中華民國第四十五屆中小學科學展覽會
作品說明書

高中組 數學科

040405

頭尾變變變

臺北縣私立格致高級中學

作者姓名：

高二 樂智銘 高二 李泓逸 高二 高翊桓

高二 許閔淙

指導老師：

江峰任 彭榮中

中華民國第　四十五　屆中小學科學展覽會

作品說明書

科　　別：數學科

組　　別：高中組

作品名稱：頭尾變變變

關 鍵 詞：循環節、位數

編　　號：

頭尾變變變

壹、摘要

問題一：將某數的末一位數字移到整個數字的最左邊一位，所得之新數爲原數的兩倍，則原數爲何？

問題二：承上題，若將倍數擴展到 3 至９倍，則原數爲何？

問題三：假設原數爲 $k+1$ 位數，若將末２位、３位、４位……k 位數移到最左邊，所得之新數是原數的２至９倍，則原數爲何？

問題四：問題一、二、三之反向思考與討論。

將某數的首一位數字移到整個數的最右邊一位，所得之新數爲原數的兩倍，則原數爲何？

若將倍數擴展到 3 至９倍，則原數爲何？

假設原數爲 $k+1$ 位數，若將首２位、３位、４位……k 位數移到最右邊，所得之新數是原數的２至９倍，則原數爲何？

設計 Excel、Visual　Basic 程式，將數值輸入，即得答案。

貳、研究動機

偶然在一本名爲「數學思考」的數學書籍中，發現一道題目：「我心中有個數，當你將它的個位數移到最前面，所得的結果將是原數的兩倍。我所說的是對的嗎？」乍看之下，感覺和國中的一道題目很像。

國中的數學課本裡，曾有一道題目：「某二位數，其十位數字與個位數字的數字和是 10，若將個位數字與十位數字對調，所得新數比原數大 36，求原數？」這是一個單純的二元一次聯立方程式的應用問題，只要列出聯立方程組之後，便可以解決這個問題。

如果將題目從簡單的二位數對調到 n 位數的首尾互相移位，從單純的新數與原數的大小改成新數與原數的倍數關係，從已知的數字到未知的數字，這些想法開啓了我們的研究興趣，也是我們這次的科展主題。

參、研究目的

一、探討數字與數字間的關聯性與趣味性。

二、結合電腦軟體，使其簡單化和普遍化，讓同學不需要經過繁複的計算，便可以正確地算出結果。

三、對於數學能力較差的同學，只要會操作電腦便可以快速地獲得結果，重拾對數學的興趣。

肆、研究設備及器材

一、 電腦。
二、 紙筆。
三、 應用軟體：Excel、Visual　Basic。

伍、研究過程與討論

一、問題一的運算過程：

步驟一：

符號定義：

t ， 原數中，除個位數以外的其他數字，原數為$k+1$位數，t為k位數。
m ， 個位數字。
a ， 新數為原數的倍數。

假設原數為"tm"， $k+1$位數，例：12345， t=1234， m=5。
將m移至首位成為新數，使新數為原數的a倍，
此時原數為$10\times t+m$ ，新數為$m\times 10^{k}+t$
則新數與原數之關係式為
$a\times(10t+m)=m\times 10^{k}+t$ ，$1\le m\le 9$，$1\le a\le 9$ ， m 、 t 、 a 、 $k\in \mathrm{N}$

步驟二：

令$a=2$
則$2\times(10t+m)=m\times 10^{k}+t$
$\Rightarrow 20t+2m=m\times 10^{k}+t$
$\Rightarrow 19t=m(10^{k}-2)$， $t\in \mathrm{N}$
$\because (19,m)=1$ ， $\therefore \exists\ b\in \mathrm{N}$，$10^{k}-2=19b\Rightarrow 10^{k}=19b+2$
$\Rightarrow 10^{k}\equiv 2\bmod(19)$
《x≡ymod(z)，x為被除數，y為餘數，z為除數，≡為同等於》

步驟三：

同餘檢驗。
$10^{1}\equiv 10\bmod(19)$
$10^{2}\equiv 5\bmod(19)$
$10^{3}\equiv 12\bmod(19)$
$10^{4}\equiv 6\bmod(19)$

$10^5 \equiv 3 \bmod (19)$
$10^6 \equiv 11 \bmod (19)$
$10^7 \equiv 15 \bmod (19)$
$10^8 \equiv 17 \bmod (19)$
$10^9 \equiv 18 \bmod (19)$
$10^{10} \equiv 9 \bmod (19)$
$10^{11} \equiv 14 \bmod (19)$
$10^{12} \equiv 7 \bmod (19)$
$10^{13} \equiv 13 \bmod (19)$
$10^{14} \equiv 16 \bmod (19)$
$10^{15} \equiv 8 \bmod (19)$
$10^{16} \equiv 4 \bmod (19)$
$10^{17} \equiv 2 \bmod (19)$

步驟四：

承上，當$k=17$時，會出現第一個答案，所以我們就用$m(10^{17}-2)/19$得到$t=5263157894736842\times m$。
則原數tm爲t乘以10加上m，$1 \le m \le 9$，$m \in \mathrm{N}$。

研究發現，當$m=1$，原數爲52631578947368421爲17位數，將個位數字1移至首位成爲新數15263157894736842爲17位數，但原數的兩倍，即52631578947368421×2＝105263157894736842，結果爲18位，與已知不合，故$m \ne 1$。

步驟五：

嘗試將m修正爲一個大於1的數，使得原數的首位數字介於1和4之間，如此移位之後的位數才能和原數乘以兩倍的位數相同。

因此將m的範圍修正爲$2 \le m \le 9$，$m \in \mathrm{N}$。
逐一檢驗：

m	原數	新數（原數的兩倍）
2	105263157894736842	210526315789473684
3	157894736842105263	315789473684210526
4	210526315789473684	421052631578947368
5	263157894736842105	526315789473684210
6	315789473684210526	631578947368421052
7	368421052631578947	736842105263157894
8	421052631578947368	842105263157894736
9	473684210526315789	947368421052631578

由以上檢驗結果得知，$2 \le m \le 9$，$m \in \mathrm{N}$，皆符合要求，故18位數爲所求的第一組答案。

步驟六：

試想，是否有其他組答案？
於是我們繼續檢驗$10^{k} \equiv 2 \bmod (19)$，$k > 17$
$10^{17} \equiv 2 \bmod (19)$
$10^{18} \equiv 1 \bmod (19)$
$10^{19} \equiv 10 \bmod (19)$
…………………….
$10^{35} \equiv 2 \bmod (19)$

步驟七：

研究顯示，當$k = 35$所得之餘數與$k = 17$所得之餘數相同，所得數字爲526315789473684210526315789473684 21，符合題目的要求，因此推論每18個循環一次，所以下一次出現餘數爲2時是$k = 53$，以此類推。

同樣的，當m=1的時候，仍然無法符合題目的要求，因此$2 \le m \le 9$，$m \in \mathrm{N}$。
故$k = 18n - 1$，$n \in \mathrm{N}$。

二、問題二的運算過程：

步驟一：

令$a=3$

則$3\times(10t+m)=m\times10^k+t$

$\Rightarrow 30t+3m=m\times10^k+t$

$\Rightarrow 29t=m(10^k-3)$，$t\in\mathrm{N}$

$\because (29,m)=1$，$\therefore\ \exists\ b\in\mathrm{N}$，$10^k-3=29b\Rightarrow10^k=29b+3$

$\Rightarrow 10^k\equiv3\bmod(29)$

《x≡ymod(z)，x爲被除數，y爲餘數，z爲除數，≡爲同等於》

步驟二：

同餘檢驗。

$10^1\equiv10\bmod(29)$

$10^2\equiv13\bmod(29)$

$10^3\equiv14\bmod(29)$

$10^4\equiv24\bmod(29)$

$10^5\equiv8\bmod(29)$

$10^6\equiv22\bmod(29)$

$10^7\equiv17\bmod(29)$

$10^8\equiv25\bmod(29)$

$10^9\equiv18\bmod(29)$

$10^{10}\equiv6\bmod(29)$

$10^{11}\equiv2\bmod(29)$

$10^{12}\equiv20\bmod(29)$

$10^{13}\equiv26\bmod(29)$

$10^{14}\equiv28\bmod(29)$

$10^{15}\equiv19\bmod(29)$

$10^{16}\equiv16\bmod(29)$

$10^{17}\equiv15\bmod(29)$

$10^{18}\equiv5\bmod(29)$

$10^{19}\equiv21\bmod(29)$

$10^{20}\equiv7\bmod(29)$

$10^{21}\equiv12\bmod(29)$

$10^{22}\equiv4\bmod(29)$

$10^{23}\equiv11\bmod(29)$

$10^{24}\equiv23\bmod(29)$

$10^{25}\equiv27\bmod(29)$

$10^{26}\equiv9\bmod(29)$

$10^{27}\equiv3\bmod(29)$

步驟三：

承上，當 $k=27$時，會出現第一個答案，所以我們就用 $m\left(10^{27}-3\right)/29$ 得到 t=344827586206896551724137931 × m 。

則原數 tm 爲 t 乘以10加上 m ，$1 \le m \le 9$ ，$m \in \mathrm{N}$。

研究發現，當 $m=1$，原數爲344827586206896551724137931爲27位數，將個位數字1移至首位成爲新數1344827586206896551724137 93爲27位數，但原數的三倍，即

3448275862068965517241379 31×3＝10344827586206896551784137 93，

結果爲28位，與已知不合，故 $m \neq 1$ 。

研究發現，當 $m=2$ ，原數爲689655172413793103448275862爲27位數，將個位數字1移至首位成爲新數268965517241379310344827586爲27位數，但原數的三倍，即

689655172413793103448275862×3＝2068965517241379310356827586，

結果爲28位，與已知不合，故 $m \neq 2$ 。

當m=1時，原數爲3448275862068965517241379 31

當m=2時，原數爲689655172413793103448275862

以上兩種情形，皆不符合題目之要求。

步驟四：

嘗試將 m 修正爲一個大於2的數，使得原數的首位數字介於1和3之間，如此移位之後的位數才能和原數乘以兩倍的位數相同。

因此將m的範圍修正爲　$3 \le m \le 9$ ，$m \in \mathrm{N}$。

逐一檢驗：

m	原數	新數
3	1034482758620689655178413793	3103448275862068965517841379
4	1379310344827586206904551724	4137931034482758620690455172
5	1724137931034482758630689655	5172413793103448275863068965
6	2068965517241379310356827586	6206896551724137931035682758
7	2413793103448275862082965517	7241379310344827586208296551
8	2758620689655172413809103448	8275862068965517241380910344
9	3103448275862068965535241379	9310344827586206896553524137

k =27時有最小的解，但是這個數字也是可以一直重複的。

$10^{27} \equiv 3\bmod(29)$

$10^{28} \equiv 1\bmod(29)$

………………

$10^{55} \equiv 3\bmod(29)$

因此 $k = 28n - 1$ ， $k \in \mathrm{N}$ 。

步驟五：

a =4時， $4 \times (10t + m) = m \times 10^{k} + t$

$10^{1} \equiv 10\bmod(39)$

$10^{2} \equiv 22\bmod(39)$

$10^{3} \equiv 25\bmod(39)$

$10^{4} \equiv 16\bmod(39)$

$10^{5} \equiv 4\bmod(39)$

$4 \le m \le 9$ ， $m \in \mathrm{N}$ 。

m	原數	新數
4	102564	410256
5	128205	512820
6	153846	615384
7	179487	717948
8	205128	820512
9	230769	923076

故 $k = 6n - 1$ ， $k \in \mathrm{N}$ 。

步驟六：

以此類推

$a = 5$ ， $5 \times (10t + m) = m \times 10^{k} + t$ ， $k = 42n - 1$ ， $n \in \mathrm{N}$，$5 \le m \le 9$ ， $m \in \mathrm{N}$ 。

$a = 6$ ， $6 \times (10t + m) = m \times 10^{k} + t$ ， $k = 58n - 1$ ， $n \in \mathrm{N}$，$6 \le m \le 9$ ， $m \in \mathrm{N}$ 。

$a = 7$ ， $7 \times (10t + m) = m \times 10^{k} + t$ ， $k = 22n - 1$ ， $n \in \mathrm{N}$，$7 \le m \le 9$ ， $m \in \mathrm{N}$ 。

$a = 8$ ， $8 \times (10t + m) = m \times 10^{k} + t$ ， $k = 13n - 1$ ， $n \in \mathrm{N}$，$8 \le m \le 9$ ， $m \in \mathrm{N}$ 。

$a = 9$ ， $9 \times (10t + m) = m \times 10^{k} + t$ ， $k = 44n - 1$ ， $n \in \mathrm{N}$， $m = 9$ 。

三、問題三的運算過程：

步驟一：

符號定義：

t ， 原數中，除末二位數字以外的其他數字，原數爲$k+2$位數，t爲k位數。

m ，末二位數字。

a ，新數爲原數的倍數。

則新數與原數之關係式爲$a(100t+m)=m\times 10^k+t$ ，$1\le a\le 9$，$a\in \mathrm{N}$，$1\le m\le 99$ ，$m\in \mathrm{N}$，$t\in \mathrm{N}$，$k\in \mathrm{N}$。

令$a=2$

則$2\times(100t+m)=m\times 10^k+t$

$\Rightarrow 200t+2m=m\times 10^k+t$

$\Rightarrow 199t=m(10^k-2)$，$t\in \mathrm{N}$

$\because (199,m)=1$ ，$\therefore$ $\exists\, b\in \mathrm{N}$，$10^k-2=199b\Rightarrow 10^k=199b+2$

$\Rightarrow 10^k\equiv 2\mathrm{mod}(199)$

《x≡ymod(z)，x爲被除數，y爲餘數，z爲除數，≡爲同等於》

步驟二：

同餘檢驗

$10^1\equiv 10\mathrm{mod}(199)$

$10^2\equiv 100\mathrm{mod}(199)$

$10^3\equiv 5\mathrm{mod}(199)$

$10^4\equiv 50\mathrm{mod}(199)$

$10^5\equiv 102\mathrm{mod}(199)$

$10^6\equiv 25\mathrm{mod}(199)$

$10^7\equiv 51\mathrm{mod}(199)$

$10^8\equiv 112\mathrm{mod}(199)$

$10^9\equiv 125\mathrm{mod}(199)$

$10^{10}\equiv 56\mathrm{mod}(199)$

$10^{11}\equiv 162\mathrm{mod}(199)$

$10^{12}\equiv 28\mathrm{mod}(199)$

$10^{13}\equiv 81\mathrm{mod}(199)$

$10^{14}\equiv 14\mathrm{mod}(199)$

$10^{15}\equiv 140\mathrm{mod}(199)$

$10^{16}\equiv 7\mathrm{mod}(199)$

$10^{17}\equiv 70\mathrm{mod}(199)$

$10^{18}\equiv 103\mathrm{mod}(199)$

$10^{19}\equiv 35\mathrm{mod}(199)$

$10^{20} \equiv 151 \bmod (199)$
$10^{21} \equiv 117 \bmod (199)$
$10^{22} \equiv 175 \bmod (199)$
$10^{23} \equiv 158 \bmod (199)$
$10^{24} \equiv 187 \bmod (199)$
$10^{25} \equiv 79 \bmod (199)$
$10^{26} \equiv 193 \bmod (199)$
$10^{27} \equiv 139 \bmod (199)$
$10^{28} \equiv 196 \bmod (199)$
$10^{29} \equiv 169 \bmod (199)$
$10^{30} \equiv 98 \bmod (199)$
$10^{31} \equiv 184 \bmod (199)$
$10^{32} \equiv 49 \bmod (199)$
$10^{33} \equiv 92 \bmod (199)$
$10^{34} \equiv 124 \bmod (199)$
$10^{35} \equiv 46 \bmod (199)$
$10^{36} \equiv 62 \bmod (199)$
$10^{37} \equiv 23 \bmod (199)$
$10^{38} \equiv 31 \bmod (199)$
$10^{39} \equiv 11 \bmod (199)$
$10^{40} \equiv 115 \bmod (199)$
$10^{41} \equiv 155 \bmod (199)$
$10^{42} \equiv 157 \bmod (199)$
$10^{43} \equiv 177 \bmod (199)$
$10^{44} \equiv 178 \bmod (199)$
$10^{45} \equiv 188 \bmod (199)$
$10^{46} \equiv 89 \bmod (199)$
$10^{47} \equiv 94 \bmod (199)$
$10^{48} \equiv 114 \bmod (199)$
$10^{49} \equiv 47 \bmod (199)$
$10^{50} \equiv 72 \bmod (199)$
$10^{51} \equiv 123 \bmod (199)$
$10^{52} \equiv 36 \bmod (199)$
$10^{53} \equiv 161 \bmod (199)$
$10^{54} \equiv 18 \bmod (199)$
$10^{55} \equiv 180 \bmod (199)$
$10^{56} \equiv 9 \bmod (199)$
$10^{57} \equiv 90 \bmod (199)$
$10^{58} \equiv 104 \bmod (199)$
$10^{59} \equiv 45 \bmod (199)$

$10^{60} \equiv 52 \bmod (199)$
$10^{61} \equiv 122 \bmod (199)$
$10^{62} \equiv 26 \bmod (199)$
$10^{63} \equiv 61 \bmod (199)$
$10^{64} \equiv 13 \bmod (199)$
$10^{65} \equiv 130 \bmod (199)$
$10^{66} \equiv 106 \bmod (199)$
$10^{67} \equiv 65 \bmod (199)$
$10^{68} \equiv 53 \bmod (199)$
$10^{69} \equiv 132 \bmod (199)$
$10^{70} \equiv 126 \bmod (199)$
$10^{71} \equiv 66 \bmod (199)$
$10^{72} \equiv 63 \bmod (199)$
$10^{73} \equiv 33 \bmod (199)$
$10^{74} \equiv 131 \bmod (199)$
$10^{75} \equiv 116 \bmod (199)$
$10^{76} \equiv 165 \bmod (199)$
$10^{77} \equiv 58 \bmod (199)$
$10^{78} \equiv 182 \bmod (199)$
$10^{79} \equiv 29 \bmod (199)$
$10^{80} \equiv 91 \bmod (199)$
$10^{81} \equiv 114 \bmod (199)$
$10^{82} \equiv 145 \bmod (199)$
$10^{83} \equiv 57 \bmod (199)$
$10^{84} \equiv 172 \bmod (199)$
$10^{85} \equiv 128 \bmod (199)$
$10^{86} \equiv 86 \bmod (199)$
$10^{87} \equiv 64 \bmod (199)$
$10^{88} \equiv 43 \bmod (199)$
$10^{89} \equiv 32 \bmod (199)$
$10^{90} \equiv 121 \bmod (199)$
$10^{91} \equiv 16 \bmod (199)$
$10^{92} \equiv 160 \bmod (199)$
$10^{93} \equiv 8 \bmod (199)$
$10^{94} \equiv 806 \bmod (199)$
$10^{95} \equiv 4 \bmod (199)$
$10^{96} \equiv 40 \bmod (199)$
$10^{97} \equiv 2 \bmod (199)$
$10^{98} \equiv 15 \bmod (199)$

步驟三：

承上，當$k=97$時，會出現第一個答案，所以我們就用$m\left(10^{97}-3\right)/199$得到
t=502512562814070351758793969849246231155778894472361809045226130653266331658291457286432160804402$\times m$。
則原數tm爲t乘以100加上m，$01\leq m\leq 99$，$m\in\mathrm{N}$。

研究發現，當$m=01$，原數爲
502512562814070351758793969849246231155778894472361809045226130653266331658291457286432160804020 1爲97位數，
將個前兩位01移至首位成爲新數
01502512562814070351758793969849246231155778894472361809045226130653266331658291457286432160804 02爲96位數，
但原數的兩倍，即
5025125628140703517587939698492462311557788944723618090452261306532663316582914572864321608040201×2＝
100502512562814070351758793969849246231155778894472361809045226130653266331658291457286432160804 02，結果爲98位，與已知不合，故
$m\neq 01$。

步驟四：

嘗試將m修正爲一個大於1的數，使得原數的首位數字介於1和4之間，如此移位之後的位數才能和原數乘以兩倍的位數相同。

因此將m的範圍修正爲　$20\leq m\leq 99$，$m\in\mathrm{N}$。
發現當m=20的時候有最小的解。
原數爲
100502512562814070351758793969849246231155778894472361809045226130653266331658291457286432160804020
新數爲
201005025125628140703517587939698492462311557788944723618090452261306532663316582914572864321608040

步驟五：

以此類推

$a=2$，$2\times\left(100t+m\right)=m\times 10^{k}+t$，$k=99n-2$，$n\in\mathrm{N}$，$20\leq m\leq 99$，$m\in\mathrm{N}$。
$a=3$，$3\times\left(100t+m\right)=m\times 10^{k}+t$，$k=66n-2$，$n\in\mathrm{N}$，$30\leq m\leq 99$，$m\in\mathrm{N}$。

$a=4$，$4\times(100t+m)=m\times10^k+t$，$k=18n-2$，$n\in\mathrm{N}$，$40\le m\le99$，$m\in\mathrm{N}$。
$a=5$，$5\times(100t+m)=m\times10^k+t$，$k=498n-2$，$n\in\mathrm{N}$，$50\le m\le99$，$m\in\mathrm{N}$。
$a=6$，$6\times(100t+m)=m\times10^k+t$，$k=299n-2$，$n\in\mathrm{N}$，$60\le m\le99$，$m\in\mathrm{N}$。
$a=7$，$7\times(100t+m)=m\times10^k+t$，$k=232n-2$，$n\in\mathrm{N}$，$70\le m\le99$，$m\in\mathrm{N}$。
$a=8$，$8\times(100t+m)=m\times10^k+t$，$k=368n-2$，$n\in\mathrm{N}$，$80\le m\le99$，$m\in\mathrm{N}$。
$a=9$，$9\times(100t+m)=m\times10^k+t$，$k=420n-2$，$n\in\mathrm{N}$，$90\le m\le99$，$m\in\mathrm{N}$。

在運算的過程中，mod的運算變得極為繁複，相對的很難找到所要的結果，因此藉由電腦來幫助計算，同時也將所移之位數由一位、二位，擴張到k位。

五、問題四的運算過程

步驟一：

符號定義：
t ，　首位數字。
m，　原數中，除首位數字以外的其他數字，原數為$k+1$位數，m為k位數。
a ，　新數為原數的倍數。

假設原數為"tm"，$k+1$位數，例：12345，t=1，m=2345。
將t移至末位成為新數，使新數為原數的a倍，
此時原數為$10^k\times t+m$，新數為$m\times10+t$
則新數與原數之關係式為
$a\times(10^k t+m)=m\times10+t$，$1\le t\le9$，$1\le a\le9$，$m$、$t$、$a$、$k\in\mathrm{N}$

步驟二：

令$a=2$
則$2\times(10^k t+m)=m\times10+t$
$\Rightarrow 2\times10^k\times t+2m=m\times10+t$
$\Rightarrow (2\times10^k-1)t=8m$，$m\in\mathrm{N}$
$\Rightarrow 2\times10^k\equiv1\bmod(8)$
因為k無解，繼續算a=3的時候。

步驟三：

令$a=3$
則$3\times(10^k t+m)=m\times10+t$
$\Rightarrow 3\times10^k\times t+3m=m\times10+t$

$\Rightarrow (3\times 10^{k}-1)t = 7m$ ， $m\in \mathrm{N}$

$\because (7,t)=1$ ， $\therefore \exists\ b\in \mathrm{N}$， $3\times 10^{k}-1=7b \Rightarrow 3\times 10^{k}=7b+1$

$\Rightarrow 3\times 10^{k}\equiv 1\bmod(7)$

步驟四：

同餘檢驗：

$3\times 10^{1}\equiv 2\bmod(7)$

$3\times 10^{2}\equiv 6\bmod(7)$

$3\times 10^{3}\equiv 4\bmod(7)$

$3\times 10^{4}\equiv 5\bmod(7)$

$3\times 10^{5}\equiv 1\bmod(7)$

$3\times 10^{6}\equiv 2\bmod(7)$

步驟五：

承上，當 k =5時，會出現第一個答案，所以我們就用 $(3\times 10^{k}-1)t/7$ ，得到 $m=42857\times t$ 。

則原數 tm 為 $t\times 10^{k}+m$ ， $1\le t\le 9$ ， $t\in \mathrm{N}$。

步驟六：

當 $t=1$ 時，原數為：142857

新數為：428571，成立。

當 $t=2$ 時，原數為：285714

新數為：857142，成立。

當 $t=3$ 時， $m=128571$ ，原數為428571，不合。

由此可知 $t\ge 3$ ，新數的位數與原數位數不合，故 t =1，2。

此時 $k=6n-1$ ， $n\in N$ 。

步驟七：

當 $a=4$ 時， $\Rightarrow (4\times 10^{k}-1)t=6m$ ， $m\in \mathrm{N}$，$4\times 10^{k}\equiv 1\bmod(6)$，此時 k 無解。

當 $a=5$ 時， $\Rightarrow (5\times 10^{k}-1)t=5m$ ， $m\in \mathrm{N}$，$5\times 10^{k}\equiv 1\bmod(5)$，此時 k 無解。

當 $a=6$ 時， $\Rightarrow (6\times 10^{k}-1)t=4m$ ， $m\in \mathrm{N}$，$6\times 10^{k}\equiv 1\bmod(4)$，此時 k 無解。

當 $a=7$ 時，$\Rightarrow (7\times 10^{k}-1)t=3m$ ，$m\in \mathrm{N}$，$7\times 10^{k}\equiv 1\bmod(3)$，$k$ =1，$m=23$ ，與已知 m 為 1 位數不合。

當 $a=8$ 時， $\Rightarrow (8\times 10^{k}-1)t=2m$ ， $m\in \mathrm{N}$，$8\times 10^{k}\equiv 1\bmod(2)$，此時 k 無解。

當 $a=9$ 時， $\Rightarrow (9\times 10^{k}-1)t=1m$ ， $m\in \mathrm{N}$，$9\times 10^{k}\equiv 1\bmod(1)$，此時 k 無解。

故移一位只有 $a=3$ 有解。

步驟九：

符號定義：

t ， 首二位數字。

m ， 原數中，除首二位數字以外的其他數字，原數爲 $k+2$ 位數， m 爲 k 位數。

a ， 新數爲原數的倍數。

$a=2$ ， $(2\times10^k-1)t=98m$ ， $m\in N$ ， $2\times10^k\equiv1\bmod(98)$ ，k 無解。
$a=3$ ， $(3\times10^k-1)t=97m$ ， $m\in N$ ， $3\times10^k\equiv1\bmod(97)$ ， $k=96n-2$ 。
$a=4$ ， $(4\times10^k-1)t=96m$ ， $m\in N$ ， $4\times10^k\equiv1\bmod(96)$ ，k 無解。
$a=5$ ， $(5\times10^k-1)t=95m$ ， $m\in N$ ， $5\times10^k\equiv1\bmod(95)$ ，k 無解。
$a=6$ ， $(6\times10^k-1)t=94m$ ， $m\in N$ ， $6\times10^k\equiv1\bmod(94)$ ，k 無解。
$a=7$ ， $(7\times10^k-1)t=93m$ ， $m\in N$ ， $7\times10^k\equiv1\bmod(93)$ ， $k=15n-2$ 。
$a=8$ ， $(8\times10^k-1)t=92m$ ， $m\in N$ ， $8\times10^k\equiv1\bmod(92)$ ，k 無解。
$a=9$ ， $(9\times10^k-1)t=91m$ ， $m\in N$ ， $9\times10^k\equiv1\bmod(91)$ ， $k=6n-2$ 。

因此，我們發現 a 爲偶數或 5，k 都無解，只有 a 在=3、7、9 時才有解。

Excel的應用：

雖然可以得到大量的數值，卻無法從這些數值中歸納出一般的通式。
我們觀察到，有些數值會顯著地呈現忽大忽小的狀態，而這些數值卻幫助我們釐清另一個問題，關於這部分，我們將在「陸、結論」中說明。

Visual　Basic的應用：

根據Excel所得到的數值，我們發現了若 10^x-1 （ x 爲 m 的位數）爲一個合數，就必須先解決因數的問題，才能成功地計算出位數及數值。

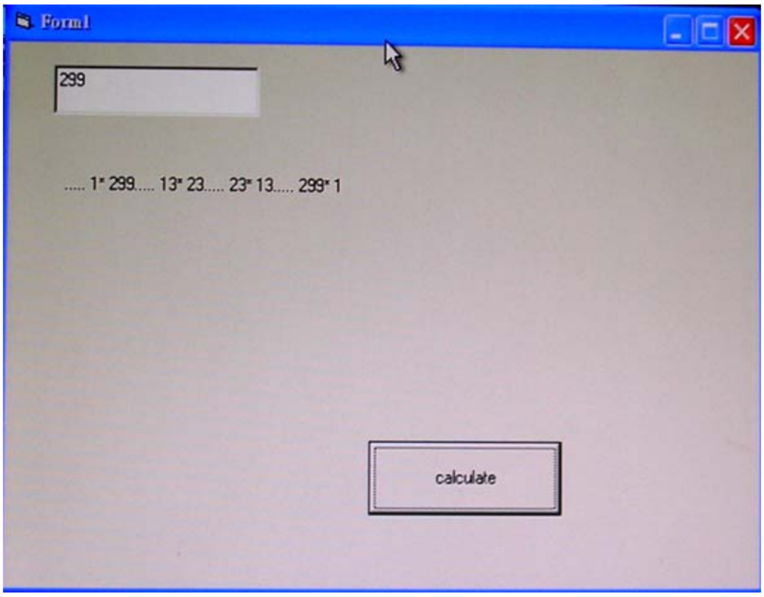
我們用電腦軟體Visual　Basic設計了兩個程式，分別解決因數問題和數值問題。

Visual　Basic計算因數程式

例如：計算299的因數

程式

```
a=val(text1.text)
For i =1 to 1000000
If a mod i=0 then
b=a/i
label1=label1+”….”+str(i)+”*”+str(b)
End if
Next
```

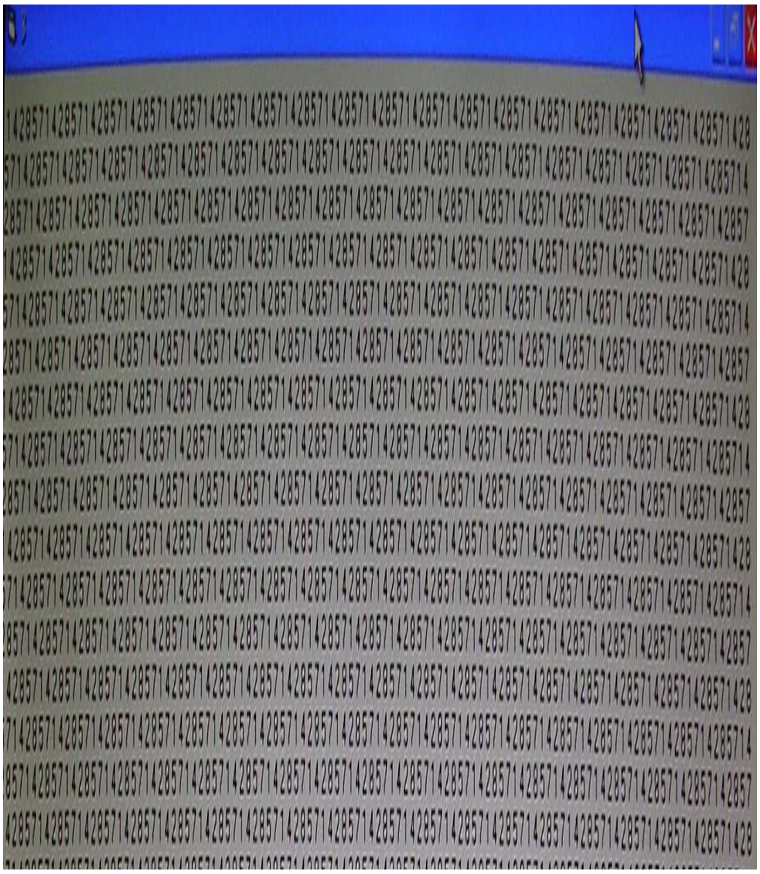


Visual　Basic計算循環節程式

例如計算$\frac{1}{7}$的循環節

程式

```
a = val(text1.text)
b = 1
For i = 1 to 7000
b=b*10
If　a>b then
label1=label1+”0”
Or
c=b\a
label1=label1+str(c)
End if
b = b mod a
Next
```



陸、結論

結論一：位數的減少

我們發現，當 $a=5$，$m=7$ 的時候，算式爲 $49t=7\left(10^k-5\right)$，$\because \left(49,m\right)=7$，
$\therefore \exists\, b\in\mathrm{N}$，$10^k-5=7b \Rightarrow 10^k=7b+5$，此時 $k=6n-1$，$n\in\mathrm{N}$。
研究顯示，
若原式 $\Rightarrow a\times(10t+m)=m\times10^k+t \Rightarrow (a\times10\text{-}1)\ t=m\times(10^k-a)$，
則 $\left(a\times10-1\right)$ 和 m 有共同的因數，使得 t 的位數就會變少。

結論二：循環節的影響

142857和 $\frac{1}{7}$ 的循環節相同，試想其他答案是否也是某個分數的循環節？

在問題一中，所得的數值和 $\frac{1}{19}$ 的循環節相同。

在問題二中，所得的數值和 $\frac{1}{29}$ 的循環節相同。

故每一個所求的數值都和另一個分數的循環節相同。

結論三：問題一、二、三之反向思考與討論。

在問題四，我們試著將之前的三個問題做反向思考與討論，結果問題的條件限制增加，倍數只剩下3倍、7倍、9倍才有解，其他的無解。

結論四：問題四的循環節

在問題四中，我們發現也有循環節的規則，例如移一位三倍的答案和 $\frac{3}{7}$ 的循環節相同。

玖、參考資料及其他

一、Jone Mason with Leone Burton&Kaye Stacey。數學思考。台北市：九章。

二、循環小數與素數。素之異類。http://hk.geocities.com/goodprimes/OFrp.htm

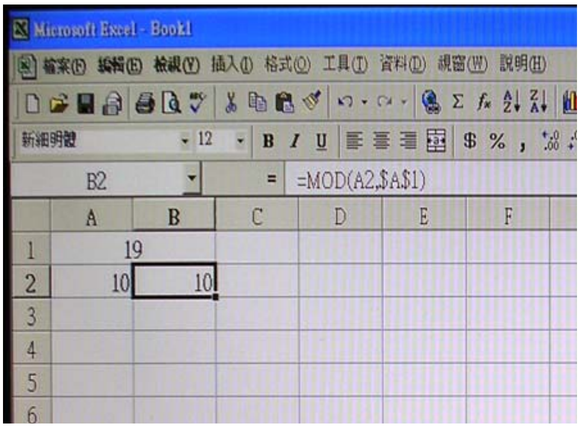
三、昌爸工作坊。142857 循環節。http://www.mathland.idv.tw/fun/142857.htm

附件一：如何使用 excel：

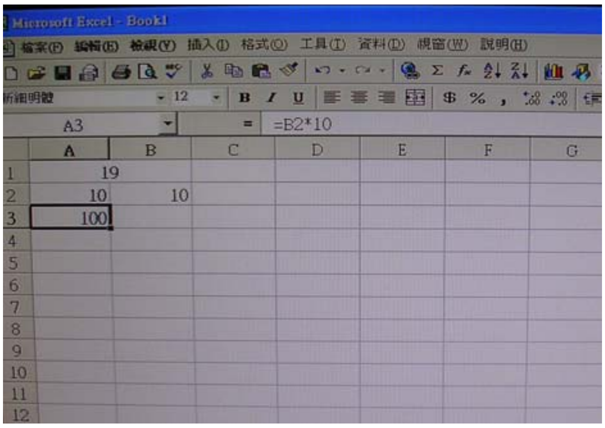
假設我們要算的是 $10^k \equiv 2 \bmod (19)$：

首先我們先把 excel 打開，把 A1 和 B1 合併，在那一格輸入 19，在 A2 輸入 10，在 B2 輸入=MOD(A2,A1)，前面的 A2 表示倍除數，後面的 A1 表示除數，在 B2 顯示出來的數字爲當 k=1 的時候這個算式的餘數。(如圖一)

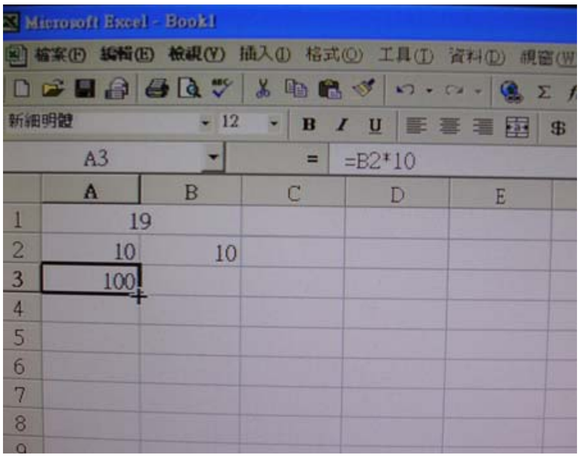
再來算 k=2 的時候，我們必須在 A3 打上=B2*10（如圖二)。接著把滑鼠放在那一格的右下角使游標變成細十字形（如圖三)，按住滑鼠左就往下拉（如圖四)，拉到一定程度後就放開，B 排也是一樣，因爲我們除了 A1 那個數值在計算都是不變的以外，其他都會變，所以我們在 B2 打=MOD(A2,A1)時，就在 A1 前面各加了一個$的符號，這樣子拉下來之後，這一項就不會改變。在來就是用搜尋（如圖五)，找 B 排內答案爲 2 的數字，看那個答案是第幾列，把它減 1 就是 k 值了。



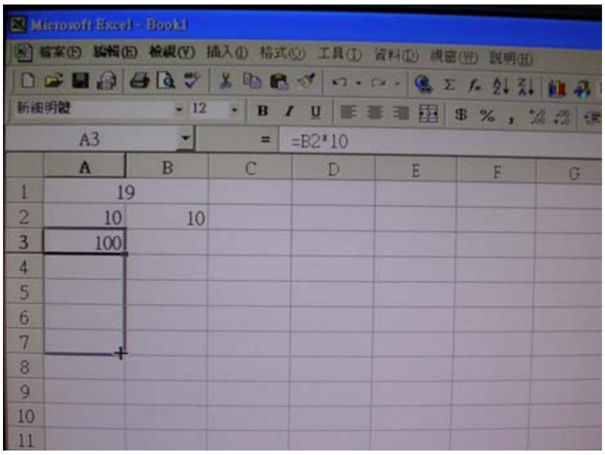
（圖一）



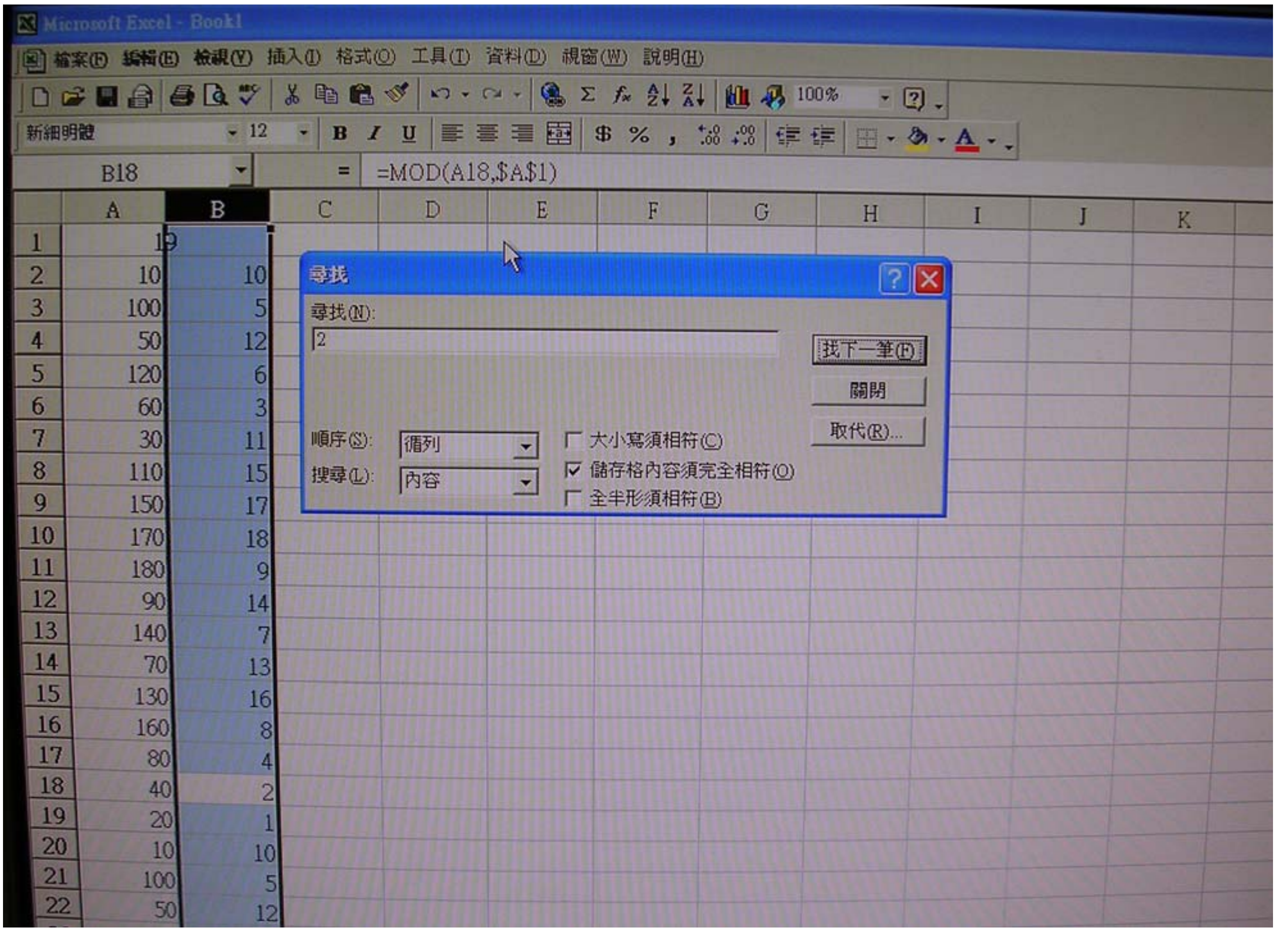
（圖二）



（圖三）



（圖四）


Microsoft Excel - Book1
檔案(F) 編輯(E) 檢視(V) 插入(I) 格式(O) 工具(T) 資料(D) 視窗(W) 說明(H)
100%
新細明體
12
B18
=MOD(A18,A1)
A B C D E F G H I J K
19
10 10
100 5
50 12
120 6
60 3
30 11
110 15
150 17
170 18
180 9
90 14
140 7
70 13
130 16
160 8
80 4
40 2
20 1
10 10
100 5
50 12
尋找
尋找(N):
2
找下一筆(F)
關閉
取代(R)...
順序(S):
循列
搜尋(L):
內容
大小寫須相符(C)
儲存格內容須完全相符(O)
全半形須相符(B)

（圖五）

中華民國第四十五屆中小學科學展覽會

評　　語

高中組 數學科

040405

頭尾變變變

臺北縣私立格致高級中學

評語：

1. 有提問題，有作實驗。
2. 結合電腦軟體 Excel 及 Visual Basic 來做數學實驗。
3. 能採用如 Maple 或 Mathematica 等符號運算軟體協助，可獲事半功倍之效。