中華民國第四十五屆中小學科學展覽會
作品說明書

高中組 數學科

佳作

040407
當我們同在一起"滾蛋"！！

國立宜蘭高級中學

作者姓名：
高二 吳忠承 高二 楊智雅 高二 楊智皓
高二 楊慧郁

指導老師：
陳純男

當我們同在一起

～～滾

The Specification

科別：數學科

組別：高中組

Keyword：橢圓、滾動、座標軸

當我們同在一起”滾蛋”！

壹、 摘要

在此次的研究中，藉著製作動態幾何構圖(GSP)來觀察橢圓夾在兩軸間滾動、橢圓在平面上滾動、橢圓繞橢圓所形成的圖形，以期發現其中的規律及性質。

貳、 研究動機

「你畫的東西好像一顆蛋，害得我肚子都咕嚕咕嚕地發出聲響。」時已接近中午，在第四堂的專題課裡，圖形藉著 GSP 被呈現出來。突然，腦袋瓜裡邊閃過一個念頭－若是能利用橢圓滾動時所產生的圖形，究竟可研究出哪些在課堂上所沒探討過的性質呢？「咦！說不定可以讓蛋滾到肚子裡去。」在心裡偷偷這麼想著。許多疑問與好奇如同窗外的落葉般堆積在心上，於是，我們便開始著手進行一個與「蛋」有關的數學科展。

參、 研究目的

在利用 GSP 所製作出欲觀察的圖形中發現到：

一、 橢圓夾兩軸間滾動（以下稱橢圓繞軸）時其橢圓中心和原點連線跟兩軸之間的夾角變化有某種規則，以求其方程式。

二、 橢圓繞軸時其兩焦點在某種條件下所形成的特殊軌跡。

三、 橢圓在平面上滾動時兩焦點所形成出來的軌跡。

四、一橢圓繞一和其全等的橢圓時，其焦點固定地繞著特殊的軌道。

五、一橢圓繞一和其全等的橢圓時，其橢圓上一點形成之類心臟線。

於是我們進一步去研究、討論在觀察中所發現到的幾種特殊性質，以滿足我們對橢圓滾動的好奇心，以及解開心中的種種疑問。

肆、 研究設備及器材

電腦：動態幾何構圖軟體（以下簡稱：GSP）、Word2000 以上軟體、小畫家、網際網路。

伍、 研究過程或方法

一、 利用在高二下的數學課程中，我們所學到的橢圓基本原理跟相關性質、以及在專題研究課中，老師爲了讓我們能對圓錐曲線有更進一步的了解而教授的 GSP 軟體，藉此我們能夠利用 GSP 來畫出此次科展中所要研究的幾種橢圓圖形。

二、 因爲參加本次科學展覽，我們有了一個很好的機會來研究、觀察橢圓滾動圖形的幾種性質、規律。於是我們開始先從網路下手，經由網路的搜尋及過濾不切合我們要求的網站，我們終於找到一個擁有關於我們此次

研究中所欲觀察之圖形的網站：

http://poncelet.math.nthu.edu.tw/chuan/ellipse/ellipse.html

三、在其中我們找到了「橢圓繞軸」、「橢圓繞橢圓」兩個 GSP 圖形，但很遺憾地，其中只有分享圖形卻沒有說明如何去繪製，但研究一個圖形是要從繪製開始，才能真正參透其原理。所以我們就利用 GSP 對圖形裡每一個母單位(parents)形成的子單位(children)及形成原因在 properties 中（對母單位點滑鼠右鍵後的選單）有 English caption，觀察其背後的原始碼，藉此一步一步地推導出製作圖形的每一個步驟。

四、在瞭解所蒐集到的資訊裡的圖形作法後，我們開始延伸圖形，將圖形擴展到我們所欲研究的幾種樣式，然後觀察其中的性質、規律，最後再討論其形成原因。

陸、 討論

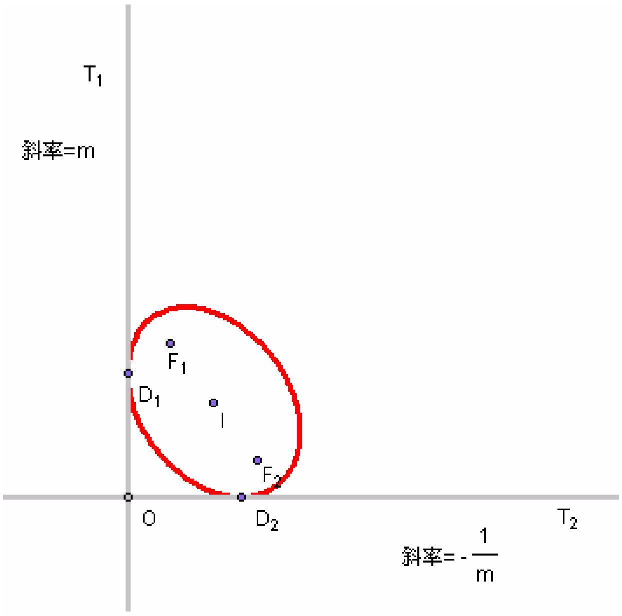
一、 橢圓繞軸

(一)、 說明：

1. 研究橢圓夾在兩軸間（必與兩軸相切）滾動（或稱繞軸）其圖形有何規律性或是性質存在。

(二)、 圖形基本概念：

1. 假設一橢圓 I 上兩條互相垂直的切線 T_1、T_2 其斜率分別為 m、$-\frac{1}{m}$。
2. 當兩切線 T_1、T_2 斜率改變時，兩切線會切著橢圓繞動；反過來同樣兩切線斜率改變時，想像眼睛跟著切線移動，其圖形為兩切線固定，而橢圓夾在兩切線間滾動。若我們將此兩切線視為兩座標軸 X、Y，即為我們所要研究之橢圓繞軸圖形。
3. 橢圓繞軸簡圖：



圖解：I 爲橢圓中心；F_1、F_2 爲橢圓兩焦點；
T_1、T_2 爲橢圓之兩切線(視爲 X、Y 軸)；
D_1、D_2 爲兩切線與橢圓之切點；
O 爲兩切線之交點(視爲座標原點)。

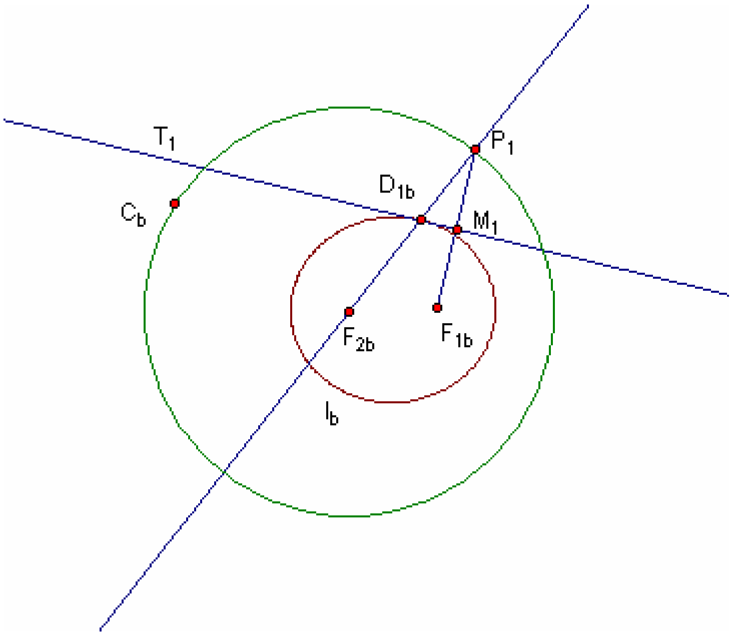
(三)、　橢圓繞軸 GSP 作法：

1. 「所謂：萬丈高樓平地起」接下來我們所要接觸的圖形中，都是以橢圓爲基礎畫出的，現在就讓我們說明 GSP 製作出橢圓的方法吧！

(1) 首先以點 F_{2b} 爲中心(作爲橢圓其中一焦點)以 $\overline{F_{2b}C_b}$ (=R)爲半徑畫一圓 C_b，並在圓內取一點 F_{1b} (作爲橢圓另一焦點)，並將 $\overline{F_{1b}F_{2b}}$ 連線取中點 I_b(作爲橢圓中心)。

(2) 在圓 C_b 上取一動點 P_1 並將 $\overline{P_1F_{1b}}$、$\overline{P_1F_{2b}}$ 連接且作 $\overline{P_1F_{1b}}$ 之中垂線交 $\overline{P_1F_{1b}}$ 於點 M_1、$\overline{P_1F_{2b}}$ 於點 D_{1b}，則當動點 P_1 繞圓旋轉時，點 D_{1b} 所形成之軌跡即爲一橢圓 I_b。

(3) 完成圖：



圖解：圓 C_b 其半徑爲（R=2a）C_b 爲圓上一點；

P_1 爲圓上動點；M_1 爲 $\overline{P_1F_{1b}}$ 之中垂線 T_1 的垂足；

D_{1b} 爲中垂線與橢圓 I_b 之切點；I_b 爲橢圓；
F_{1b}、F_{2b} 爲橢圓兩焦點；

此橢圓 I_b 之長軸長=2a=R；兩焦點距離 $\overline{F_{1b}F_{2b}}$=2c；

半短軸長=b=$\sqrt{a^2-c^2}$ 。(a>b)

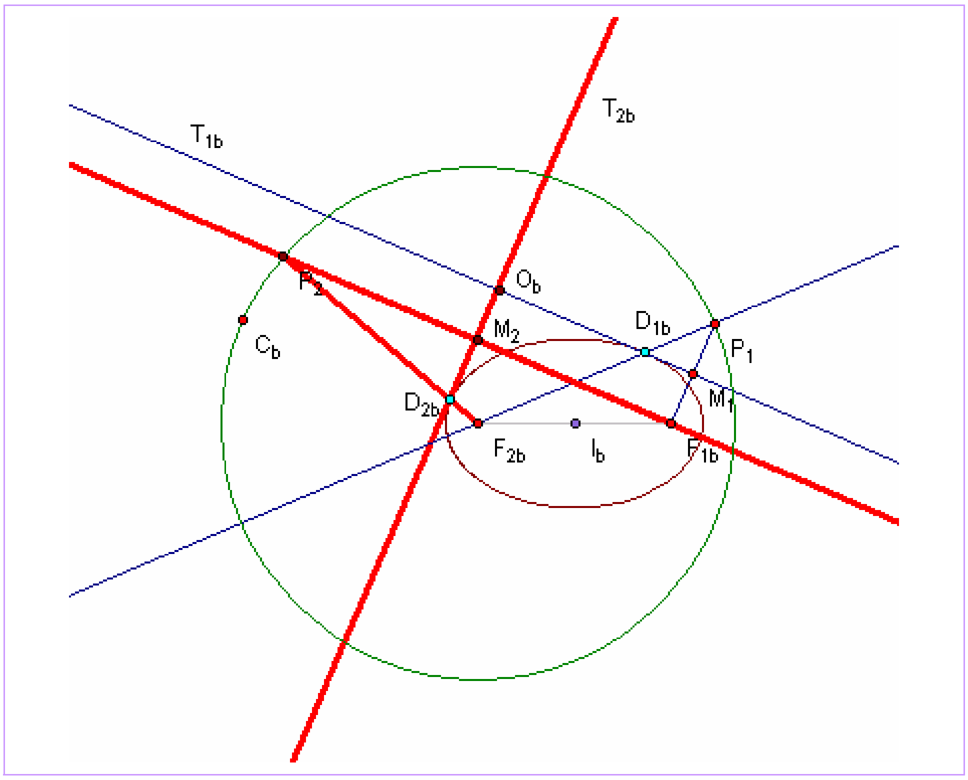
2. 橢圓繞軸之作法：

✓ 欲做橢圓 I_b 的兩條互相垂直之切線：

(1) 先做一條通過 F_{1b} 且垂直於線段 P_1F_{1b} 的直線，讓其與圓 C 交於一點 P_2 ，再將 P_2 和 F_{2b} 連起來。

(2) 取線段 P_1F_{1b} 的中點，將其命名爲 M_2 ，接著再做一條通過 M_2 且垂直於線段 P_2F_{1b} 的直線，這條直線即爲橢圓 I_b 一條垂直於切線 T_{1b} 的另一條切線 T_{2b} ，再來將 T_{2b} 與橢圓 I_b 的切點命名爲 D_{2b} ，而兩切線的交點則命名爲 O_b。

➢ 圖形 A ：

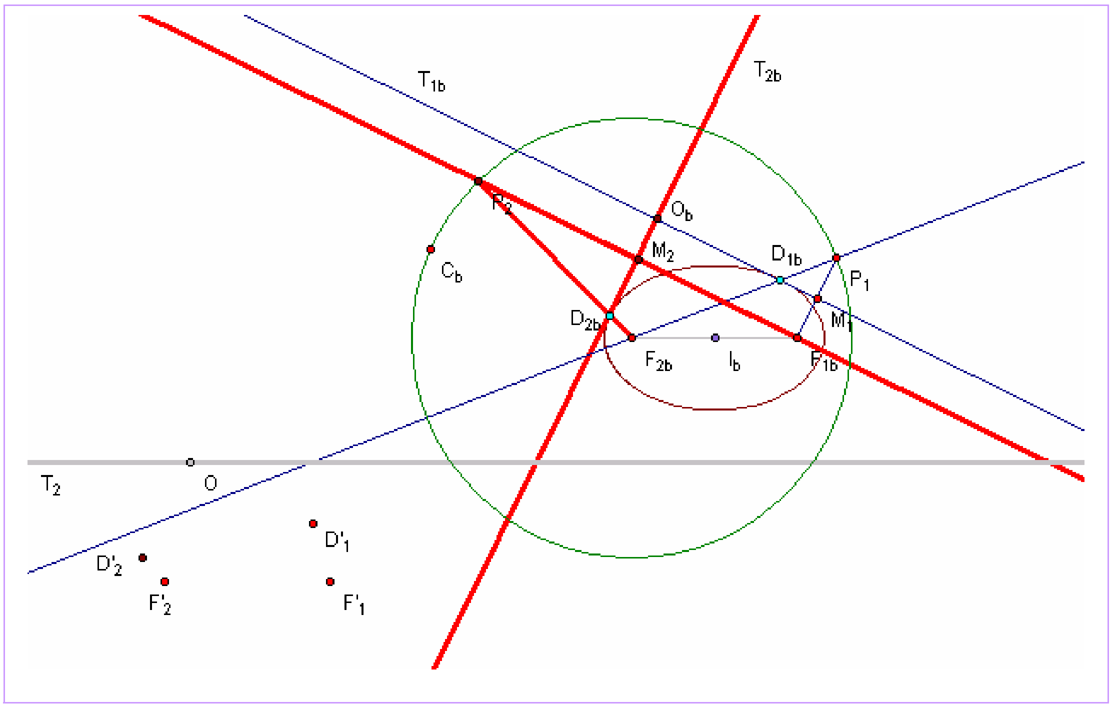


- ✓ 將橢圓的焦點(F_{1b} 、F_{2b})、切點(D_{1b}、D_{2b})及兩切線交點(O_b)平移。

(3) 首先在平面上畫一直線通過 O 點。

(4) 接著做向量 O_bO ，然後將 F_{1b} 、F_{2b}、D_{1b}、D_{2b} 以向量 O_bO 平移，得到 F_1' 、F_2' 、D_1' 、D_2' 。

➢ 圖形 B：

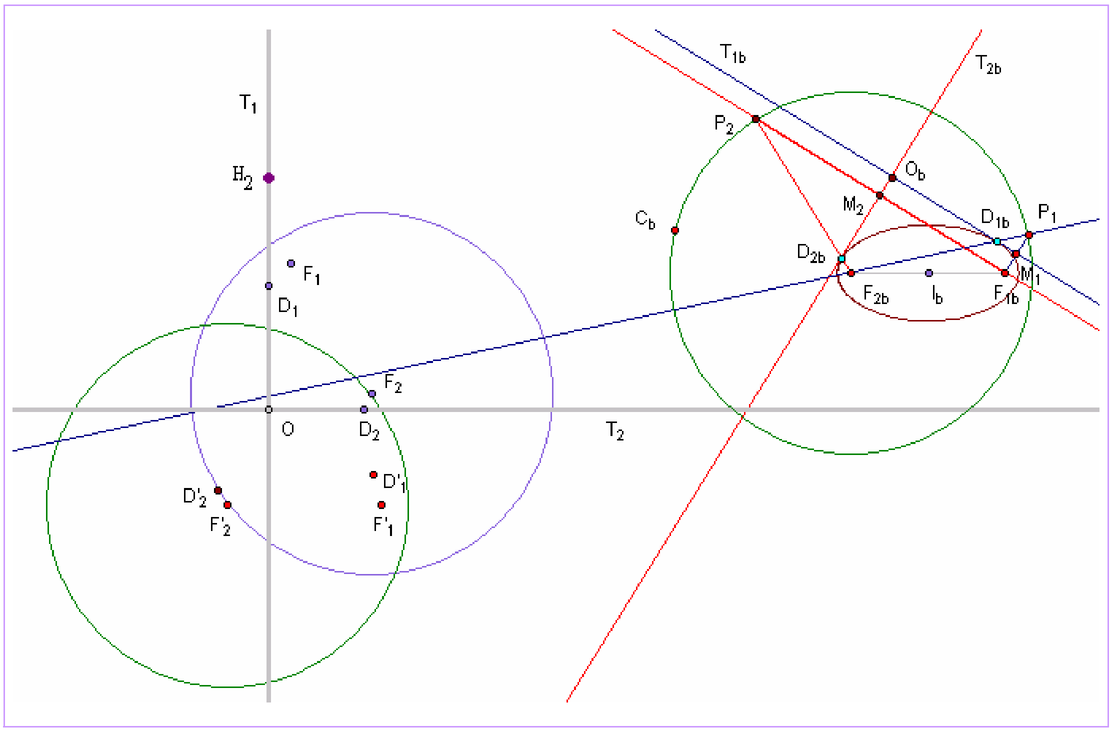


✓ 將點 F_1'、F_2'、D_1'、D_2' 沿著 O 點旋轉。

(5) 先以向量 O_bO 將圓 C 也平移。

(6) 再來先量出∠D_1'O H_2 的角度，將點 F_1'、F_2'、D_1'、D_2'及圓以∠D_1'O H_2 沿著 O 點旋轉，得 F_1、F_2、D_1、D_2 及圓。

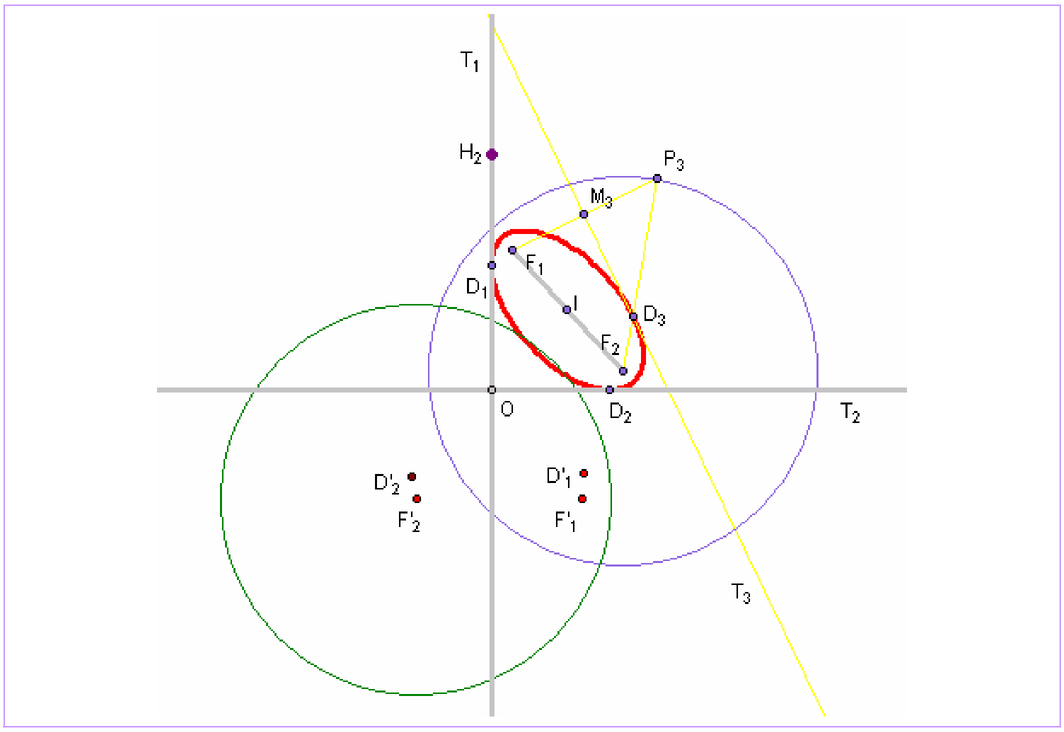
➢ 圖形 C：



✓ 完成。

(7) 接著以 F_1、F_2 為焦點再畫一個橢圓 I，切 T_1、T_2 於 D_1、D_2 即可。

➢ 完成圖形：



(8) 以 P_1 爲動點轉動時，橢圓 I 會以垂直軸 T_1 和水平軸 T_2 爲切線繞動即爲完成之圖形。

(9) 接下來所討論各項主題皆主要由以上圖中之橢圓 I：

其焦點 F_1、F_2；橢圓中心 I ；兩垂直切線 T_1、T_2；兩切點 D_1、D_2；有向角 $\angle F_1ID_1$； I 、 O 與兩軸夾角 $\angle IOD_1$、 $\angle IOD_2$ 來說明表達，故若無需要，不再另外標示說明！

(四)、　橢圓繞軸時，橢圓中心、座標原點與兩軸間夾角的性質：

1. 說明：

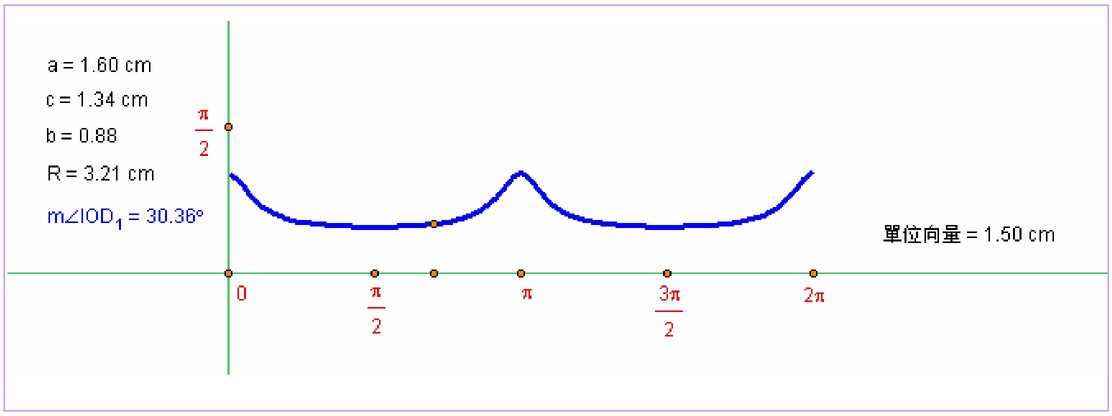
橢圓繞軸時，橢圓中心、座標原點與兩軸間夾角（與 X 軸：$\angle IOD_2$；與 Y 軸：$\angle IOD_1$）和有向角 $\angle D_{1b}I_bF_{1b}(=\angle F_1ID_1)$ 的函數關係圖形有其規律性。

2. 目的：

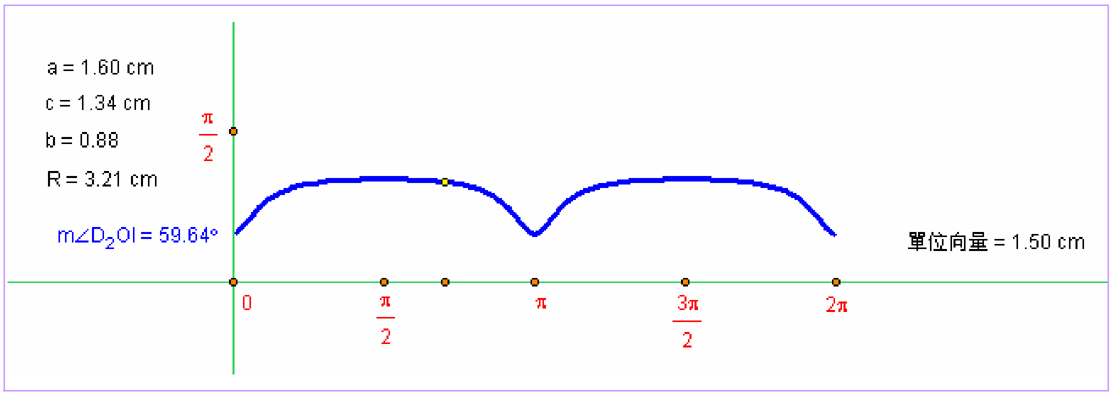
經由函數圖形的呈現來進一步觀察及討論其中的規律。

3. 其函數圖形：

➢ 圖形 A($\angle IOD_1$)：



➢ 圖形 B($\angle D_2OI$)：

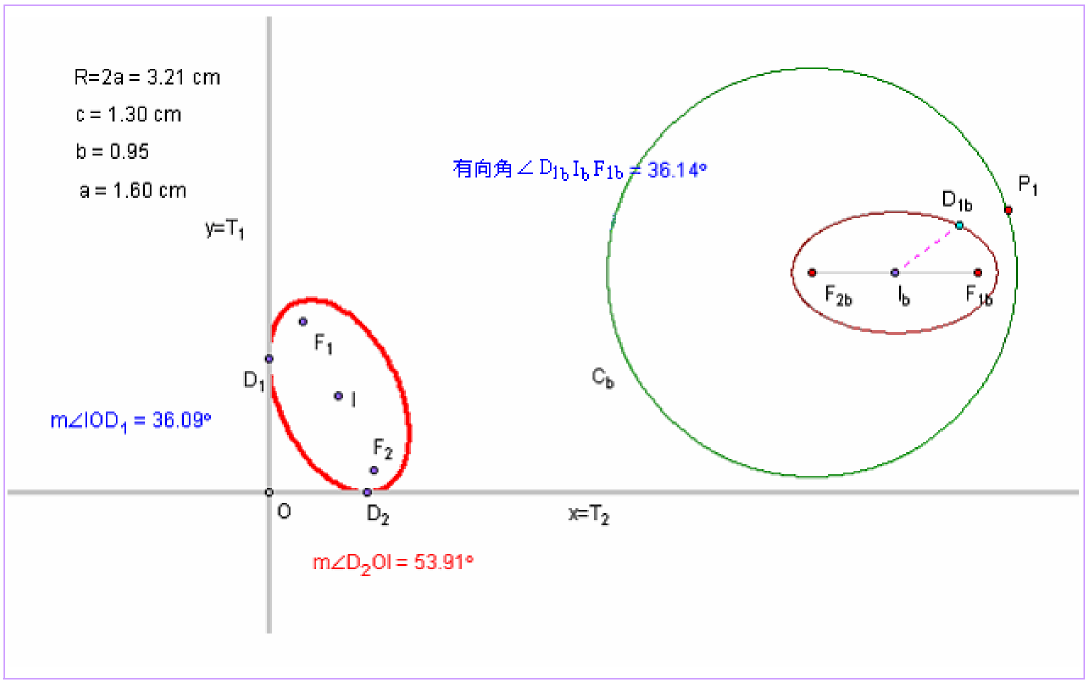


4. 作法：

橢圓 I_b 對應之圓 C_b 上的動點 P_1 移動時，橢圓 I 與兩軸相切且繞動，橢圓中心、座標原點與兩軸間夾角（$\angle IOD_1$、$\angle IOD_2$）會隨著有向角

$\angle D_{1b}I_bF_{1b}$(=$\angle F_1ID_1$)改變，其兩者間關係所形成的函數圖形即為上述中圖形 A、B。

➢ 圖示：

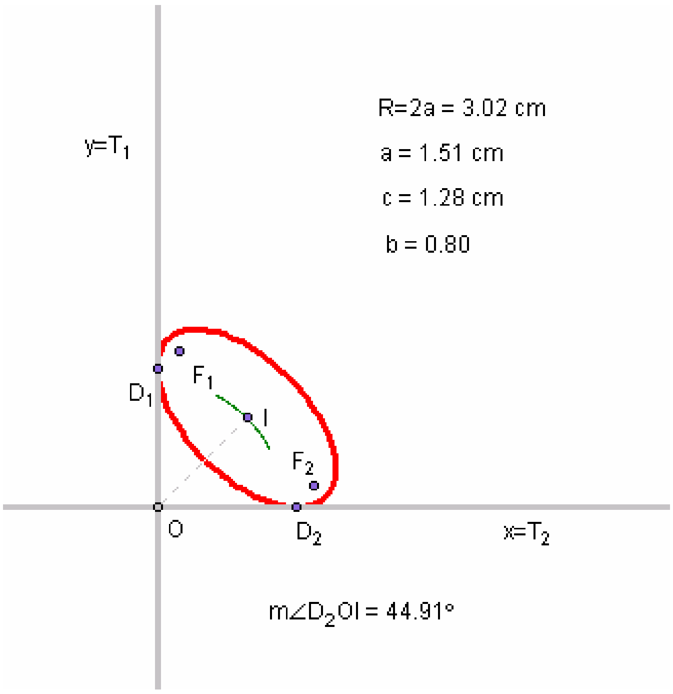


5. 觀察及討論：

➢ 觀察以上兩種函數圖形(以下以橢圓中心、座標原點和水平面 Y 軸之夾角$\angle IOD_1$來說明)，我們可以發現其函數圖形呈現出一種規律，類似一種波函數（擁有一定振幅、頻率、波長），值得讓我們來研究及討論其圖形所表達出的訊息。

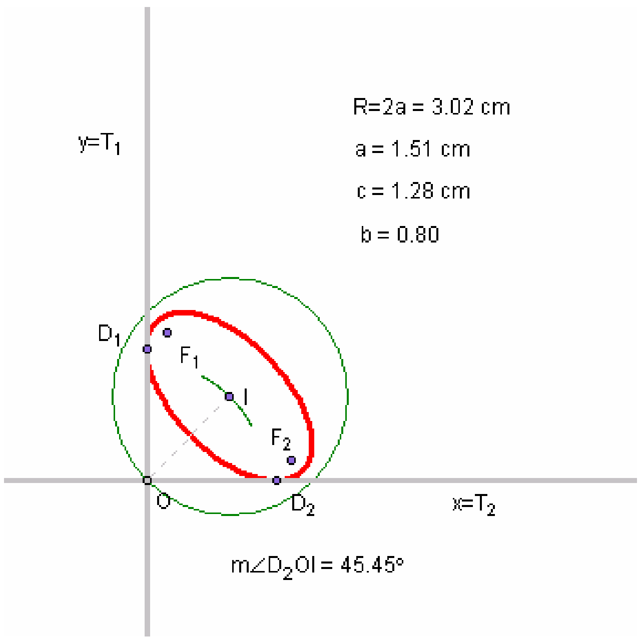
(1) 橢圓中心和座標原點間連線距離為固定值$\sqrt{a^2+b^2}$：

➢ 圖形 A：



橢圓中心Ｉ之軌跡圖形

➢ 圖形Ｂ：



圖中綠色圓即爲兩切線交點Ｏ之軌跡

Ａ. 說明及證明：

証(ａ)：令橢圓Ｉ方程式爲 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\,(a>b)$；

其兩條切線 T_1、T_2 斜率分別爲 m 、$-\frac{1}{m}$ 。

則方程式 T_1：$y = mx \pm \sqrt{a^2m^2+b^2}$ ————————(1)

T_2：$y = -\frac{1}{m}x \pm \sqrt{a^2\left(-\frac{1}{m}\right)^2+b^2}$ ————(2)　　同取正號…

(1)移項：$y - mx = \sqrt{a^2m^2+b^2}$ ————————(3)

(2)同乘以 m 後移項：$x + my = \sqrt{a^2+b^2m^2}$ ————(4)

將(3)、(4)分別平方得到：

$y^2 - 2mxy + m^2x^2 = a^2m^2 + b^2$ ———(5)

$x^2 + 2mxy + m^2y^2 = a^2 + b^2m^2$ ———(6)　　兩式相加…

可以得到：$x^2 + y^2 + m^2x^2 + m^2y^2 = a^2 + b^2m^2 + a^2m^2 + b^2$ ———(7)

整理後得：$\left(x^2+y^2\right)\left(m^2+1\right) = \left(a^2+b^2\right)\left(m^2+1\right)$

將左右兩邊同除與$\left(m^2+1\right)$可以得到：$x^2 + y^2 = a^2 + b^2$ ———即為所求！

可知座標原點和橢圓中心連線固定距離為$\sqrt{a^2+b^2}$ 。

(2) 橢圓中心、座標原點和兩軸之夾角極值：

- 依照函數圖形所表達出：

A. 當有向角∠$D_{1b}I_bF_{1b}$(=∠F_1ID_1)為$\frac{\pi}{2}$時：∠IOD_1有最小值且∠IOD_2為最大值。

B. 當有向角∠$D_{1b}I_bF_{1b}$(=∠F_1ID_1)為π時：∠IOD_1有最大值且∠IOD_2為最小值。

C. 推論：

a. 一橫式橢圓，其方程式可表成$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ (a>b)；

一直式橢圓，其方程式可表成$\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$ (a>b)。

b. 若將橢圓繞兩軸的圖形視為橢圓方程式中的 a、b (分別為半長軸、半短軸長)值在變動，即 a→b→a、b→a→b，也就是有向角∠F_1ID_1在 0～360^0間變化時，橢圓在兩軸上表現出的圖形會隨其值的變動從「水平橫躺」$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$旋轉成「鉛直直立」$\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$再旋轉回水平橫躺。

c．當水平橫躺的時候，橢圓中心到 Y 軸的距離恰為 a，到 X 軸的距離恰為 b。且此時橢圓中心、座標原點和 Y 軸的夾角($\angle IOD_1$)為 $\tan^{-1}\left(\frac{a}{b}\right)$。

d．當鉛直直立的時候，橢圓中心到 Y 軸的距離恰為 b，到 X 軸的距離恰為 a。且此時橢圓中心、座標原點和 x 軸的夾角($\angle IOD_1$)為 $\tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)$。

e．橢圓到兩軸的最大距離為 a、最小距離為 b，故 $\frac{a}{b}>\frac{b}{a}$，$\therefore \tan^{-1}\left(\frac{a}{b}\right)>\tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)$。

證(b)：令橢圓 I 方程式為 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\,(a>b)$：

其兩條切線 T_1、 T_2 斜率分別為 m 、 $-\frac{1}{m}$ 。

則方程式 T_1： $y=mx\pm\sqrt{a^2m^2+b^2}$ ————(1)

T_2： $y=-\frac{1}{m}x\pm\sqrt{a^2\left(-\frac{1}{m}\right)^2+b^2}$ ————(2) （取 T_1：正值）

推導：橢圓中心(0,0)到切線距離→

利用點到直線距離公式：distance= $\frac{|ax+by+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

則 d(I, T_1)= $\frac{\left|y-mx-\sqrt{a^2m^2+b^2}\right|}{\sqrt{m^2+1^2}}=\sqrt{\frac{a^2m^2+b^2}{m^2+1^2}}$

m=0 時，d(0, T_1)有最小值： $\sqrt{b^2}=b$ ————(3)

m=∞時，d(0, T_1)有最大值： $\sqrt{a^2}=a$ ————(4)

由證(a)得知座標原點和橢圓中心連線固定距離為 $\sqrt{a^2+b^2}$ ————(5)

由(3)、(4)、(5)得知：

當切線 T_1 斜率 m=0；有向角 $\angle F_1ID_1=\frac{\pi}{2}$ 時， $\angle IOD_1$ 有最小值：

$$\sin^{-1}\left[\frac{d\left(I,T_1\right)}{\overline{IO}}\right]=\sin^{-1}\left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)=\tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)$$

當切線 T_1 斜率 m=∞；有向角∠$F_1ID_1=\pi$ 時，∠IOD_1 有最大值：

$$\sin^{-1}\left[\frac{d\left(I,T_1\right)}{\overline{IO}}\right]=\sin^{-1}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)=\tan^{-1}\left(\frac{a}{b}\right)$$

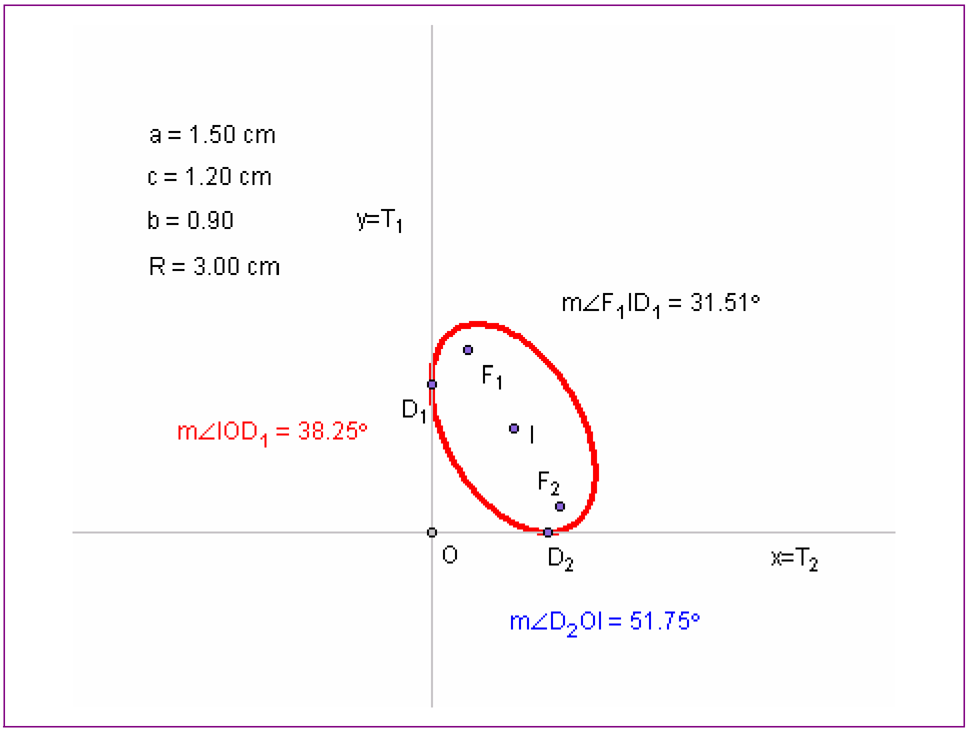
f. 由 e.得知角(∠IOD_1)的範圍在$\left[\tan^{-1}\left(\frac{a}{b}\right)\leftrightarrow\tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)\right]$兩值之間。

g. ∵∠IOD_2 爲∠IOD_1 之餘角，故其角度變化值不再另外說明。

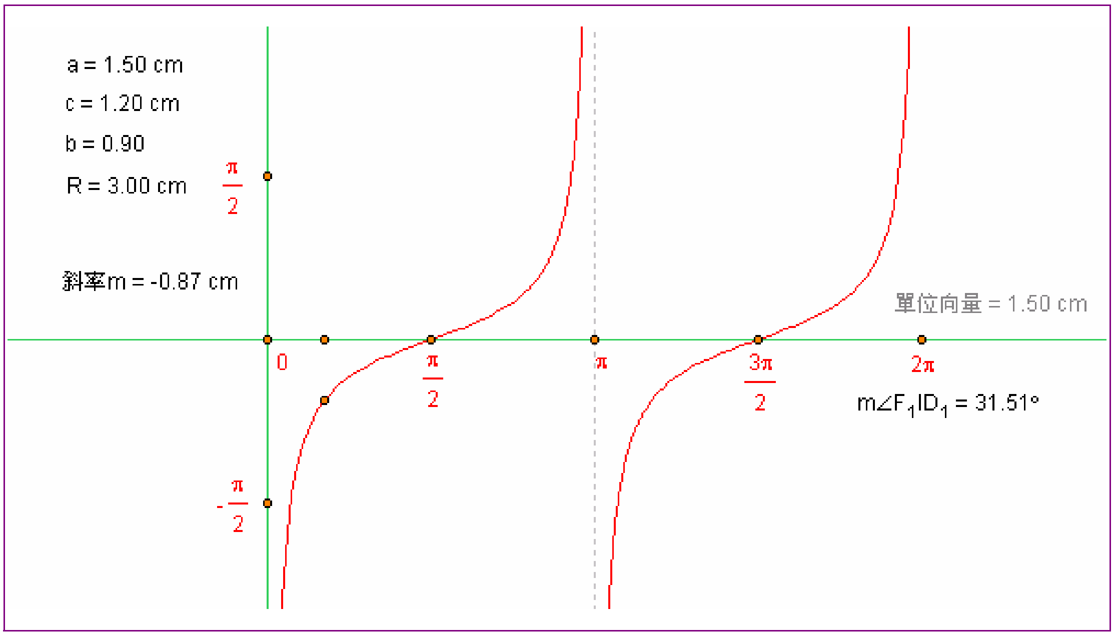
h. 由 e.及証(a)，我們可得知橢圓中心該點在橢圓繞軸時會以座標原點爲固定點、長度爲$\overline{IO}$ $(=\sqrt{a^2+b^2}$)、擺角爲$\left|\tan^{-1}\left(\frac{a}{b}\right)-\tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)\right|$之擺線，且隨有向角∠$F_1ID_1$ 改變而來回擺動。

(3) 橢圓弧長曲率影響切線斜率 m 值：

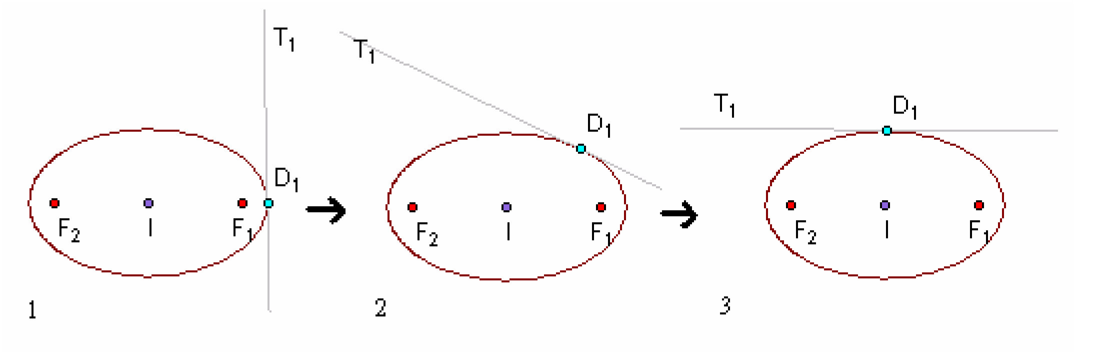
➢ 圖示：



➢ 橢圓有向角$\angle F_1ID_1$與切線T_1斜率 m 值變化之函數圖形：



A. 切線T_1斜率 m 變化與橢圓曲率示意圖：



這三張圖分別依序爲橢圓 I 有向角$\angle F_1ID_1=0^0$、45^0、90^0時切線T_1的位置。切點D_1所經弧段曲率大小依序爲：最大、中、最小。

B. 推論：

a.切線T_1斜率 m 隨橢圓 I 有向角$\angle F_1ID_1$而改變

b.橢圓弧長（切線之切點所經弧段）的曲率（彎曲程度）影響切線T_1斜率 m，

即：切點D_1所經某弧段的曲率較大處(較劇烈)：m 值改變程度大。

切點D_1所經某弧段的曲率較小處(較緩和)：m 值改變程度小。

c.也就是當有向角$\angle F_1ID_1=0^0$、180^0、360^0：m 值改變程度最大。

當有向角$\angle F_1ID_1=90^0$、270^0：m 值改變程度最小。

d.由以上推論及圖 A 我們可以知道當橢圓 I 有向角$\angle F_1ID_1$：

在$0^0\to 90^0$間，切線T_1斜率 m 改變程度由大→小。

在$90^0\to 180^0$間，切線T_1斜率 m 改變程度由小→大。

在$180^0\to 270^0$間，切線T_1斜率 m 改變程度由大→小。

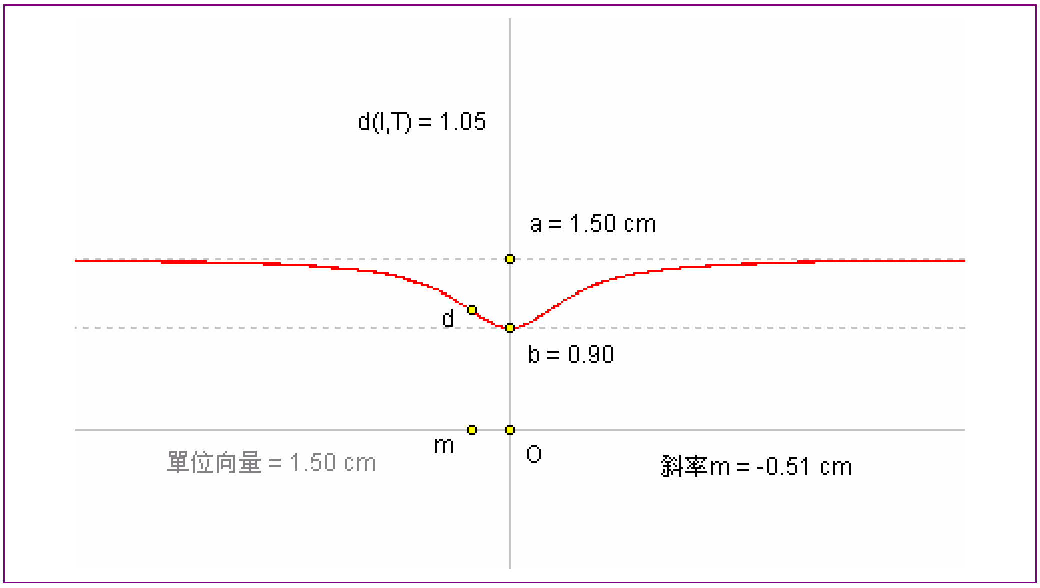
在$270^0\to 360^0$間，切線T_1斜率 m 改變程度由小→大。

(4) 切線Ｔ$_1$斜率 m 與橢圓Ｉ中心到切線Ｔ$_1$距離關係：

A. 由証(b)得知：

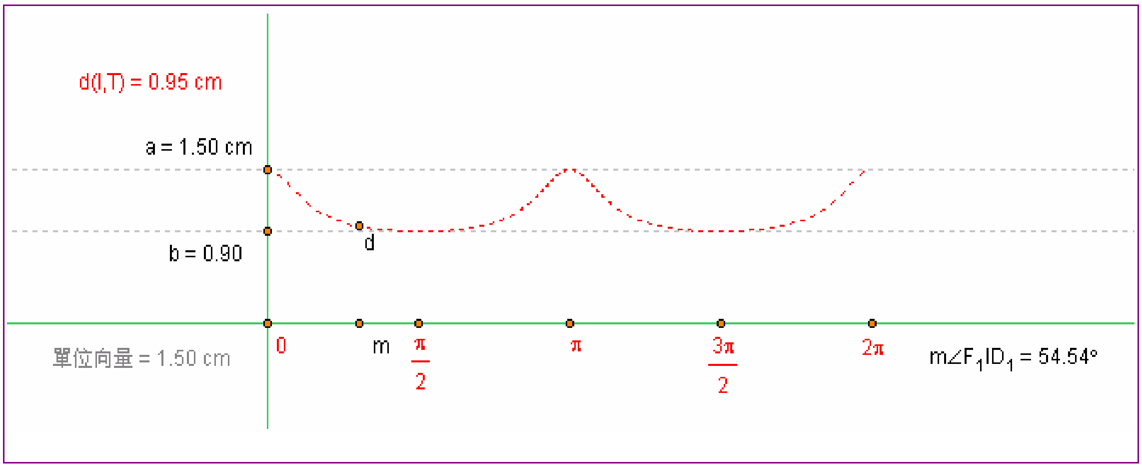
$$d(I, T_1)=\frac{\left|y-mx-\sqrt{a^2m^2+b^2}\right|}{\sqrt{m^2+1^2}}=\sqrt{\frac{a^2m^2+b^2}{m^2+1^2}}$$

B. d(Ｉ, Ｔ$_1$)變化與 m 值變化之函數圖形：



C. 綜合 m 值與有向角關係和 m 值與 d(Ｉ, Ｔ$_1$) 關係：

我們得到有向角∠F_1ID_1與 d(Ｉ, Ｔ$_1$)的關係函數圖：



D. 推論：

綜合以上橢圓曲率、切線斜率、橢圓到切線距離間的關係可得知：

當橢圓Ｉ有向角∠F_1ID_1：

在 $0^0\to90^0$ 間，d(Ｉ, Ｔ$_1$)改變程度由大→小。

在 $90^0\to180^0$ 間，d(Ｉ, Ｔ$_1$)改變程度由小→大。

在 $180^0\to270^0$ 間，d(Ｉ, Ｔ$_1$)改變程度由大→小。

在 $270^0\to360^0$ 間，d(Ｉ, Ｔ$_1$)改變程度由小→大。

(5) 總結『橢圓 I 有向角∠F_1ID_1』和『橢圓 I 與一軸 T_1 之夾角∠IOD_1』的關係：

從以上(1)~(4)歸納下來可知：

A. 當橢圓 I 有向角∠F_1ID_1 改變時，切點 D_1 所經的橢圓弧段曲率就會跟著改變。

B. 而當弧段曲率一改變，切線 T_1 的斜率 m 也就隨之改變，如此一來便影響了切線 T_1 到橢圓中心 I 的垂直距離。

C. 又因爲橢圓中心到兩切線交點(座標原點 O)的距離爲一定值：$\sqrt{a^2+b^2}$，所以當切線到橢圓中心的垂直距離改變，橢圓中心、座標原點 O、切線 T_1 之夾角∠IOD_1 的正弦函數值必隨之改變，即此夾角∠IOD_1 發生了變化：$\angle \mathrm{IOD}_1 = \sin^{-1}\left[\dfrac{d(I,T_1)}{\overline{IO}}\right]$。

D. 結論：當橢圓 I 有向角∠F_1ID_1：

在 $0^0 \to 90^0$ 間，夾角∠IOD_1 改變量由大→小。

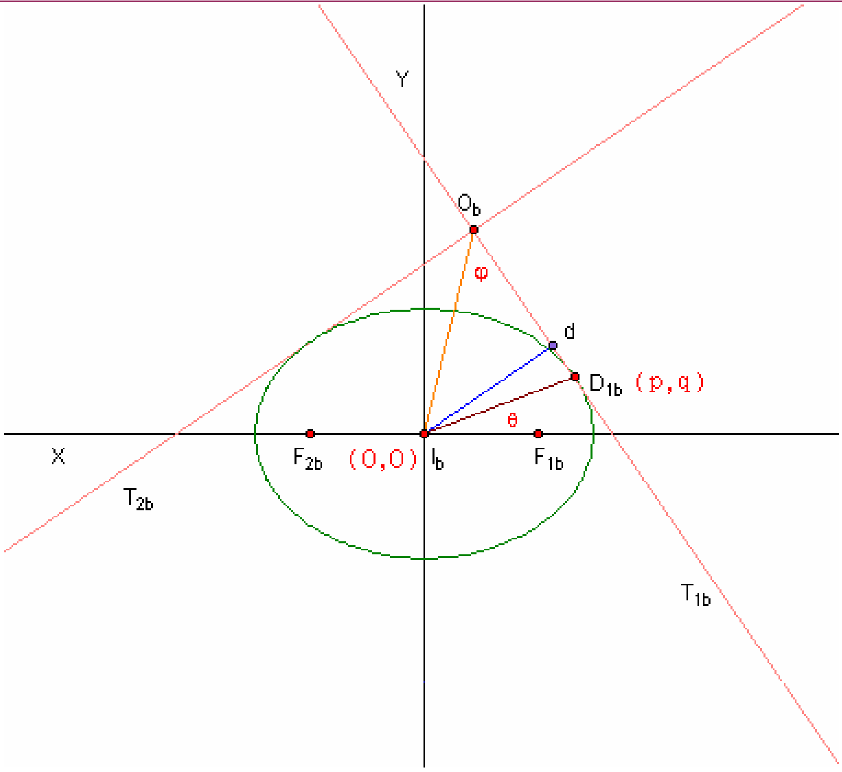
在 $90^0 \to 180^0$ 間，夾角∠IOD_1 改變量由小→大。

在 $180^0 \to 270^0$ 間，夾角∠IOD_1 改變量由大→小。

在 $270^0 \to 360^0$ 間，夾角∠IOD_1 改變量由小→大。

(五)、 橢圓繞軸有向角∠F_1ID_1 與夾角∠IOD_1 之函數方程式：

(圖中各點標示下方小 b 係爲基本圓之代號)



假設圖中橢圓 I 方程式爲$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ (a>b)；θ 有向角$\angle F_1ID_1$；ϕ 夾角$\angle IOD_1$

其中點 D(p,q)爲切線 T_1 與橢圓 I 之切點且切線 T_1 之斜率爲 m；

則$m=\tan\theta=\frac{q}{p}$ ；

由點 D(p,q)代入橢圓上一點求切線方程式：

$$\xrightarrow{由}\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

$$\longrightarrow\frac{px}{a^2}+\frac{qy}{b^2}=1$$

$$\longrightarrow pxb^2+qya^2=a^2b^2$$

$$\longrightarrow qya^2=a^2b^2-pxb^2$$

$$\longrightarrow y=\frac{b^2}{q}-\frac{pxb^2}{qa^2}$$

$$\longrightarrow y=-\frac{p}{q}\cdot\frac{b^2}{a^2}x+\frac{b^2}{q}$$

由上得知T_1斜率$m=-\frac{p}{q}\cdot\frac{b^2}{a^2}=-\frac{1}{\tan\theta}\cdot\frac{b^2}{a^2}$

由証 a.可以知座標原點和橢圓中心連線固定距離爲$\sqrt{a^2+b^2}$

且由証 b.可以知 d(I， T_1)=$\sqrt{\frac{a^2m^2+b^2}{m^2+1^2}}$

$$\varphi=\angle \mathrm{IOD}_1=\sin^{-1}\left[\frac{d(I,T_1)}{\overline{IO}}\right]=\sin^{-1}\left[\sqrt{\frac{a^2m^2+b^2}{(m^2+1)(a^2+b^2)}}\right]$$

代入$m=-\dfrac{1}{\tan\theta}\cdot\dfrac{b^2}{a^2}$

$$\sqrt{\frac{a^2m^2+b^2}{(m^2+1)(a^2+b^2)}}=\sqrt{\frac{a^2\left(-\dfrac{1}{\tan\theta}\cdot\dfrac{b^2}{a^2}\right)^2+b^2}{\left(\left(-\dfrac{1}{\tan\theta}\cdot\dfrac{b^2}{a^2}\right)^2+1\right)(a^2+b^2)}}$$

$$=\sqrt{\frac{\dfrac{1}{\tan^2\theta}\cdot\dfrac{b^4}{a^2}+b^2}{\dfrac{1}{\tan^2\theta}\cdot\dfrac{b^4}{a^2}+\dfrac{1}{\tan^2\theta}\cdot\dfrac{b^6}{a^4}+a^2+b^2}}=\sqrt{\frac{\dfrac{b^2}{a^2}+\tan^2\theta}{\dfrac{b^2}{a^2}+\tan^2\theta+\dfrac{b^4}{a^4}+\dfrac{a^2}{b^2}\tan^2\theta}}$$

$$=\sqrt{\frac{\tan^2\theta+\dfrac{b^2}{a^2}}{\tan^2\theta+\dfrac{b^2}{a^2}+\dfrac{a^2}{b^2}\tan^2\theta+\dfrac{b^4}{a^4}}}$$

設橢圓壓縮率$S=\dfrac{b}{a}$則$\longrightarrow$

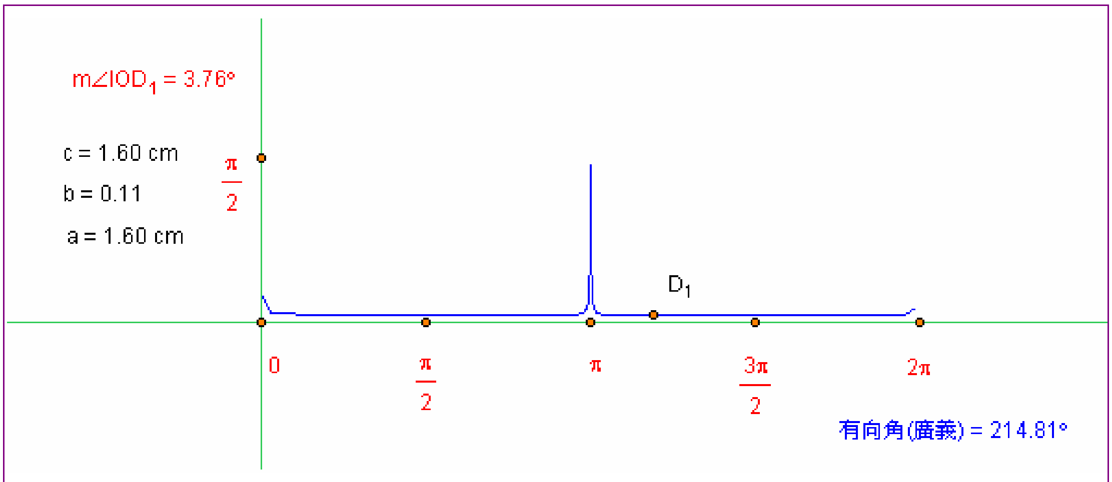
則

$$\varphi=\sin^{-1}\left[\sqrt{\frac{\tan^2\theta+S^2}{\tan^2\theta+S^2+\dfrac{1}{S^2}\tan^2\theta+S^4}}\right]$$

即為所求！

（六）、 橢圓繞軸時，特殊半長軸及半短軸長（a、b）的焦點軌跡：

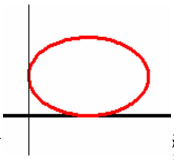
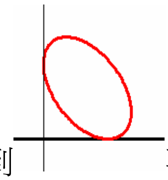
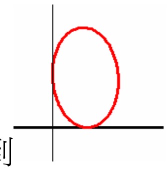
（1）特殊 a、b 值之$\angle \mathrm{IOD}_1$與有向角$\angle \mathrm{F}_1\mathrm{ID}_1$的函數圖形：

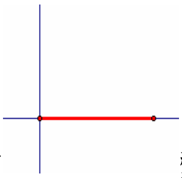
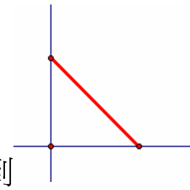
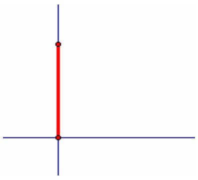


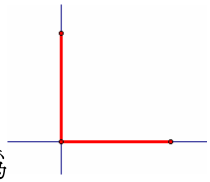
（2）特殊 a、b 值之焦點軌跡圖形及說明：

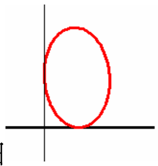
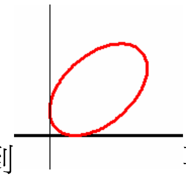
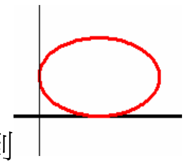
<Pf>：因為橢圓的焦距趨近於半長軸長度(即 c→ a)，所以可將橢圓的

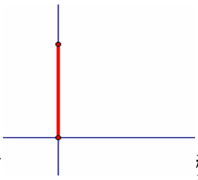
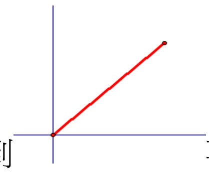
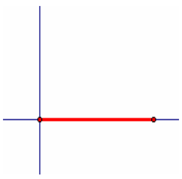
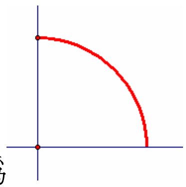
兩焦點視爲長軸端點，又因爲橢圓的半短軸(b)極小，趨近於零，所以可以將橢圓視爲一直線來討論，即是要討論此直線兩端點的軌跡。

A. 當橢圓由變到再變到的時候，

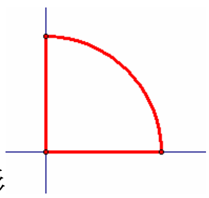
就像是兩焦點連線由變到然後再變到

一樣，所以兩焦點的軌跡爲。

B. 而要是當橢圓由變到再變回到，

也就是兩焦點連線由變到再變回到，此時兩焦點的軌跡即爲。

C. 由此可知，當橢圓的半短軸(b)極小時，此橢圓兩焦點轉動時的軌跡

爲一個扇形。

二、　椭圓在平面上滾動

(一). 說明：

研究椭圓在平面上滾動（必和水平面相切）其圖形有何規律性或是性質存在。

(二). 圖形基本概念：

1. 假設一椭圓 I 在平面上所滾過的角度爲 φ（椭圓中心 I 、切點 D_2 與長軸的中垂線 H 之夾角改變量）。當 φ 改變時，椭圓將在平面 T_2 上滾動，其滾動之弧長跟 φ 的改變值有關。

(三). 椭圓滾平面 GSP 作法：

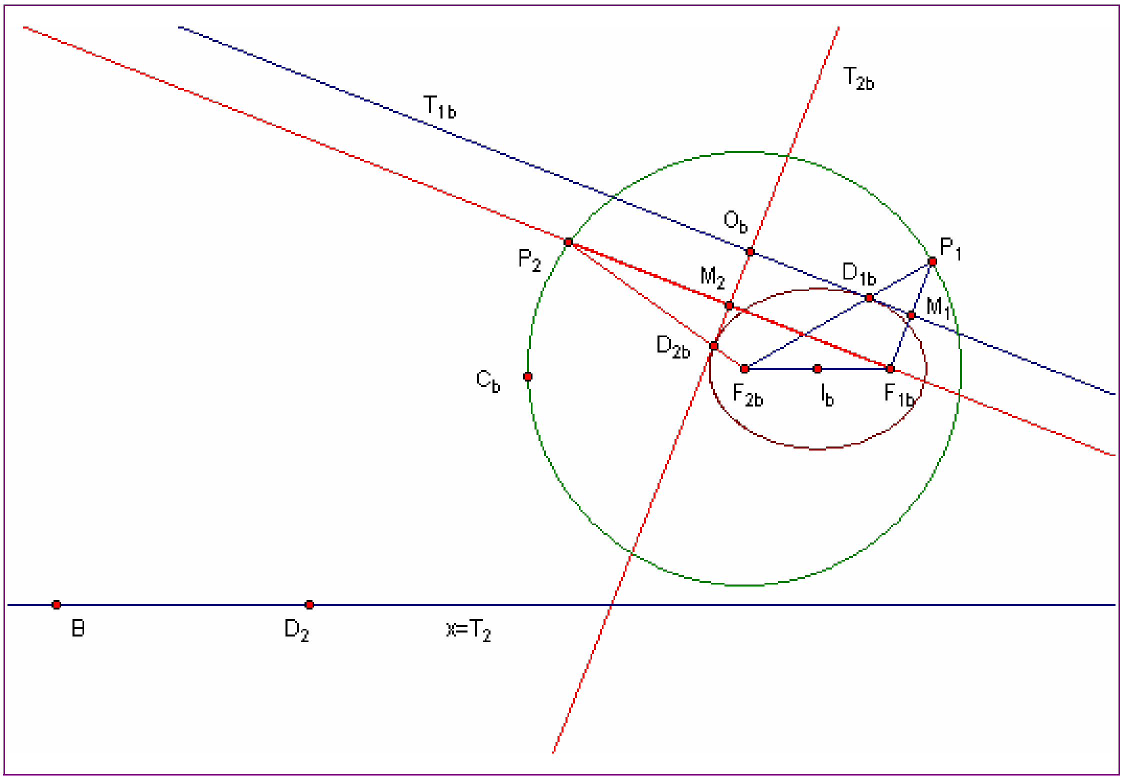
1. 椭圓滾平面作法＆圖示

(1). 首先畫一直線 T_2 ，其上一點 B 爲起始點、單位向量長爲 2cm，此線即爲平面 x。

(2). 畫一半徑爲 R=2a 的圓 C_b，並將圓心 F_{2b} 和圓內任一點 F_{1b} 作連線，其中 $\overline{F_{1b}F_{2b}}$ 之長爲 2c，並在 $\overline{F_{1b}F_{2b}}$ 上取中點 I_b 爲椭圓 I_b 之中心，並依照前面椭圓製作說明做一椭圓 I_b ，其半長軸爲 a，半短軸爲 b(a>b)，其中 P_1 爲動點。

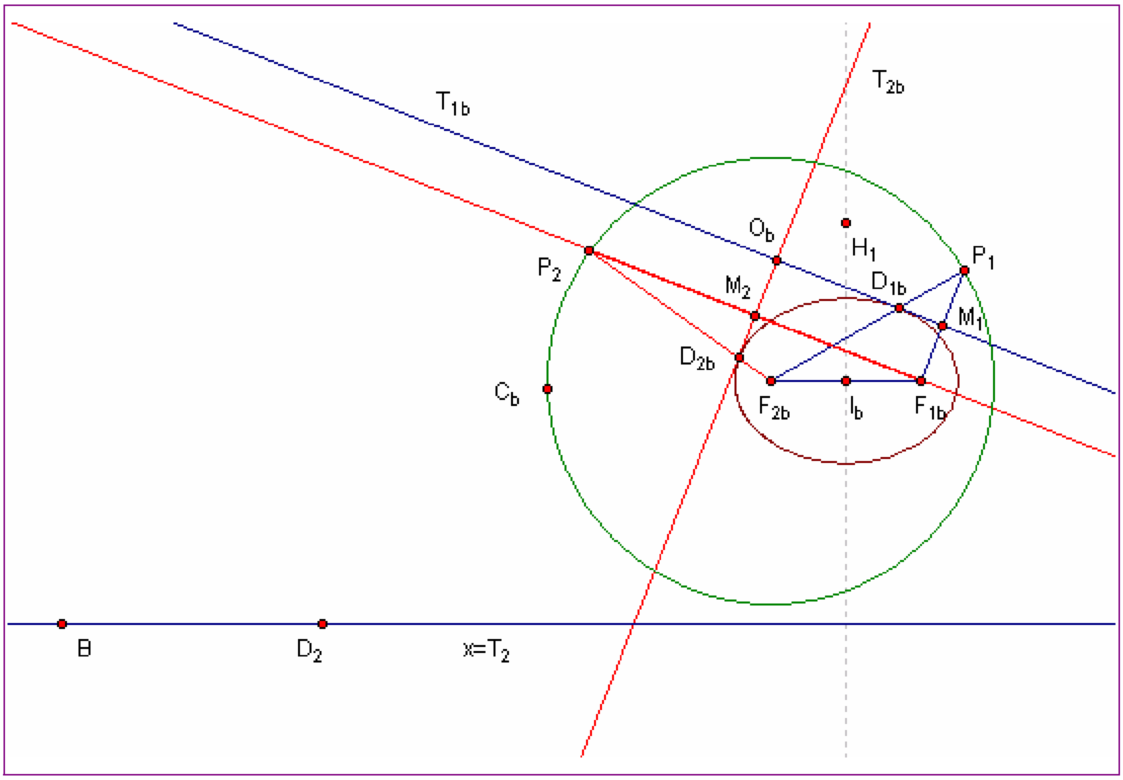
(3). 依照前面椭圓繞軸製作說明做兩互相垂直之切線(斜率分別爲 m、$-\frac{1}{m}$)爲 T_{1b} 、 T_{2b} 分別交椭圓 I_b 於 D_{1b} 、 D_{2b} ，且 T_{1b} 、 T_{2b} 相交於 O_b 。

➢ 圖形 A：



(4). 作 $\overline{F_{1b}F_{2b}}$ 之中垂線 $\overline{I_bH_1}$，並計算 $\angle D_{2b}I_bH_1$（1°~360°）。

➢ 圖形 B：



(5). 以橢圓 I_b $\angle D_{2b}I_bH_1$ 改變量計算橢圓 I(爲橢圓 I_b 之平移旋轉後圖

形)滾過之弧長：

$$=\text{橢圓周長}\cdot\left[\left(\frac{\angle D_{2b}I_bH_1}{360^0}\right)\cdot 2\pi\right]\text{———}(a)$$

(6). 將起始點 B 水平平移，其中平移距離爲=(a)式 x 單位向量~~~(b)。
此點爲 D_2 (橢圓 I 與 x 軸之切點)。

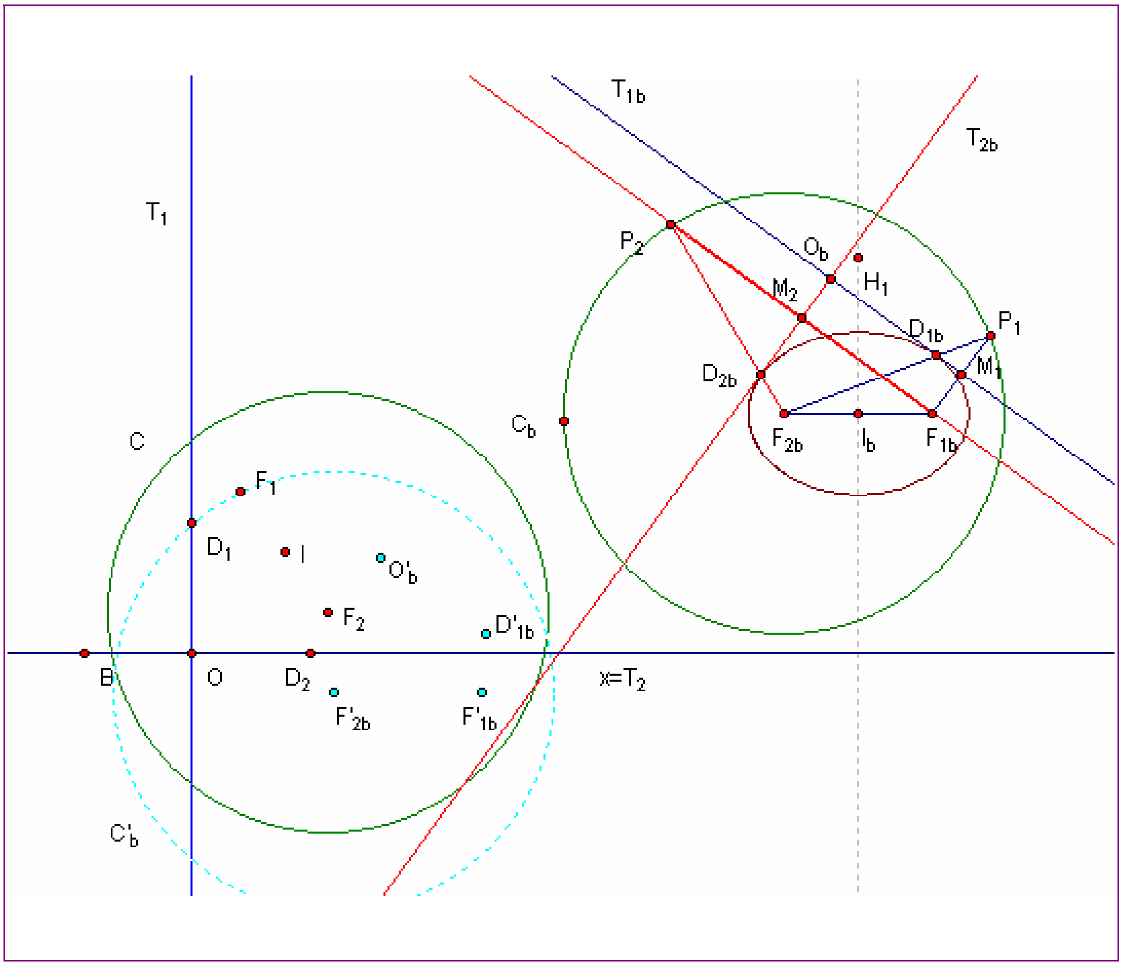
(7). 以向量 $O_{2b}D_2$ 將 D_{2b}、D_{1b}、F_{1b}、F_{2b}、O_b 及圓 C_b 平移至 D_2、D_{1b}'、F_{1b}'、F_{2b}'、O_b' 及圓 C_b'。

(8). 以 $\angle O'_bD_2B$ 將 D_2、D_{1b}'、F_{1b}'、F_{2b}'、O_b' 及圓 C_b' 旋轉至 D_2、D_1、F_1、F_2、O 及圓 C(其中 O 在 x 軸上)。

(9). 將 O 與 D_1 連線即爲橢圓 I 之切線 T_1，F_1 與 F_2 之中點爲橢圓中心 I。

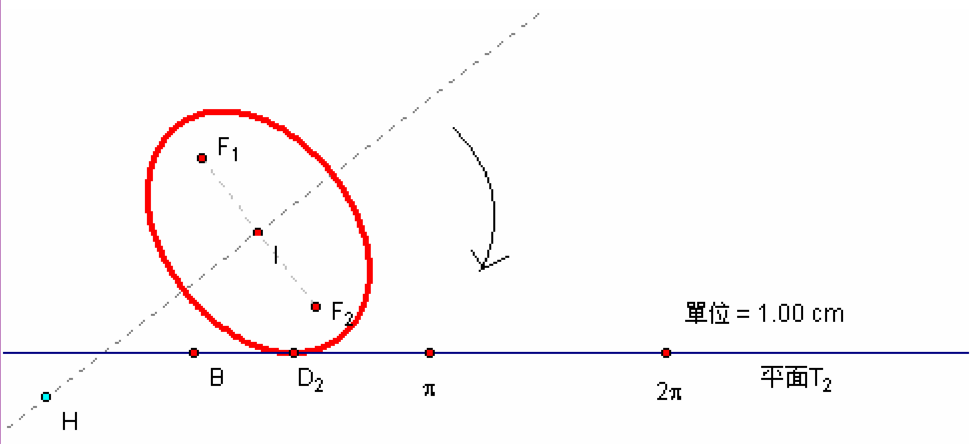
(10). 以橢圓中心 I 與兩焦點 F_1、F_2 作一橢圓 I(其中 P_3、M_3 及 D_3 爲製作橢圓時之動點，垂足點及切點)。

➢ 圖形 C：



(11). 當動點 P_1 在圓上移動時，橢圓 I_b 上的 $\angle D_{2b}I_bH_1$ 改變，橢圓 I 滾過距離爲(2)式，此即我們所要觀查研究之橢圓滾平面的圖形。

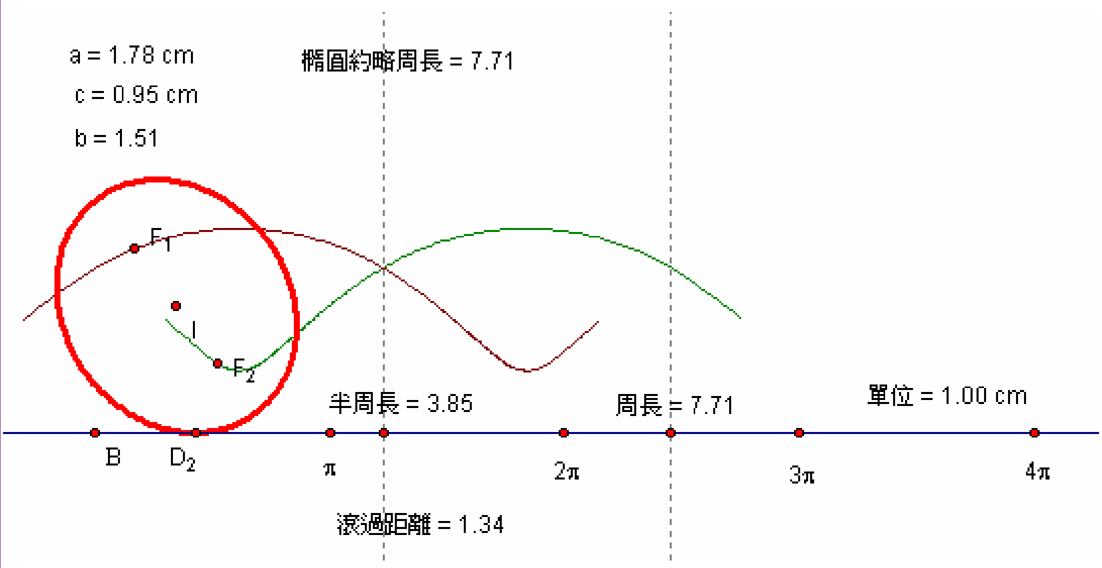
➢ 圖形 D：



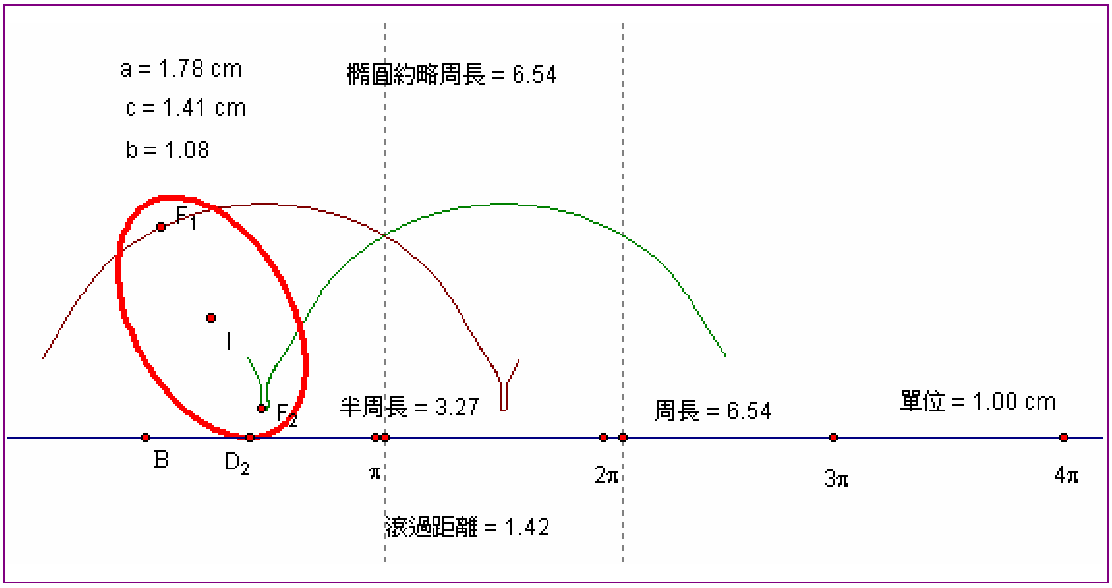
說明：B 爲起點，D_2 爲橢圓在平面 T_2 上切點；當有向角 $\angle D_{2b}I_bH_1$ 即 $\angle D_2IH$ 改變，D_2 在平面 T_2 上移動，橢圓 I 跟著滾動。

(四). 其橢圓 I 兩焦點軌跡圖形：

➢ 圖形 A：

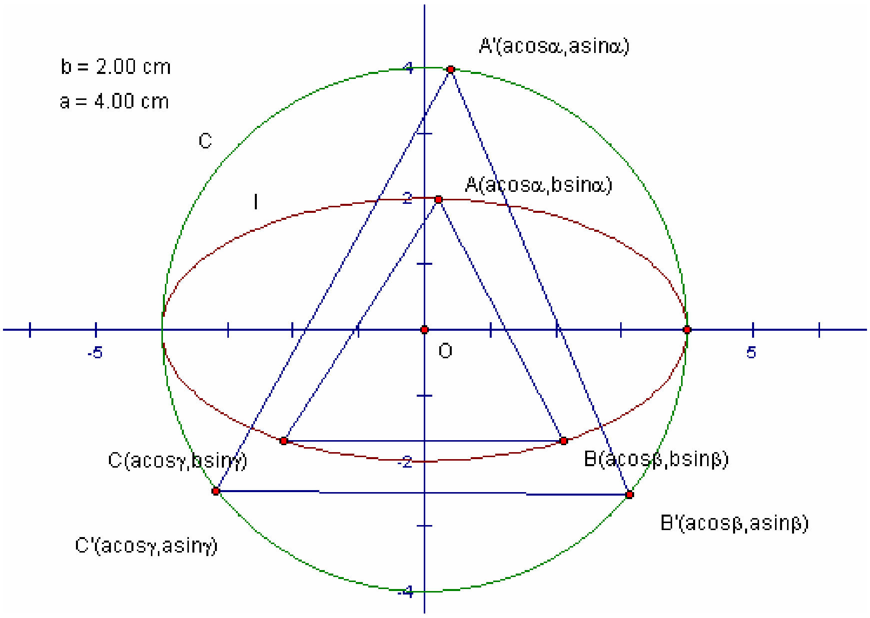


➢ 圖形 B：



(五). 橢圓周長概算：

1. 假設一橢圓 I（半長軸 a、半短軸 b、兩焦點距離 2c）及其外接圓 C 上三頂點方向角相同（＝α、β、γ）的兩個三角形△ABC、△A'B'C'，則其面積比率：



$$\frac{a_{\triangle}ABC}{a_{\triangle}A'B'C'}=\frac{\frac{1}{2}|\triangle_2|}{\frac{1}{2}|\triangle_2|}=\frac{\begin{vmatrix} a\cos\alpha & b\sin\alpha & 1 \\ a\cos\beta & b\sin\beta & 1 \\ a\cos\gamma & b\sin\gamma & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a\cos\alpha & a\sin\alpha & 1 \\ a\cos\beta & a\sin\beta & 1 \\ a\cos\gamma & a\sin\gamma & 1 \end{vmatrix}}=\frac{b}{a}$$

即圓 C 面積被壓縮成 $\frac{b}{a}$ 倍→橢圓 I 面積；

則圓 C 周長約被壓縮了 $\sqrt{\frac{b}{a}}$ 倍→橢圓 I 周長。

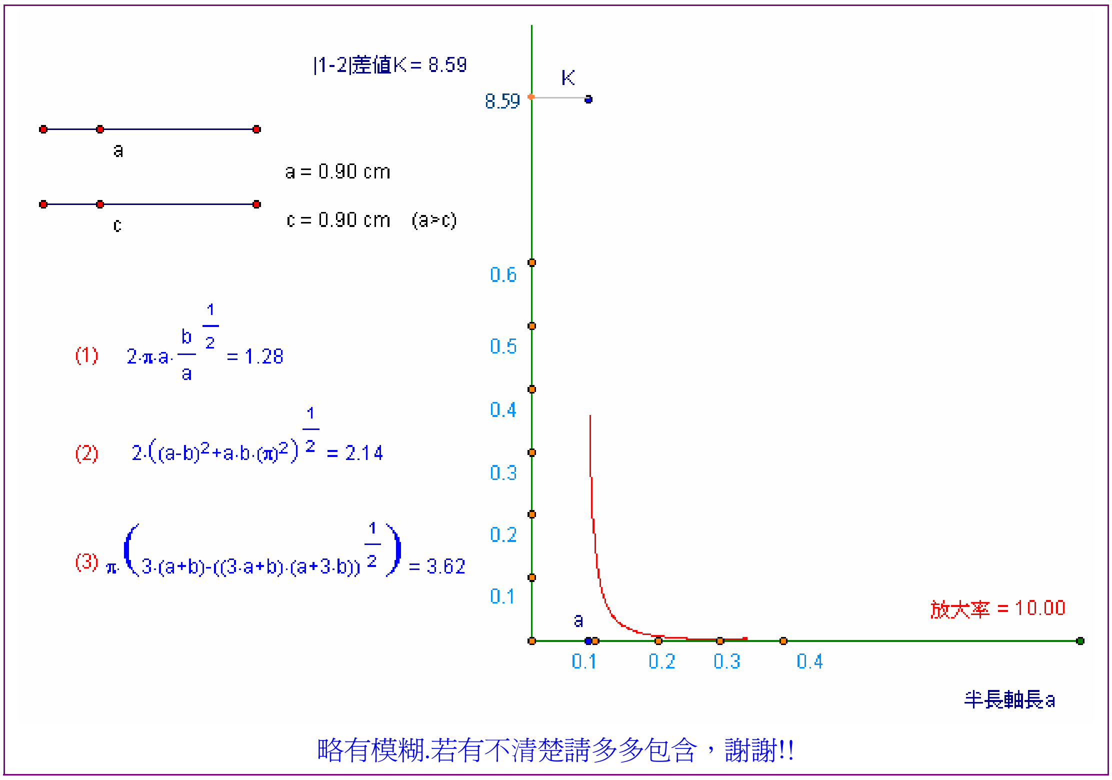
2. 推論：橢圓周長約爲 $2\pi a\sqrt{\frac{b}{a}}$ (a>b>0)

3. 由於此推導橢圓周長實際上必須使用到微積分，但在現行高中課程並未教到這個地方，且在找尋的各種書籍資料中也未正確提出橢圓周長的公式；故此橢圓周長係以圓壓縮率來推論，其實際長度略有誤差，而此誤差在橢圓趨近於圓的時候會越小，而越扁（壓縮程度越大）誤差會越大。

4. 由第 3.故參考文獻書籍以及網路資料中得知橢圓周長的另一個公式(也是學長們之前科展推算過的橢圓周長公式)爲：

$2\sqrt{(a-b)^2+ab\pi^2}$ 以及 $\pi\left\{3(a+b)-\sqrt{(3a+b)(a+3b)}\right\}$

5．　其中當半長軸 a=0.90cm 時 $2\sqrt{(a-b)^2+ab\pi^2}$ 與 $2\pi a\sqrt{\frac{b}{a}}$ 兩者間的誤差如下：



(六)．　焦點 F_1、F_2 軌跡性質：

由軌跡圖型中觀察出，若將其焦點軌跡視爲一週期波 x 與 y 位移的函數：

1．兩焦點軌跡左右對稱。

2．軌跡圖形 y 方向位移爲 a（橢圓 I 正立時中心到平面距離）。

3．波長 λ=周長。

4．焦點到平面距離最大爲：焦點到長軸端點最大距離：a+ c；
焦點到平面距離最小爲：焦點到長軸端點最小距離：a−c。
則焦點軌跡圖形的振幅即爲兩焦點間距離 2c 的一半。

5. 頻率隨橢圓滾動而改變。

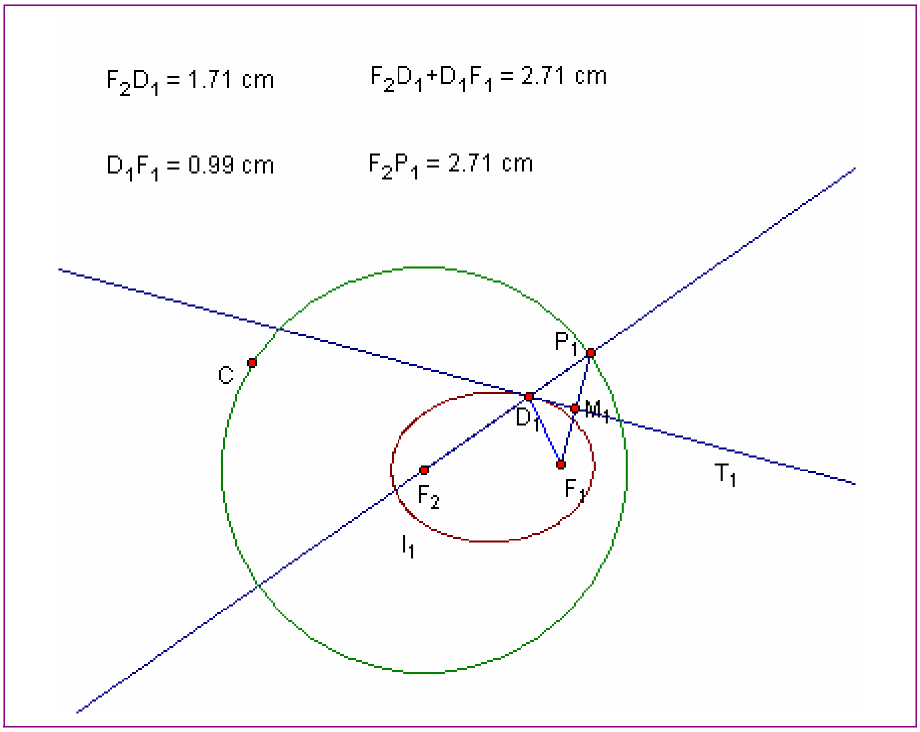
三、　橢圓繞橢圓

(一)、 橢圓繞一橢圓之兩焦點軌跡

1．作法：

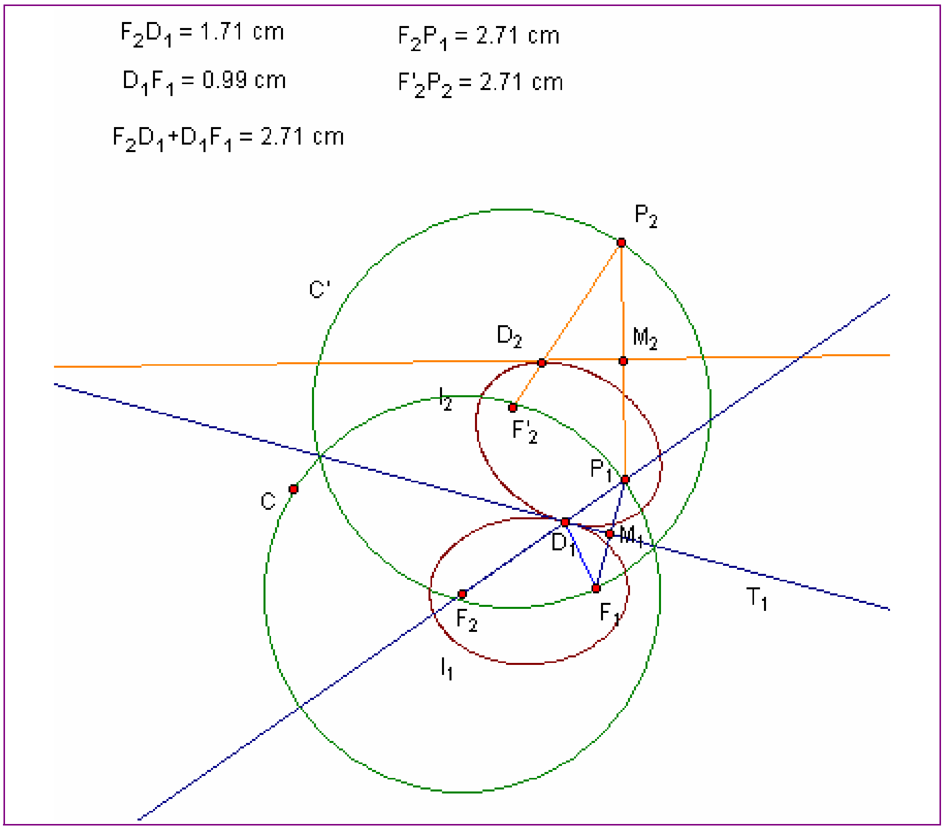
(1)．先畫出一圓 C，在此圓 C 中畫出一橢圓 I_1，其焦點爲 F_1、F_2(其橢圓繪製方法同上，故不另加說明)。根據橢圓的基本性質得知此圓半徑 R=2a。

➢ 圖形 A：



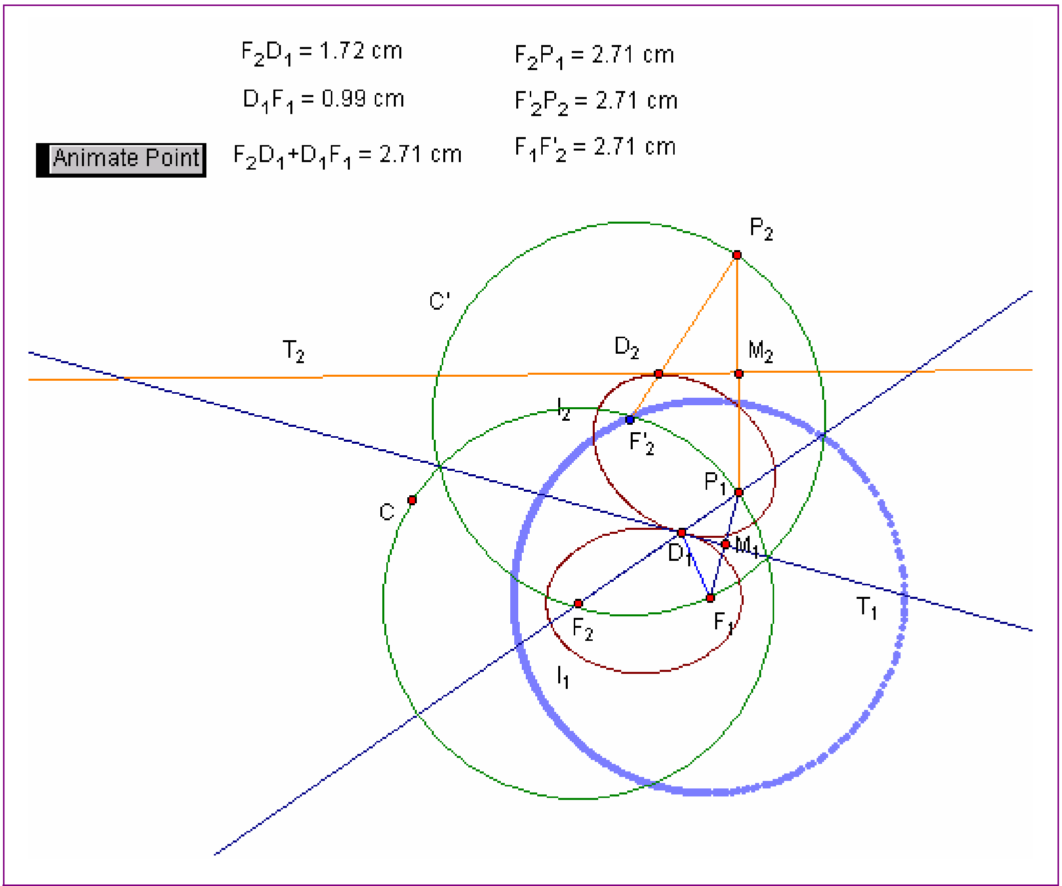
(2). 以切線 T_1 將圓 C 映射，映射所得的圓 C'的半徑與圓 C 的半徑相同，同爲 2a。並且在此映射而成的圓 C'中再畫另一橢圓 I_2，使其焦點爲 F_2'、P_1。

➢ 圖形 B：



(3). 其中焦點 P_1 爲圓 C 上的動點，當此動點移動時，焦點 F_2'的軌跡會形成一圓。

➢ 圖形 C：



2．證明：

∵圓 C 以切線 T_1 作映射，$\overline{F_2D_1} = \overline{F_2'D_1}$————————(1)

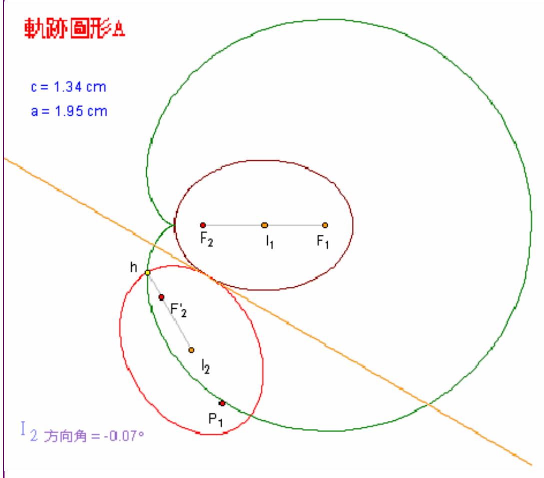
又由橢圓性質得知：$\overline{F_2D_1} + \overline{F_1D_1} = 2a$ 爲定值————————(2)

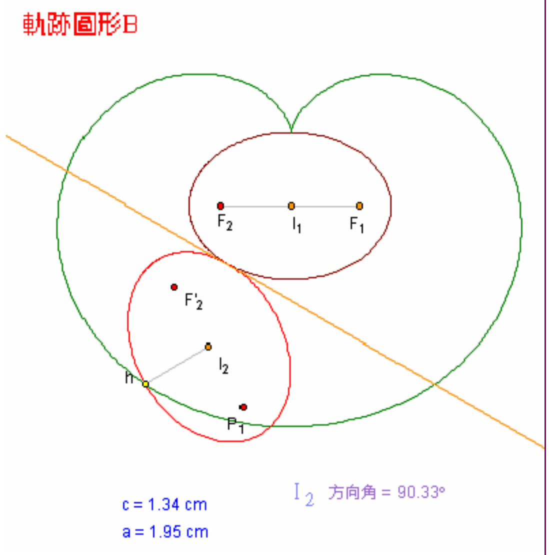
綜合(1)、(2)可得：$\overline{F_1D_1} + \overline{F_2'D_1} = 2a$ 爲定值，故形成一圓

（F_1 爲圓心，$\overline{F_1F_2'}$ 爲半徑）。

(二)、 橢圓繞一橢圓時其上任一點之軌跡圖形：

1．令橢圓 I_b 繞另一橢圓 I_a 滾動；設 I_b 上任一點 h 之方向角爲∠bac 則當橢圓 I_b 滾動時其 h 點所形成之軌跡圖形爲一類心臟線，其圖型如下：





以下為我們所推導出來的橢圓繞一全等橢圓時其橢圓 I2 上任一點之軌跡方程式：

$$x:2\cos\phi\sqrt{a^2\cos^2\theta+b^2\sin^2\theta}\cos(\phi+x)+\sqrt{a^2\cos^2\theta'+b^2\sin^2\theta'}\cos\left[2(\phi+x)+x'\right]$$

$$y:2\cos\phi\sqrt{a^2\cos^2\theta+b^2\sin^2\theta}\sin(\phi+x)+\sqrt{a^2\cos^2\theta'+b^2\sin^2\theta'}\sin\left[2(\phi+x)+x'\right]$$

$$\left\{\begin{array}{ll} \tan x=\dfrac{b}{a} & \theta,\theta':\text{分別為橢圓 } \mathrm{I}_1,\ \mathrm{I}_2\text{上任一點之方向角} \\ \tan\phi=\dfrac{\left(1-\dfrac{b^2}{a^2}\right)\tan\theta}{\dfrac{b}{a}\left(\tan^2\theta+1\right)} & \mathrm{x},x':\text{分別為橢圓 } \mathrm{I}_1,\ \mathrm{I}_2\text{上任一點之有向角} \end{array}\right\}$$

其中幾個特殊的點之軌跡方程式：

橢圓 I_2長軸端點之軌跡方程式：

$$x:2\cos\phi\sqrt{a^2\cos^2\theta+b^2\sin^2\theta}\cos(\phi+x)+a\cos\left[2(\phi+x)+n\pi\right]$$

$$y:2\cos\phi\sqrt{a^2\cos^2\theta+b^2\sin^2\theta}\sin(\phi+x)+a\sin\left[2(\phi+x)+n\pi\right]$$

橢圓 I_2短軸端點之軌跡方程式：

$$x:2\cos\phi\sqrt{a^2\cos^2\theta+b^2\sin^2\theta}\cos(\phi+x)+b\cos\left[2(\phi+x)+\left(\frac{2n+1}{2}\right)\pi\right]$$

$$y:2\cos\phi\sqrt{a^2\cos^2\theta+b^2\sin^2\theta}\sin(\phi+x)+b\sin\left[2(\phi+x)+\left(\frac{2n+1}{2}\right)\pi\right]$$

2. 其軌跡圖形之函數方程式的證明由於篇幅過長，將在當天一併交給查閱，如有不妥實感抱歉！

柒、　研究結果

一、 橢圓繞軸其橢圓中心與座標原點連線距離為定值 $r^2=a^2+b^2$。

二、 橢圓繞軸其橢圓中心、座標原點、與兩軸之間的最大角度為 $\tan^{-1}\left(\dfrac{a}{b}\right)$；

橢圓繞軸其橢圓中心、座標原點、與兩軸之間的最小角度為 $\tan^{-1}\left(\dfrac{b}{a}\right)$。

三、 橢圓繞軸當橢圓 I 有向角 $\angle F_1ID_1$：

在 $0^0\rightarrow 90^0$ 間，夾角 $\angle IOD_1$ 改變量由大→小。

在 $90^0\rightarrow 180^0$ 間，夾角 $\angle IOD_1$ 改變量由小→大。

在 $180^0\rightarrow 270^0$ 間，夾角 $\angle IOD_1$ 改變量由大→小。

在 $270^0\rightarrow 360^0$ 間，夾角 $\angle IOD_1$ 改變量由小→大。

四、 橢圓繞軸有向角 $\angle F_1ID_1$ 與夾角 $\angle IOD_1$ 之函數方程式:

$$\varphi=\sin^{-1}\left[\sqrt{\frac{\tan^2\theta+S^2}{\tan^2\theta+S^2+\dfrac{1}{S^2}\tan^2\theta+S^4}}\right]$$

五、 橢圓繞軸，當橢圓的半短軸(b)趨近於 0 時，此橢圓兩焦點的軌跡近似為一個扇形。

六、 橢圓滾平面，兩焦點軌跡視為一 y 方向位移為 a、波長 λ=周長、振幅為 c、頻率為變值的週期波。

七、 一橢圓繞另一全等橢圓時，其兩焦點軌跡為兩個相同半徑的圓。

八、 橢圓繞一和其全等橢圓時其上任一點之軌跡方程式：

$$x:2\cos\phi\sqrt{a^2\cos^2\theta+b^2\sin^2\theta}\cos(\phi+x)+\sqrt{a^2\cos^2\theta'+b^2\sin^2\theta'}\cos\left[2(\phi+x)+x'\right]$$

$$y:2\cos\phi\sqrt{a^2\cos^2\theta+b^2\sin^2\theta}\sin(\phi+x)+\sqrt{a^2\cos^2\theta'+b^2\sin^2\theta'}\sin\left[2(\phi+x)+x'\right]$$

捌、　結論

除了在課堂上老師教過的橢圓基本性質之外，我們將蛋在地面上滾動的行為也應用到橢圓身上，除了橢圓繞軸、橢圓繞橢圓、橢圓在平面上滾動，還觀察其中的規律性，並將課堂上所學的知識應用上，這次科展對我們來說既是一個可以鍛鍊思考邏輯，又可以應用所學的好機會，希望這次體驗能對我們在未來從事其他活動提供一個美好的經驗。

玖、　參考資料及其他

一、 附註：

1. 上述圖形係我們親自使用 GSP 製作圖形後利用螢幕擷取複製到小畫家繪製，如有圖形類似應為巧合。
2. 其中圖形、符號標記較多，如有不清楚、錯誤敬請見諒，並煩請指正。
3. 標題編排編號由壹、一、(一)、1、(1)、A、a、(a)為順序，希望能方便您核對查看，如有不便敬請見諒。

二、 參考資料：

1. 高二下數學第一章圓錐曲線、橢圓篇。
2. 老師製作的數學講義。
3. GSP 圖形分享網址：

http://poncelet.math.nthu.edu.tw/chuan/ellipse/ellipse.html

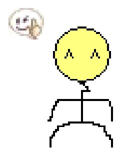
4. 雅虎奇摩知識問答庫：

http://tw.knowledge.yahoo.com/question/?qid=1005032802207

5. 基本幾何〔高中教師必修〕書。
6. 學長的數學科學展覽所推導之公式。
7. 91 年高雄區圓滾圓的試題詳解。

三、 未來展望：

1. 將橢圓滾平面之周長未詳細證明部分補充完成。
2. 橢圓滾平面之部分弧長問題的處理。
3. 橢圓滾平面其焦點軌跡方程式的推導。
4. 橢圓滾橢圓時之其上任一點軌跡方程式的整理及推導完成。



The End

Thank you for your reading……

高中組 數學科

佳作

040407
當我們同在一起"滾蛋"！！

國立宜蘭高級中學

評語：
1. 使用基本數學知識推導曲線之方程式，並能與數學軟體的視覺展示結果比對，提升本作品的價值。
2. 作者已了解微積分並非萬靈丹，微積分的方法無法獲得精確、完整橢圓的周長公式。
3. 若能加強團隊默契會更有加分的效果。