中華民國第四十五屆中小學科學展覽會
作品說明書

高中組 數學科

第三名

040403
盡可能擁擠

國立臺南第一高級中學

作者姓名：
高二 王彥欽 高二 郭翰明 高二 林聖涵
高二 程信翰

指導老師：
朱國頌

中華民國第四十五屆全國中小學科學展覽會

作品說明書

科　　別：數學科

組　　別：高中組

作品名稱：盡可能擁擠

關 鍵 詞：簡單圖、2-擁擠標號、極值

編　號：

摘要

給定一個有 n 個頂點的簡單圖 G，將頂點標號為 $1,2,\ldots n$；考慮任意相鄰的兩頂點標號和中最大值的最小值，稱此極值發生時的標號為圖 G 的擁擠標號。在這個研究中，我們得出方格表、$m\times n\times l$ 長方體、環狀圖、圓柱圖及樹圖的擁擠標號和其極值的通式，並討論相關的問題。

一、 前言

(一) 研究動機

我們的研究動機來自於以下的一個簡單問題：

問題一：將 $1,2,\cdots,n$ 排成一列，若要使得相鄰兩數的和的最大值儘可能小，問要怎麼排？而且此時這個極值是多少？

這個問題的平面化出現在高雄大學高中數學資優班的每日一題網頁上：

問題二：將 $1,2,\cdots,100$ 排成 10×10 的方陣，若要使得相鄰兩數的和的最大值儘可能小，問要怎麼排？而且此時這個極值是多少？

這個問題引起我們強烈的興趣。一般的情形下，我們可以探討給定一個有 n 個頂點的簡單圖 G，將頂點標號為 $1,2,\ldots n$；考慮任意相鄰兩頂點標號和中最大值的最小值。極值發生時的標號稱為圖 G 的擁擠標號。

(二) 研究目的

在這個研究中我們得出上述兩個問題及一般 $m\times n$ 的圖、$m\times n\times l$ 的圖、環狀圖及圓柱圖和一些特殊的樹類的擁擠標號，以及這些圖極值的通式。未來希望能證明出我們目前所得的結果，或經由討論佐證這些結果的正確性，並討論這些結果間的關係。

二、 研究過程

(一) 一列數、$n\times n$、$m\times n$、$m\times n\times l$ 的圖

1. 一列數：

為了使相鄰兩數和的最大值能最小，將大數逐一間開：
以 1,2,…10 為例，將數字排為：
10－1－9－2－8－3－7－4－6－5
此時任兩相鄰數和最大值的最小值為 11

一般的情形下，將 1,2,…,n 排成一列，其任兩相鄰數和最大值的最小值為 $n+1$

2. $n\times n$ 的圖 （ 正方形方格表 ）

(1) 將大的數字錯開，每空一格填一格，使大於$\left[\frac{n^2}{2}\right]$的數全不相鄰。

(2) 最大的放在角落，如此可使其他數遇上最大數的次數減少。

以一個 5×5 方格表為例：

25	3	20	8	15
1	22	6	17	11
24	4	19	9	14
2	21	7	16	12
23	5	18	10	13

以上述方式對任意 $n\times n$ 方格表標號，可得
min{max[任兩相鄰之和]} ＝ $n^2+\left[\frac{n}{2}\right]+1$ （n 為方格邊長，[ ]為高斯符號)及擁擠標號情形

討論：

1. $n^2+\left[\frac{n}{2}\right]+1$是 max（任兩相鄰之和）

若將以上的想法以代數表現，填入方格表中則得到以下兩種情形：

（1）每邊方格數為偶數時

n^2	$\frac{n}{2}+1$	…	…	$\frac{n^2}{2}+n$	$\frac{n^2}{2}-\frac{n}{2}+1$
1	$n^2-\frac{n}{2}$	…	…	$\frac{n^2}{2}-n+1$	$\frac{n^2}{2}+\frac{n}{2}$
n^2-1	$\frac{n}{2}+2$	…	…	$\frac{n^2}{2}+n-1$	$\frac{n^2}{2}-\frac{n}{2}+2$
2	$n^2-\frac{n}{2}-1$	…	…	$\frac{n^2}{2}-n+2$	$\frac{n^2}{2}+\frac{n}{2}-1$
…	…	…	…	…	…
…	…	…	…	…	…
$n^2-\frac{n}{2}+1$	n	…	…	$\frac{n^2}{2}+\frac{n}{2}+1$	$\frac{n^2}{2}$
$\frac{n}{2}$	n^2-n+1	…	…	$\frac{n^2}{2}-\frac{n}{2}$	$\frac{n^2}{2}+1$

經由觀察得此方格表之任相鄰兩數和之值可為

$n^2+\frac{n}{2}+1$、n^2+2、n^2+1、n^2 及 $n^2-\frac{n}{2}+1$

由此得知，任相鄰兩數和之極大值為 $n^2+\frac{n}{2}+1$

（2）每邊方格數為奇數時

n^2	$\left[\frac{n}{2}\right]+1$	…	$\left[\frac{n^2}{2}\right]-n+1$	$\left[\frac{n^2}{2}\right]+\left[\frac{n}{2}\right]+1$
1	$n^2-\left[\frac{n}{2}\right]-1$	…	$\left[\frac{n^2}{2}\right]+n$	$\left[\frac{n^2}{2}\right]-\left[\frac{n}{2}\right]+1$
n^2-1	$\left[\frac{n}{2}\right]+2$	…	$\left[\frac{n^2}{2}\right]-n+2$	$\left[\frac{n^2}{2}\right]+\left[\frac{n}{2}\right]-1$
2	$n^2-\frac{n}{2}-2$	…	$\left[\frac{n^2}{2}\right]+n-1$	$\left[\frac{n^2}{2}\right]-\left[\frac{n}{2}\right]+2$
…	…	…	…	…
…	…	…	…	
$n^2-\left[\frac{n}{2}\right]+1$	$n-1$	…	$\left[\frac{n^2}{2}\right]-\left[\frac{n}{2}\right]-1$	$\left[\frac{n^2}{2}\right]+2$
$\left[\frac{n}{2}\right]$	n^2-n+1	…	$\left[\frac{n^2}{2}\right]+\left[\frac{n}{2}\right]+2$	$\left[\frac{n^2}{2}\right]$
$n^2-\left[\frac{n}{2}\right]$	n	…	$\left[\frac{n^2}{2}\right]-\left[\frac{n}{2}\right]$	$\left[\frac{n^2}{2}\right]+1$

其中 $n^2+\left[\frac{n}{2}\right]+1=(n^2-1)+(\left[\frac{n}{2}\right]+2)$

經由觀察得此方格表之任相鄰兩數和之值可為

$n^2+\left[\frac{n}{2}\right]+1$、$n^2+1$、$n^2$及$n^2-\left[\frac{n}{2}\right]$

由此得知，任相鄰兩數之極大值為$n^2+\left[\frac{n}{2}\right]+1$

綜合每邊方格數為奇數與偶數時的情形，知$n^2+\left[\frac{n}{2}\right]+1$為

max（任兩相鄰之和）

---

2. $n^2+\left[\frac{n}{2}\right]+1$是 min{max[任兩相鄰之和]}

首先，我們觀察在一個方格表中

①				
②	◎			
◎	③			
				⑤
			④	

如果填在角上（如①），則有兩個相鄰格；填在邊上（如②）則有三個相鄰格；填在其他中央格上（如③）則有四個相鄰格。如果要避免兩個大數相鄰而採取如同我們前述的方法，則任兩個填入的數之間至多只會有兩個共同的相鄰格（如②、③間有兩個◎記號的格子）。由此可知，每多填入一個數，增加的「相鄰格」至少是兩個。（在特殊情形下，如先後填入④、⑤兩格，只會增加一個「相鄰格」，但這樣的方法一個方格表只有四組，無益於求得最小值）

接著，我們討論在我們採用的方法中，填入的前$\left[\frac{n+1}{2}\right]$個數，即第一排的大數。

n^2				
n^2-1				
…				
$n^2-\left[\frac{n}{2}\right]$				

n^2				
n^2-1				
…				
$n^2-\frac{n}{2}+1$				

左圖是一個奇數邊長的情形，前$\left[\frac{n+1}{2}\right]$個數共有$2\left[\frac{n+1}{2}\right]-1$個「相鄰格」；

右圖是一個偶數邊長的情形，前$\left[\frac{n+1}{2}\right]$個數共有$2\left[\frac{n+1}{2}\right]$個「相鄰格」。

由於這兩種情形都用到了至少一個角，每次增加的「相鄰格」都不超

過兩格，「相鄰格」個數已為最少。

因此，min{max[任兩相鄰之和]}的值：

(1)奇數邊長:
min{max[任兩相鄰之和]}=

$$\left(n^2-\left[\frac{n}{2}\right]\right)+\left(2\left[\frac{n+1}{2}\right]-1\right)=n^2-\left[\frac{n}{2}\right]+2\left[\frac{n}{2}\right]+2-1=n^2+\left[\frac{n}{2}\right]+1$$

(2)偶數邊長：
min{max[任兩相鄰之和]}=

$$\left(n^2-\frac{n}{2}+1\right)+2\left[\frac{n+1}{2}\right]=n^2-\frac{n}{2}+1+2\left[\frac{n}{2}\right]=n^2+\left[\frac{n}{2}\right]+1$$

總和奇數及偶數邊長的情形，我們知道
$n^2+\left[\frac{n}{2}\right]+1$為 min{max[任兩相鄰之和]}

證明的部份，我們對 n 為偶數的情形，給出了以下的証明：

【前提】在一邊長 n×n（n 為正整數）的方格表中，填入 1～n^2 的正整數，每格填一個數，欲求其中任兩相鄰數之和之最小上界（此處相鄰兩格指兩格有共同的邊）

【已知】有一 n×n 的方格表，令每一「大格」表一 2×2 的方格表

【待證】任兩相鄰數和的最小上界為$(2n)^2+\left[\frac{2n}{2}\right]+1=4n^2+n+1$

【證明】若是最小上界＜$4n^2+n+1$

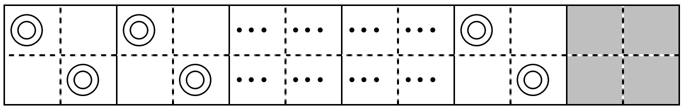
在不使任兩數在同一大格中相鄰之前提下，由
$4n^2, 4n^2-1, 4n^2-2$……依序填入
故知一個大格至多填入兩數，至少有兩個空格，形如：

◎	
	◎

或

	◎
◎	

則每一數至少有一相鄰空格
假設當填入n_0時，存在有一行或一列中每一大格均有數字
此時已填入 $4n^2-(n_0-1)$ 個數，且每行至少有空格A_k+1個(如圖例)



因 n_0 尚未填入，每一行（或列）至少有一大格完全沒有數字，此格尚可填入至少一個數字，由前面的討論知，至少有一空格，已填入的 A_k 個數至少有 A_k 個相鄰空格，故全部至少有 A_k+1 個空格。

其中 A_k 表填入 n_0 之前，第 k 行已填入的數目個數

（k=1~n 的正整數），$\sum_{k=1}^{n} A_k = 4n^2+1-n_0$

∴空格至少有 $\sum_{k=1}^{n}(A_k+1)=(\sum_{k=1}^{n}A_k)+n = 4n^2+1-n_0+n$ 個，由

1, 2, 3……依序填入這些空格中

至少需填到 $4n^2+1-n_0+n$

故任兩相鄰數和的最小上界≧$(4n^2+n+1-n_0)+n_0 =$ $4n^2+n+1$（矛盾）

∴假設錯誤

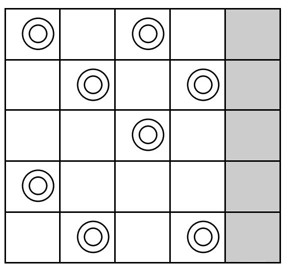
∴任兩相鄰數和的最小上界為 $(2n)^2+\left[\frac{2n}{2}\right]+1=4n^2+n+1$

以下是奇數邊長的證明（事實上，這個證明方法也適用於偶數邊長！）

【前提】在一邊長 n×n（n 為奇數）的方格表中，填入 1～n^2 的正整數，每格填一個數，欲求其中任兩相鄰數之和之最小上界（此處相鄰兩格指兩格有共同的邊）

【待證】任兩相鄰數和的最小上界為 $n^2+\left[\frac{n}{2}\right]+1$

【證明】若是最小上界＜$n^2+\left[\frac{n}{2}\right]+1$



我們將奇數邊長方格表的最右側一行暫時空下（註 1）

則左側還剩下 $2\left[\frac{n}{2}\right]$ 行

從 25 開始填入左側部分方格表，依任兩數不得相鄰的原則一直填到無法繼續填為止，設此時已填入 n_0 個數（$n_0 \le n\left[\dfrac{n}{2}\right]$）（註 2 ）

則填入的最小數為 $n^2 - n_0 + 1$--------------------(1)

如圖即為其中一種可能情形

承續偶數邊長的證明，我們知道每一個填入的數旁至少有一個空格，又右側第二行至少需填入 $\left[\dfrac{n}{2}\right]$ 個數，故最右側一行至少有兩個「相鄰格」

∴空格至少有 $n_0 + \left[\dfrac{n}{2}\right]$ 個--------------------------(2)

若從 1 開始將空格填滿

則(1)+(2)得任兩相鄰和的最小上界≧ $n^2 - n_0 + 1 + n_0 + \left[\dfrac{n}{2}\right] = n^2 + \left[\dfrac{n}{2}\right] + 1$（矛盾）

∴假設錯誤

∴任兩相鄰數和的最小上界為 $n^2 + \left[\dfrac{n}{2}\right] + 1$

註 1:此處空下一行並不表示這一行不能填數字，而是為了討論前面 $2n\left[\dfrac{n}{2}\right]$ 個大數的排列，以下用一個 5×5 方格表為例說明

25			19	
		21		17
	23			
24		20		18
	22			

我們觀察從 25～17 這些大數，雖然 18、17 不在上述證明討論的範圍，但我們發現這些大數相鄰格格數=12＞(25-17+1)+ $\left[\dfrac{5}{2}\right]$=11

亦符合上述證明

註 2:即我們所採取填法的情形

---

3. $m \times n$ 的圖 (矩形方格表)

仍將大數分開，惟有兩種填法：可先填長邊、或是短邊。

以下由一 2×5 之例觀察易知先填短邊可得最小結果：

(1) 先填長邊(min{max[任兩相鄰之和]} = 13)

10	2	9	4	8
1	7	3	6	5

10、9、8 三個最大數太過分散，有 5 個空格內的數必須與此三數相加。

(2)先填短邊(min{max[任兩相鄰之和]} = 12)

10	2	8	4	6
1	9	3	7	5

10、9、8 在不相鄰的原則下儘可能擁擠，如此只有 4 個空格內的數必須與此三數相加。

以上述方式對任意 $m \times n$ 方格表標號，可得

min{max[任兩相鄰之和]} = $mn+\left[\frac{n}{2}\right]+1$ （ $m \geqq n$ ）及擁擠標號情形

討論：

1. $mn+\left[\frac{n}{2}\right]+1$ 是 max（任兩相鄰之和）

同樣地，我們以代數填入方格表中討論：

（1）短邊為偶數時

mn	$\frac{n}{2}+1$	…	…	$\frac{mn}{2}+n$	$\frac{mn}{2}-\frac{n}{2}+1$
1	$mn-\frac{n}{2}$	…	…	$\frac{mn}{2}-n+1$	$\frac{mn}{2}+\frac{n}{2}$
$mn-1$	$\frac{n}{2}+2$	…	…	$\frac{mn}{2}+n-1$	$\frac{mn}{2}-\frac{n}{2}+2$
2	$mn-\frac{n}{2}-1$	…	…	$\frac{mn}{2}-n+2$	$\frac{mn}{2}+\frac{n}{2}-1$
…	…	…	…	…	…
$mn-\frac{n}{2}+1$	n	…	…	$\frac{mn}{2}+\frac{n}{2}+1$	$\frac{mn}{2}$
$\frac{n}{2}$	$mn-n+1$	…	…	$\frac{mn}{2}-\frac{n}{2}$	$\frac{mn}{2}+1$

其中$mn+\left[\frac{n}{2}\right]+1=(mn-1)+(\frac{n}{2}+2)$

經由觀察得此方格表之任相鄰兩數和之值可為

$mn+\frac{n}{2}+1$、$mn+2$、$mn+1$、mn及$mn-\frac{n}{2}+1$

由此得知，任相鄰兩數和之極大值為$mn+\frac{n}{2}+1$

（2）短邊為奇數時（下圖假設長邊為偶數）

mn	$\left[\frac{n}{2}\right]+1$	…	…	$\frac{mn}{2}+n$	$\frac{mn}{2}-\left[\frac{n}{2}\right]$
1	$mn-\left[\frac{n}{2}\right]-1$	…	…	$\frac{mn}{2}-n+1$	$\frac{mn}{2}+\left[\frac{n}{2}\right]$
$mn-1$	$\left[\frac{n}{2}\right]+2$	…	…	$\frac{mn}{2}+n-1$	$\frac{mn}{2}-\left[\frac{n}{2}\right]+1$
2	$mn-\left[\frac{n}{2}\right]-2$	…	…	$\frac{mn}{2}-n+2$	$\frac{mn}{2}+\left[\frac{n}{2}\right]-1$
…	…	…	…	…	…
$\left[\frac{n}{2}\right]$	$mn-n$	…	…	$\frac{mn}{2}-\left[\frac{n}{2}\right]-1$	$mn-\frac{mn}{2}+1$
$mn-\left[\frac{n}{2}\right]$	n	…	…	$\frac{mn}{2}+\left[\frac{n}{2}\right]+1$	$\frac{mn}{2}$

其中$mn+\left[\frac{n}{2}\right]+1=(n^2-1)+(\left[\frac{n}{2}\right]+2)$

經由觀察得此方格表之任相鄰兩數和之值可為

$mn+\left[\frac{n}{2}\right]+1$、$mn+1$、$mn$及$mn-\left[\frac{n}{2}\right]$

由此得知，任相鄰兩數之極大值為$mn+\left[\frac{n}{2}\right]+1$

綜合短邊方格數為奇數與偶數時的情形，知$mn+\left[\frac{n}{2}\right]+1$為

max（任兩相鄰之和）

2. $mn+\left[\frac{n}{2}\right]+1$是 min{max[任兩相鄰之和]}

承續正方形方格表的討論，我們可以發現如果填在短邊上，第一排大數及其「相鄰格」的總數都較小，故可得到較小的極值。

4. $m \times n \times l$ 的圖（長方體）

假設 $l \geqq m \geqq n$

仿 $m \times n$ 作法，先填短邊，故填滿順序為 n 邊→m 邊→l 邊

以一 7×5×3 的長方體為例(min{max[任兩相鄰之和]} = 113)

若填滿順序為邊長 3→5→7 或 5→3→7，

min{max[任兩相鄰之和]} = 113

若填滿順序為邊長 3→7→5 或 7→3→5，

min{max[任兩相鄰之和]} = 116

若填滿順序為邊長 5→7→3 或 7→5→3，

min{max[任兩相鄰之和]} = 123

規律：

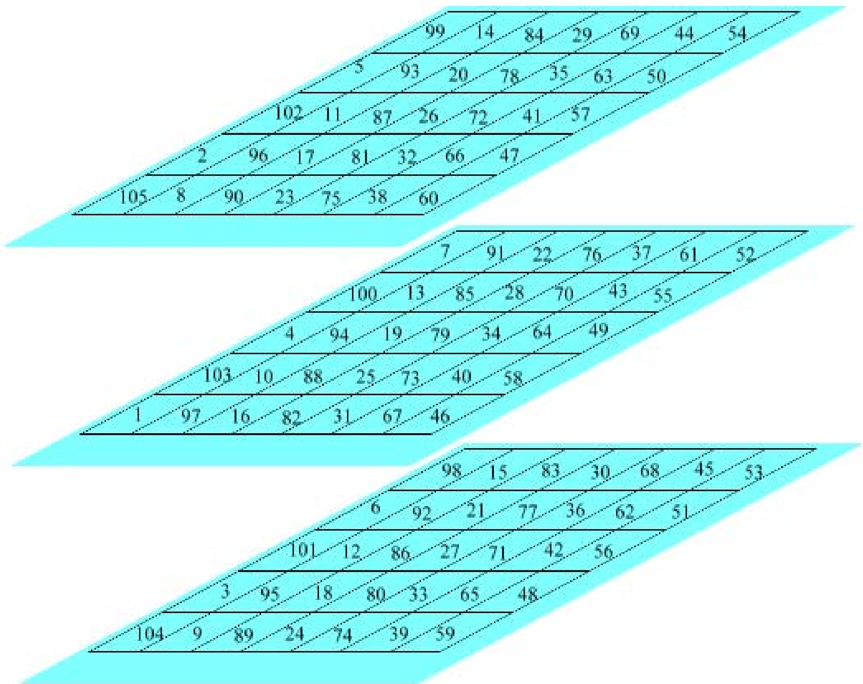
$$113 = 105 + 8 = 105 + \left[\frac{3\times5}{2}\right] + 1$$

$$116 = 105 + 11 = 105 + \left[\frac{3\times7}{2}\right] + 1$$

$$123 = 105 + 18 = 105 + \left[\frac{5\times7}{2}\right] + 1$$

符合我們的預期，得到結果為：

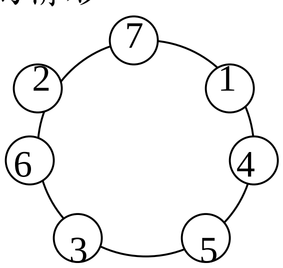
min{max[任兩相鄰之和]} = $lmn + \left[\frac{mn}{2}\right] + 1 \; (l \geqq m \geqq n)$

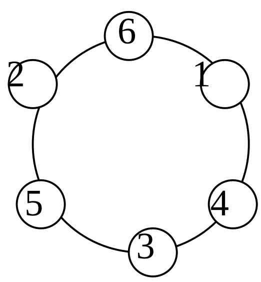


(二) 環狀圖與圓柱圖

1. 環狀圖

類似前面將大數逐一間開的作法，我們嘗試作各種不同的情形，假設圖上有 n 個點，無論偶數或奇數，其標號方式都是先將 $n, n-1, \ldots, \left[\frac{n}{2}\right]$ 以填一空一的方式沿固定方向填入環上，再由最大數之一側沿同方向填入 $1, 2, \ldots, \left[\frac{n}{2}\right]-1$，應使 $1, 2$ 恰在最大數的兩側，以一個七個點和一個六個點的環分別代表奇數和偶數的情形。





於是我們得到 min{max[任兩相鄰之和]} $= n+2$（ n 為環上的點數)及擁擠標號情形。

2. 圓柱圖

在開始討論圓柱圖前，先說明本節圖的意義：

一個圓柱圖如果從側面切開，可以攤開成一個矩形方格表，但是這方格表中的左右兩行在真正的圖中是相鄰的，於是我們用以下的圖表示：

20	5	16	9	1	20
3	18	7	14	11	3
19	6	15	10	2	19
4	17	8	13	12	4

這個方格表代表一個有四層五個點的環組成的圓柱體，最右邊一行其實就是最左邊一行，在空間上他們是相鄰的，所以多畫一行以方便觀察。

進入正題。就像前面幾節，我們嘗試著將大數逐一間開填入圖中，但是有以下幾種可能：

(1) 先填環：我們在從環上開始填，填完第一個環後下一個環還需注意與前一環的數字錯開，如圖：

20		19		18	20
	17		16		
15		14		13	15
	12		11		

16		15		16
	14		13	
12		11		12
	10		9	

左圖是一個奇數點的情形，我們發現如果將每一行均依此方式填滿，最右行的大數勢必將與最左行相鄰，無法得到最小值，但若不填滿，又不夠「擁擠」；右圖偶數點的情形似乎無此困擾，而且可以得到 min{max[任兩相鄰之和]} ＝ $mn+\frac{m}{2}+1$（ m 為偶數，為環上點數，n 為層數)，這已經是最小值了嗎？

(2) 先填「稜」：為了解決奇數點的情形，我們改採此填法。我們將圓柱體中層層相接的直線（即方格表中的直行）特稱為「稜」，填法如左下圖：

20	③	16	⑦	⑧	20
①	18	⑤	14		
19	④	15		⑨	19
②	17	⑥	13		

20	③	19	⑦	⑧	20
①	18	⑤	17	⑩	
16	④	15		⑨	16
②	14	⑥	13		

看起來似乎未解決問題，但將其與先填環並刻意空下最外一行的圖相比較，左圖 20～16 僅有 9 相鄰空格，右圖則有 10 相鄰空格，左圖可以得到較小的極值！

於是我們得到環上奇數個點的結果：將大數先填在「稜」上，空出的那行先填 1、2，接著從 3 開始依序填入剛才間隔開的空格，如圖：

20	5	16	9	1	20
3	18	7	14	11	3
19	6	15	10	2	19
4	17	8	13	12	4

結果便得到 min{max[任兩相鄰之和]} ＝ $mn+n+1$

（ m 為奇數，為環上的點數，n 為層數 ）

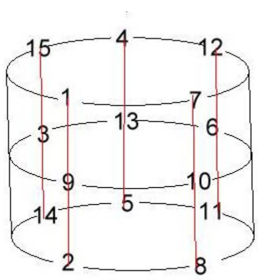
接著我們將先填稜的方法用在偶數點的情形，發現有些時候可以得到更小的極值，由於偶數點的情形兩個極值均可填出，直接取較小的結果，於是得到：

（1）m≦2n：

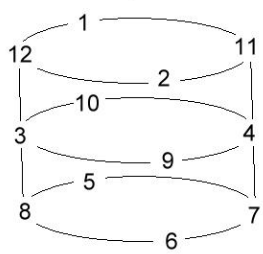
min{max[任兩相鄰之和]} ＝ $mn+\frac{m}{2}+1$

（2）m≧2n：

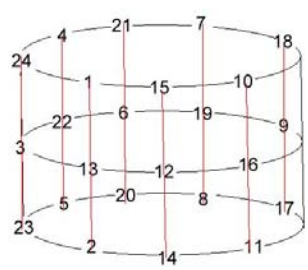
min{max[任兩相鄰之和]} ＝ $mn+n+1$



環上有 5 個點(奇數)，先填「稜」



環上有 4 個點(偶數)、3 層(m≦2n)，先填環



環上有 8 個點(偶數)、3 層(m≧2n)，先填「稜」

(三) 樹圖

在樹圖的部分，我們嘗試了幾種不同的樹，包括二元樹、三元樹、hex tree……等，我們將較大的數目填在「懸掛點」，也就是「度數」（一個點連接邊的數目）為 1 的點上，較小的數目填在度數較大的點上，均能得到 min{max[任兩相鄰之和]} ＝ $n+1$ 的結果。於是我們猜想，所有的樹圖都有這樣的結果。

討論：

這樣的猜測合理嗎？我們的想法是這樣的：

假設有 n 個點

從最原始的一列數開始，我們已經有極值=n+1 的結果

○－○－○－……－○－○

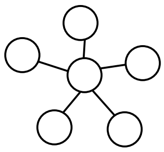
這個時候有兩個懸掛點

接著將其中一個點往前接，變成

○－○－○－……－○
　　　　　　　　╲○

則有三個懸掛點，可填三個大數，應可得較一列數小的極值，但 n+1 不可能再小，故極值仍為 n+1

反覆作此動作，直到



將 1 填在中心，極值仍為 n+1

但是這樣的過程可以表現出所有的樹圖嗎？有沒有例外？這些是尚未解決的問題。

三、 研究結果

(一) 一列數

min{max[任兩相鄰之和]} ＝ $n+1$ — 式(1)

(二) $n \times n$（正方形方格表）

min{max[任兩相鄰之和]} ＝ $n^2+\left[\dfrac{n}{2}\right]+1$ — 式(2)

（n 為方格邊長，[ ]為高斯符號 ）

(三) $m \times n$（矩形方格表）

min{max[任兩相鄰之和]} ＝ $mn+\left[\frac{n}{2}\right]+1$（$m \geqq n$）— 式(3)

(四) $m \times n \times l$（長方體）

min{max[任兩相鄰之和]} ＝ $lmn+\left[\frac{mn}{2}\right]+1$（$l \geqq m \geqq n$）— 式(4)

(五) 環狀圖

min{max[任兩相鄰之和]} ＝ $n+2$（ n 為環上的點數 ）— 式(5)

(六) 圓柱圖

（下列式中 m 為環上的點數，n 為層數）

1. 當 m 為奇數時：

   min{max[任兩相鄰之和]} ＝ $mn+n+1$ — 式(6-1)

2. 當 m 為偶數時：

   （1）m≦2n：

   min{max[任兩相鄰之和]} ＝ $mn+\frac{m}{2}+1$ —式(6-2-1)

   （2）m≧2n：

   min{max[任兩相鄰之和]} ＝ $mn+n+1$ — 式(6-2-2)

(七) 樹圖

我們推測，所有 n 個點的樹圖都有
min{max[任兩相鄰之和]} ＝ $n+1$ 的結果。

四、 討論與結論

在以上的結論中，我們可以藉由一些討論，使得各個結果間的關係更加緊密，並將上述許多繁雜的結果整合成以下幾點：

（一）從一列數到長方體的圖：

1. $n \times n$ 方格表與 $m \times n$ 方格表：顯而易見的，一個 $n \times n$ 方格表就是 $m \times n$ 方格表在 m=n 時的特例，我們假設 m=n，將之代入式(3)

可得到$n^2+\left[\dfrac{n}{2}\right]+1$，即式(2) $n\times n$ 方格表的結果。

2. $m\times n$ 方格表與一列數：若將一列數當成一個只有一列的方格表，我們以 n=1 代入式(3)得到$m+1$，即為式(1) 一列數的通式。
3. $l\times m\times n$ 的圖(長方體)與方格表：若將方格表視為只有一層的長方體，以 n=1 代入式(4)，得到$lm+\left[\dfrac{m}{2}\right]+1(l\geqq m)$，即式(3) $m\times n$ 方格表的通式。

由以上三點，我們可以將原本四個通式整合進 $l\times m\times n$ 的圖的通式。

（二） 環狀圖與圓柱圖：

我們將環狀圖當成一個只有一層的圓柱圖，以 n=1 代入式(6)，因為 m≧3＞2n＝2，則式(6-1)與式(6-2)均會得到$m+2$，即為式(5) 環狀圖的通式。

（三） 圓柱圖與長方體間：

這部份其實並沒有很強的關連，但我們發現，一個環上有四個點的圓柱圖正是一個底面為 2x2 方格表的長方體，我們對此做以下的討論：

1. 當這樣的圓柱圖(長方體)只有一層時：

（1） 對圓柱體討論：

以 m=4、n=1 代入圓柱體的通式，依條件選擇式(6-2-2)，得到極值為 6。

（2） 對長方體討論：

依條件以 l=2、m=2、n=1 代入式(4)，得到極值為 6。

2. 當這樣的圓柱圖（長方體）有超過一層時：

（1） 對圓柱體討論：

因為 m=4、n≧2，依條件選擇式(6-2-1)代入，得到

min{max[任兩相鄰之和]} = $4n+3$

（2） 對長方體討論：

依條件設 m=2、n=2 代入式(4)，得到

min{max[任兩相鄰之和]} = $4l+3$

由 1.2.兩點我們可以驗證圓柱體與長方體的結果是不相抵觸的。

（四）圓柱圖與$m \times n$（矩形方格表）間：

同（三），我們發現一個環上有 2 個點的圓柱圖正是一個 2×n 的方格表。當這樣的圓柱體只有一層時，結果與 2×1 方格表相同是十分明顯的，所以我們僅討論圓柱體超過一層時的情況。因為 $2n \geqq 2$，依條件選擇式(6-2-1)代入，得到

min{max[任兩相鄰之和]} $= 2n+2$

同樣地我們代入 $m \times n$ 方格表的結果式(3)中，得到

min{max[任兩相鄰之和]} $= 2m+2$

由(一)、(二)、(三)、(四)四點，我們可以將原本的六條式子，整合成式(4)與式(6)，而其他的情形均為這兩式中的一種特例。

五、未來展望

目前除了正方形方格表外，大部分研究結果的證明尚不完備，雖然有部分結果可利用代數化的討論驗證其正確性，但仍缺乏嚴謹的數學證明，這些將是我們未來努力的方向。

六、參考資料

http://math.nuk.edu.tw/index.htm國立高雄大學高中數學資優班

中華民國第四十五屆中小學科學展覽會
評　　語

高中組 數學科

第三名

040403
盡可能擁擠

國立臺南第一高級中學

評語：
所討論的問題牽涉到數學當中最優美的 min-max 問題。如果能夠考慮到對偶的 max-min 問題，並能探討兩者的關係，將是更好的研究題材。