中華民國第四十五屆中小學科學展覽會
作品說明書

高中組 數學科

第三名

040408

漫步在蜘蛛網

國立屏東高級中學

作者姓名：

高二 王士豪 高二 唐進貴

指導老師：

羅有成

中華民國第四十五屆中小學科學展覽會

作品說明書

科　　別：　數　學　科

組　　別：　高　中　組

作品名稱：　漫步在蜘蛛網

關 鍵 詞：高斯函數、不等式、極值

編　　號：

目錄

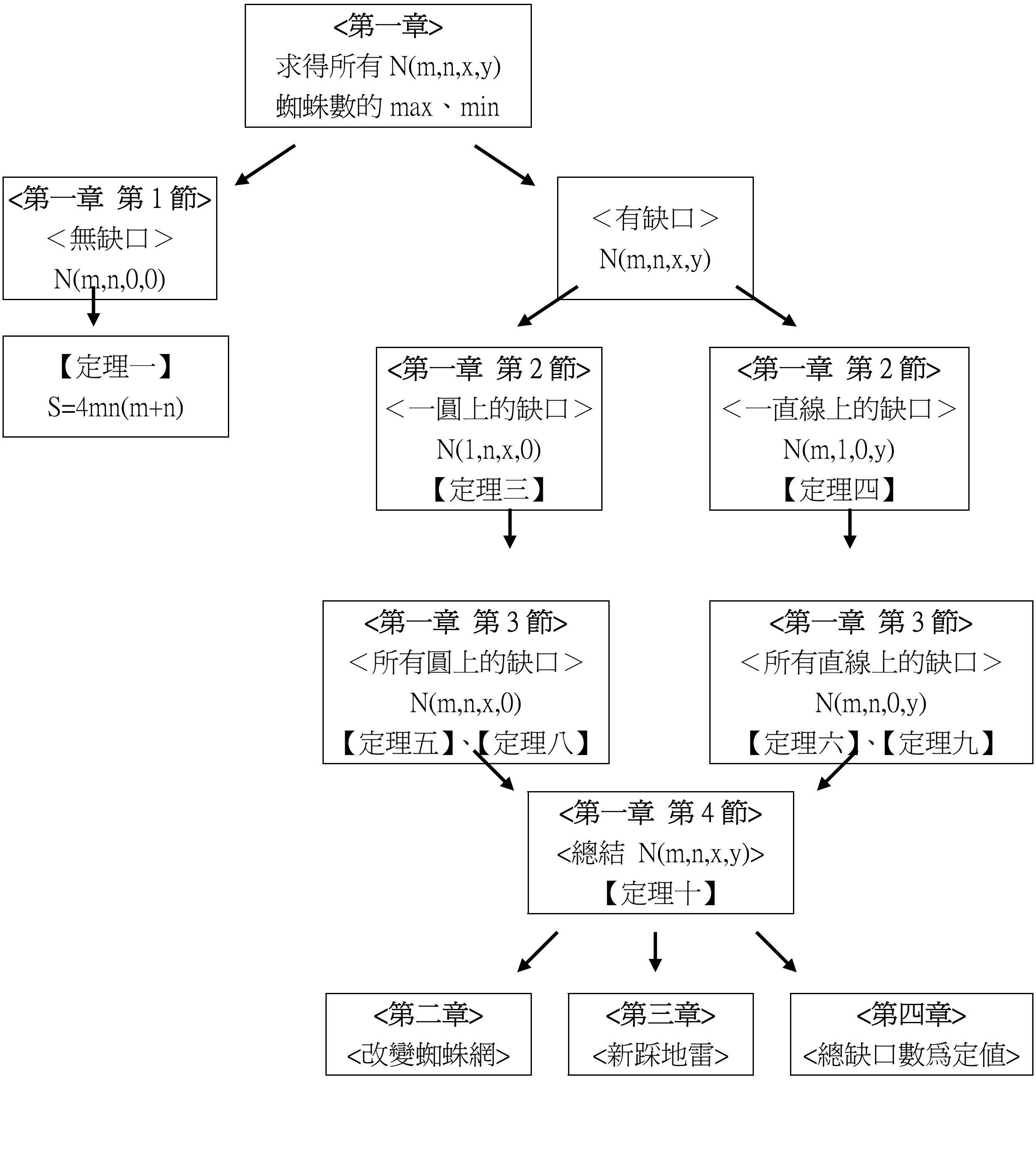
壹、摘要

在本文中我們以同心圓和直線構成蜘蛛網，並對每一個蜘蛛網定義出蜘蛛數；則若在此蜘蛛網中加入缺口後，會影響蜘蛛數的大小。探討蜘蛛網上的缺口該如何配置，才能夠得到蜘蛛數的極值(最大值及最小值)。

首先由一直線或圓該如何分配缺口，蜘蛛數將有極值，再深入探討許多條直線或圓上的情況，進而推展到許多同心圓及通過圓心的許多條放射線的缺口該如何分配，蜘蛛數才會有極值發生。像科學家的研究，藉由特殊化簡單的情況，進而推廣至較爲複雜一般化的結果。

在得到初步的結果之後，我們再將研究的目標轉到三個不同方向：將蜘蛛數的規則放到其他圖形中(正多邊形、星型)；設計出新採地雷遊戲；總缺口數爲定值的策略設計。

以下是研究過程圖：



貳、研究動機

有一次上專題課時，老師拿了幾本有關數學的書，因為我們較愛好有關於數字的數學，所以在這些書中，我們選了數字的異想世界，看過此書之後，發覺書裡面有一章〝蜘蛛網的數學〞讓我們最感興趣。書中提到古戈爾博士非常喜歡蜘蛛網，一天古戈爾博士在一處熱帶雨林中，看見一個半徑約達一公尺的巨型蜘蛛網，陽光照在網上使絲路清晰可見，於是他構思出一個傷腦筋的問題：如果一隻受到藥物影響的蜘蛛，織出具有缺口的蜘蛛網，那麼對網上結點的關係將有什影響？如何找出蜘蛛數的極值(最大值與最小值)？因為在高一時接觸到高斯函數的性質，高二又學會柯西不等式的原理，我們以此數學工具作分析，藉由這個有趣的問題做出以下的研究內容與成果。

參、研究目的

一、$\forall$ N(m,n,x,y)，找出 f_{max} 與 f_{min} 擺放缺口的策略與通式。
二、在正多邊形和星形之蜘蛛網上找出 f_{max} 與 f_{min} 擺放缺口的策略與通式。
三、給定一隱藏缺口的蜘蛛網及佈於網上之所有 F(i,j)，找出原有缺口位置。
四、在總缺口數為定值，即 x+y=k 的情況下，找出 f_{max} 及 f_{min} 缺口的擺放策略與通式。

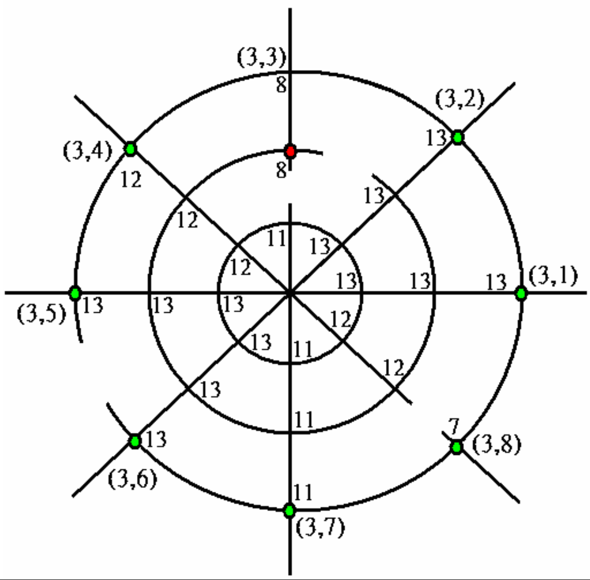
肆、研究設備及器材

Visual Basic 軟體、電腦、紙、幾枝筆、人腦。

伍、研究過程及方法

第一章、對於所有 N(m,n,x,y)，找出 f_{max}、f_{min} 缺口的擺放策略與通式。

(一)符號及說明



(圖一)

1. N(m,n,x,y)：表示一個蜘蛛網。限定最小蜘蛛網為 N(1,1,0,0)，並規定圓心為一個結點。 m：同心圓的個數。　　n：直線數。 x：所有圓上的缺口總數。　　y：所有直線上的缺口總數。

<如圖一>：N(3,4,2,2) 代表蜘蛛網上有三個同心圓；四條放射線；
而圓上共有兩個缺口；直線上共有兩個缺口。

2. (i,j)：表示結點在 N(m,n,x,y)中的位置。定義(0,0)為圓心。
i：表示由內往外第 i 個圓；
j：以 x 軸正向為基準，沿逆時鐘方向由 1 數來的第 j 個結點。

<如圖一>：最外圓的結點依次為(3,1)、(3,2)、(3,3)、(3,4)、(3,5)、(3,6)、(3,7)、(3,8)。

3. F(i,j)：結點(i,j)的蒼蠅數，其值為以結點(i,j)所在的位置，
分別計算沿著圓可到達的結點數，以及沿著直線可到達的結點數兩者之和；
值得注意的是，本身(i,j)該點並不算在內。

<如圖一>：F(3,3) = (沿圓可到的結點) + (沿直線可到的結點)
= (圖中的綠色結點) + (圖中的紅色結點) = 8。

4. S＝S(m,n,x,y)：表示蜘蛛網 N(m,n,x,y)上的蜘蛛數 $= \sum F(i,j)$。

<如圖一>：S(3,4,2,2) = 304。(圓心的蒼蠅數為 21)

5. f(m,n,x,y)(減少量函數)：受圓上 x 個缺口和直線上 y 個缺口的影響，F(i，j)和 S 會減少；
以 f_x 表示圓上 x 個缺口造成的減少量函數；f_y 表示直線上 y 個缺口造成的減少量函數。
因為 f_x 和 f_y 不會互相影響，為兩個獨立的函數，所以 $f(m,n,x,y) = f_x+f_y$。
並以 f_{max}、f_{min} 分別代表 f 的最大值和最小值。

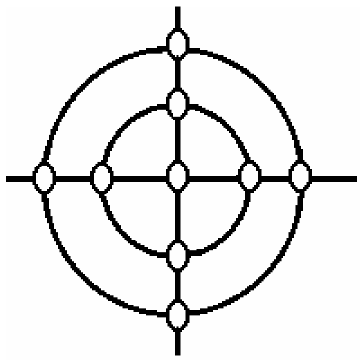
<如圖一>：在所有圓中，因為同一圓上的點仍可互相到達，所以 $f_x=0$。
F(1,3)和 F(2,3)間的缺口所在之直線中，F(1,3)、F(0,0)、F(1,7)、F(2,7)、F(3,7)相連；
F(2,3)和 F(3,3)相連；而兩線段彼此不能到達。所以缺口造成的減少量為 20。
F(2,8)和 F(3,8)間的缺口所在之直線中，F(2,8)、F(1,8)、F(0,0)、F(1,4)、F(2,4)、F(3,4)
相連，而此一線段和 F(3,8)彼此不能到達。所以缺口造成的減少量為 12。
所以 $f_y=32$；$f = f_x + f_y = 32$

6. g(利益函數)：定義 g(m,1,0,y) = f(m,1,0,y) - f(m,1,0,y-1)，
表示在直線上放入 y 個缺口和放入 y-1 個缺口時，所造成的減少量之差值；
同理定義 g(1,n,x,0) = f(1,n,x,0) - f(1,n,x-1,0)。
定義 $g_{max}(m,1,0,y) = f_{max}(m,1,0,y) - f_{max}(m,1,0,y-1)$，$g_{min}(m,1,0,y) = f_{min}(m,1,0,y) - f_{min}(m,1,0,y-1)$，
此時 g_{max} 和 g_{min} 並非代表 g 的最大或最小值，而是代表在直線上 y 個缺口和 y-1 個缺口各自造成的 f_{max} 之差值，與 f_{min} 之差值。
同理 $g_{max}(1,n,x,0) = f_{max}(1,n,x,0) - f_{max}(1,n,x-1,0)$；$g_{min}(1,n,x,0) = f_{min}(1,n,x,0) - f_{min}(1,n,x-1,0)$。

(二)研究過程

第 1 節.確定 N(m,n,0,0)中，S(m,n,0,0)的通式

例 1：N(2,2,0,0) <如圖二>
F(1,1)=F(1,2)=F(1,3)=F(1,4)=F(2,1)=F(2,2)=F(2,3)=F(2,4)=7
F(0,0) = 8，S(2,2,0,0) = 64。



(圖二)

簡單的觀察可以推知以下性質：

【性質 1】 所有直線都有 2m+1 個結點；所有圓都有 2n 個結點。共 2nm+1 個結點。
對於所有 N(m,n,0,0)，F(0,0)=2mn；若(i,j)≠(0,0)，則 F(i,j)=2m+2n-1。

則根據【性質 1】可得：

【定理一】 $S(m,n,0,0) = 4mn(m+n)$

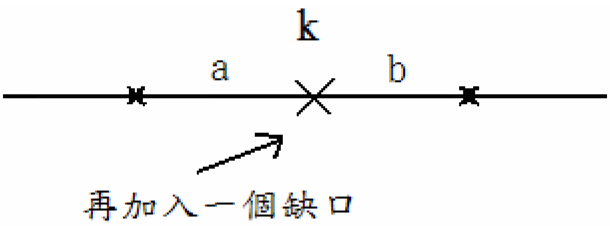
驗證：N(2,2,0,0) <如圖二> 代入公式可得 $S(2,2,0,0) = 64$，與例 1所計算的數值皆相符。
則對於所有 N(m,n,0,0)的問題可由【定理一】解決。
接下來我們討論當蜘蛛網中加入缺口時的情形。

第 2 節.確定 N(1,n,x,0)和 N(m,1,0,y)中，蜘蛛數 S 的通式

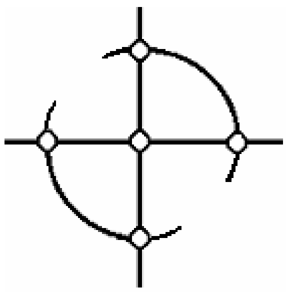
【性質 2】$\forall$ N(m,n,x,y)，$S(m,n,x,y) = S(m,n,0,0) - f(m,n,x,y)$
因爲已有【定理一】: S(m,n,0,0)的公式，則根據【性質 2】，只要求得 f(m,n,x,y)，便可知 S(m,n,x,y)，所以以下的研究內容都把目標放在求 f_{max} 和 f_{min} 上面。

【引理 1】 在兩個原有的缺口之間且具有 k 個結點的線段上，再放置新的缺口時，只能對這 k 個結點的 F(i,j)產生影響。

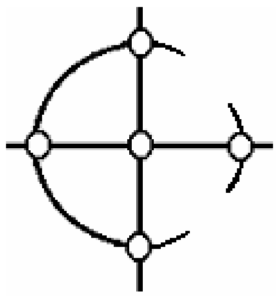
說明：∵這 k 個結點以外的結點，本來就和此 k 個結點彼此不能到達，
∴新的缺口對此段以外的結點沒有影響。
∴若設 k 個結點被新缺口分爲 a、b 兩段(a+b=k)，
則 a、b 的值只和這 k 個結點的減少量有關。<如圖三>



(圖三)



(圖四)



(圖五)

例 1：N(1,n,2,0)
∵兩個缺口將圓切成兩段，而圓上共有 2n 個結點。
∴設一段有 k 個結點，則另一段有 2n- k 個結點。$k \in [1,2n-1]$。
則 k 個結點的這一段，$f = k(2n- k)$。(每一結點都少了 2n-k 個結點可以到達)
2n-k 個結點的這一段，$f = (2n-k)k$。(每一結點都少了 k 個結點可到達)
∴$f(1,n,2,0) = k(2n- k) + (2n- k)k = -2k^2+4nk$ ……………………………(1)式
∴f(1,n,2,0)的函數圖形爲開口向下的拋物線，且一階導數 $f'(1,n,2,0) = - 4k+ 4n$，
∴$f_{max}(1,n,2,0)$發生在 $f'(1,n,2,0) = 0$ 的時候；$f_{min}(1,n,2,0)$則發生在函數圖形的兩端點之一。
max：令 $- 4k+ 4n= 0$，得 $k= n$，將 n 代回(1)式，得 $f(1,n,2,0)= 2n^2$。
其缺口相對位置<如圖四>：讓圓上的兩段，有最平均的結點數。
min：分別將 k=1 和 k=2n-1 代回(1)式，均得 $f(1,n,2,0)=4n-2$。
其缺口放置的位置<如圖五>：讓圓上的兩段結點數分配最極端化。

小結：$f(1,n,2,0)= -2k^2+4nk$，且 $4n-2 \le f(1,n,2,0) \le 2n^2$，要使 f(1,n,2,0)有最大值，是讓被缺口隔開的兩段結點數相等；最小值則是讓兩段的結點數相差最多。

從上面的例子，初步瞭解到在圓和直線上放置缺口的差異，及在一條直線或一個圓上，當給定被缺口隔開的各段結點數時，可分別計算出 f_x 和 f_y 的結果。

【引理 2】(1)對於所有 N(1,n,x,0)，$f_x = 4n^2 - \sum_{k=1}^{x} a_k^2$ ；

(2)對於所有 N(m,1,0,y)，$f_y = (2m+1)^2 - \sum_{k=1}^{y+1} b_k^2$ ，a_k 、b_k 爲圓和直線各段的結點數。

pf：(1)因爲 x 個缺口將圓分爲 x 段，設各段分有 $a_1, a_2, \cdots, a_x$ 個結點，

$\because a_k$ 這一段到不了其它 $(2n-a_k)$ 個點，又 $\sum_{k=1}^{x} a_k = 2n$，

$\therefore$ 對 a_k 這一段的減少量爲 $a_k(2n-a_k)$， $\therefore f_x = \sum_{k=1}^{x} a_k(2n-a_k) = 4n^2 - \sum_{k=1}^{x} a_k^2$ 。

(2)同理 y 個缺口將直線分爲 y+1 段，設各分有 $b_1, \cdots, b_{y+1}$ 個結點，

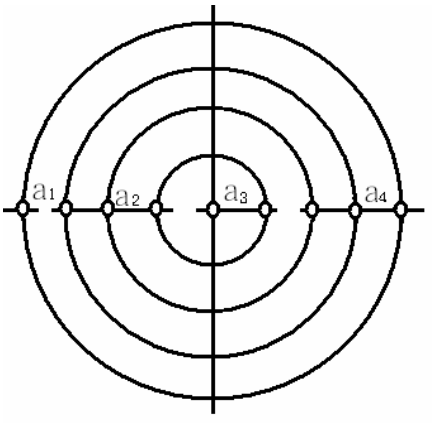
$f_y = \sum_{k=1}^{y+1} b_k(2m+1-b_k) = (2m+1)^2 - \sum_{k=1}^{y+1} b_k^2$ #

則根據【引理 2】，只要圓和直線上各段的結點數組合都不變，f_x 和 f_y 爲定値。

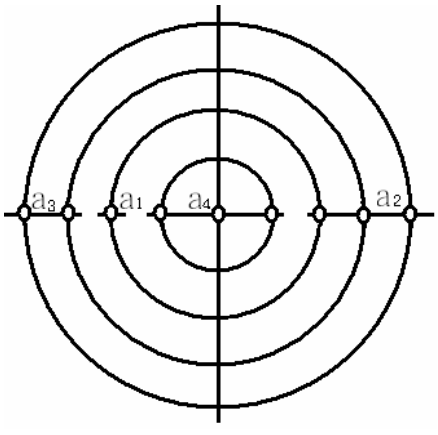
【引理 3】在同一圓或直線上，若各線段的結點數組合不變，

則變動各段排列的順序不會影響 f 的大小。

說明：N(4,2,0,3)，<圖六>、<圖七>爲兩不同排列的網：



(圖六)



(圖七)

同樣是三個缺口在一直線上，分成 a_1 、a_2 、a_3 、a_4 四段，

結點數各爲 1,3,2,3，雖然兩者排列不同，但 f_y 値同爲 58。

從上面的例子，我們猜測：

放置缺口於同一圓或直線時，f_{max} 發生在各段的結點數分配最「平均化」時。

而 f_{min} 則發生在各段的結點數分配最「極端化」的情況。

【定理二】N(1,n,x,0)和 N(m,1,0,y)的均化與極化

對於所有 N(1,n,x,0)或 N(m,1,0,y)，欲使 f 有最大值，要讓各段有『平均化』的結點數。而要使 f 有最小值，則讓各段有『極端化』的結點數。

pf：(1)平均化：以 N(1,n,x,0)圓上的情況分析，

根據【引理 2】，$f_x=4n^2-\sum_{k=1}^{x}a_k^2$ ；又已知 $\sum_{k=1}^{x}a_k=2n$，

則根據柯西不等式：$(\sum_{k=1}^{x}a_k^2)(\sum_{k=1}^{x}1^2)\geq(\sum_{k=1}^{x}a_k)^2$，

所以 $\sum_{k=1}^{x}a_k^2 \geq \frac{4n^2}{x}$ ，可得 $f_x \leq 4n^2-\frac{4n^2}{x}$ 。

則當 $a_1=a_2=a_3=....=a_x$ 時等式成立，$f_{max}=4n^2-\frac{4n^2}{x}$ 。

所以各段有最平均的節點數。 $\boxed{\text{但此時限定於 } 2n\equiv 0 \pmod{x}}$

當 $2n\equiv k \pmod{x}$時，其中 $0<k<x$，

若存在 $i\neq j$ 使 $|a_i-a_j|\geq 2$，(即有兩段結點數相差 2 以上)

根據【引理 1】：a_i和a_j之間的缺口不會影響a_i和a_j以外的結點

所以若存在兩線段a_i、a_j相鄰，則a_i、a_j間的缺口造成的減少量為 $2a_i a_j$，

則在｜a_i-a_j｜≤1 時，$2a_i a_j$ 有最大值。

於是調整a_i和a_j的結點數，使達成｜a_i-a_j｜≤1 的目標。

又根據【引理 3】：更換缺口順序使a_i和a_j相鄰，f_x並不會改變。

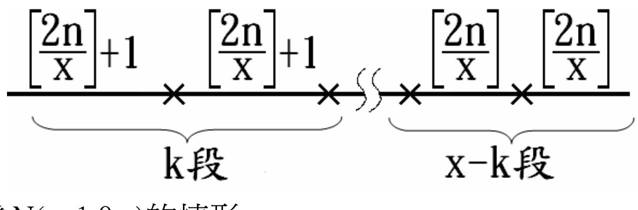
所以若存在a_i、a_j不相鄰且$|a_i-a_j|\geq 2$，

則先更換缺口順序讓此兩段相鄰，再調整使｜a_i-a_j｜≤1。

重複這個步驟，直到任意兩段的結點數最多相差 1，

此時$a_1,a_2,a_3,....,a_x$的分佈稱為「平均化」，f_x有最大值。

則這時圓上會有 k 段具有$\left[\frac{2n}{x}\right]$+1 個結點，x-k 段有$\left[\frac{2n}{x}\right]$個結點。如下圖：



同理可證 N(m,1,0,y)的情形。

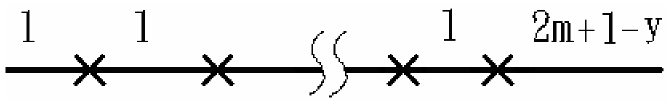
(2)極端化：以 N(m,1,0,y)直線上的情況分析，

類似平均化的想法，兩線段 b_i 和 b_j 間的缺口所造成的減少量為 $2b_i\ b_j$

而 b_i 和 b_j 間的結點分配在一端為 1，一端為 b_i+b_j-1 時，減少量有最小值。

於是調整 b_i 和 b_j 的結點數，使得一端為 1，一端為 b_i+b_j-1，重複這個步驟，

直到直線上有 y 段只有 1 個結點，1 段有 2m+1-y 個結點。如下圖：



這樣的結點分佈情形即稱為「極端化」。

同理可證 N(1,n,x,0)的情形。 #

根據【定理二】分配缺口的策略，可以得出 N(1,n,x,0)及 N(m,1,0,y)兩者 f_{max} 和 f_{min} 的公式。

針對圓上的缺口而言

【定理三】∀N(1,n,x,0)

(1)$f_{max}=2n(2n-\left[\frac{2n}{x}\right])-(2n-\left[\frac{2n}{x}\right]x)(\left[\frac{2n}{x}\right]+1)$，

(2)$f_{min}=(x-1)(4n-x)$

pf：(1)根據【定理二】的「平均化」策略，

f_{max} 發生在 r 段有 $\left[\frac{2n}{x}\right]$+1 個結點，x-r 段有 $\left[\frac{2n}{x}\right]$ 個結點時，

其中 $r=2n-\left[\frac{2n}{x}\right]x$，(因為 $2n=\left[\frac{2n}{x}\right]x+r$)

$\therefore f_{max}=2n(2n-\left[\frac{2n}{x}\right])-(2n-\left[\frac{2n}{x}\right]x)(\left[\frac{2n}{x}\right]+1)$。

(2)根據【定理二】的「極端化」策略，

f_{min} 發生在圓上 x-1 段有 1 個點，1 段有 2n-x+1 個點時，

$\therefore f_{min}=(x-1)(4n-x)$ #

同理可得直線上的情形。

針對直線上的缺口而言

【定理四】∀N(m,1,0,y)

(1)$f_{max}=(2m+1)(2m+1-\left[\frac{2m+1}{y+1}\right])-〔2m+1-\left[\frac{2m+1}{y+1}\right](y+1)〕(\left[\frac{2m+1}{y+1}\right]+1)$，

(2)$f_{min}=(4m+1-y)y$

到此，所有 N(1,n,x,0)和 N(m,1,0,y)之 f_{max} 及 f_{min} 的問題，可由【定理三】、【定理四】解決。接下來在第三節當中我們擴展到討論將缺口放在 m 個圓上，或 n 條直線上的情形。

第 3 節.確定 N(m,n,x,0)和 N(m,n,0,y)中，蜘蛛數 S 的通式

根據【定理三】的結果，若知道每個圓上的缺口數 x_k，則可以求得 N(m,n,x,0)的 f_{max} 與 f_{min}。

【定理五】∀ N(m,n,x,0)

$$(1)f_{max}=2n\left(2an-a-2\sum_{k=1}^{a}\left[\frac{2n}{x_k}\right]\right)+\sum_{k=1}^{a}\left\{x_k\left[\frac{2n}{x_k}\right]\left(\left[\frac{2n}{x_k}\right]+1\right)\right\}$$

$$(2)f_{min}=4n(x-a)+x-\sum_{k=1}^{a}x_k^2$$

x_k 爲 a 個圓中(具有非零的缺口數)，第 k 個圓的缺口數，且 $\sum_{k=1}^{a}x_k=x$。

pf：(1)假設 m 個圓上的缺口數各爲 x_1、$x_2\cdots x_m$，其中若有 a 個圓的缺口數不爲 0，根據【定理三】之(1)：

$$f_{max}=\sum_{k=1}^{a}f_{k\ \max}=\sum_{k=1}^{a}\left\{(2n)\left(2n-\left[\frac{2n}{x_k}\right]\right)-\left(2n-\left[\frac{2n}{x_k}\right]x_k\right)\left(\left[\frac{2n}{x_k}\right]+1\right)\right\}$$

$$=2n\left(2an-a-2\sum_{k=1}^{a}\left[\frac{2n}{x_k}\right]\right)+\sum_{k=1}^{a}\left\{x_k\left[\frac{2n}{x_k}\right]\left(\left[\frac{2n}{x_k}\right]+1\right)\right\}$$

(2)同理，根據【定理三】之(2)：

$$f_{min}=\sum_{k=1}^{a}(x_k-1)(4n-x_k)=4n(x-a)+x-\sum_{k=1}^{a}x_k^2 \qquad \#$$

同理根據【定理四】我們推導出【定理六】，求得 N(m,n,0,y)的 f_{max} 與 f_{min}。

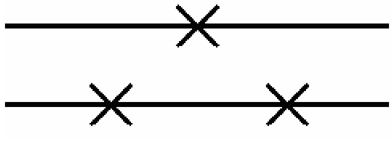
【定理六】∀ N(m,n,0,y)

$$(1)f_{max}=(4m+2)\left(mb-\sum_{k=1}^{b}\left[\frac{2m+1}{y_k+1}\right]\right)+\sum_{k=1}^{b}\left\{(y_k+1)\left[\frac{2m+1}{y_k+1}\right]\left(\left[\frac{2m+1}{y_k+1}\right]+1\right)\right\}$$

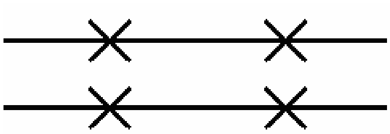
$(2)f_{min}=(4m+1)y-\sum_{k=1}^{b}y_k^2$，$y_k$ 爲 b 條具有非零缺口數的直線中，第 k 條直線的缺口數，且 $\sum_{k=1}^{b}y_k=y$。

但在【定理五】及【定理六】之中，並不能看出缺口如何分配給所有的圓或直線，可使 N(m,n,x,0)和 N(m,n,0,y)有 f_{max} 或 f_{min} 的情況發生，故【定理五】和【定理六】僅爲求 f_{max} 和 f_{min} 的必要條件。

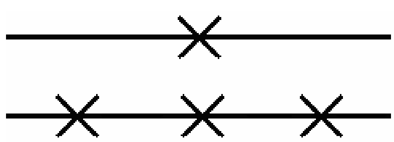
說明：<如圖八>在 f 均有最大值的情況下，要再加入一個新缺口，則可以有兩種方式：



(圖八)



(圖九)



(圖十)

我們猜測 N(m,n,x,0)和 N(m,n,0,y)的缺口分配，應該是類推 N(1,n,x,0)和 N(m,1,0,y)的結果：

在 N(m,n,x,0)或 N(m,n,0,y)中，分別將缺口平均分配到各 m 個圓或 n 條直線上，
而各圓及直線上的結點又平均分佈時有 f_{max}；極端分佈時會有 f_{min}。

這裡我們引進 g(利益函數)。(符號及說明 6.)

從<圖八>變成<圖九>，減少量的變化量= $f_{max}(m,1,0,2)$ - $f_{max}(m,1,0,1)$ = $g_{max}(m,1,0,2)$

從<圖八>變成<圖十>，減少量的變化量= $f_{max}(m,1,0,3)$ - $f_{max}(m,1,0,2)$ = $g_{max}(m,1,0,3)$

只要我們能證明 g 在缺口數增加時皆爲遞減函數，即可得知：

分配缺口給不同的直線或圓時，平均化分配可得 f_{max}，極端化分配可得 f_{min}。

【引理 4】(1)$g_{max}(1,n,x,0)= 4n(\left[\frac{2n}{x-1}\right]-\left[\frac{2n}{x}\right]) + x\left[\frac{2n}{x}\right](\left[\frac{2n}{x}\right]+1) - (x-1)\left[\frac{2n}{x-1}\right](\left[\frac{2n}{x-1}\right]+1)$

(2)$g_{min}(1,n,x,0)= 4n+2-2x$

pf：(1)因爲 $g_{max}(1,n,x,0) = f_{max}(1,n,x,0) - f_{max}(1,n,x-1,0)$

根據【定理三】之(1)，知道 $f_{max}(1,n,x,0)$和 $f_{max}(1,n,x-1,0)$，

所以 $g_{max}(1,n,x,0) = f_{max}(1,n,x,0) - f_{max}(1,n,x-1,0)$

$= 4n(\left[\frac{2n}{x-1}\right]-\left[\frac{2n}{x}\right]) + x\left[\frac{2n}{x}\right](\left[\frac{2n}{x}\right]+1) - (x-1)\left[\frac{2n}{x-1}\right](\left[\frac{2n}{x-1}\right]+1)$

(2)同理根據【定理三】之(2)，$g_{min}(1,n,x,0) = f_{min}(1,n,x,0)- f_{min}(1,n,x-1,0)= 4n+2-2x$ #

同理根據【定理四】推導出 $g_{max}(m,1,0,y)$和 $g_{min}(m,1,0,y)$的公式。

【引理 5】(1)$g_{max}(m,1,0,y)=(4m+2)(\left[\frac{2m+1}{y}\right]-\left[\frac{2m+1}{y+1}\right])+(y+1)\left[\frac{2m+1}{y+1}\right](\left[\frac{2m+1}{y+1}\right]+1)- y\left[\frac{2m+1}{y+1}\right](\left[\frac{2m+1}{y+1}\right]+1)$

(2)$g_{min}(m,1,0,y)= 4m+2-2y$

其中 g_{min}的情況因爲 x、y 的係數均爲負值，所以明顯爲遞減函數。

但 g_{max}則牽涉到「高斯記號」的運算，較爲複雜。

考慮高斯函數的圖形，發現高斯函數整數點不可微分，但其他的地方皆可微且等於 0，

於是，要證明「g_{max}爲遞減」等價於「g_{max}的一階導數≤0」。

【引理 6】$g_{max}(1,n,x,0)$、$g_{max}(m,1,0,y)$爲遞減函數。

pf：以圓上的情況分析：

(1)若 $\frac{2n}{x}\in N$，且 $\frac{2n}{x-1}\in N$，則 $g_{max}(1,n,x,0) = 4n^2(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x}) \geq 0$，

故 $g'_{max}(1,n,x,0) = 4n^2(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{(x-1)^2}) \leq 0$

(2)若 $\frac{2n}{x}\notin N$，且 $\frac{2n}{x-1}\notin N$，則 $g'_{max}(1,n,x,0)=(\left[\frac{2n}{x}\right]-\left[\frac{2n}{x-1}\right])(\left[\frac{2n}{x}\right]+\left[\frac{2n}{x-1}\right]+1)$

因爲 $\left[\frac{2n}{x-1}\right] \geq \left[\frac{2n}{x}\right]$，所以 $g'_{max}(1,n,x,0) \leq 0$

(3)若 $\frac{2n}{x}\notin N$，且 $\frac{2n}{x-1}\in N$，$g'_{max}(1,n,x,0)= -(\frac{2n}{x-1}+\left[\frac{2n}{x}\right])(\frac{2n}{x-1}-\left[\frac{2n}{x}\right]) + \left[\frac{2n}{x}\right]$

則因爲 $\frac{2n}{x-1} > \frac{2n}{x} \geq \left[\frac{2n}{x}\right]$，且 $\frac{2n}{x-1}$和 $\left[\frac{2n}{x}\right]$皆爲正整數，

所以 $\frac{2n}{x-1}-\left[\frac{2n}{x}\right] \ \ge\ 1$，所以 $g'_{max}(1,n,x,0)\ \le\ -\frac{2n}{x-1}\ \le\ 0$

(4)若 $\frac{2n}{x}\in N$，且 $\frac{2n}{x-1}\notin N$，$g'_{max}(1,n,x,0) = (\frac{2n}{x}+\left[\frac{2n}{x-1}\right])(\frac{2n}{x}-\left[\frac{2n}{x-1}\right]) - \left[\frac{2n}{x-1}\right]$

其中 $\frac{2n}{x-1}\ \ge\ \left[\frac{2n}{x-1}\right]$ 且 $\frac{2n}{x-1}\ \ge\ \frac{2n}{x}$，則因爲 $\left[\frac{2n}{x-1}\right]$ 爲最接近 $\frac{2n}{x-1}$ 的自然數，

所以 $\frac{2n}{x-1}\ge\left[\frac{2n}{x-1}\right]\ge\frac{2n}{x}$， 故 $g'_{max}(1,n,x,0)\ \le\ -\left[\frac{2n}{x-1}\right]\ \le\ 0$

同理可證 $g_{max}(m,1,0,y)$爲遞減函數。 #

根據【引理 6】可知「分配缺口給不同的圓或直線時，平均化可得 f_{max}，極端化可得 f_{min}。」

【定理七】N(m,n,x,0)和 N(m,n,0,y)的均化與極化

對於所有 N(m,n,x,0)和 N(m,n,0,y)，欲使 f 有最大値，將缺口平均分配給每一圓或每一直線，並且各圓或直線上結點的分配亦須平均化。而要使 f 有最小値，則將缺口極端地分配給圓或直線，且各個圓或直線上的結點分配也須極端化。

我們注意到在圓上放置一個缺口對蜘蛛數是沒有影響的，所以 m 個圓和 n 條直線的均化與極化策略會有一些不同。

【性質 3】(1) m 個圓的均化一開始以$\boxed{\text{兩個缺口}}$爲一個單位分配，在每個圓都有兩個缺口之後，再以一個缺口爲一個單位來分配；

極化則要先在所有圓上放置一個缺口後，剩下的 x-m 個缺口再對此 m 個圓做極端化地分配。

(2) n 條直線的均化和極化均以$\boxed{\text{一個缺口}}$爲單位來分配。

說明：(1)對圓上的缺口來說，要有 f_{max} 必須避免讓圓上只有一個缺口，

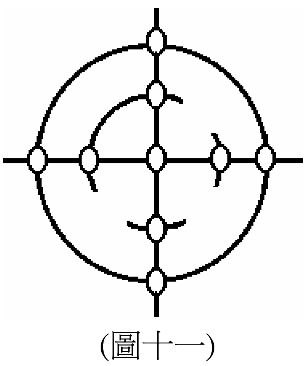
所以若有 3 個缺口，要全部放在同一圓上<如圖十一>

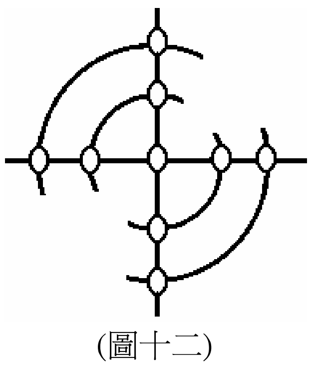
但若有 4 個缺口，則每 2 個缺口分配給一個圓。<如圖十二>

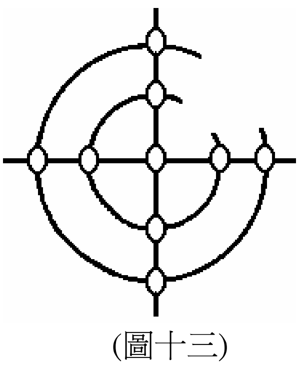
而若要有 f_{min}，則先在所有的圓上放一個缺口，<如圖十三>

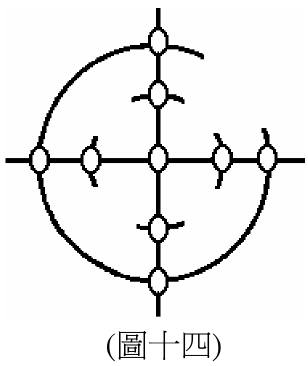
再把剩下的 x-m 個缺口極端化分配給圓。<如圖十四>

(2)對直線上的缺口來說，只要將缺口平均化或極端化分配即可。


(圖十一)


(圖十二)


(圖十三)


(圖十四)

則根據【定理七】和【性質 3】，我們可以將【定理五】和【定理六】的結果做修正，得到求 f(m,n,x,0)和 f(m,n,0,y)的公式。

針對圓上的情況而言

【定理八】∀N(m,n,x,0)，

Max：(1)若$\left[\frac{x}{m}\right]$≧2：

則 f_{max} ＝ $2n\left(2mn-m-2\left(\left[\frac{2n}{\left[\frac{x}{m}\right]}\right](m-x+\left[\frac{x}{m}\right]m)+\left[\frac{2n}{\left[\frac{x}{m}\right]+1}\right](x-\left[\frac{x}{m}\right]m)\right)\right)$

$+\left[\frac{x}{m}\right]\left[\frac{2n}{\left[\frac{x}{m}\right]}\right](\left[\frac{2n}{\left[\frac{x}{m}\right]}\right]+1)(m-x+\left[\frac{x}{m}\right]m)+(\left[\frac{x}{m}\right]+1)\left[\frac{2n}{\left[\frac{x}{m}\right]+1}\right](\left[\frac{2n}{\left[\frac{x}{m}\right]+1}\right]+1)(x-\left[\frac{x}{m}\right]m)$

(2)若 0≦$\left[\frac{x}{m}\right]$≦1，

(i)在 x≦3 時，a=1，$f_{max}=2n\left(2n-1-2\left[\frac{2n}{x}\right]\right)+x\left[\frac{2n}{x}\right](\left[\frac{2n}{x}\right]+1)$。

(ii)在 x＞3 時，若 x 為偶數，則 a=$\frac{x}{2}$，$f_{max}=xn^2$。

若 x 為奇數，則 a=$\frac{x-1}{2}$，$f_{max}=n-nx+4n(n-\left[\frac{2n}{3}\right])+3\left[\frac{2n}{3}\right](\left[\frac{2n}{3}\right]+1)$

Min：(3)若$\frac{x}{m}$>1，

則 $f_{min}=(4n+1)(x-m)-(4n^2-1)\left[\frac{x-m}{2n-1}\right]-(r+1)^2+1$，其中 $r=x-m-(2n-1)\left[\frac{x-m}{2n-1}\right]$

(4)若 0≤$\frac{x}{m}$≤1，則 $f_{min}=0$

pf of Max：(1)若$\left[\frac{x}{m}\right]$≧2，則根據【定理七】均化的策略，每個圓至少有兩個缺口，

缺口之放置如下時有 f_{max}：m-r 個具有$\left[\frac{x}{m}\right]$個缺口的圓，

r 個具有$\left[\frac{x}{m}\right]$+1 個缺口的圓，其中 $r=x-\left[\frac{x}{m}\right]m$。根據【定理五】之(1)：

$f_{max}=2n(2an-a-2\sum_{k=1}^{a}\left[\frac{2n}{x_k}\right])+\sum_{k=1}^{a}\left\{x_k\left[\frac{2n}{x_k}\right](\left[\frac{2n}{x_k}\right]+1)\right\}$

此時的 a=m，所以均化後，

$f_{max}=2n\left(2mn-m-2\left(\left[\frac{2n}{\left[\frac{x}{m}\right]}\right](m-x+\left[\frac{x}{m}\right]m)+\left[\frac{2n}{\left[\frac{x}{m}\right]+1}\right](x-\left[\frac{x}{m}\right]m)\right)\right)$

$$+\left[\frac{x}{m}\right]\left[\frac{2n}{\left[\frac{x}{m}\right]}\right](\left[\frac{2n}{\left[\frac{x}{m}\right]}\right]+1)(m-x+\left[\frac{x}{m}\right]m)+(\left[\frac{x}{m}\right]+1)\left[\frac{2n}{\left[\frac{x}{m}\right]+1}\right](\left[\frac{2n}{\left[\frac{x}{m}\right]+1}\right]+1)(x-\left[\frac{x}{m}\right]m)$$

(2)若 $0\leqq\left[\frac{x}{m}\right]\leqq 1$ 則根據【定理七】均化概念及【性質 3】,

(i)在 $x\leqq 3$ 時，只有一個具有 x 個缺口的圓，即 a=1，

所以 $f_{max}=2n\left(2n-1-2\left[\frac{2n}{x}\right]\right)+x\left[\frac{2n}{x}\right](\left[\frac{2n}{x}\right]+1)$。

(ii)在 $x>3$ 時，若 x 爲偶數，則 $a=\frac{x}{2}$，缺口之放置如下時有 f_{max}：

$\boxed{\frac{x}{2}\text{個具有 2 個缺口的圓}}$，則 $f_{max}=xn^2$

若 x 爲奇數，則 $a=\frac{x-1}{2}$，缺口之放置如下時有 f_{max}：

$\boxed{\frac{x-3}{2}\text{個具有 2 個缺口的圓，1 個具有 3 個缺口的圓}}$

$f_{max}=n-nx+4n(n-\left[\frac{2n}{3}\right])+3\left[\frac{2n}{3}\right](\left[\frac{2n}{3}\right]+1)$

pf of Min：(3)若 $\frac{x}{m}>1$，根據【性質 3】和【定理七】極化之概念，

先在 m 個圓上各放一個缺口，再將剩餘的 x-m 個缺口極端化分配，

缺口放置如下時有 f_{min}：$\left[\frac{x-m}{2n-1}\right]$個具有 2n 個缺口的圓，

$m-1-\left[\frac{x-m}{2n-1}\right]$個具有 1 個缺口的圓，1 個具有 r+1 個缺口的圓，

其中 $r=x-m-(2n-1)\left[\frac{x-m}{2n-1}\right]$。

根據【定理五】之(2)知：$f_{min}=4n(x-a)+x-\sum_{k=1}^{a}x_k^2$，而此時 a = m，

故 $f_{min}=(4n+1)(x-m)-(4n^2-1)\left[\frac{x-m}{2n-1}\right]-(r+1)^2+1$。

(4)若 $0\leq\frac{x}{m}\leq 1$，則根據【性質 3】，分配給所有圓各一個缺口，

所以 f_{min} 會發生在有 x 個具有 1 個缺口的圓時，

但因爲在圓上放置一個缺口，並不會對蜘蛛數造成影響，所以 $f_{min}=0$ #

同理可得直線上的情形。

針對直線上的情況而言

【定理九】$\forall$ N(m,n,0,y)

$$(1)\ f_{max} = (4m+2)\left(mb - \left[\frac{2m+1}{\left[\frac{y}{b}\right]+1}\right]\left(b - y + \left[\frac{y}{b}\right]b\right) - \left[\frac{2m+1}{\left[\frac{y}{b}\right]+2}\right]\left(y - \left[\frac{y}{b}\right]b\right) \right)$$

$$+\left(\left[\frac{y}{b}\right]+1\right)\left[\frac{2m+1}{\left[\frac{y}{b}\right]+1}\right]\left(\left[\frac{2m+1}{\left[\frac{y}{b}\right]+1}\right]+1\right)\left(b-y+\left[\frac{y}{b}\right]b\right) + \left(\left[\frac{y}{b}\right]+2\right)\left[\frac{2m+1}{\left[\frac{y}{b}\right]+2}\right]\left(\left[\frac{2m+1}{\left[\frac{y}{b}\right]+2}\right]+1\right)\left(y-\left[\frac{y}{b}\right]b\right)$$

其中若 $\left[\frac{y}{n}\right] \geqq 1$，b=n；若 $\left[\frac{y}{n}\right]=0$，則 b=y。

$$(2)\ f_{min} = y(4m+1-y) + 4m\left[\frac{y}{2m}\right]\left(y-m-m\left[\frac{y}{2m}\right]\right),$$

其中若 $y < 2mn$，則 $b=\left[\frac{y}{2m}\right]+1$；若 y=2mn，則 b=n 。

到此，所有 N(m,n,x,0)和 N(m,n,0,y)之 f_{max} 及 f_{min} 的問題，可由【定理八】、【定理九】解決。

第 4 節.確定 N(m,n,x,y)中，蜘蛛數 S(m,n,x,y)的通式

因爲圓和直線爲兩個獨立的系統，所以 N(m,n,x,y)中之 f_{max} 及 f_{min} 的問題，
只要將圓和直線的 f_{max} 或 f_{min} 相加即可。

【定理十】：$\forall$ N(m,n,x,y)

(1)Max：若 $\left[\frac{x}{m}\right] \geqq 2$，則 f_{max}=【定理八】之(1)＋【定理九】之(1)

若 $0 \leqq \left[\frac{x}{m}\right] \leqq 1$，則 f_{max}=【定理八】之(2)＋【定理九】之(1)

(2)Min：若 $\frac{x}{m} > 1$，則 f_{min}=【定理八】之(3)＋【定理九】之(2)

若 $0 \leqq \frac{x}{m} \leqq 1$，則 f_{min}=【定理八】之(4)＋【定理九】之(2)

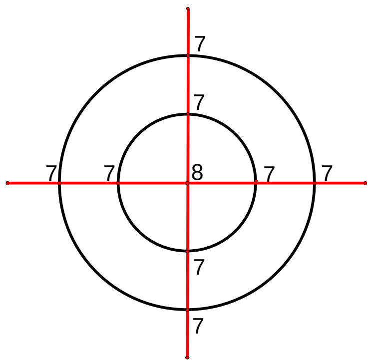
至此，若給定一組 N(m,n,x,y)，只要先根據【定理一】計算出 S(m,n,0,0)，再依【定理十】計算出 f 的最大值和最小值，即可得到 S(m,n,x,y)的最大值和最小值。

最後以 N(2,2,2,2)的驗證作爲第一章的結束。

N(2,2,2,2)：

第一部分：以最基本的方法數出各個數值。

S(2,2,0,0) = 56。<如圖十五>。



我們將圓和直線分開討論，並且因爲只需考慮總減少量，
所以只要比較結點數分配的不同組合情形即可。

定義(a,b)表示直線上或圓上被分爲兩段：

(圖十五)

分別爲相連的 a 個結點和相連的 b 個結點。(a,b,c,…)的情況以此方式類推。

兩個缺口分配給兩個圓，有下列情況：

(i)兩缺口在同一圓：則圓被缺口分爲兩段，

有(1,3)、(2,2)兩種分法。

(1,3)的分法 $f = 6$，<如圖十六>；

(2,2)的分法 $f = 8$，<如圖十七>。

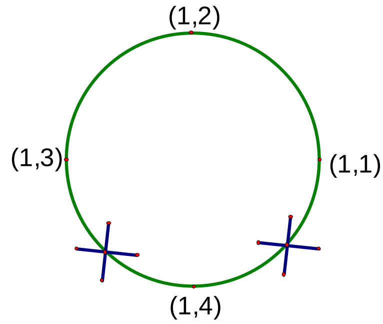
(ii)兩缺口在不同圓：

只有一種分法，$f = 0$。<如圖十八>。

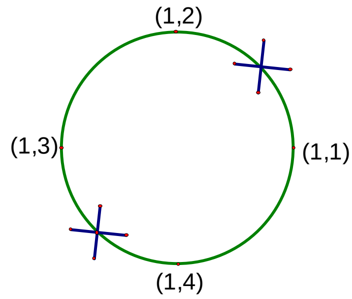
比較<圖十六>到<圖十八>三個圖的減少量可知：

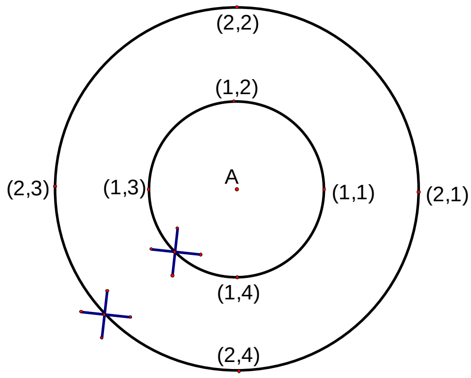
$f_{max} = 8$，爲<圖十七> ； $f_{min} = 0$，爲<圖十八>。

所以 $S_{min}(2,2,2,0) = 56$；$S_{max}(2,2,2,0) = 64$。



(圖十六)





(圖十八)

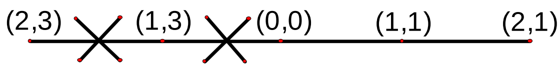
兩個缺口分配給兩條直線，有下列情況：

(i)兩缺口在同一條直線：直線被缺口分爲 3 段

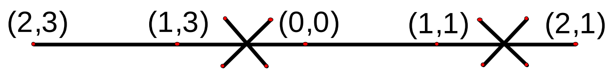
有(1,1,3)、(1,2,2)兩種分配方法。

(1,1,3)的分法 $f = 14$，<如圖十九>；

(1,2,2)的分法 $f = 16$，<如圖二十 >。



(圖十九)

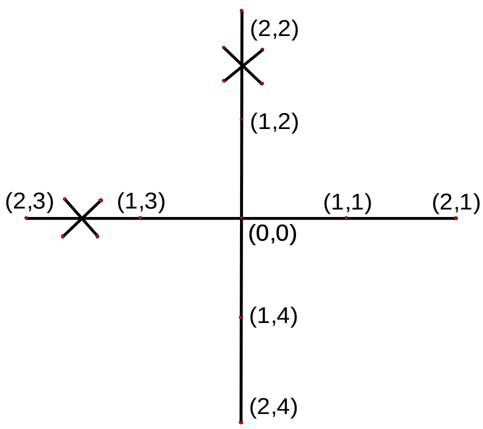


(圖二十)

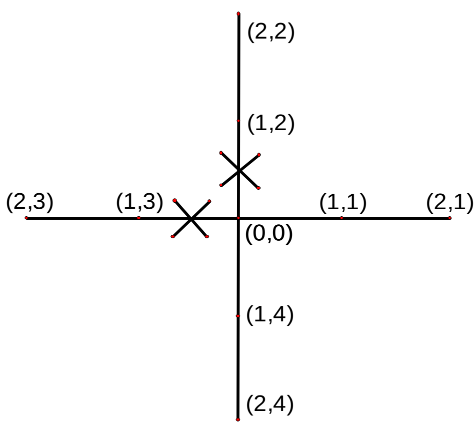
(ii)兩缺口在不同直線：直線各被分爲兩段，

每條直線有(1,4)、(2,3)兩種分配方法，所以共有三種不同分法。兩條皆(1,4)的分法 $f = 16$，如圖二十一；兩條皆(2,3)的分法 $f = 24$，如圖二十二。 (1,4)、(2,3)各一的分法 $f = 20$，如圖二十。

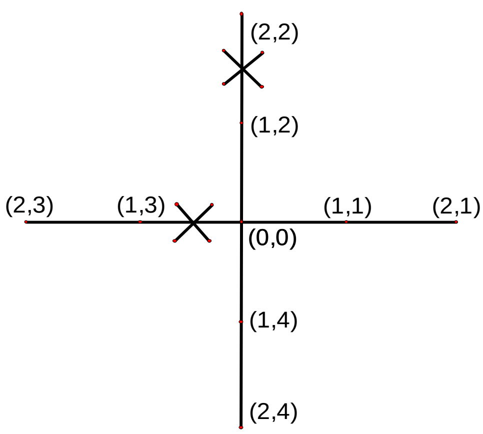
(圖二十一)



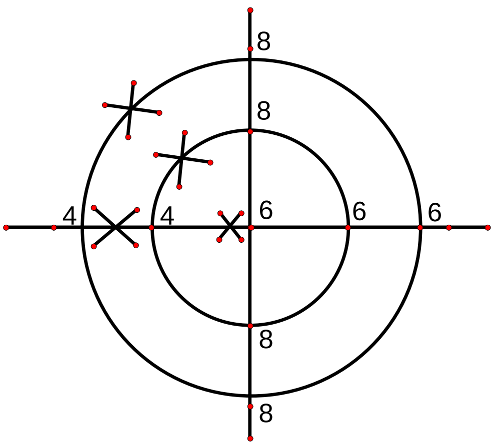
(圖二十二)



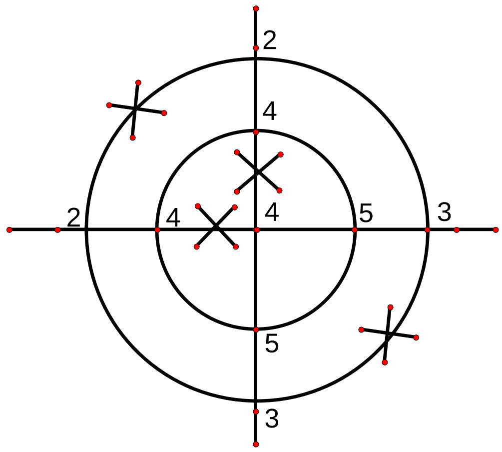
(圖二十三)



比較從<圖十九>到<圖二十三>五個圖的減少量可知：$f_{max}=24$，爲<圖二十二>；
$f_{min}=14$，爲<圖十九>。　所以 $S_{min}(2,2,0,2)=40$；$S_{max}(2,2,0,2)=50$。
將圓和直線最大值和最小值的圖形分別放在一起，即可得到 S(2,2,2,2)的最大值和最小值。
<如圖二十四>，$S_{max}(2,2,2,2)=50$ ； <如圖二十五>，$S_{min}(2,2,2,2)=32$ 。



(圖二十四)



(圖二十五)

第二部份：以公式計算出各個數值。

(i)S(2,2,0,0)

則根據【定理一】： $S(2,2,0,0)=4mn(m+n)=64$。

(ii)S(2,2,2,0)的 min

考慮圓上的缺口：

則根據【定理二】和【定理七】及【性質 3】:

2 個缺口分給 2 個圓，當其中 1 圓有 2 個缺口，且結點數分配平均化時有 f_{max}。

則根據【定理三】之(1)： $f_{max}(2,2,2,0)=8$

及根據【定理八】之(2)： 因爲 $0\leqq\left[\frac{2}{2}\right]\leqq 1$，且 $2\leqq 3$，所以 a=1，$f_{max}(2,2,2,0)=8$。

則 $S_{min}(2,2,2,0)=S(2,2,0,0)-f_{max}(2,2,2,0)=56$。

(iii)S(2,2,2,0)的 max <如圖十八>

而當 2 個圓都各有 1 個缺口時有 f_{min}。根據【定理三】之(2)：$f_{min}(2,2,2,0)=0$

及根據【定理八】之(4)： 因爲 $0\leqq\frac{2}{2}\leqq 1$，所以 $f_{min}(2,2,2,0)=0$，$S_{max}(2,2,2,0)=64$。

(iv)S(2,2,0,2)的 min <如圖二十二>

考慮直線上的缺口：

根據【定理二】和【定理七】及【性質 3】:

2 個缺口分給 2 條直線，當 2 條直線各有一個缺口，且結點數分配平均化時有 f_{max}。

則根據【定理四】之(1)： $f_{max}(2,2,0,2)=24$

及根據【定理九】之(1)： $f_{max}(2,2,0,2)=24$。則 $S_{min}(2,2,0,2)=40$。

(v)S(2,2,0,2)的 max <如圖十九>

當 1 條直線上有 2 個缺口，且結點數分配極端化時有 f_{min}。

根據【定理四】之(2)： $f_{min}(2,2,0,2)=14$ ； 及【定理九】之(2)： $f_{min}(2,2,0,2)=14$，

則 $S_{max}(2,2,0,2)=50$。

(vi)S(2,2,2,2)的 min <如圖二十四>

根據【定理十】，因爲 $0 \leqq \left[\dfrac{2}{2}\right] \leqq 1$，所以 f_{max}=【定理八】之(2)+【定理九】之(1)

所以 $f_{max}(2,2,2,2) = 32$， $S_{min}(2,2,2,2) = 32$。

(vii)S(5,4,5,4)的 max <如圖三十二>

根據【定理十】，因爲 $0 \leqq \dfrac{2}{2} \leqq 1$，所以 f_{min} =【定理九】之(2)

所以 $f_{min}(2,2,2,2) = 14$ ， $S_{max}(2,2,2,2) = 50$

將第一部分和第二部份做對照，可知各項數值皆相同。

陸、研究結果

一、在研究過程中，我們得到許多定理和性質，分別針對各種不同的情形求出蜘蛛數 S 的最小值和最大值。而我們採取的策略是先求減少量函數 f，再推得蜘蛛數 S。

二、我們將研究的結果整理如下：

定理一	S(m,n,0,0)　　無缺口的蜘蛛數
定理二	均化與極化－N(1,n,x,0)和 N(m,1,0,y)
定理三	f(1,n,x,0)之 Max、Min
定理四	f(m,1,0,y)之 Max、Min
定理五	求 f(m,n,x,0)Max、Min 的必要條件
定理六	求 f(m,n,0,y)Max、Min 的必要條件
定理七	均化與極化－N(m,n,x,0)和 N(m,n,0,y)
定理八	f(m,n,x,0)之 Max、Min
定理九	f(m,n,0,y)之 Max、Min
定理十	f(m,n,x,y)之 Max、Min
定理十一	f(m,n,k)之 Min 的缺口擺放策略
定理十二	f(m,n,k)之 Min
定理十三	f(m,n,k)之 Max 的缺口擺放策略
定理十四	f(m,n,k)之 Max

三、在研究過程中，我們用了大量的高斯符號，在不熟悉其運算的規則之下，剛開始無法證明 g 爲遞減函數，因爲 g_{max} 牽涉到「高斯記號」的運算，使得式子十分複雜。
我們在這裡花了很多的時間。過程中我們藉助電腦針對【引理 4】之(1)和【引理 5】之(1)，分別代入不同的 m、n 觀察。(程式碼見附錄)根據數據，除了在圓上放置一個缺口對蜘蛛數沒有影響，導致 $g_{max}(1,n,1,0)=0$ 以外，我們確定這個方向是正確的。直到有一天和老師討論到導函數的想法，才終於證明了 g_{max} 爲遞減函數，推導出後面定理八、九、十的結果。這使我們想到高斯的一句話：『數學中的一些美麗定理具有這樣的特性：它們極易從事實中歸納，但證明卻隱藏得極深。』

四、在我們的研究當中，其核心問題即爲「均化和極化」。而在一個圓或一條直線中的「均化和極化」所代表的意義，即等同於將一個數字分成許多個較小的數字，要使所有較小的數字兩兩相乘的和，有最大值或最小值的分配方法。

柒、討論與應用

一、嘗試將蜘蛛網以正 n 邊形的所有對角線代替，尋找是否有新的性質和定理。
　　但此一方向因正 n 邊形之對角線交點個數情況太複雜而未有結果。

二、從【定理一】知道：給定一個網 N(m,n,0,0)，則 S(m,n,0,0)=4mn(m+n)。
　　若給定 $S' < S$，則是否存在缺口數(x,y)，使得 S(m,n,x,y)= S'，並討論有幾組(x,y)非負整數解，這是日後研究的未來展望。

三、一般以爲蜘蛛數和圖論有關，然作品研究的方向爲：將蜘蛛網的結構代數化，並求得極値的方法探討。事實上，本文中的蜘蛛網是一種規律而對稱的網，面對可能無規律或不對稱的網路，可以本研究的成果作爲參考，應用在局部性問題(即視爲規律而對稱的部分網)的解決協助。

四、爲深刻了解圓和直線的差異與獨立性，我們掌握的方式是由研究 x+y=k 問題切入，此項工作著實不易，不僅利用 VB 電腦語言協助，並由 g_c 和 g_L 兩類函數的方式說明清楚而獲得解決。

五、後面三章有：改變蜘蛛網的形態、新採地雷遊戲(蜘蛛篇)、施工路段與戰爭策略設計構想，作爲本文研究的應用範疇。

捌、參考文獻

柯利弗德．皮寇弗，數字的異想世界，商周出版社，p21~23，2003 年

中華民國第四十五屆中小學科學展覽會
評　　語

高中組 數學科

第三名

040408
漫步在蜘蛛網

國立屏東高級中學

評語：
1. 討論完整，反應出作者的努力及用心。
2. 作品裏出現作者自己定義的數學符號，顯示數學概念得以掌握，並且具備抽象思考之能力。