中華民國第四十五屆中小學科學展覽會
作品說明書

高中組 數學科

最佳團隊合作獎

040406
圓錐曲線 探討圓中隱藏的點

國立板橋高級中學

作者姓名：
高二 鄭仲傑 高二 黃冠嘉 高二 吳承燁
高二 陳威豪

指導老師：
趙健雄 高志朋

第四十五屆中小學科學展覽會
作品說明書

科　　別：數學科

組　　別：高中組

作品名稱：圓錐曲線 探討圓中隱藏的點

關鍵詞：恆定點、軌跡、面積

編　號：

圓錐曲線

探討圓中隱藏的點

壹、摘要

當在圓上找到一個固定點 P，做兩條相互垂直的弦 $\overline{PQ}$、$\overline{PR}$，則直線 $\overleftrightarrow{QR}$ 恆過一定點(圓心)如圖一，那麼這個定點該如何用座標表示呢？如果這兩條直線不是垂直的話，在何種情況下也會產生同樣的結果呢？所有的圓錐曲線是否也具有這樣的特性呢？若皆具有這樣的特性，那麼這些點究竟含有什麼意義呢？讓我們一起來討論這個問題吧！

貳、研究動機

眾所週知，從圓上一定點 P 做兩條互相垂直的弦 $\overline{PQ}$、$\overline{PR}$，則 $\overline{QR}$ 必過一定點(圓心)。

據此，我們進一步推想：如果兩弦並非垂直的話，是否也具有這樣的特性呢？圓錐曲線中的橢圓、拋物線、雙曲線，是否跟圓一樣，具有相同的特性？於是，我們就踏上了研究之旅。此探討主題，與高二上「圓與球」，高二下「圓錐曲線」及高三數甲「平移旋轉」有關。

參、研究目的

利用圓錐曲線及直線的方程式，經推導之後找出定點的座標。並進一步的用其通式，導出一般式的定點座標。

肆、研究設備及器材

紙、筆、尺、電腦

伍、研究過程或方式

一、引理：

若 x_1、x_2 是方程式 $f(x)=0$ 的兩個實數根，其中 $f(x)=ax^2+bx+c(a\neq 0)$

則 $(x_o-x_1)(x_o-x_2)=\dfrac{f(x)}{a}$

證明：

令 x_1，x_2 為其根

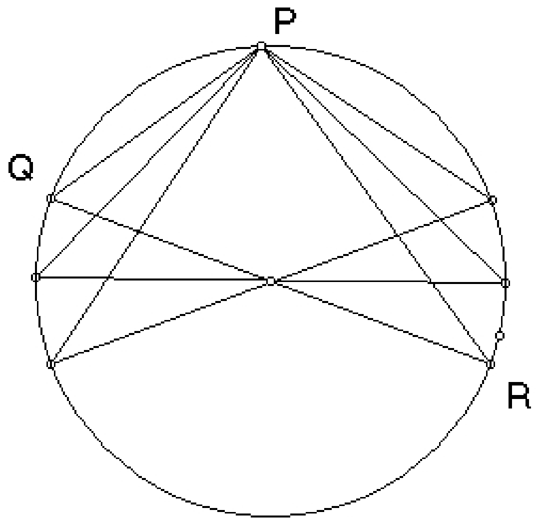
故可將多項式 $f(x)=ax^2+bx+c$ 寫為 $f(x)=a(x-x_1)(x-x_2)$

當 $x = x_o$

$f(x_o)=a(x_o-x_1)(x_o-x_2)$

$\Rightarrow (x_o-x_1)(x_o-x_2)=\dfrac{f(x_o)}{a}$

二、用 gsp 畫出一個圓，並在圓上找出一定點 P 做兩條互相垂直的弦 $\overline{PQ}$、$\overline{PR}$，則直線 $\overleftrightarrow{QR}$ 恆過一定點(如圖一)，找出這個定點的座標。



$\angle QPR = 90^o$

圖一

設圓的方程式：$x^2 + y^2 = r^2$，一定點$P(x_o, y_o)$及兩動點$Q(x_1, y_1)$、$R(x_2, y_2)$

$\because \overline{PQ} \perp \overline{PR}$

$$\Rightarrow \frac{(y_o - y_1)}{(x_o - x_1)} \times \frac{(y_o - y_2)}{(x_o - x_2)} = -1$$
$$\Rightarrow (y_o - y_1)(y_o - y_2) = -(x_o - x_1)(x_o - x_2)$$
$$\Rightarrow (x_o - x_1)(x_o - x_2) + (y_o - y_1)(y_o - y_2) = 0$$

設直線$\overleftrightarrow{QR}$之方程式為$y = kx + m$

圓的方程式：$x^2 + y^2 = r^2$

消去$y \Rightarrow x^2 + (kx + m)^2 = r^2$

由引理可得：

$$(x_o - x_1)(x_o - x_2) = \frac{{x_o}^2 + (kx_o + m)^2 - r^2}{1 + k^2}$$

$\because P(x_o, y_o)$在圓上,

$$\therefore (x_o - x_1)(x_o - x_2) = \frac{{x_o}^2 + (kx_o + m)^2 - r^2}{1 + k^2} = \frac{(kx_o + m)^2 - {y_o}^2}{1 + k^2}$$

同理

消去$x \Rightarrow (\frac{y - m}{k})^2 + y^2 = r^2$

由引理可得：

$$(y_o-y_1)(y_o-y_2)=\frac{(\frac{y_o-m}{k})^2+y_o^{\,2}-r^2}{\frac{1}{k^2}+1}$$

$\because P(x_o,y_o)$ 在圓上,

$$\therefore (y_o-y_1)(y_o-y_2)=\frac{(\frac{y_o-m}{k})^2+y_o^{\,2}-r^2}{\frac{1}{k^2}+1}=\frac{(\frac{y_o-m}{k})^2-x_o^{\,2}}{\frac{1}{k^2}+1}$$

$$\Rightarrow (x_o-x_1)(x_o-x_2)+(y_o-y_1)(y_o-y_2)=0$$

$$\Rightarrow \frac{(kx_o+m)^2-y_o^{\,2}}{1+k^2}+\frac{(\frac{y_o-m}{k})^2-x_o^{\,2}}{\frac{1}{k^2}+1}=0$$

$$\Rightarrow \frac{(kx_o+m)^2-y_o^{\,2}}{1+k^2}+\frac{(y_o-m)^2-k^2x_o^{\,2}}{1+k^2}=0$$

$$\Rightarrow (kx_o+m)^2-y_o^{\,2}+(y_o-m)^2-k^2x_o^{\,2}=0$$

$$\Rightarrow (kx_o+m+y_o)(kx_o+m-y_o)+(y_o-m-kx_o)(y_o-m+kx_o)=0$$

$\because P(x_o,y_o)$ 不在直線 $\overleftrightarrow{QR}$ 上

$\therefore kx_o-y_o+m\neq 0$

$\Rightarrow (kx_o+m+y_o)(kx_o+m-y_o)+(y_o-m-kx_o)(y_o-m+kx_o)=0$

$\Rightarrow (kx_o+m+y_o)-(y_o-m+kx_o)=0$

$\Rightarrow 0y_o=0x_o+2m$

與直線 $\overleftrightarrow{QR}$ 之方程式 $y=kx+m$ 比較

可知 $\overline{QR}$ 恆過定點且定點座標為 $(0,0)$

三、於是我們進一步推想，如果兩弦不是垂直的話，究竟在什麼情況下會有這樣的特性呢？嘗試了多種情況之後，發現在二之證明當中，運用到了兩斜率相乘等於-1，便推測：是不是當兩直線 $\overline{PQ}$、$\overline{PR}$ 之斜率相乘為一定值時，則 $\overline{QR}$ 恆過定點呢？接著，我們運用同樣的方法，嘗試找出那個定點座標。

設圓的方程式： $x^2+y^2=r^2$，一定點 $P(x_o,y_o)$ 及兩動點 $Q(x_1,y_1)$、 $R(x_2,y_2)$

$\Rightarrow k_{PQ}\times k_{PR}=\lambda$

$$\Rightarrow \frac{(y_o-y_1)}{(x_o-x_1)}\times\frac{(y_o-y_2)}{(x_o-x_2)}=\lambda$$

$\Rightarrow \lambda(x_o-x_1)(x_o-x_2)=(y_o-y_1)(y_o-y_2)$

$$\Rightarrow \lambda(x_o - x_1)(x_o - x_2) - (y_o - y_1)(y_o - y_2) = 0$$

設直線 $\overleftrightarrow{QR}$ 之方程式為 $y = kx + m$

圓的方程式： $x^2 + y^2 = r^2$

消去 $y \Rightarrow x^2 + (kx+m)^2 = r^2$

由引理可得：

$$(x_o - x_1)(x_o - x_2) = \frac{{x_o}^2 + (kx_o + m)^2 - r^2}{1+k^2}$$

$\because P(x_o, y_o)$ 在圓上,

$$\therefore (x_o - x_1)(x_o - x_2) = \frac{{x_o}^2 + (kx_o + m)^2 - r^2}{1+k^2} = \frac{(kx_o + m)^2 - {y_o}^2}{1+k^2}$$

同理

消去 $x \Rightarrow (\frac{y-m}{k})^2 + y^2 = r^2$

由引理可得：

$$(y_o - y_1)(y_o - y_2) = \frac{(\frac{y_o - m}{k})^2 + {y_o}^2 - r^2}{\frac{1}{k^2} + 1}$$

$\because P(x_o, y_o)$ 在圓上,

$$\therefore (y_o - y_1)(y_o - y_2) = \frac{(\frac{y_o - m}{k})^2 + {y_o}^2 - r^2}{\frac{1}{k^2} + 1} = \frac{(\frac{y_o - m}{k})^2 - {x_o}^2}{\frac{1}{k^2} + 1}$$

$$\Rightarrow \lambda(x_o - x_1)(x_o - x_2) - (y_o - y_1)(y_o - y_2) = 0$$

$$\Rightarrow \lambda \Rightarrow \lambda \frac{(kx_o + m)^2 - {y_o}^2}{1+k^2} - \frac{(\frac{y_o - m}{k})^2 - {x_o}^2}{\frac{1}{k^2} + 1} = 0$$

$$\Rightarrow \lambda \frac{(kx_o + m)^2 - {y_o}^2}{1+k^2} - \frac{(y_o - m)^2 - k^2 {x_o}^2}{1+k^2} = 0$$

$$\Rightarrow \lambda\left[(kx_o + m)^2 - {y_o}^2\right] - \left[(y_o - m)^2 - k^2 {x_o}^2\right] = 0$$

$$\Rightarrow \lambda\left[(kx_o + m + y_o)(kx_o + m - y_o)\right] - \left[(y_o - m - kx_o)(y_o - m + kx_o)\right] = 0$$

$\because P(x_o, y_o)$ 不在直線 $\overleftrightarrow{QR}$ 上

$\therefore kx_o - y_o + m \neq 0$

$$\Rightarrow \lambda \Rightarrow \lambda(kx_o + m + y_o) + (y_o - m + kx_o) = 0$$

$$\Rightarrow (\lambda+1)kx_o + (\lambda+1)y_o + (\lambda-1)m = 0$$

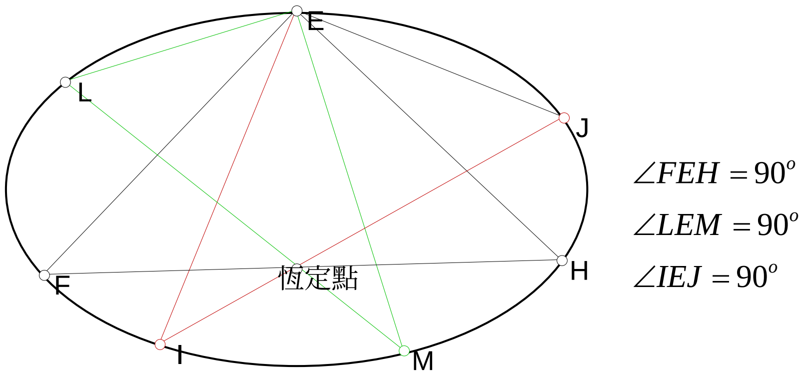
$$\Rightarrow (\lambda+1)y_o = -(\lambda+1)kx_o + (1-\lambda)m$$

$$\Rightarrow \frac{(1+\lambda)}{(1-\lambda)}y_o = -\frac{(1+\lambda)}{(1-\lambda)}kx_o + m$$

與直線 $\overleftrightarrow{QR}$ 之方程式 $y = kx + m$ 比較

可知 $\overline{QR}$ 恆過定點且定點座標為 $\left(-\frac{1+\lambda}{1-\lambda}x_o, \frac{1+\lambda}{1-\lambda}y_o\right)$

四、既然圓有這樣的特性，那麼橢圓會不會有這樣的特性呢？於是我們用 gsp 畫出一個橢圓，在橢圓上找出一定點 P 做兩條互相垂直的弦 $\overline{PQ}$、$\overline{PR}$，發現直線 $\overleftrightarrow{QR}$ 恆過一定點(如圖二)，於是我們嘗試找出這個定點的座標。



圖二

設橢圓方程式：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$，一定點 $P(x_o, y_o)$ 及兩動點 $Q(x_1, y_1)$、$R(x_2, y_2)$

$\because \overline{PQ} \perp \overline{PR}$

$$\Rightarrow \frac{(y_o - y_1)}{(x_o - x_1)} \times \frac{(y_o - y_2)}{(x_o - x_2)} = -1$$

$$\Rightarrow (y_o - y_1)(y_o - y_2) = -(x_o - x_1)(x_o - x_2)$$

$$\Rightarrow (x_o - x_1)(x_o - x_2) + (y_o - y_1)(y_o - y_2) = 0$$

設 $\overleftrightarrow{QR}$ 方程式 $y = kx + m$

橢圓方程式：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

消去 y

$$\Rightarrow \frac{x^2}{a^2}+\frac{(kx+m)^2}{b^2}=1 \Rightarrow \frac{x^2}{a^2}+\frac{(kx+m)^2}{b^2}-1=0$$

由引理可知

$$(x_o-x_1)(x_o-x_2)=\frac{\frac{x_o{}^2}{a^2}+\frac{(kx_o+m)^2}{b^2}-1}{\frac{1}{a^2}+\frac{k^2}{b^2}}$$

$\because P(x_o,y_o)$ 在橢圓上

$$\therefore (x_o-x_1)(x_o-x_2)=\frac{\frac{(kx_o+m)^2}{b^2}+\frac{x_o{}^2}{a^2}-1}{\frac{1}{a^2}+\frac{k^2}{b^2}}=\frac{\frac{(kx_o+m)^2}{b^2}+\frac{y_o{}^2}{b^2}}{\frac{1}{a^2}+\frac{k^2}{b^2}}$$

同理消去 x

$$\Rightarrow \quad \frac{(\frac{y-m}{k})^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0$$

由引理可知

$$(y_o-y_1)(y_o-y_2)=\frac{\frac{(y_o-m)^2}{k^2a^2}+\frac{y_o{}^2}{b^2}-1}{\frac{1}{a^2k^2}+\frac{1}{b^2}}$$

$\because P(x_o,y_o)$ 在橢圓上

$$\therefore (y_o-y_1)(y_o-y_2)=\frac{\frac{(y_o-m)^2}{k^2a^2}+\frac{y_o{}^2}{b^2}-1}{\frac{1}{a^2k^2}+\frac{1}{b^2}}=\frac{\frac{(y_o-m)^2}{k^2a^2}-\frac{x_o{}^2}{a^2}}{\frac{1}{a^2k^2}+\frac{1}{b^2}}$$

$$\Rightarrow (x_o-x_1)(x_o-x_2)+(y_o-y_1)(y_o-y_2)=0$$

$$\Rightarrow \frac{\frac{(kx_o+m)^2}{b^2}-\frac{y_o{}^2}{b^2}}{\frac{1}{a^2}+\frac{k^2}{b^2}}-\frac{\frac{(y_o-m)^2}{k^2a^2}-\frac{x_o{}^2}{a^2}}{\frac{1}{a^2k^2}+\frac{1}{b^2}}=0$$

$$\Rightarrow \frac{a^2(kx_o+m)^2-a^2y_o{}^2}{b^2+a^2k^2}-\frac{b^2(y_o-m)^2-b^2x_o{}^2k^2}{b^2+a^2k^2}=0$$

$$\Rightarrow \left[a^2(kx_o+m)^2-a^2y_o{}^2\right]-\left[b^2(y_o-m)^2-b^2x_o{}^2k^2\right]=0$$

$$\Rightarrow \frac{(kx_o+m-y_o)(kx_o+m+y_o)}{b^2}+\frac{(y_o-m+kx_o)(y_o-m-kx_o)}{a^2}=0$$

$\because P(x_o,y_o)$ 不在 $\overleftrightarrow{QR}$ ： $y=kx+m$ 上

$kx_o-y_o+m\neq 0$

$\therefore \dfrac{kx_o+y_o+m}{b^2}=\dfrac{y_o-m+kx_o}{a^2}$

$a^2kx_o+a^2y_o+a^2m=b^2y_o-b^2m+b^2kx_o$

$(a^2-b^2)kx_o+(a^2-b^2)y_o+(a^2+b^2)m=0$

$-(a^2-b^2)y_o=(a^2-b^2)kx_o+(a^2+b^2)m$

$\Rightarrow -\dfrac{a^2-b^2}{a^2+b^2}y_o=\dfrac{a^2-b^2}{a^2+b^2}kx_o+m$

與$\overleftrightarrow{QR}$方程式**:** $y=kx+m$比較

可知$\overline{QR}$恆過定點且定點座標為$(\dfrac{a^2-b^2}{a^2+b^2}x_o,-\dfrac{a^2-b^2}{a^2+b^2}y_o)$

五、接著，我們又再推想，那如果兩弦不是垂直的話，在什麼情況下橢圓會有這樣的特性呢？嘗試了各種情況之後，發現其結果與圓相同，當兩直線$\overline{PQ}$、$\overline{PR}$之斜率相乘為一定值時，則$\overline{QR}$恆過定點，於是我們再用相同的方法，找出那個點座標。

設橢圓方程式：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$，一定點$P(x_o,y_o)$及兩動點$Q(x_1,y_1)$、$R(x_2,y_2)$

$\Rightarrow k_{PQ}\times k_{PR}=\lambda$

$\Rightarrow \dfrac{(y_o-y_1)}{(x_o-x_1)}\times\dfrac{(y_o-y_2)}{(x_o-x_2)}=\lambda$

$\Rightarrow \lambda(x_o-x_1)(x_o-x_2)=(y_o-y_1)(y_o-y_2)$

$\Rightarrow \lambda(x_o-x_1)(x_o-x_2)-(y_o-y_1)(y_o-y_2)=0$

$\Rightarrow \lambda\dfrac{\dfrac{(kx_o+m)^2}{b^2}-\dfrac{y_o{}^2}{b^2}}{\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{k^2}{b^2}}-\dfrac{\dfrac{(y_o-m)^2}{k^2a^2}-\dfrac{x_o{}^2}{a^2}}{\dfrac{1}{a^2k^2}+\dfrac{1}{b^2}}=0$

$\Rightarrow \lambda\dfrac{a^2(kx_o+m)^2-a^2y_o{}^2}{b^2+a^2k^2}-\dfrac{b^2(y_o-m)^2-b^2x_o{}^2k^2}{b^2+a^2k^2}=0$

$\Rightarrow \lambda\left[a^2(kx_o+m)^2-a^2y_o{}^2\right]-\left[b^2(y_o-m)^2-b^2x_o{}^2k^2\right]=0$

$\Rightarrow \lambda\dfrac{(kx_o+m-y_o)(kx_o+m+y_o)}{b^2}-\dfrac{(y_o-m+kx_o)(y_o-m-kx_o)}{a^2}=0$

$\because P(x_o,y_o)$不在$\overleftrightarrow{QR}$ ： $y=kx+m$

$\because kx_o-y_o+m\neq 0$

$$\Rightarrow \lambda\frac{(kx_o+m+y_o)}{b^2}+\frac{(y_o-m+kx_o)}{a^2}=0$$

$$\Rightarrow a^2\lambda(kx_o+m+y_o)+b^2(y_o-m+kx_o)=0$$

$$\Rightarrow a^2\lambda kx_o+a^2\lambda m+a^2\lambda y_o+b^2y_o-b^2m+b^2kx_o=0$$

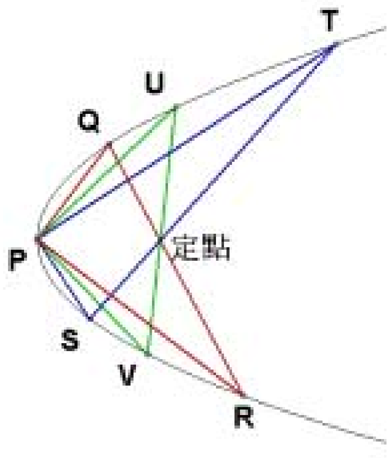
$$\Rightarrow (a^2\lambda+b^2)kx_o+(a^2\lambda-b^2)m+(a^2\lambda+b^2)y_o=0$$

$$\Rightarrow -(\frac{a^2\lambda+b^2}{a^2\lambda-b^2})y_o=k(\frac{a^2\lambda+b^2}{a^2\lambda-b^2})x_o+m$$

與$\overleftrightarrow{QR}$方程式 $y=kx+m$比較

可知$\overleftrightarrow{QR}$恆過定點且定點座標$(\frac{a^2\lambda+b^2}{a^2\lambda-b^2}x_o,-\frac{a^2\lambda+b^2}{a^2\lambda-b^2}y_o)$

六、既然圓跟橢圓都有這樣的特性，那麼拋物線會不會有這樣的特性呢？於是我們用 gsp 畫出一個拋物線，在拋物線上找出一定點 P做兩條互相垂直的弦$\overline{PQ}$、$\overline{PR}$，發現直線$\overleftrightarrow{QR}$恆過一定點(如圖三)，於是我們嘗試找出這個定點的座標。



$\angle QPR=90^o$

$\angle SPT=90^o$

$\angle VPU=90^o$

圖三

設拋物線$y^2=4cx$，一定點$P(x_o,y_o)$及兩動點$Q(x_1,y_1)$、$R(x_2,y_2)$，

$\because \overline{PQ}\perp\overline{PR}$

$$\Rightarrow \frac{(y_o-y_1)}{(x_o-x_1)}\times\frac{(y_o-y_2)}{(x_o-x_2)}=-1$$

$$\Rightarrow (y_o-y_1)(y_o-y_2)=-(x_o-x_1)(x_o-x_2)$$

$$\Rightarrow (x_o-x_1)(x_o-x_2)+(y_o-y_1)(y_o-y_2)=0$$

設$\overleftrightarrow{QR}$方程式：$y=kx+m$

與拋物線方程式 $y^2 = 4cx$

消去 y 得 $\Rightarrow (kx+m)^2 = 4cx$

由引理可知 $(x_o - x_1)(x_o - x_2) = \dfrac{(kx_o + m)^2 - 4cx_o}{k^2}$

$\because$ 點 P 在拋物線上

$\therefore y_0{}^2 = 4cx_0$

$\Rightarrow (x_0 - x_1)(x_0 - x_2) = \dfrac{(kx_0 + m)^2 - y_0{}^2}{k^2}$

設直線 QR 方程式為 $y = kx + m$ 與拋物線方程式 $y^2 = 4cx$

消去法得 $\Rightarrow y^2 = 4c(\dfrac{y-m}{k})$

由引理 $(y_0 - y_1)(y_0 - y_2) = \dfrac{y^2 - 4c(\dfrac{y_0 - m}{k})}{1^2}$

$\because$ 點 P 在拋物線上

$y_0{}^2 = 4cx_0 \Rightarrow (y_0 - y_1)(y_0 - y_2) = \dfrac{4cx_0 - 4c(\dfrac{y_0 - m}{k})}{1^2}$

$\because (x_0 - x_1)(x_0 - x_2) + (y_0 - y_1)(y_0 - y_2) = 0$

$\Rightarrow \dfrac{(kx_0 + m)^2 - y_0{}^2}{k^2} + \dfrac{4cx_0 - 4c\left(\dfrac{y_0 - m}{k}\right)}{1^2} = 0$

$\Rightarrow \dfrac{(kx_0 + m - y_0)(kx_0 + m + y_0)}{k^2} + \dfrac{4c(kx_0 - y_0 + m)}{k} = 0$

$\because P(x_o,y_o)$ 不在 $\overleftrightarrow{QR} : y = kx+m$ 上

$\therefore kx_0 + m - y_0 \neq 0$

$\Rightarrow \dfrac{(kx_0 + m + y_0)}{k^2} + \dfrac{4c}{k} = 0$

$\Rightarrow \dfrac{kx_0 + m + y_0}{k} = -4c$

$\Rightarrow kx_0 + m + y_0 = -4kc$

$\Rightarrow -y_0 = kx_0 + m + 4kc$

$\Rightarrow -y_0 = k(x_0 + 4c) + m$

與 $y = kx + m$ 比較

可知直線 $\overleftrightarrow{QR}$ 恆過定點，且定點座標為 $(x_0 + 4c, -y_0)$

七、經過先前的嘗試，我們再推測，若兩弦不是垂直的話，在什麼情況下拋物線會有這樣的特性呢？嘗試了很多情況之後發現，其結果與圓及橢圓相同，當兩直線 $\overline{PQ}$、$\overline{PR}$ 之斜率相乘為一定值時，則 $\overline{QR}$ 恆過定點，於是我們用一樣的方法，找出那個點座標。

設拋物線 $y^2=4cx$，一定點 $P(x_o,y_o)$ 及兩動點 $Q(x_1,y_1)$、$R(x_2,y_2)$，

$\Rightarrow k_{\overline{pq}}\times k_{\overline{pr}}=\lambda$

$\Rightarrow \dfrac{y_0-y_1}{x_0-x_1}\times\dfrac{y_0-y_2}{x_0-x_2}=\lambda$

$\Rightarrow \lambda(x_0-x_1)(x_0-x_2)-(y_0-y_1)(y_0-y_2)=0$

設直線 $\overleftrightarrow{QR}$ 方程式為 $y=kx+m$

拋物線方程式 $y^2=4cx$

消去 y 得 $\Rightarrow (kx+m)^2=4cx$

由引理可知 $(x_o-x_1)(x_o-x_2)=\dfrac{(kx_o+m)^2-4cx_o}{k^2}$

∵點 P 在拋物線上

∴ $y_0{}^2=4cx_0$

$\Rightarrow (x_0-x_1)(x_0-x_2)=\dfrac{(kx_0+m)^2-y_0{}^2}{k^2}$

同理消去 x 得 $\Rightarrow y^2=4c(\dfrac{y-m}{k})$

由引理可知 $(y_0-y_1)(y_0-y_2)=\dfrac{y^2-4c(\dfrac{y_0-m}{k})}{1^2}$

∵點 P 在拋物線上

∴ $y_0{}^2=4cx_0$

$\Rightarrow (y_0-y_1)(y_0-y_2)=\dfrac{4cx_0-4c(\dfrac{y_0-m}{k})}{1^2}$

∵ $\lambda\left(x_0-x_1\right)\left(x_0-x_2\right)+\left(y_0-y_1\right)\left(y_0-y_2\right)=0$

$\Rightarrow \lambda\dfrac{\left(kx_0+m\right)^2-y_0{}^2}{k^2}-\dfrac{4cx_0-4c\left(\dfrac{y_0-m}{k}\right)}{1^2}=0$

$$\Rightarrow \lambda \frac{(kx_0+m-y_0)(kx_0+m+y_0)}{k^2}+\frac{4c(kx_0-y_0+m)}{k}=0$$

$\because\ p(x_0,y_0)$ 不在$\overleftrightarrow{QR}: y=kx_o+m$

$\therefore kx_0+m-y_0\neq 0$

$$\Rightarrow -\lambda \frac{(kx_0+m+y_0)}{k^2}+\frac{4c}{k}=0$$

$$\Rightarrow -\lambda \frac{kx_0+m+y_0}{k}=-4c$$

$$\Rightarrow -\lambda kx_0-\lambda m-\lambda y_0=-4kc$$

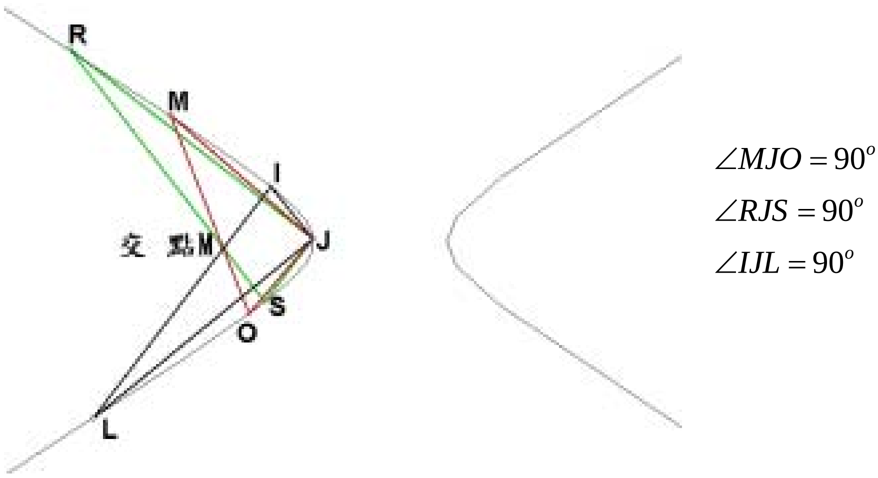
$$\Rightarrow -\lambda y_0=\lambda kx_0+\lambda m+4kc$$

$$\Rightarrow -y_0=k\left(\frac{\lambda x_0-4c}{\lambda}\right)+m$$

與 $y=kx+m$ 比較

可知動直線$\overline{QR}$ 恆過定點，且定點座標為$\left(\frac{\lambda x_0-4c}{\lambda},-y_0\right)$

八、既然圓、橢圓、拋物線都有這樣的特性，那麼身為圓錐曲線中的一員雙曲線會不會也有這樣的特性呢？於是我們用 gsp 畫出一個雙曲線，在雙曲線上找出一定點 P做兩條互相垂直的弦$\overline{PQ}$、$\overline{PR}$，發現直線$\overleftrightarrow{QR}$ 恆過一定點(如圖)，於是我們嘗試找出這個定點的座標。



圖四

設雙曲線方程式$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$一定點$P(x_o,y_o)$及兩動點$Q(x_1,y_1)$、$R(x_2,y_2)$

$\because \overline{PQ} \perp \overline{PR}$

$\therefore k_{\overline{PQ}} \times k_{\overline{PR}} = -1$

$\Rightarrow \frac{(y_o - y_1)}{(x_o - x_1)} \times \frac{(y_o - y_2)}{(x_o - x_2)} = -1$

$\Rightarrow (x_o - x_1)(x_o - x_2) + (y_o - y_1)(y_o - y_2) = 0$

設直線 $\overline{QR}$ 方程式為 $y = kx + m$

雙曲線方程式 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

消去 $y \Rightarrow \frac{x^2}{a^2} - \frac{(kx+m)^2}{b^2} = 1$

由引理可知 $(x_o - x_1)(x_o - x_2) = \dfrac{\frac{x_o{}^2}{a^2} - \frac{(kx_o + m)^2}{b^2} - 1}{\frac{1}{a^2} - \frac{k^2}{b^2}}$

又 $P(x_o,y_o)$在雙曲線上

$\therefore \frac{x_o{}^2}{a^2} - \frac{y_o{}^2}{b^2} = 1$

$\Rightarrow (x_o - x_1)(x_o - x_2) = \dfrac{\frac{y_o{}^2}{b^2} - \frac{(kx_o + m)^2}{b^2}}{\frac{1}{a^2} - \frac{k^2}{b^2}}$

同理

消去 $x \Rightarrow \dfrac{(\frac{y-m}{k})^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

由引理可知 $(y_o - y_1)(y_o - y_2) = \dfrac{\frac{(y_o - m/k)^2}{a^2} - \frac{y_o{}^2}{b^2} - 1}{\frac{1}{a^2k^2} - \frac{1}{b^2}}$

又 $P(x_o, y_o)$ 在雙曲線上

$\therefore \frac{x_o{}^2}{a^2} - \frac{y_o{}^2}{b^2} = 1 \Rightarrow (y_o - y_1)(y_o - y_2) = \dfrac{\frac{(y_o - m/k)^2}{a^2} - \frac{x_o{}^2}{a^2}}{\frac{1}{a^2k^2} - \frac{1}{b^2}}$

$\Rightarrow \because (x_o - x_1)(x_o - x_2) + (y_o - y_1)(y_o - y_2) = 0$

$$\Rightarrow \frac{\frac{{y_o}^2}{b^2}-\frac{(kx_o+m)^2}{b^2}}{\frac{1}{a^2}-\frac{k^2}{b^2}}+\frac{\frac{(y_o-m/k)^2}{a^2}-\frac{{x_o}^2}{a^2}}{\frac{1}{a^2k^2}-\frac{1}{b^2}}=0$$

$$\Rightarrow \frac{a^2{y_o}^2-a^2(kx_o+m)^2}{b^2-a^2k^2}+\frac{b^2(y_o-m)^2-b^2a^2{x_o}^2}{b^2-a^2k^2}=0$$

$$\Rightarrow a^2[{y_o}^2-(kx_o+m)^2]+b^2[(y_o-m)^2-k^2{x_o}^2]=0$$

$$\Rightarrow a^2(y_o-kx_o-m)(y_o+kx_o+m)+b^2(y_o-m-kx_o)(y_o-m+kx_o)=0$$

$\because P(x_o,y_o)$ 不在 $y=kx+m$ 上

$\therefore y_o-kx_o-m\neq 0$

$$\Rightarrow a^2(y_o+kx_o+m)+b^2(y_o-m+kx_o)=0$$

$$\Rightarrow (a^2+b^2)y_o=k(-a^2-b^2)x_o+(-a^2+b^2)m$$

$$\Rightarrow -\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}y_o=k\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}x_o+m$$

與 $y=kx+m$ 比較

可知動直線 $\overline{QR}$ 恆過一定點且定點座標為 $\left(\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}x_o,-\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}y_o\right)$

九、於是我們想說，那如果兩弦不是垂直的話，在什麼情況下雙曲線會有這樣的特性呢？嘗試了很多情況之後發現，其結果與圓、橢圓、拋物線相同，當兩直線 $\overline{PQ}$、$\overline{PR}$ 之斜率相乘為一定值時，則 $\overline{QR}$ 恆過定點，於是我們用一樣的方法，找出那個點座標。

設雙曲線方程式 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 一定點 $P(x_o,y_o)$ 及兩動點 $Q(x_1,y_1)$、 $R(x_2,y_2)$

$$\Rightarrow k_{PQ}\times k_{PR}=\lambda$$

$$\Rightarrow \frac{(y_o-y_1)}{(x_o-x_1)}\times\frac{(y_o-y_2)}{(x_o-x_2)}=\lambda$$

$$\Rightarrow \lambda(x_o-x_1)(x_o-x_2)-(y_o-y_1)(y_o-y_2)=0$$

設直線 $\overleftrightarrow{QR}$ 方程式為 $y=kx+m$

雙曲線方程式 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$

消去 $y \Rightarrow \dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{(kx+m)^2}{b^2}=1$

由引理可知 $(x_o-x_1)(x_o-x_2)=\dfrac{\dfrac{{x_o}^2}{a^2}-\dfrac{(kx_o+m)^2}{b^2}-1}{\dfrac{1}{a^2}-\dfrac{k^2}{b^2}}$

又 $P(x_o,y_o)$在雙曲線上

$\therefore \dfrac{{x_o}^2}{a^2}-\dfrac{{y_o}^2}{b^2}=1$

$\Rightarrow (x_o-x_1)(x_o-x_2)=\dfrac{\dfrac{{y_o}^2}{b^2}-\dfrac{(kx_o+m)^2}{b^2}}{\dfrac{1}{a^2}-\dfrac{k^2}{b^2}}$

同理消去 x

$\Rightarrow \dfrac{(\frac{y-m}{k})^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$

由引理可知

$(y_o-y_1)(y_o-y_2)=\dfrac{\dfrac{(y_o-m/k)^2}{a^2}-\dfrac{{y_o}^2}{b^2}-1}{\dfrac{1}{a^2k^2}-\dfrac{1}{b^2}}$

又 $P(x_o,y_o)$ 在雙曲線上

$\therefore \dfrac{{x_o}^2}{a^2}-\dfrac{{y_o}^2}{b^2}=1 \quad \Rightarrow (y_o-y_1)(y_o-y_2)=\dfrac{\dfrac{(y_o-m/k)^2}{a^2}-\dfrac{{x_o}^2}{a^2}}{\dfrac{1}{a^2k^2}-\dfrac{1}{b^2}}$

$\therefore \lambda(x_o-x_1)(x_o-x_2)-(y_o-y_1)(y_o-y_2)=0$

$\Rightarrow \lambda\dfrac{\dfrac{{y_o}^2}{b^2}-\dfrac{(kx_o+m)^2}{b^2}}{\dfrac{1}{a^2}-\dfrac{k^2}{b^2}}-\dfrac{\dfrac{(y_o-m/k)^2}{a^2}-\dfrac{{x_o}^2}{a^2}}{\dfrac{1}{a^2k^2}-\dfrac{1}{b^2}}=0$

$\Rightarrow \lambda\dfrac{a^2{y_o}^2-a^2(kx_o+m)^2}{b^2-a^2k^2}-\dfrac{b^2(y_o-m)^2-b^2k^2{x_o}^2}{b^2-a^2k^2}=0$

$\Rightarrow \lambda a^2(y_o - k_o x - m)(y_o + k_o x + m) - b^2(y_o - m - k_o x)(y_o - m + k_o x) = 0$

$\because P(x_o, y_o)$ 不在 $\overline{QR}$ 上

$\therefore y_o - kx_o - m \neq 0$

$\Rightarrow (\lambda a^2 - b^2)y_o + k(\lambda a^2 - b^2)x_o + (\lambda a^2 + b^2)m = 0$

$\Rightarrow (-\dfrac{\lambda a^2 - b^2}{\lambda a^2 + b^2})y_o = k(\dfrac{\lambda a^2 - b^2}{\lambda a^2 + b^2}x_o) + m$

與 $y = kx + m$ 比較

可知動直線 $\overleftrightarrow{QR}$ 恆過定點

且定點座標為 $(\dfrac{\lambda a^2 - b^2}{\lambda a^2 + b^2}x_o, -\dfrac{\lambda a^2 - b^2}{\lambda a^2 + b^2}y_o)$

十、既然圓錐曲線(圓、橢圓、拋物線、雙曲線)都有這樣的特性, 於是我們嘗試把他一般化。圓錐曲線(圓、橢圓、雙曲線)：$mx^2 + ny^2 = 1$ ($m > 0$， $n > 0$ 或 $mn < 0$)上，有一定點 $P(x_o, y_o)$ 與兩動點 $Q(x_1, y_1)$、 $R(x_2, y_2)$ 若線段 $\overline{PQ}$、 $\overline{PR}$ 的斜率滿足 $k_{\overline{pq}} \times k_{\overline{pr}} = \lambda$ (λ 為非零常數)

$\Rightarrow k_{\overline{PQ}} \times k_{\overline{PR}} = \lambda$

$\Rightarrow \dfrac{(y_o - y_1)}{(x_o - x_1)} \times \dfrac{(y_o - y_2)}{(x_o - x_2)} = \lambda$

$\lambda(x_o - x_1)(x_o - x_2) - (y_o - y_1)(y_o - y_2) = 0$

設直線 $\overleftrightarrow{QR}$ 方程式為 $y=kx+l$

圓錐曲線方程式 $mx^2+ny^2=1$

消去 $y \Rightarrow mx^2 + n(kx + l)^2 = 1$

由引理可知 $(x_o - x_1)(x_o - x_2) = \dfrac{mx_o^2 + n(kx_o + l)^2 - 1}{m + nk^2}$

$\because P(x_o,y_o)$在圓錐曲線上

$\therefore mx_o^2+ny_o^2=1$

$\Rightarrow (x_o - x_1)(x_o - x_2) = \dfrac{n(kx_o + l)^2 - ny_o^2}{m + nk^2}$

同理 消去 x $\Rightarrow m(\dfrac{y - l}{k})^2 + ny^2 = 1$

由引理可知 $(yo - y1)(yo - y2) = \dfrac{m(\dfrac{y_o - l}{k})^2 + mx_o^2}{\dfrac{m}{k^2} + n}$

$$\Rightarrow \lambda(x_o - x_1)(x_o - x_2) - (y_o - y_1)(y_o - y_2) = 0$$

$$\Rightarrow \lambda \frac{n(kx_o + l)^2 - ny_o{}^2}{m + nk^2} - \frac{m(\frac{y_o - l}{k})^2 + mx_o{}^2}{\frac{m}{k^2} + n} = 0$$

$$\Rightarrow \lambda \frac{n(kx_o + l)^2 - ny_o{}^2}{m + nk^2} - \frac{m(y_o - l)^2 + mx_o{}^2 k^2}{m + nk^2} = 0$$

$$\Rightarrow \lambda n\left[(kx_o + l)^2 - y_o{}^2\right] - m\left[(y_o - l)^2 - k^2 x_o{}^2\right] = 0$$

$$\Rightarrow \lambda n(kx_o + l - y_o)(kx_o + l + y_o) - m(y_o - l + kx_o)(y_o - l - kx_o) = 0$$

$\because P(x_o,y_o)$ 不在 $\overleftrightarrow{QR}$ 上

$\therefore y_o - kx_o - l \neq 0$

$\Rightarrow -\lambda n(kx_o + l + y_o) - m(y_o - l + kx_o) = 0$

$\Rightarrow (-\lambda - m)kx_o + (-\lambda n - m)y_o + (-\lambda n + m)l = 0$

$\Rightarrow (-\lambda - m)y_o = k(\lambda n + m)x_o + (\lambda n - m)l$

$\Rightarrow \left(-\frac{\lambda n + m}{\lambda n - m} y_o\right) = k\left(\frac{\lambda n + m}{\lambda n - m} x_o\right) + l$

與 $y = kx + m$ 比較

可知動直線 $\overleftrightarrow{QR}$ 恆過定點

當 $\lambda \neq \frac{m}{n}$ 時，該定點的座標為 $(\frac{\lambda n + m}{\lambda n - m} x_o, -\frac{\lambda n + m}{\lambda n - m} y_o)$

十一、圓錐曲線之通式為 $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + F = 0$，在其上有一定點 $p(x_0, y_0)$ 及兩動點 $Q(x_1, y_1)$，$R(x_2, y_2)$，若直線 $\overline{PQ}$，$\overline{PR}$ 的斜率滿足 $k_{\overline{pq}} \times k_{\overline{pr}} = \lambda$ (λ 為非零常數)則其 $\overline{QR}$ 恆過定點，經過座標軸旋轉 θ，且 $\cot 2\theta = \frac{A - C}{B}$，得到原座標係座標為 $\left(\frac{\lambda n + m}{\lambda n - m} x_0 \cos\theta + \frac{\lambda n + m}{\lambda n - m} y_0 \sin\theta, \frac{\lambda n + m}{\lambda n - m} x_0 \sin\theta - \frac{\lambda n + m}{\lambda n - m} y_0 \cos\theta\right)$

證明：

由上述已知 $mx^2 + ny^2 = 1$，其 $\overline{QR}$ 恆過定點 $\left(\frac{\lambda n + m}{\lambda n - m} x_0, -\frac{\lambda n + m}{\lambda n - m} y_0\right)$

因為 $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + F = 0$

可經由座標軸旋轉 θ，且 $\cot 2\theta = \frac{A - C}{B}$

得到 $mx'^2 + ny'^2 = 1$

令 $Ax^2+Bxy+Cy^2+F=0$，且 $\overline{QR}$ 恆過之定點座標為 (x,y)

且已知 $mx'^2+ny'^2=1$ 時,

$\overline{QR}$ 恆過之定點座標為 $\left(x^{'},y^{'}\right)=\left(\dfrac{\lambda n+m}{\lambda n-m}x_0,-\dfrac{\lambda n+m}{\lambda n-m}y_0\right)$

可由旋轉得知

$$\begin{cases} x=x^{'}\cos\theta-y^{'}\sin\theta \\ y=x^{'}\sin\theta+y^{'}\cos\theta \end{cases}$$

將 $\left(x^{'},y^{'}\right)$ 代入

$$\begin{cases} x=\dfrac{\lambda n+m}{\lambda n-m}x_0\cos\theta+\dfrac{\lambda n+m}{\lambda n-m}y_0\sin\theta \\ y=\dfrac{\lambda n+m}{\lambda n-m}x_0\sin\theta-\dfrac{\lambda n+m}{\lambda n-m}y_0\cos\theta \end{cases}$$

十二、既然圓錐曲線都有這樣的恆定點, 於是我們想說, 這些恆定點會有什麼樣的特性呢？

(一)當圓： $x^2+y^2=r^2$ 上一定點 $P(x_o,y_o)$，與兩動點 $Q(x_1,y_1)$， $R(x_2,y_2)$

當 $k_{\overline{PQ}}\times k_{\overline{PR}}=\lambda$ 時，其定點座標為 $\left(-\dfrac{1+\lambda}{1-\lambda}x_o,\dfrac{1+\lambda}{1-\lambda}y_o\right)$

若 $\lambda=\lambda_1$ 時，其定點座標為 $A_1\left(-\dfrac{1+\lambda_1}{1-\lambda_1}x_o,\dfrac{1+\lambda_1}{1-\lambda_1}y_o\right)$

$\lambda=\lambda_2$ 時，其定點座標為 $A_2\left(-\dfrac{1+\lambda_2}{1-\lambda_2}x_o,\dfrac{1+\lambda_2}{1-\lambda_2}y_o\right)$

$\lambda=\lambda_3$ 時，其定點座標為 $A_3\left(-\dfrac{1+\lambda_3}{1-\lambda_3}x_o,\dfrac{1+\lambda_3}{1-\lambda_3}y_o\right)$

$$k_{A_1A2}=\frac{\left(\dfrac{1+\lambda_2}{1-\lambda_2}-\dfrac{1+\lambda_1}{1-\lambda_1}\right)y_0}{\left(-\dfrac{1+\lambda_2}{1-\lambda_2}+\dfrac{1+\lambda_1}{1-\lambda_1}\right)x_0}=-\frac{y_0}{x_0}$$

$$k_{A_1A3}=\frac{\left(\dfrac{1+\lambda_3}{1-\lambda_3}-\dfrac{1+\lambda_1}{1-\lambda_1}\right)y_0}{\left(-\dfrac{1+\lambda_3}{1-\lambda_3}+\dfrac{1+\lambda_1}{1-\lambda_1}\right)x_0}=-\frac{y_0}{x_0}$$

$\because k_{A_1A2} = k_{A_1A3} = -\dfrac{y_0}{x_0}$

$\therefore A_1, A_2, A_3$ 共線

可知當 λ 在變動時，其軌跡構成一線段

於是我們進一步的討論其面積是否也有關係呢？

已知 P, A_1, A_2, A_3 四點，可用三角形面積公式得到：

$$\Delta PA_1A_2 = \frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} x_0 & -\dfrac{1+\lambda_1}{1-\lambda_1}x_o & -\dfrac{1+\lambda_2}{1-\lambda_2}x_o & x_0 \\ y_0 & \dfrac{1+\lambda_1}{1-\lambda_1}y_o & \dfrac{1+\lambda_2}{1-\lambda_2}y_o & y_0 \end{vmatrix}\right|$$

$$= \frac{1}{2}\left|\frac{1+\lambda_1}{1-\lambda_1}x_0y_0 - \frac{1+\lambda_1}{1-\lambda_1}\frac{1+\lambda_2}{1-\lambda_2}x_0y_0 - \frac{1+\lambda_2}{1-\lambda_2}x_0y_0 \right.$$
$$\left. + \frac{1+\lambda_1}{1-\lambda_1}x_0y_0 + \frac{1+\lambda_1}{1-\lambda_1}\frac{1+\lambda_2}{1-\lambda_2}x_0y_0 - \frac{1+\lambda_2}{1-\lambda_2}x_0y_0\right|$$

$$= \left|\frac{1+\lambda_1}{1-\lambda_1}x_0y_0 - \frac{1+\lambda_2}{1-\lambda_2}x_0y_0\right|$$

$$\Delta PA_1A_3 = \left|\frac{1+\lambda_1}{1-\lambda_1}x_0y_0 - \frac{1+\lambda_3}{1-\lambda_3}x_0y_0\right|$$

$$\Delta PA_2A_3 = \left|\frac{1+\lambda_2}{1-\lambda_2}x_0y_0 - \frac{1+\lambda_3}{1-\lambda_3}x_0y_0\right|$$

$\Rightarrow$ 可知其中兩個三角形面積之和 = 另一個三角形面積

(二)當橢圓：$\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ 上一定點 $P(x_0, y_0)$，與兩動點 $Q(x_1, y_1)$， $R(x_2, y_2)$

當 $k_{\overline{PQ}} \times k_{\overline{PR}} = \lambda$ 時，其定點座標為 $\left(\dfrac{a^2\lambda + b^2}{a^2\lambda - b^2}x_0, -\dfrac{a^2\lambda + b^2}{a^2\lambda - b^2}y_0\right)$

若 $\lambda = \lambda_1$ 時，其定點座標為 $A_1\left(\dfrac{a^2\lambda_1 + b^2}{a^2\lambda_1 - b^2}x_0, -\dfrac{a^2\lambda_1 + b^2}{a^2\lambda_1 - b^2}y_0\right)$

$\lambda = \lambda_2$ 時，其定點座標為 $A_2\left(\dfrac{a^2\lambda_2 + b^2}{a^2\lambda_2 - b^2}x_0, -\dfrac{a^2\lambda_2 + b^2}{a^2\lambda_2 - b^2}y_0\right)$

$\lambda=\lambda_3$ 時，其定點座標為 $A_3\left(\dfrac{a^2\lambda_3+b^2}{a^2\lambda_3-b^2}x_0,-\dfrac{a^2\lambda_3+b^2}{a^2\lambda_3-b^2}y_0\right)$

$$k_{A_1A_2}=\frac{\left(-\dfrac{a^2\lambda_2+b^2}{a^2\lambda_2-b^2}+\dfrac{a^2\lambda_1+b^2}{a^2\lambda_1-b^2}\right)y_0}{\left(\dfrac{a^2\lambda_2+b^2}{a^2\lambda_2-b^2}-\dfrac{a^2\lambda_1+b^2}{a^2\lambda_1-b^2}\right)x_0}=-\frac{y_0}{x_0}$$

$$k_{A_1A_3}=\frac{\left(-\dfrac{a^2\lambda_3+b^2}{a^2\lambda_3-b^2}+\dfrac{a^2\lambda_1+b^2}{a^2\lambda_1-b^2}\right)y_0}{\left(\dfrac{a^2\lambda_3+b^2}{a^2\lambda_3-b^2}-\dfrac{a^2\lambda_1+b^2}{a^2\lambda_1-b^2}\right)x_0}=-\frac{y_0}{x_0}$$

$\because k_{A_1A_2}=k_{A_1A_3}=-\dfrac{y_0}{x_0}$

$\therefore A_1,A_2,A_3$ 共線

可知當 λ 在變動時，其軌跡構成一線段

於是我們進一步的討論其面積是否也有關係呢？

已知 $P,\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 四點，可用三角形面積公式得到：

$$\Delta PA_1A_2=\frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} x_0 & \dfrac{a^2\lambda_1+b^2}{a^2\lambda_1-b^2}x_0 & \dfrac{a^2\lambda_2+b^2}{a^2\lambda_2-b^2}x_0 & x_0 \\ y_0 & -\dfrac{a^2\lambda_1+b^2}{a^2\lambda_1-b^2}y_0 & -\dfrac{a^2\lambda_2+b^2}{a^2\lambda_2-b^2}y_0 & y_0 \end{vmatrix}\right|$$

$$=\frac{1}{2}\left|-\frac{a^2\lambda_1+b^2}{a^2\lambda_1-b^2}x_0y_0-\frac{a^2\lambda_1+b^2}{a^2\lambda_1-b^2}\frac{a^2\lambda_2+b^2}{a^2\lambda_2-b^2}x_0y_0+\frac{a^2\lambda_2+b^2}{a^2\lambda_2-b^2}x_0y_0\right.$$

$$\left.-\frac{a^2\lambda_1+b^2}{a^2\lambda_1-b^2}x_0y_0+\frac{a^2\lambda_1+b^2}{a^2\lambda_1-b^2}\frac{a^2\lambda_2+b^2}{a^2\lambda_2-b^2}x_0y_0+\frac{a^2\lambda_2+b^2}{a^2\lambda_2-b^2}x_0y_0\right|$$

$$=\left|-\frac{a^2\lambda_1+b^2}{a^2\lambda_1-b^2}x_0y_0+\frac{a^2\lambda_2+b^2}{a^2\lambda_2-b^2}x_0y_0\right|$$

$$\Delta PA_1A_3=\left|-\frac{a^2\lambda_1+b^2}{a^2\lambda_1-b^2}x_0y_0+\frac{a^2\lambda_3+b^2}{a^2\lambda_3-b^2}x_0y_0\right|$$

$$\Delta PA_2A_3=\left|-\frac{a^2\lambda_2+b^2}{a^2\lambda_2-b^2}x_0y_0+\frac{a^2\lambda_3+b^2}{a^2\lambda_3-b^2}x_0y_0\right|$$

$\Rightarrow$ 可知其中兩個三角形面積之和＝另一個三角形面積

(三)當雙曲線：$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$上一定點$P(x_0,y_0)$，與兩動點$Q(x_1,y_1)$， $R(x_2,y_2)$

當$k_{\overline{PQ}}\times k_{\overline{PR}}=\lambda$時，其定點座標為$\left(\frac{\lambda a^2-b^2}{\lambda a^2+b^2}x_0,-\frac{\lambda a^2-b^2}{\lambda a^2+b^2}y_0\right)$

若$\lambda=\lambda_1$時，其定點座標為$A_1\left(\frac{\lambda_1 a^2-b^2}{\lambda_1 a^2+b^2}x_0,-\frac{\lambda_1 a^2-b^2}{\lambda_1 a^2+b^2}y_0\right)$

$\lambda=\lambda_2$時，其定點座標為$A_2\left(\frac{\lambda_2 a^2-b^2}{\lambda_2 a^2+b^2}x_0,-\frac{\lambda_2 a^2-b^2}{\lambda_2 a^2+b^2}y_0\right)$

$\lambda=\lambda_3$時，其定點座標為$A_3\left(\frac{\lambda_3 a^2-b^2}{\lambda_3 a^2+b^2}x_0,-\frac{\lambda_3 a^2-b^2}{\lambda_3 a^2+b^2}y_0\right)$

$$k_{A_1A_2}=\frac{\left(-\frac{\lambda_2 a^2-b^2}{\lambda_2 a^2+b^2}+\frac{\lambda_1 a^2-b^2}{\lambda_1 a^2+b^2}\right)y_0}{\left(\frac{\lambda_2 a^2-b^2}{\lambda_2 a^2+b^2}-\frac{\lambda_1 a^2-b^2}{\lambda_1 a^2+b^2}\right)x_0}=-\frac{y_0}{x_0}$$

$$k_{A_1A_3}=\frac{\left(-\frac{\lambda_3 a^2-b^2}{\lambda_3 a^2+b^2}+\frac{\lambda_1 a^2-b^2}{\lambda_1 a^2+b^2}\right)y_0}{\left(\frac{\lambda_3 a^2-b^2}{\lambda_3 a^2+b^2}-\frac{\lambda_1 a^2-b^2}{\lambda_1 a^2+b^2}\right)x_0}=-\frac{y_0}{x_0}$$

$\because k_{A_1A_2}=k_{A_1A_3}=-\frac{y_0}{x_0}$

$\therefore$ A_1,A_2,A_3共線

可知當λ在變動時，其軌跡構成一線段

於是我們進一步的討論其面積是否也有關係呢？
已知P,A_1,A_2,A_3四點，可用三角形面積公式得到：

$$\Delta PA_1A_2=\frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} x_0 & \frac{\lambda_1 a^2-b^2}{\lambda_1 a^2+b^2}x_0 & \frac{\lambda_2 a^2-b^2}{\lambda_2 a^2+b^2}x_0 & x_0 \\ y_0 & -\frac{\lambda_1 a^2-b^2}{\lambda_1 a^2+b^2}y_0 & -\frac{\lambda_2 a^2-b^2}{\lambda_2 a^2+b^2}y_0 & y_0 \end{vmatrix}\right|$$

$$=\frac{1}{2}\left|-\frac{\lambda_1 a^2-b^2}{\lambda_1 a^2+b^2}x_0y_0-\frac{\lambda_1 a^2-b^2}{\lambda_1 a^2+b^2}\frac{\lambda_2 a^2-b^2}{\lambda_2 a^2+b^2}x_0y_0+\frac{\lambda_2 a^2-b^2}{\lambda_2 a^2+b^2}x_0y_0\right.$$

$$\left.-\frac{\lambda_1 a^2-b^2}{\lambda_1 a^2+b^2}x_0y_0+\frac{\lambda_1 a^2-b^2}{\lambda_1 a^2+b^2}\frac{\lambda_2 a^2-b^2}{\lambda_2 a^2+b^2}x_0y_0+\frac{\lambda_2 a^2-b^2}{\lambda_2 a^2+b^2}x_0y_0\right|$$

$$=\left|-\frac{\lambda_1 a^2-b^2}{\lambda_1 a^2+b^2}x_0y_0+\frac{\lambda_2 a^2-b^2}{\lambda_2 a^2+b^2}x_0y_0\right|$$

$$\Delta PA_1A_3=\left|-\frac{\lambda_1 a^2-b^2}{\lambda_1 a^2+b^2}x_0y_0+\frac{\lambda_3 a^2-b^2}{\lambda_3 a^2+b^2}x_0y_0\right|$$

$$\Delta PA_2A_3=\left|-\frac{\lambda_2 a^2-b^2}{\lambda_2 a^2+b^2}x_0y_0+\frac{\lambda_3 a^2-b^2}{\lambda_3 a^2+b^2}x_0y_0\right|$$

$\Rightarrow$ 可知其中兩個三角形面積之和＝另一個三角形面積

(四)當拋物線： $y^2=4cx$ 上有一定點 $P(x_0,y_0)$，動點 $Q(x_1,y_1),R(x_2,y_2)$

當 $K_{\overline{PQ}}\times K_{\overline{PR}}=\lambda$ 其定點座標為 $(\frac{\lambda_1 x_o-4c}{\lambda_1},-y_o)$

若 $\lambda=\lambda_1$ 時，其定點座標為 $A_1(\frac{\lambda_1 x_o-4c}{\lambda_1},-y_o)$

$\lambda=\lambda_2$ 時，其定點座標為 $A_2(\frac{\lambda_2 x_o-4c}{\lambda_2},-y_o)$

$\lambda=\lambda_3$ 時，其定點座標為 $A_3(\frac{\lambda_3 x_0-4c}{\lambda_3},-y_o)$

$$k_{A_1A_2}=\frac{-y_o+y_o}{\frac{\lambda_2 x_o-4c}{\lambda_2}-\frac{\lambda_1 x_o-4c}{\lambda_1}}=0$$

$$k_{A_1A_3}=\frac{-y_o+y_o}{\frac{\lambda_3 x_o-4c}{\lambda_3}-\frac{\lambda_1 x_o-4c}{\lambda_1}}=0$$

$\because k_{A_1A_2}=k_{A_1A_3}=0$

$\therefore A_1,A_2,A_3$ 共線

可知當 λ 在變動時，其軌跡構成一線段

於是我們進一步的討論其面積是否也有關係呢？

已知 P,A_1,A_2,A_3 四點，可用三角形面積公式得到：

$$\triangle PA_1A_2=\frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} x_0 & \frac{\lambda_1x_0-4c}{\lambda_1} & \frac{\lambda_2x_0-4c}{\lambda_2} & x_0 \\ y_0 & -y_0 & -y_0 & y_0 \end{vmatrix}\right|$$

$$=\frac{1}{2}\left|-x_oy_o-\frac{\lambda_1x_o-4c}{\lambda_1}y_o+\frac{\lambda_2x_o-4c}{\lambda_2}y_o+x_oy_o-\frac{\lambda_1x_o-4c}{\lambda_1}y_o+\frac{\lambda_2x_o-4c}{\lambda_2}y_o\right|$$

$$=\left|-\frac{\lambda_1x_o-4c}{\lambda_1}y_o+\frac{\lambda_2x_o-4c}{\lambda_2}y_o\right|$$

$$=\left|\frac{4c\lambda_2-4c\lambda_1}{\lambda_1\lambda_2}y_o\right|$$

$$=\left|\frac{\lambda_2-\lambda_1}{\lambda_1\lambda_2}4cy_o\right|$$

$$\triangle PA_1A_3=\left|\frac{\lambda_3-\lambda_1}{\lambda_1\lambda_3}4cy_o\right|$$

$$\triangle PA_2A_3=\left|\frac{\lambda_3-\lambda_2}{\lambda_2\lambda_3}4cy_o\right|$$

$\Rightarrow$可知其中兩個三角形面積之和＝另一個三角形面積

(五) 當圓錐曲線：$mx^2+ny^2=1$ ($m>0$， $n>0$或$mn<0$)上，有一定點 $P(x_0,y_0)$，動點$Q(x_1,y_1),R(x_2,y_2)$

當$K_{\overline{PQ}}\times K_{\overline{PR}}=\lambda$其定點座標為$\left(\frac{\lambda n+m}{\lambda n-m}x_o,-\frac{\lambda n+m}{\lambda n-m}y_o\right)$

若$\lambda=\lambda_1$時，其定點座標為$A_1\left(\frac{\lambda_1n+m}{\lambda_1n-m}x_o,-\frac{\lambda_1n+m}{\lambda_1n-m}y_o\right)$

$\lambda=\lambda_2$時，其定點座標為$A_2\left(\frac{\lambda_2n+m}{\lambda_2n-m}x_o,-\frac{\lambda_2n+m}{\lambda_2n-m}y_o\right)$

$\lambda=\lambda_3$時，其定點座標為$A_3\left(\frac{\lambda_3n+m}{\lambda_3n-m}x_o,-\frac{\lambda_3n+m}{\lambda_3n-m}y_o\right)$

$$k_{A_1A_2}=\frac{\left(-\frac{\lambda_1n+m}{\lambda_1n-m}+\frac{\lambda_2n+m}{\lambda_2n-m}\right)y_0}{\left(\frac{\lambda_1n+m}{\lambda_1n-m}-\frac{\lambda_2n+m}{\lambda_2n-m}\right)x_0}=-\frac{y_0}{x_0}$$

$$k_{A_1A_3}=\frac{\left(-\frac{\lambda_1 n+m}{\lambda_1 n-m}+\frac{\lambda_3 n+m}{\lambda_3 n-m}\right)y_0}{\left(\frac{\lambda_1 n+m}{\lambda_1 n-m}-\frac{\lambda_3 n+m}{\lambda_3 n-m}\right)x_0}=-\frac{y_0}{x_0}$$

$\because k_{A_1A_2}=k_{A_1A_3}=-\frac{y_0}{x_0}$

$\therefore A_1, A_2, A_3$ 共線

可知當 λ 在變動時，其軌跡構成一線段

於是我們進一步的討論其面積是否也有關係呢？

已知 P, A_1, A_2, A_3 四點，可用三角形面積公式得到：

$$\Delta PA_1A_2=\frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} x_0 & \frac{\lambda_1 n+m}{\lambda_1 n-m}x_o & \frac{\lambda_2 n+m}{\lambda_2 n-m}x_o & x_0 \\ y_0 & -\frac{\lambda_1 n+m}{\lambda_1 n-m}y_o & -\frac{\lambda_2 n+m}{\lambda_2 n-m}y_o & y_0 \end{vmatrix}\right|$$

$$=\frac{1}{2}\left|-\frac{\lambda_1 n+m}{\lambda_1 n-m}x_0y_0-\frac{\lambda_1 n+m}{\lambda_1 n-m}\frac{\lambda_2 n+m}{\lambda_2 n-m}x_0y_0+\frac{\lambda_2 n+m}{\lambda_2 n-m}x_0y_0\right.$$
$$\left.-\frac{\lambda_1 n+m}{\lambda_1 n-m}x_0y_0+\frac{\lambda_1 n+m}{\lambda_1 n-m}\frac{\lambda_2 n+m}{\lambda_2 n-m}x_0y_0+\frac{\lambda_2 n+m}{\lambda_2 n-m}x_0y_0\right|$$

$$=\left|-\frac{\lambda_1 n+m}{\lambda_1 n-m}x_0y_0+\frac{\lambda_2 n+m}{\lambda_2 n-m}x_0y_0\right|$$

$$\Delta PA_1A_3=\left|-\frac{\lambda_1 n+m}{\lambda_1 n-m}x_0y_0+\frac{\lambda_3 n+m}{\lambda_3 n-m}x_0y_0\right|$$

$$\Delta PA_2A_3=\left|-\frac{\lambda_2 n+m}{\lambda_2 n-m}x_0y_0+\frac{\lambda_3 n+m}{\lambda_3 n-m}x_0y_0\right|$$

$\Rightarrow$ 可知其中兩個三角形面積之和 $=$ 另一個三角形面積

十三、因為當 $\lambda=-1$ 時,其定點 P 之切線與定點 P 和恆定點之直線必垂直,且其斜率相乘也為 -1，所以我們推測當 $\lambda\neq-1$ 時,是否也有這樣的關係?

(一) 圓方程式： $x^2+y^2=r^2$ 上有一定點 $P(x_0, y_0)$ 與兩動點 $Q(x_1, y_1)R(x_2, y_2)$ 當

$k_{\overline{PQ}}\times k_{\overline{PR}}=\lambda$ 時,其定點座標為 $\left(-\frac{1+\lambda}{1-\lambda}x_0, \frac{1+\lambda}{1-\lambda}y_0\right)$

過 $P(x_0, y_0)$ 之切線方程式為： $x_0x+y_0y=r^2$

$\therefore k_P = -\frac{x_0}{y_0}$

$P\left(x_0, y_0\right)$與恆定點$S\left(-\frac{1+\lambda}{1-\lambda}x_0, \frac{1+\lambda}{1-\lambda}y_0\right)$之斜率

$$\Rightarrow k_{\overline{PS}} = \frac{y_0 - \frac{1+\lambda}{1-\lambda}y_0}{x_0 + \frac{1+\lambda}{1-\lambda}x_0} = \frac{\left(1-\lambda-1-\lambda\right)y_0}{\left(1-\lambda+1+\lambda\right)x_0} = \frac{-2\lambda y_0}{2x_0} = -\frac{\lambda y_0}{x_0}$$

$$\Rightarrow k_P \times k_{\overline{PS}} = \left(-\frac{x_0}{y_0}\right)\times\left(-\frac{y_0}{x_0}\lambda\right) = \lambda$$

我們發現其斜率相乘也為λ

其結果與垂直情況相同

既然圓有這樣的特性，推測說其他圓錐曲線是否也是如此呢？

(二)橢圓方程式：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$上有一定點$p\left(x_0, y_0\right)$與兩動點$q\left(x_1, y_1\right)r\left(x_2, y_2\right)$，當

$k_{\overline{pq}} \times k_{\overline{pr}} = \lambda$時，其定點座標為$\left(\frac{a^2\lambda+b^2}{a^2\lambda-b^2}x_0, -\frac{a^2\lambda+b^2}{a^2\lambda-b^2}y_0\right)$

過$p\left(x_0, y_0\right)$之切線方程式為：$\frac{x_o x}{a^2}+\frac{y_o y}{b^2}=1$

$\Rightarrow b^2 x_o x + a^2 y_o y = a^2 b^2$

可知其斜率$k_p = -\frac{b^2 x_o}{a^2 y_o}$

$P(x_o, y_o)$與恆定點 S 之斜率

$$k_{\overline{PS}} = \frac{y_o + \frac{a^2\lambda+b^2}{a^2\lambda-b^2}y_o}{x_o - \frac{a^2\lambda+b^2}{a^2\lambda-b^2}y_o}$$

$$= \left(\frac{a^2\lambda-b^2+a^2\lambda+b^2}{a^2\lambda-b^2-a^2\lambda-b^2}\right)\frac{y_o}{x_o}$$

$$= \frac{2a^2\lambda y_o}{-2b^2 x_o}$$

$$= -\frac{\lambda a^2 y_o}{b^2 x_o}$$

$$\Rightarrow k_P \times k_{\overline{PS}} = \left(-\frac{b^2 x_o}{a^2 y_o}\right)\times\left(-\frac{\lambda a^2 y_o}{b^2 x_o}\right) = \lambda$$

我們發現其斜率相乘也為λ

(三) 抛物線之方程式：$y^2=4cx$ 上有一定點 $P\left(x_0,y_0\right)$ 與兩動點 $Q\left(x_1,y_1\right)R\left(x_2,y_2\right)$ 當

$k_{\overline{PQ}}\times k_{\overline{PR}}=\lambda$ 時,其定點座標為 $\left(\dfrac{\lambda x_0-4c}{\lambda},-y_0\right)$

過 $P\left(x_0,y_0\right)$ 之切線方程式：$y_0y=4c\left(\dfrac{x_0+x}{2}\right)$

$\therefore k_P=\dfrac{2c}{y_0}$

$P\left(x_0,y_0\right)$ 與恆定點 $S\left(\dfrac{\lambda x_0-4c}{\lambda},-y_0\right)$ 之斜率

$$\Rightarrow k_{\overline{PS}}=\frac{y_0-\left(-y_0\right)}{x_0-\dfrac{\lambda x_0-4c}{\lambda}}=\frac{2y_0}{\dfrac{4c}{\lambda}}=\frac{\lambda y_0}{2c}$$

$$\Rightarrow k_P\times k_{\overline{PS}}=\frac{2c}{y_0}\times\frac{\lambda y_0}{2c}=\lambda$$

我們發現其斜率相乘也為 λ

其情形與圓、橢圓相同

(四) 雙曲線方程式：$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 上有一定點 $P\left(x_0,y_0\right)$ 與兩動點 $Q\left(x_1,y_1\right)R\left(x_2,y_2\right)$ 當

$k_{\overline{PQ}}\times k_{\overline{PR}}=\lambda$ 時,其定點座標為 $\left(\dfrac{\lambda a^2-b^2}{\lambda a^2+b^2}x_0,-\dfrac{\lambda a^2-b^2}{\lambda a^2+b^2}y_0\right)$

過 $P\left(x_0,y_0\right)$ 之切線方程式為 $\dfrac{x_0x}{a^2}-\dfrac{y_0y}{b^2}=1$

$b^2x_0x-a^2y_0y=a^2b^2$

$\Rightarrow$ 可知其切線斜率 $k_p=\dfrac{b^2x_0}{a^2y_0}$

$P\left(x_0,y_0\right)$ 與恆定點 $S\left(\dfrac{\lambda a^2-b^2}{\lambda a^2+b^2}x_0,-\dfrac{\lambda a^2-b^2}{\lambda a^2+b^2}y_0\right)$ 之斜率

$$\Rightarrow k_{\overline{PS}}=\frac{y_0-\dfrac{\lambda a^2-b^2}{\lambda a^2+b^2}y_0}{x_0-\dfrac{\lambda a^2-b^2}{\lambda a^2+b^2}x_0}=\frac{\left(\lambda a^2+b^2+\lambda a^2-b^2\right)y_0}{\left[\lambda a^2+b^2-\left(\lambda a^2-b^2\right)\right]x_0}=\frac{-2\lambda a^2y_0}{2b^2x_0}=-\frac{\lambda a^2y_0}{b^2x_0}$$

$$\Rightarrow k_P\times k_{\overline{PS}}=\left(-\frac{b^2x_0}{a^2y_0}\right)\times\left(-\frac{a^2y_0}{b^2x_0}\lambda\right)=\lambda$$

我們發現其斜率相乘也為 λ

其結果與圓、橢圓、抛物線相同

(五) 圓錐曲線(圓、橢圓、雙曲線)之方程式：$mx^2+ny^2=1$ ($m>0$，$n>0$或$mn<0$)上，有一定點 P(x_o,y_o)與 兩動點$Q(x_1,y_1)$、$R(x_2,y_2)$，若直線$\overline{PQ}$、$\overline{PR}$ 的斜率滿足$k_{\overline{pq}}\times k_{\overline{pr}}=\lambda$ (λ為非零常數)， 則可知$\overline{QR}$恆過定點當$\lambda\neq\dfrac{m}{n}$時，該定點的座標為$(\dfrac{\lambda n+m}{\lambda n-m}x_o,\ -\dfrac{\lambda n+m}{\lambda n-m}y_o)$

過$p(x_0,y_0)$之切線方程式為$mx_ox+ny_oy=1$

可知其斜率$k_p=-\dfrac{mx_o}{ny_o}$

$P(x_o,y_o)$與恆定點之斜率

$$k_{\overline{PS}}=\frac{y_o-(-\dfrac{\lambda n+m}{\lambda n-m}y_o)}{x_o-\dfrac{\lambda n+m}{\lambda n-m}x_o}=(\frac{\lambda n-m+\lambda n+m}{\lambda n-m-(\lambda n+m)})\frac{y_o}{x_o}$$

$$=\frac{2\lambda ny_o}{-2mx_o}=-\frac{\lambda ny_o}{mx_o}$$

$$\Rightarrow k_P\times k_{\overline{PS}}=(-\frac{mx_o}{ny_o})\times(-\frac{\lambda ny_o}{mx_o})=\lambda$$

發現其斜率相乘也為λ與圓之情形相同

$\Rightarrow$所有圓錐曲線均有這樣的特性

陸、研究結果

一、圓的方程式：$x^2+y^2=r^2$，在圓上之一定點$P(x_o,y_o)$及兩動點$Q(x_1,y_1)$、$R(x_2,y_2)$，若弦$\overline{PQ}$、$\overline{PR}$互相垂直，則可知$\overline{QR}$恆過定點且定點座標為$(0,0)$

二、圓的方程式：$x^2+y^2=r^2$，再圓上之一定點$P(x_o,y_o)$及兩動點$Q(x_1,y_1)$、$R(x_2,y_2)$，若弦$\overline{PQ}$、$\overline{PR}$之斜率相乘為一定值，則可知$\overline{QR}$恆過定點且定點座標為$\left(-\dfrac{1+\lambda}{1-\lambda}x_o,\dfrac{1+\lambda}{1-\lambda}y_o\right)$

三、圓錐曲線(圓、橢圓、雙曲線)：$mx^2+ny^2=1$ ($m>0$，$n>0$或$mn<0$)上，有一定點 **P** (x_o,y_o)與 兩動點$Q(x_1,y_1)$、$R(x_2,y_2)$，若直線$\overline{PQ}$、$\overline{PR}$ 的斜率滿足$k_{\overline{pq}}\times k_{\overline{pr}}=\lambda$ (λ為非零常數)， 則可知$\overline{QR}$恆過定點當$\lambda\neq\dfrac{m}{n}$時，該定點的座標為$(\dfrac{\lambda n+m}{\lambda n-m}x_o,\ -\dfrac{\lambda n+m}{\lambda n-m}y_o)$

四、 拋物線方程式： $y^2=4cx$，在拋物線上之一定點 $P(x_o,y_o)$ 及兩動點 $Q(x_1,y_1)$、$R(x_2,y_2)$，若弦 $\overline{PQ}$、$\overline{PR}$ 互相垂直, 則可知 $\overline{QR}$ 恆過定點, 且定點座標為 $\left(x_0+4c,-y_0\right)$

五、 拋物線方程式： $y^2=4cx$，在拋物線上之一定點 $P(x_o,y_o)$ 及兩動點 $Q(x_1,y_1)$、$R(x_2,y_2)$，若弦 $\overline{PQ}$、$\overline{PR}$ 之斜率相乘為一定值，則可知 $\overline{QR}$ 恆過定點

且定點座標為 $\left(\dfrac{\lambda x_0-4c}{\lambda},-y_0\right)$

六、 圓錐曲線之通式為 $Ax^2+Bxy+Cy^2+F=0$，在其上有一定點 $P\left(x_0,y_0\right)$ 及兩動點 $Q(x_1,y_1)$，$R(x_2,y_2)$，若直線 $\overline{PQ}$，$\overline{PR}$ 的斜率滿足 $k_{\overline{pq}}\times k_{\overline{pr}}=\lambda$ **(**λ **為非零常數)**則其 $\overline{QR}$ 恆過定點，經過座標旋轉 θ 且 $\cot 2\theta=\dfrac{A-C}{B}$ 後，得到其原座標系座標為

$$\left(\frac{\lambda n+m}{\lambda n-m}x_0\cos\theta+\frac{\lambda n+m}{\lambda n-m}y_0\sin\theta,\frac{\lambda n+m}{\lambda n-m}x_0\sin\theta-\frac{\lambda n+m}{\lambda n-m}y_0\cos\theta\right)$$

七、 圓錐曲線上當 $P\left(x_0,y_0\right)$ 為一定點而 $k_{\overline{pq}}\times k_{\overline{pr}}=\lambda$ 之 λ 在變動時, 其恆過定點之軌跡構成一線段。且任取三個 λ 之值代入，會發現其中兩個三角形面積之和＝另一個三角形面積。

八、 過 $P\left(x_0,y_0\right)$ 之切線斜率與 $P\left(x_0,y_0\right)$ 點和恆定點之連線斜率乘積亦為 λ。當

$\lambda=-1$ 時，過 $P\left(x_0,y_0\right)$ 點之切線垂直於 $P\left(x_0,y_0\right)$ 點與恆定點之連線。

柒、參考資料及其他

高二、高三數學課本

中華民國第四十五屆中小學科學展覽會
評　　語

高中組 數學科

最佳團隊合作獎

040406
圓錐曲線 探討圓中隱藏的點

國立板橋高級中學

評語：
1. 本作品乃探討出名的Fregier 問題。
2. 宜採用動幾何軟體來呈現視覺化的效果。
3. 儘可能多尋找參考資料。