = (0，n，0，n)$時，$f_A(0，n，m，k) =0$

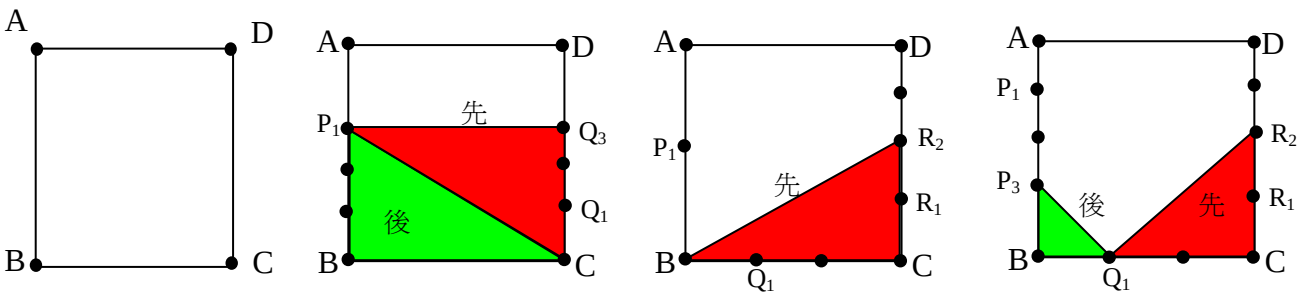
4.$f_A(0，n，m，n)$：

若$n = 2k$，當$f_A(0，n，m，n) = (0，n，0，0，n-1)$ 時，$f_A(0，n，m，n) = 0$

若$n = 2k+1$，$f_A(0，n，m，n) = x$ ，當 $f_A(x) = (0，k，0，0，k+1)$ 時，

$f_A(0，n，m，n)= 1$

***我們定$f_A(0，n，m，n) = 1$(n爲奇數)爲A玩法四邊形公式 3**



5.f_A (0，n，n，n)：

若 n = 2k，當f_A (0，n，m，n) = (0，n，0，0，n-1)時，f_A (0，n，m，n) =0

若 n = 2k+1，f_A (0，n，m，n) = x，當f_A (x) = (0，t，0，0，t+1) or (0，t，0，t)時，f_A (0，n，m，n)=1

四邊形 A-1　n，m) = (0　四邊形 A-2　1)(n爲奇　四邊形 A-3　，n) 時，四邊形 A-4

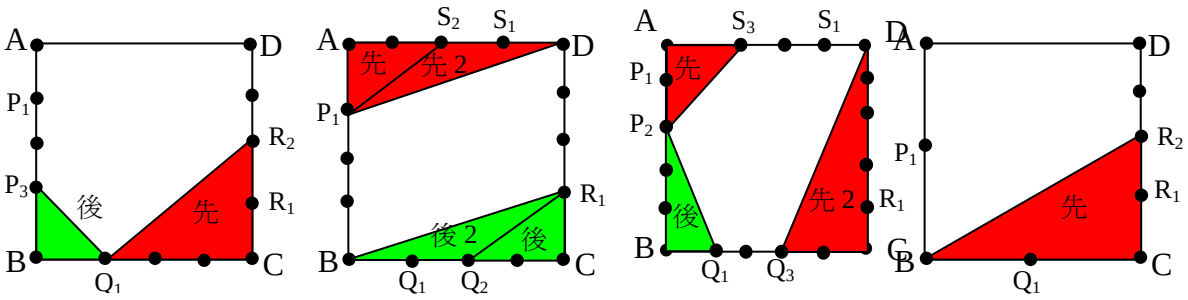
f_A (0，n，n，m) = 0

7.f_A (n，n，n，n) = x，當f_A (x) =偶邊函數(0，……，0，n，0，……，0，n）時，f_A (n，n，n，n) =1

8. f_A (n，n，n，m) ：

若 n、m兩數中，最小的數爲奇數，則當f_A（n，n，n，m）=(0，n，n，n）時，f_A（n，n，n，m）= 0

若 n、m兩數均爲偶數，則f_A（n，n，n，m）= x ，當f_A (x) = (0，n，0，n) or (0，k，n+k-1，0，n+2k) or (0，0，n，0，0，n)時，f_A（n，n，n，m）= 1



四邊形 A-5　四邊形 A-6　四邊形 A-7　四邊形 A-8

綜合上述的結果，我們歸納出四邊形的大一統定理：

1.若 n、m、h、k 四數中，最小的數 n 爲奇數，則先手必勝之策略如下：

當f_A（n，m，h，k）=（0，n，q，n）時，f_A（n，m，h，k）= 0 。

2.若 n、m、h、k 四數中，n、m、h、k 四數均爲偶數，則後手必勝之策略如下：

f_A（n，m，h，k）= x，當f_A（n，m，h，k）= (0，q，0，q) or (0，q，k，0，q+k-1) 時，f_A（n，m，h，k）= 1。

（三）五邊形

1.f_A (0，0，n，0，n+1)(n爲奇數) = x，當f_A (x) = (0，0，n，0，n+1)(n爲奇數) or (0，n，0，n)時，f_A (0，0，n，0，n+1)(n爲奇數) = 1

*我們定$f_A(0,0,n,0,n+1)=1$(n爲奇數)爲A玩法五邊形公式 1

2. $f_A(0,0,n,n,n)$ ：

若n = 2k，當$f_A(0,0,n,n,n)=(0,0,n,0,n-1)$時，

$f_A(0,0,n,n,n)=0$

若n = 2k+1，$f_A(0,0,n,n,n)=x$，當$f_A(x)=(0,n,n,n)=1$

3. $f_A(0,0,n,m,n)$：

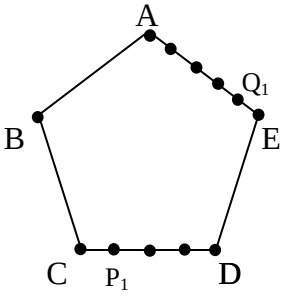
若n = 2k，當$f_A(0,0,n,m,n)=(0,0,n,0,n-1)$時，

$f_A(0,0,n,m,n)=0$

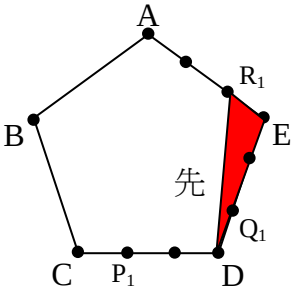
若n = 2k+1，當$f_A(0,0,n,m,n)=(0,n,m,n)$時 ，

$f_A(0,0,n,m,n)=0$

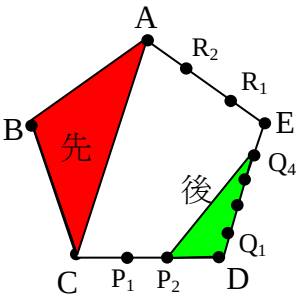
4.當$f_A(0,n,0,m,n)=(0,n,0,n)$時，$f_A(0,n,0,m,n)=0$



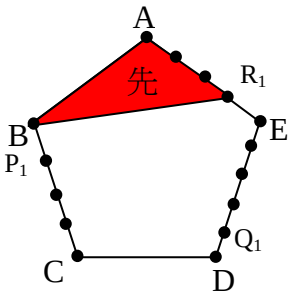
五邊形 A-1



五邊形 A-2



五邊形 A-3



五邊形 A-4

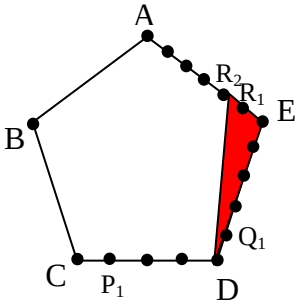
5.當$f_A(0,0,n,m,k)=(0,0,n,0,n-1)$時，$f_A(0,0,n,m,k)=0$

6.當$f_A(0,n,0,n,n)=(0,n,0,n)$ 時， $f_A(n,0,n,0,n)=0$

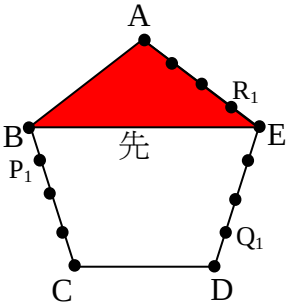
7.當$f_A(0,0,n,m,m)=(0,0,n,0,0,n)$ or (0， 0，m，0，0，m) 時，

$f_A(0,0,n,m,m)=0$

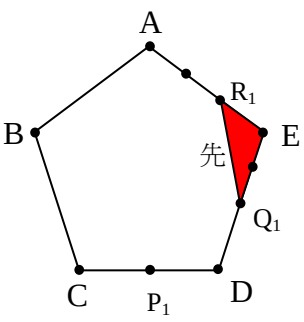
8.當$f_A(0,n,n,n,n)=(0,n,0,n)$ 時，$f_A(0,n,n,n,n)=0$



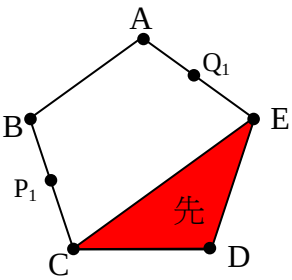
五邊形 A-5



五邊形 A-6



五邊形 A-7



五邊形 A-8

9. f_A (0，q，k，0，q+k-1) =1，且k與n+k-1 可互調。

*我們定f_A (0，n，m，0，n+m-1)= 1 爲A玩法五邊形公式 2

10. f_A (0，n，m，n，m)：

若 n、m有一數 = 2k，當f_A (0，n，m，n，m) = (0，n，m，n)時，

f_A (0，n，m，n，m) =0

若 n、m均爲偶數，f_A (0，n，m，n，m) = (0，k，n+k-1，0，n+k) 時，

f_A (0，n，m，n，m)= 0

11. f_A (0，n，n，m，m)：

若最小數爲奇數，當f_A (0，n，n，m，m) = (0，0，0，n，n，n)時，

f_A (0，n，n，m，m) = 0

若 n、m均爲偶數，當f_A (0，n，n，m，m) = (0，n，m，0，n+m-1) 時，

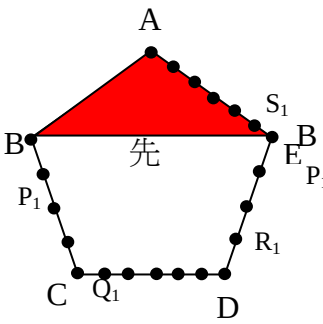
f_A (0，n，n，m，m) = 0

12. f_A (0，n，n，n，m)：

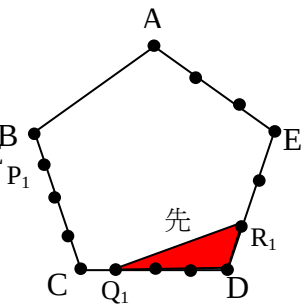
若 n = 2k+1，當f_A (0，n，n，n，m)= (0，n，n，n)時，f_A (0，n，n，n，m) =0

若 n = 2k，當 f(0，n，n，n，m)= (0，q，k，0，q+k-1)or(0，0，0，n，m，n)

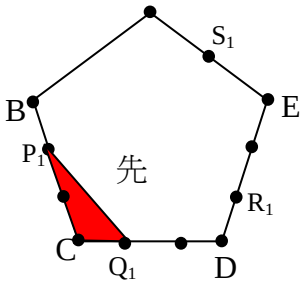
時，f_A (0，n，n，n，m) = 0



五邊形 A-10



五邊形 A-11



五邊形 A-12

（四）六邊形

1. f_A (0，0，0，n，n，n)：

若 n = 2k，當f_A (0，0，0，n，n，n) = (0，0，n，0，0，0，n+1)時，

f_A (0，0，0，n，n，n)=0

若 n = 2k+1，f_A (0，0，0，n，n，n) = x，當f(x) =

(0，……，0， n，0，0，……，0，n) 時，f_A (0，0，0，n，n，n) = 1

***我們定f_A (0，0，0，n，n，n)(n爲奇數)= 1 爲六邊形公式 1**

2. f_A (0，0，0，n，m，n)：

若 n = 2k，當f_A (0，0，0，n，m，n) = (0，0，n，0，0，0，n+1)時，

f_A (0，0，0，n，m，n)=0

若 n = 2k+1，f_A (0，0，0，n，m，n) =x，當f(x) =

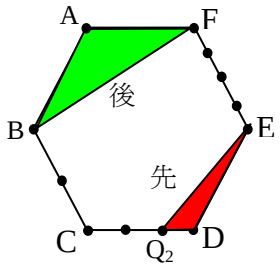
(0，……，0， n，0，0，……，0，n)時，f_A (0，0，0，n，m，n) = 1

3.當f_A (0，0，0，n，n，m) =偶邊函數(0，0，0…，n，0，0 …，n)時，

f_A (0，0，0，n，n，m) = 0

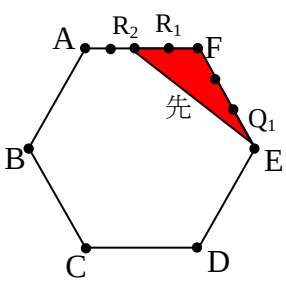
4. 當f_A (0，0，0，n，m，k) =偶邊函數(0，0，0…，n，0，0 …，n)時(其中(0，0…，n，0，0 …，n)是偶數邊)， f_A (0，0，0，n，m，k) = 0

5. f_A (0，0，n，m，0，n+m)= 1 且遞迴式中n與m可互調。但若n、m任一數=1，則遞迴式必須改爲f_A (0，n，m，0，0，n+m+2) =1

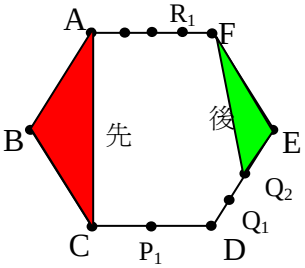


*我們定f_A (0，n，m，0，0，n+m)= 1，但若n或m=1，則f_A (0，n，m，0，0，n+m+2)= 1 爲A玩法六邊形公式 2

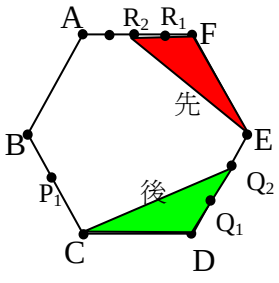
6. f_A (0，n，0，m，0，n+m-1)=1，且n、m、n+m-1 三數均可互調。同時這三數之間的差必＞1。



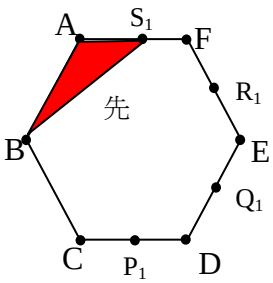
六邊形 A-4



六邊形 A-5



六邊形 A-6



六邊形 A-7

四、B 玩法的必勝策略

（一）限定每一次所能取的三角形只能一邊有分點，而分點數不超過 n，其他二邊都

• P

無點。且如果邊上還有分點，就必須再切割。

必勝策略：只要一直讓自己取到剩下 2＋k（n+1）塊基本三角形，則獲勝。（k∈N）

（二）上述規則於多邊形中亦成立

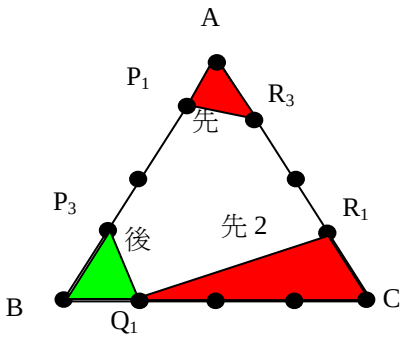
五、C 規則的必勝策略

（一）三角形

1.f_C（0，1，0）= 1(如圖)

proof：

因爲三角形邊上仍有分點，故先手沒辦法直接取走整塊三角形。同時由於邊上恰只有一個分點，所以當先手取完之後，後手即可取走剩下的三角形而獲勝。



三角形的部分我們已得到大一統定理：

若 n、m、k 中任兩數≥2，則必勝策略如下：

當f_C（n，m，k）=（o，2，p，2）時，fc（n，m，k）= 0

（二）四邊形

1.f_C(0，n，0，n)：

若 n = 1，當f_C(0，n，0，n) =f(0，1，0)時，f(0，n，0，n)=0

若 n≠1，f_C(0，n，0，n) = x，當f(x)=f(0，0，0，0)時，f(0，n，0，n)=1

* 我們定 f(0，n，0，n)(n＞1)爲 C 玩法四邊形公式 1

2.當f_C(0，n，m，k) = (0，n，0，n)時，f_C(0，n，m，k) = 0，n≠1。

3.f_C(0，n，m，n)：

若 n = 2k，但 n 不等於 1：當 fc(0，n，m，n) = (0，n，0，0，n-1) 時，

f_C(0，n，m，n)= 0

若 n = 2k，f_C(0，n，m，n) = x，當f(x) = (0，n，0，0，n-1)時，f_C(0，n，m，n) = 1

4.f_C(0，n，n，n)：

若 n = 2k，但n不等於 1：當f_C(0，n，m，n) = (0，n，0，0，n-1) 時，

f_C(0，n，m，n)= 0

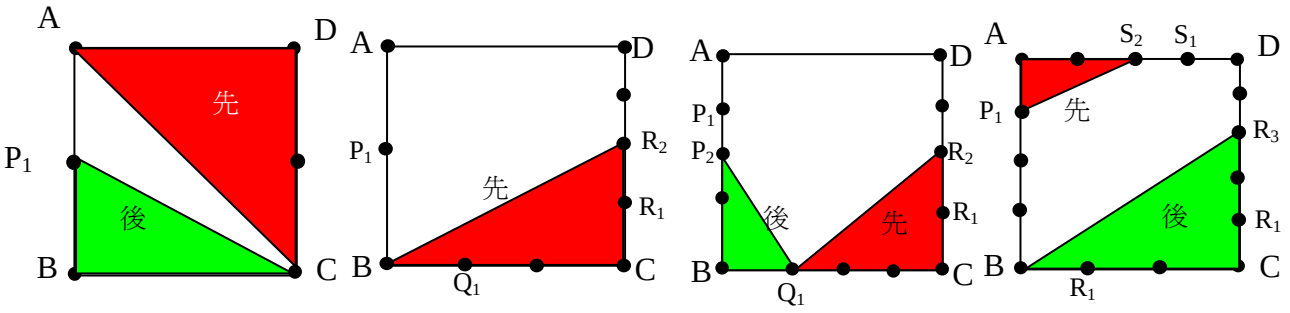
若 n = 2k，f_C(0，n，m，n) = x，當f(x) = (0，n，0，0，n-1)時，f_C(0，n，m，n) = 1

5. f_C(n，n，n，m) = x，當f(x) = (0，n，0，n) or (0，n，0，n-1)(n爲奇數) = 1

6. f_C (n，n，m，k) ：

若 n、m、k三數中，最小的數爲奇數，則當f_C（n，n，n，m）=（0，n，n，n）時，f_C（n，n，n，m）=0，但n≠1。

若 n、m、k三數中，三數均爲偶數，則f_C（n，n，n，m）=x，f(x)=(0，k，n+k-1，0，n+2k)時，f_C(n，n，m，k) = 1



四邊形 B-3　　四邊形 B-4　　四邊形 B-5　　四邊形 B-6

綜合上述的結果，我們歸納出四邊形的大一統定理：

1.若 n、m、h、k 四數中，最小的數爲奇數，則先手必勝之策略如下：

當f_C（n，m，h，k）=（0，n，q，n）時，f_C（n，m，h，k）= 0 稱爲四邊形的奇邊形公式，但n≠1！

2.若 n、m、h、k 四數中，n、m、h、k 四數均爲偶數，且兩對邊差不大於 1，則後手必勝之策略如下：

f_C（n，m，h，k）=x，當f_C（n，m，h，k）=(0，n，0，n) or (0，q，k，0，q+k-1) 時，f_C（n，m，h，k）= 1 稱爲四邊形的偶邊形公式，但n≠1！

（三）五邊形

過程說明：

雖然在三角形和四邊形中，A、C 玩法的必勝策略並無太大差異，但 C 玩法的五邊形必勝策略和 A 玩法卻形成了一個有趣的關係：兩者的必勝策略是互補的。最明顯的例子便是：fC(0，0，n，0，n-1) = 1，n 爲奇數。

1. f_C(0，0，1，0，1) = 1

*** 我們定 f(0，0，1，0，1)爲 C 玩法五邊形公式 1**

2.f_C(0，0，n，0，n-1) = 1，n爲奇數

*** 我們定 f(0，0，n，0，n-1) =1 爲 C 玩法五邊形公式 2**

3.f_C(0，0，n，n，n)

若 $n=2k$，當$f_C(0,0,n,n,n)=(0,n,n,n)$時，$f_C(0,0,n,n,n)=0$ 但$n\neq 1$。

若 $n=2k+1$，$f_C(0,0,n,n,n)=x$，當$f(x)=(0,0,n,0,n-1)$時，

$f_C(0,0,n,n,n) \quad =0$

4. $f_C(0,0,n,m,n)$

若 $n=2k$，當$f_C(0,0,n,n,n)=(0,0,n,0,n-1)$時，$f_C(0,0,n,n,n)=0$

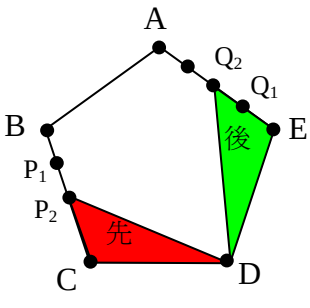
若 $n=2k+1$，當$f_C(0,0,n,n,n)=(0,n,n,n$時，$f_C(0,0,n,n,n)=0$，但$n\neq 1$。

5.當$f_C(0,n,0,m,n)=(0,n,0,n)$時，$f_C(0,n,0,m,n)=0$，但$n\neq 1$。

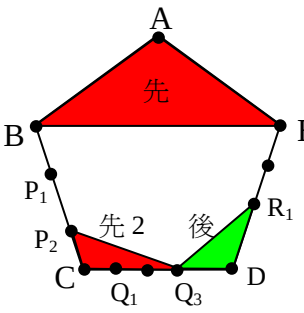
6.當$f_C(0,0,n,m,k)=(0,0,n,0,n-1)$時，$f_C(0,0,n,m,k)=0$

7. $f_C(n,0,n,0,n)=(0,n,0,n)=0$，但$n\neq 1$。

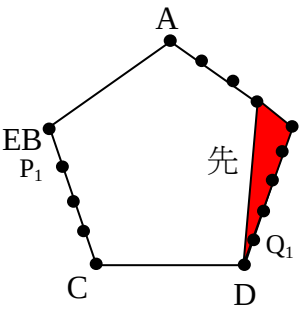
8. $f_C(0,q,k,0,q+k-1)=1$



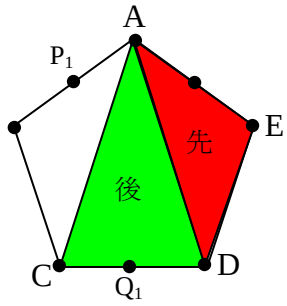
五邊形 B-2



五邊形 B-4



五邊形 B-5



五邊形 B-7

陸、研究結果

一、A、C 玩法的三角形必勝策略

A：若 n、m、k 中任兩數≥2，則必勝策略如下：

當f_A（n，m，k）=（o，1，p，1）時，f_A（n，m，k）=0

C：若 n、m、k 中任兩數≥2，則必勝策略如下：

當f_A（n，m，k）=（o，2，p，2）時，f_A（n，m，k）=0

比較：A、C玩法三角形必勝策略的差異不大，也就是在兩對邊的點數各差一點，之所以會有這種情形產生乃是因爲C玩法時若 $n=1$，$f_C(0,n,0,n)=0$，而A玩法卻無此限制的關係。

二、A、C 玩法的四邊形必勝策略

A：1.若 n、m、h、k 四數中，最小的數爲奇數，則先手必勝之策略如下：

當 f （n，m，h，k）=（0，n，q，n）時，f （n，m，h，k）= 0 稱爲四邊形的奇邊形公式

2.若 n、m、h、k 四數中，n、m、h、k 四數均爲偶數，且兩對邊差不大於 1，則後手必勝之策略如下：

f_A（n，m，h，k）= x，當f （n，m，h，k）= (0，n，0，n) or (0，k，n+k-1，0，n+2k) 時，f （n，m，h，k）= 1 稱爲四邊形的偶邊形公式

C：1.若 n、m、h、k 四數中，最小的數爲奇數，則先手必勝之策略如下：

當 f （n，m，h，k）=（0，n，q，n）時，f （n，m，h，k）= 0 稱爲四邊形的奇邊形公式

2.若 n、m、h、k 四數中，n、m、h、k 四數均爲偶數，且兩對邊差不大於 1，則後手必勝之策略如下：

f_A（n，m，h，k）= x，當f （n，m，h，k）= (0，n，0，n) or (0，k，n+k-1，0，n+2k) 時，f （n，m，h，k）= 1 稱爲四邊形的偶邊形公式

比較：A、C 玩法四邊形必勝策略的差異也是幾乎沒有，唯一差別在 C 玩法兩對邊的點數不能等於 1，之所以會有這種情形產生也是因爲 C 玩法時若 n = 1，f(0，n，0，n) = 0，而 A 玩法卻無此限制的關係。

三、A、C 玩法的五邊形必勝策略

A：當 f (n，m，k，p，h) = (0，n，m，k)時，f (n，m，k，p，h) = 1

當 f (n，m，k，p，h) = (0，n，m，k，q)時，f (n，m，k，p，h) = 1

當 f (n，m，k，p，h) =(0，s，m，k，p，r)時，f (n，m，k，p，h) = 1

無論怎麼取，後手均獲勝。

C：當 f (n，m，k，p，h) = (0，n，m，k)時，f (n，m，k，p，h) = 1

當 f (n，m，k，p，h) = (0，n，m，k，q)時，f (n，m，k，p，h) = 1

當 f (n，m，k，p，h) =(0，s，m，k，p，r)時，f (n，m，k，p，h) = 1

無論怎麼取，後手均獲勝。

比較：A、C 玩法五邊形必勝策略的差異比四邊形和三角形均多，雖然最後的函數值均相同，差別也只在對 1 的限制。但其內容則相差甚多。

四、A、C 玩法的奇數邊形必勝策略

奇數邊形中不論 A、C 玩法，我們均已得到其必勝策略可由五邊形向上推廣。

五、A、C 玩法的偶數邊形必勝策略

偶數邊形中不論 A、C，玩法，我們均已得到其必勝策略原則上均可利用對稱切法破解。

六、A 玩法的必勝策略

經過相當漫長的推導之後，我們對於 A 玩法的必勝策略已經有了一定的掌握，我們將任意邊形的必勝策略分成奇數邊形與偶數邊形兩部分進行討論。藉由遞迴式的推導，可以接二連三的將五邊形和六邊形的遞迴式推及到其他的奇數邊形與偶數邊形，因此我們可以大膽的推論：在雙方玩家均最聰明的情形下，每邊均有點的奇數邊形後手必勝；偶數邊形的情形則是先、後手各有一半的情況會贏。

七、B 玩法的必勝策略

一直讓自己取到剩下 2 + k（n+1）塊基本三角形，則獲勝。其中 n 爲每邊分點數的最低限制，而 k 則爲任意正整數。

八、電腦程式的完成

目前我們完成了兩個程式，一個能直接在介面上進行切割遊戲，另一個則以($a_1 \cdots a_n$)的型式表示遊戲的過程，兩者對於我們試驗必勝策略以及本題目的實用性上，都有相當大的幫助。詳細程式碼附於附錄二。

柒、討論

這個遊戲雖然只有兩個人玩，但排列組合後所產生的情形卻是多得嚇人，我們發現，一樣多分點的情況與不一樣多分點的情況會有不同的必勝策略，點數和邊的排列組合關係會對我們的必勝策略產生影響，我們花費了相當多的時間與精力，藉由樹狀圖以及歸納法尋找各種圖形的勝負結果，但只要稍不小心，就很有可能產生盲點而出錯，這使得我們在做出結果後，仍須反覆的驗證，可說非常的繁雜。更甚者，做出的結果乍看之下並沒有一定的規律，所以我們必須大膽的假設可能的定理，然後小心的求證，有時過了半個月都還找不出其中的規律呢！目前我們已經完成了 n 多邊形 A、B、C 三種玩法的必勝策略及其規律，接下來我們仍有相當大的空間可以繼續發展。

一、改變規則，變成拿到最多塊三角形的人獲勝。

二、改變圖形，把圖形推到三維空間來切割。

三、改變圖形，把圖形由凸多邊形變爲凹多邊形。

四、把遊戲人數增加到三人以上。

五、嘗試在圓環或圓柱上進行本遊戲

六、配合電腦程式的完成應可創造一套新的電腦遊戲，或許這些發現能用於某些學術領域中。

捌、結論

我們利用樹狀圖來推導出結果，先找出所有可能的切法，利用圖形的對稱或是翻轉剔除結果相同的三角形，若所切下的三角形，除了切割邊外另二邊上分別有 i、j 個分點，就以（i，j）型代表這樣的三角形。接著排出樹狀圖，逐一分析。當樹狀圖完成了一部分，就可以大膽假設可能的必勝策略，並驗證之。我們也從中發現，所有的必勝策略均是以兩個大原則所衍伸出來的：

一、對稱原則

整個遊戲的必勝策略不論奇邊函數或是偶邊函數，均可用對稱原則來解釋其基本的破解手法。包括五邊形 f(0，0，n，0，n+1)=1、任意偶數邊形 f(0，0，…，n，0，0…，n，0，0)=1 以及兩個重要的遞迴式：f(0，q，k，0，q+k-1)=1 及 f(0，0，n，m，0，n+m)　和 f(0，n，m，0，0，n+m+2) 均是藉由產生不對稱圖形所得到的結果。在偶數邊形 f(n，n，…，n，n)的函數中，也可應用對稱切法。

二、遞迴原則

整個遊戲的結果是環環相扣的，其必勝策略亦有層層推進的情形。在討論四邊形時，必定會使用到三角形的結果；而在討論五邊形時，則必定會使用到四邊形的結果。而就目前所知，多邊形應該都各有至少一個遞迴式。例如五邊形的遞迴式：f(0，n，m，0，n+m-1)= 1。而這些遞迴式經過統整之後可以表示爲：若 n+m=k-1，奇邊函數 f(0，n，m，0…，k)=1；若 n+m=k，偶邊函數 f(0，n，m，0…，k)=1。相信多邊形中應該還有其他遞迴式，雖然這個遞迴式已能使我們有充分的條件解出某些函數的值，但若發現其他的遞迴式，對我們的研究結果也有驗證的效果。

三、間隔原則

我們比較所找到的遞迴式，發現有一個有趣的情形：五邊形遞迴式「$\mathbf{f_A(0，n，m，0，n+m-1)=1}$」六邊形遞迴式「$\mathbf{f_A(0，n，0，m，0，n+m-1)=1}$」，同時這三數之間的差必＞1。以及「$f_A(0，n，m，0，0，n+m)= 1$，但若n或m=1，則$f_A(0，n，m，0，0，n+m+2)= 1$」有相當有趣的關連：k 邊形 n、m 兩邊相鄰，與 k+1 邊形 n、m 兩邊不相鄰的情形恰成對應，而 k 邊形本身 n、m 兩邊相鄰，與不相鄰的情形則恰差 1。另一方面，這種情形在 $f_A(0，\cdots\cdots，0，n，0，0，\cdots\cdots，0，n)= 1$ 也有相同的情況。偶數邊形有分點的兩個邊必不相鄰，若相鄰則勝負結果逆轉。我們認爲，會有此種情形產生，應是因爲若兩邊相鄰，則玩家就能在一次切割內，改變兩個邊的分點數，進而影響到勝負結果。

中華民國第四十五屆中小學科學展覽會

評　　語

高中組 數學科

最佳創意獎

040411

切割三角形之必勝策略

國立彰化高級中學

評語：

1. 本研究將傳統的一維遊推廣至二維，十分具有創意。
2. 能定義數學模型，分析對局策略。