中華民國第四十五屆中小學科學展覽會
作品說明書

高中組 數學科

佳作

040401
正整係數線齊次遞迴數列中的完全數列

國立新營高級中學

作者姓名：
高二 林明俊 高二 余佳航 高二 張峻瑜
高二 黃啟賢

指導老師：
鄭國順

正整係數線性齊次遞迴數列中的完全數列

摘　要

本文主要就完全數列中的布朗準則 (Brown's Criterion)、亨斯貝爾格 (Honsberger) 推理來探討正整係數線性齊次遞歸數列, 得出是完全數列的有兩種類型: 型如 $a_{n+k} = a_{n+k-1}+a_{n+k-2}+\cdots+a_{n+1}+2a_n$ 的數列、及型如 $a_{n+k} = a_{n+k-1}+a_{n+k-2}+\cdots+a_{n+1}+a_n$, 的 k 階廣義斐波納契數列; 在適當選取初始條件, 可使此數列爲完全數列。且其初始條件的前 k 項最大值分別爲 $1, 2, 4, 8, \cdots, 2^{k-1}$。

除了等比數列 $\{1, 2, 4, 8, 16, \cdots\}$ 的子序列和可唯一替代所有正整數外; 本文同時建構廣義 k 階斐波納契數列的初始條件, 使其任一正整數可以唯一表示成相異且無 k 個相鄰的廣義 k 階斐波納契數和來替代。

一、研究動機

在高一數學第一册上到「 數列與級數 」這單元, 知道所有的正整數可唯一表示成2進位數, 亦即用 $1, 2, 4, 8, \cdots$ 爲2的冪次方單位的砝碼, 可度量出任意正整數的單位重量。爲什麼是等比數列 $\{1, 2, 4, 8, 16, \cdots\}$ 這數列呢? 是否有其他不同的數列也同樣可度量出所有的正整數?

二、研究目的

嘗試找出正整係數k階線性齊次遞迴關係式的嚴格遞增數列同時也是完全數列有哪些數列? 由這些數列具有的特殊特色再推廣其他線性齊次遞迴關係式也是完全數列? 又任意正整數 N 若用完全數列的不同項的和來表示, 其方法是否唯一?

三、研究設備及器材

參考書籍、文獻期刊。

四、研究過程方法

我們主要探討正整數 $N = \sum_{j=1}^{k} \alpha_i a_i,\ \alpha_i \in \{0,1\}, a_i \in \{a_n\}$, 所以在嚴格遞增數列 $\{a_n\}$ 中, 明顯的首項必爲1, 因此我們令初始條件 $a_1 = 1, a_2 = 2$ (若 $a_2 > 2 \Rightarrow 2 \neq \sum_{j=1}^{k} a_{ij},\ a_{ij} \in \{a_n\}$) 在正整係數線性齊次遞迴數列中, 我們先從較簡單的一階遞迴關係找起, 再逐一深入探討其規律:

(一)、名詞定義說明:

1. 完全數列 (Hoggatt and King)[1]:
   一數列 $\{a_n\}$ 中, 若每一正整數 N 是這數列之子數列的和, 亦即 $N = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i a_i,\ \alpha_i \in \{0,1\}$ 。
   例: Lucas 數列 $\{2,1,3,4,7,11,18,\cdots\}$ 爲一完全數列; 或由1及所有質數組成的的數列 (Bertrand's Postulate) $\{1,2,3,5,7,11,13,17,19,\cdots\}$ 。所有正整數 N 可由這種數列的子數列和表示之, 他們都是完全數列。
2. k 階正整係數線性齊次遞迴數列:
   $a_{n+k} = c_k a_{n+k-1} + c_{k-1} a_{n+k-2} + \cdots + c_1 a_n,\ c_i \in N$
   若 $a_{n+k} = c_k a_{n+k-1} + c_{k-1} a_{n+k-2} + \cdots + c_1 a_n + f(n)$ 則稱爲 k 階線性非齊次遞迴數列。
3. k 階齊次遞迴數列 $a_{n+k} = c_k a_{n+k-1} + c_{k-1} a_{n+k-2} + \cdots + c_1 a_n$, 其所對應的特徵方程式爲: $x^k = c_k x^{k-1} + c_{k-1} x^{k-2} + \cdots + c_2 x + c_1$
4. 正整數的拆分:
   把正整數分成若干個正整數的和, 若正整數 n 有 m 個拆分法, 則稱其拆分數爲 m。
5. 廣義斐波納契數列 (Generalized Fibonacci Sequence): $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ 初始條件前兩項可自定的斐波納契數列。

[1] V.E. Hoggatt and C. King, problem E 1424,The American Mathematical Monthly V.67. 1960.,p593

k 階斐波納契數列 (k-Fibonacci sequence): $a_{n+k}=a_{n+k-1}+a_{n+k-2}+\cdots+a_{n+1}+a_n$ 其中初始條件 $a_0=a_1=a_2=\cdots=a_{k-2},a_{k-1}=1$

廣義 k 階斐波納契數列: $a_{n+k}=a_{n+k-1}+a_{n+k-2}+\cdots+a_{n+1}+a_n$, 初始條件前 k 項可自定之。

(二)、引用文獻:

(1) 布朗準則[3]:(Brown's Criterion)

若數列 $\{a_n\}$ 爲一非遞減的正整數數列是一完全數列若且唯若

$$\begin{cases} a_1=1 \\ a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{k-1}\geq a_k-1, \ \forall k\geq 2 \end{cases}$$

(2) 亨斯貝爾格 (Honsberger) 推理[4]:

若 $\begin{cases} a_1=1 \\ a_{k+1}\leq 2a_k, \ k\geq 1 \end{cases}$ 則數列 $\{a_n\}$ 是一完全數列。

(三)、一階正整係數線性齊次遞迴關係式: $a_{n+1}=c_1a_n, \ a_1=1,a_2=2$

則此數列 $\{a_n\}=\{1,2,2c_1,\cdots\}\Rightarrow a_2=2=c_1\Rightarrow a_3=2c_1=4,\cdots$

可知此數列恰爲公比爲2的等比數列, $\{a_n\}=\{1,2,4,8,16,\cdots\}$, 任意正整數 $N=\sum_{i=1}^{\infty}b_1a_i, \ b_i\in\{0,1\}$ 恆成立。(可用數學歸納法證明)

(四)、二階正整係數線性齊次遞迴關係式: $a_{n+2}=c_2a_{n+1}+c_1a_n, \ a_1=1,a_2=2$

則此數列 $\{a_n\}=\{1,2,c_1+2c_2,2c_2^2+c_1c_2+2c_1,\cdots\}$

由布朗準則[3] 及 Honsberger 推理[4] 可知數列爲完全數列的必要條件爲

$$\begin{cases} a_3 & \leq & a_1+a_2+1=1+2+1=4 \\ a_4 & \leq & a_1+a_2+a_3+1 \\ & \vdots & \\ a_{k+1} & \leq & a_1+a_2+\cdots+a_k+1 \end{cases}$$

亦即 $\begin{cases} c_1+2c_2 & \leq & 4 \\ 2c_2^2+c_1c_2+2c_1 & \leq & 4+c_1+2c_2 \\ & \vdots & \\ a_{k+1} & \leq & a_1+a_2+\cdots+a_k+1 \qquad ;c_1,c_2\in N \end{cases}$

因爲 $c_1,c_2\in N$, 因此我們從第一個不等式的關係去討論:

1. $c_2=1$ 時

則 $\begin{cases} c_1 = 1 & \Rightarrow \quad \{a_n\} = \{1,2,3,5,8,13,\cdots\} \\ c_1 = 2 & \Rightarrow \quad \{a_n\} = \{1,2,4,8,16,\cdots\} \end{cases}$

分別爲 $\begin{cases} \text{斐波納契數列}\{F\} - \{1\} = \{1,2,3,5,8,\cdots\} \\ \text{公比爲2的等比數列}\{1,2,4,8,\cdots\} \end{cases}$

2. $c_2 = 2$ 時

   則 $c_1 = 0$, 此數列爲一階遞迴數列即公比爲2的等比數列。

(五)、三階正整係數線性齊次遞迴關係式: $a_{n+3} = c_3 a_{n+2} + c_2 a_{n+1} + c_1 a_n$, $a_1 = 1, a_2 = 2, c_3 = 1$ (因 $c_3 \neq 2, c_1, c_2 > 0$的正項數列, 其$a_{n+1} > 2a_n, n \geq 3$ 必不爲完全數列)。

則此數列 $\{a_n\} = \{1, 2, a_3, c_3a_3 + 2c_2 + c_1, (c_3^2 + c_2)a_3 + 2c_2c_3 + c_1c_3 + 2c_1, \cdots\}$ 爲完全數列的必要條件爲

$$\begin{cases} a_3 & \leq & (a_1 + a_2) + 1 = 1 + 2 + 1 = 4 \\ a_4 & \leq & (a_1 + a_2 + a_3) + 1 \\ a_5 & \leq & (a_1 + a_2 + a_3 + a_4) + 1 \\ & \vdots & \\ a_{k+1} & \leq & a_1 + a_2 + \cdots + a_k + 1 \end{cases}$$

亦即 $\begin{cases} 3 \leq a_3 \leq 4 \\ (c_3 - 1)a_3 + 2c_2 + c_1 \leq 4 \\ (c_3^2 + c_2 - c_3 - 1)a_3 + 2c_2c_3 + c_1c_3 - 2c_2 + c_1 \leq 4 \\ \vdots \\ a_{k+1} \leq a_1 + a_2 + \cdots + a_k + 1 \qquad ; c_1, c_2 \in N \end{cases}$

由上述條件不等式, 我們得出下列結果:

1. 若 $c_2 = 2, c_1 = 0$, 則此數列爲二階遞迴關係式, 同 (四), 此數列恰爲公比爲2的等比數列, $\{a_n\} = \{1,2,4,8,16,\cdots\}$

2. 若 $c_2 = 1, c_1 = 2$, 則此數列爲 $a_{n+3} = a_{n+2} + a_{n+1} + 2a_n$

   依初始條件 $\begin{cases} a_1 = 1, a_2 = 2, a_3 = 4 \\ a_1 = 1, a_2 = 2, a_3 = 3 \end{cases}$ 可分爲兩數列

   (1) $\{a_n\} = \{1,2,4,8,16,32,\cdots\}$ 即爲公比爲2的等比數列。

   (2) $\{a_n\} = \{1,2,3,7,14,27,55,\cdots\}$, 爲完全數列。

3. 若 $c_2=1, c_1=1$, 則此數列爲 $a_{n+3}=a_{n+2}+a_{n+1}+a_n$

依初始條件 $\begin{cases} a_1=1, a_2=2, a_3=4 \\ a_1=1, a_2=2, a_3=3 \end{cases}$ 可分爲兩種數列

(1) $\{a_n\}=\{1,2,4,7,13,24,\cdots\}$ 爲完全數列。

(2) $\{a_n\}=\{1,2,3,6,11,20,37,\cdots\}$, 爲完全數列。

(六)、k 階正整係數線性齊次遞迴數列:

由以上經驗知嚴格遞增正項數列是完全數列的前 k 項最大取值爲首項1公比爲2的等比數列, 這是可以理解的, 因爲 $a_n=2^{n-1}$ 必須滿足 $a_n \leq (a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{n-1})+1=(1+2+4+8+\cdots+2^{n-2})+1=2^{n-1}$ 故每項取值爲2的冪次方, 是爲最大值。(可用數學歸納法證明: 所有正整數可用不同的2的冪次方數的和來表示且其方法爲唯一)

我們整理歸納出正整係數線性齊次遞迴數列是完全數列只有兩種類型:

1. 型如 $a_{n+k}=a_{n+k-1}+a_{n+k-2}+\cdots+a_{n+1}+2a_n$

前 k 項初始條件可爲:

$\{1,2,4,8,16,32,\cdots,2^{k-1}\}$

$\{1,2,4,\cdots,(2^{k-1}-1)\}$

$\{1,2,4,\cdots,(2^{k-1}-2)\}$

$\{1,2,4,\cdots,(2^{k-2}+1)\}$

$\vdots$

$\{1,2,4,5,6,\cdots,(k-1)\}$

$\{1,2,3,4,5\cdots,k\}$

2. 型如 $a_{n+k}=a_{n+k-1}+a_{n+k-2}+\cdots+a_{n+1}+a_n$ 的 k 階遞迴關係式, 爲廣義斐波納契數列。

前 k 項初始條件可爲:

$1,2^1,2^2,2^3,\cdots,2^{k-2},2^{k-1}$

$1,2^1,2^2,2^3,\cdots,2^{k-2},2^{k-1}-1$

$1,2^1,2^2,2^3,\cdots,2^{k-2},2^{k-1}-2$

$\vdots$

$1,2^1,2^2,2^3,\cdots,2^{k-2},2^{k-2}+2$

$1,2^1,2^2,2^3,\cdots,2^{k-2},2^{k-2}+1$

五、研究結果

(一)、一階正整係數線性齊次遞迴數列即爲公比爲 c_1 的等比數列, 若正項等比數列爲完全數列則此數列是首項爲1公比爲 2的等比數列且唯一。

(二)、二階正整係數線性齊次遞迴數列是完全數列則此數列有兩種, 分別爲

$$\begin{cases} \text{斐波納契數列} & : \quad a_{n+2}=a_{n+1}+a_n, a_1=1, a_2=2 \\ \text{公比爲2的等比數列} & : \quad a_{n+2}=a_{n+1}+2a_n, a_1=1, a_2=2 \end{cases}$$

(三)、三階正整係數線性齊次遞迴數列是完全數列則此數列可爲

$$\begin{cases} a_{n+3} = a_{n+2}+a_{n+1}+2a_n, & \begin{cases} a_1=1, a_2=2, a_3=3 & \text{即}\{1,2,3,7,14,27,\cdots\} \\ a_1=1, a_2=2, a_3=4 & \text{即}\{1,2,4,8,16,32,\cdots\} \end{cases} \\ a_{n+3} = a_{n+2}+a_{n+1}+a_n, & \begin{cases} a_1=1, a_2=2, a_3=3 & \text{即}\{1,2,3,6,11,20,37,\cdots\} \\ a_1=1, a_2=2, a_3=4 & \text{即}\{1,2,4,7,13,24,44,\cdots\} \end{cases} \end{cases}$$

(四)、首項爲1公比爲2的等比數列均可表示成型如 $a_{n+k}=a_{n+k-1}+a_{n+k-2}+\cdots+a_{n+1}+2a_n$, 適當選取前 k 項的初始條件, 是爲完全數列。

利用 $a_{n+1}=2a_n$ 遞迴關係, 一一代入

$$\Rightarrow \begin{cases} a_{n+2}=2a_{n+1}=a_{n+1}+a_{n+1}=a_{n+1}+2a_n \text{ 爲二階正整係數線性齊次遞迴數列} \\ a_{n+3}=a_{n+2}+a_{n+2}=a_{n+2}+2a_{n+1}=a_{n+2}+a_{n+1}+2a_n, \quad \text{爲三階線性齊次遞迴數列} \\ a_{n+4}=2a_{n+3}=a_{n+3}+2a_{n+2}=a_{n+3}+a_{n+2}+a_{n+1}+2a_n, \text{ 爲四階線性齊次遞迴數列} \\ \quad \vdots \\ \text{依此類推可得} \\ a_{n+k}=a_{n+k-1}+a_{n+k-2}+\cdots+a_{n+1}+2a_n \text{ , 爲一 k 階正整係數線性齊次遞迴數列} \end{cases}$$

前 k 項的初始條件取值只要每項小於等於 $1,2,4,8,\cdots,2^{k-1}$ 且 $a_i \leq \sum_{j=1}^{i-1} a_j + 1$ 即是完全數列。

1. 四階正整係數線性齊次遞迴數列: $\{1,2,4,8,16,32,\cdots\}$ 或 $\{1,2,4,7,15,30,60,119,\cdots\}$ 或 $\{1,2,4,6,14,28,\cdots\}$ $\cdots$
2. k 階正整係數線性齊次遞迴數列前 k 項:
   $\{1,2,4,8,16,32,\cdots,2^{k-1}\}$
   $\{1,2,4,\cdots,(2^{k-1}-1)\}$
   $\{1,2,4,\cdots,(2^{k-1}-2)\}$

$\{1,2,4,\cdots,(2^{k-2}+1)\}$
$\vdots$
$\{1,2,4,5,6,\cdots,(k-1)\}$
$\{1,2,3,4,5\cdots,k\}$

(五)、型如 $a_{n+k}=a_{n+k-1}+a_{n+k-2}+\cdots+a_{n+1}+a_n$ 的 k 階遞迴關係式, 爲廣義斐波納契數列; 在適當選取初使條件 (前 k 項的初始條件取值只要每項小於等於 $1,2,4,8,\cdots,2^{k-1}$ 且 $a_i\le\sum_{j=1}^{i-1}a_j+1$) 即是完全數列。

例: 前 k 項爲 $1,2^1,2^2,2^3,\cdots,2^{k-2},2^{k-1}$
$1,2^1,2^2,2^3,\cdots,2^{k-2},2^{k-1}-1$
$1,2^1,2^2,2^3,\cdots,2^{k-2},2^{k-1}-2$
$\vdots$
$1,2^1,2^2,2^3,\cdots,2^{k-2},2^{k-2}+2$
$1,2^1,2^2,2^3,\cdots,2^{k-2},2^{k-2}+1$

六、討論

(一)、若數列 $\{a_n\}$ 的條件改爲非遞減數列, 則整係數線性齊次遞迴關係的數列有哪些數列是完全數列?

1. 例如三階遞迴關係式中, 前三項初始條件爲 $a_1=1,a_2=1,a_3=1$ 則下列數列可爲完全數列
   $a_{n+3}=a_{n+2}+a_{n+1}+a_n$ 即 $\{1,1,1,3,5,9,17,31,\cdots\}$
2. 三階遞迴關係式中, 前三項初始條件爲 $a_1=1,a_2=1,a_3=2$ 則下列數列可爲完全數列
   $a_{n+3}=a_{n+1}+a_n$ 即 $\{1,1,2,2,3,4,5,7,9,12,\cdots\}$
   $a_{n+3}=2a_n$ 即 $\{1,1,2,2,2,4,4,4,8,8,8,16,\cdots\}$
   $a_{n+3}=a_{n+2}+a_n$ 即 $\{1,1,2,3,4,6,9,13,19,28,\cdots\}$
   $a_{n+3}=a_{n+1}+2a_n$ 即 $\{1,1,2,3,4,7,10,15,24,\cdots\}$
   $a_{n+3}=3a_{n+1}+a_n$ 即 $\{1,1,2,4,7,14,25,49,89,\cdots\}$
   $a_{n+3}=a_{n+2}+a_{n+1}+a_n$ 即 $\{1,1,2,4,7,13,24,44,\cdots\}$
   $a_{n+3}=a_{n+2}+2a_n$ 即 $\{1,1,2,4,6,10,18,30,50,\cdots\}$
   $a_{n+3}=a_{n+1}+a_n$ 即 $\{1,1,2,2,3,4,5,7,9,12,\cdots\}$

(二)、若數列 $\{a_n\}$ 的線性齊次遞迴關係係數非全爲正的整數, 則有哪些數列是完全數列?

由 k 階線性齊次遞迴數列 $a_{n+k} = c_k a_{n+k-1} + c_{k-1} a_{n+k-2} + \cdots + c_1 a_n$
所對應的特徵方程 $x^k = c_k x^{k-1} + c_{k-1} x^{k-2} + \cdots + c_2 x + c_1$ 的根, 若包含 $x = 2$ 的根 則在適當選取初使條件 $(a_1 = 1, a_2 = 2, a_3 = 4, \cdots)$, 此數列即爲公比爲2的等比數列。也就是說首項爲1公比爲2的等比數列, 可表示爲任意 k 階正整係數線性齊次遞迴關係式。
除了上述類型尚有無限多種線性齊次遞迴數列是完全數列, 例: $a_{n+3} = 0a_{n+2} + 1a_{n+1} + 3a_n$

(三)、型如 $a_{n+k} = a_{n+k-1} + a_{n+k-2} + \cdots + a_{n+1} + 2a_n$ 的數列及型如 $a_{n+k} = a_{n+k-1} + a_{n+k-2} + \cdots + a_{n+1} + a_n$ 的 k 階遞迴關係式, 爲廣義斐波納契數列; 在適當選取初使條件 (前 k 項的初始條件取值只要每項小於等於 $1, 2, 4, 8, \cdots, 2^{k-1}$ 且 $a_i \leq \sum_{j=1}^{i-1} a_j + 1$) 即是完全數列。
則數列

1. $\{1, 2, 4, 8, 16, 32, \cdots, 2^{k-1}\}$
   $\{1, 2, 4, \cdots, (2^{k-1} - 1)\}$
   $\{1, 2, 4, \cdots, (2^{k-1} - 2)\}$
   $\{1, 2, 4, \cdots, (2^{k-2} + 1)\}$
   $\vdots$
   $\{1, 2, 4, 5, 6, \cdots, (k-1)\}$
   $\{1, 2, 3, 4, 5 \cdots, k\}$
2. $\{1, 2^1, 2^2, 2^3, \cdots, 2^{k-2}, 2^{k-1}, \cdots\}$
   $\{1, 2^1, 2^2, 2^3, \cdots, 2^{k-2}, 2^{k-1} - 1, \cdots\}$
   $\{1, 2^1, 2^2, 2^3, \cdots, 2^{k-2}, 2^{k-1} - 2, \cdots\}$
   $\vdots$
   $\{1, 2^1, 2^2, 2^3, \cdots, 2^{k-2}, 2^{k-2} + 2, \cdots\}$
   $\{1, 2^1, 2^2, 2^3, \cdots, 2^{k-2}, 2^{k-2} + 1, \cdots\}$

他們之間的差異性除了部分項元素不同外, 還有什麼差異處? 又這些 k 階正整係數線性齊次遞迴數列依初始條件不同又是完全數列有幾組解?

(四)、所有自然數由完全數列項的和來表示是否方法唯一?

從討論 (一) 可知, 並非所有的完全數列其正整數的拆分數爲唯一, 若我們對完全數列再加上一些限制條件, 則其拆分數就唯一了。

1. 建構型如 $a_{n+k} = a_{n+k-1} + a_{n+k-2} + \cdots + a_{n+1} + 2a_n$ 的完全數列, 使其正整數的拆分具有唯一性:

   推理 6.1 任意正整數可由首項爲 *1* 公比爲 *2* 的等比數列的子數列和表示之且其正整數的拆分具有唯一性。

   證明 6.1 令數列 $a_1 < a_2 < a_3 < \cdots < a_k < \cdots$ 此數列的前 k 項不同項的部分和共有 $2^k - 1$ 種情形, 若正整數的拆分由此數列的子數列和替代且唯一, 則此 $2^k - 1$ 種情形應都是替代相異的整數, 即應是 *1* 到 $2^k - 1$ 的所有整數, 即數列前 k 項和爲最大整數 $2^k - 1$ 故 $\sum_{i=1}^{k} a_i = 2^k - 1$

$$
\begin{aligned}
&\text{若}k = 1,\ \text{則}\ a_1 = 2^1 - 1 = 1 \\
&\text{若}k = 2,\ \text{則}\ a_1 + a_2 = 2^2 - 1 = 3,\ \ a_2 = 2 \\
&\text{若}k = 3,\ \text{則}\ a_1 + a_2 + a_3 = 2^3 - 1,\ \ a_3 = 4 \\
&\qquad \vdots \\
&\text{若}k = n,\ \text{則}\ S_n = 2^n - 1,\ \ a_n = 2^{n-1}
\end{aligned}
$$

   所以此數列爲 $\{1, 2, 4, 8, 16, \cdots, 2^{n-1}, \cdots\}$ 首項爲 *1* 公比爲 *2* 的等比數列 □

2. 建構廣義 k 階斐波那契數列, 使其正整數可由此數列不同項且無 k 個相鄰項的和替代且具有唯一性:

   所有正整數 n 必符合 $1 \le n \le 2^p - 1,\ p \in N$, 而首項爲1公比爲 2的等比數列 $\{1, 2, 4, 8, 16, 32, \cdots\}$ 由前 $k-1$ 項的部分和表示可唯一替代的最大正整數爲 $S_{k-1} = 2^{k-1} - 1$; 若滿足完全數列, 則其第 k 項 $a_k \le \sum_{i=1}^{k-1} +1 = 2^{k-1} - 1 + 1 = 2^{k-1}$ 又是廣義 k 階斐波那契數列, 具有遞迴關係式 $a_{n+k} = a_{n+k-1} + a_{n+k-2} + \cdots + a_{n+1} + a_n$

   若取 $a_k = 2^{k-1}$ 則 $a_{k+1} = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_k = 2^k - 1$ 任意正整數可唯一用此廣義 k 階斐波那契數中不同項且非 k 個相鄰項的和來表示。(若 $a_k < 2^{k-1}$, 則整數 $n = a_k$ 有本身 a_k 這一項的表示方法, 還可由前 $k-1$ 項 $\{a_1, a_2, \cdots, a_{k-1}\}$ 的部分和表示之, 則 $n = a_k$ 的替代式就不是唯一了。)

推理 6.2 任意正整數可由前 k 項爲 $2^0, 2^1, 2^2, 2^3, \cdots, 2^{k-1}$ 的唯一廣義 k 階斐波納契數列中 相異項且無 k 個相鄰項的和來表示, 且其拆分數爲唯一。

證明 6.2（用數學歸納法證明正整數的唯一替代）
當 $n = 1$ 時, 取 $a_1 = 1$
當 $n = 2$ 時, 取 $a_2 = 2$
假設所有正整數 m , 使得 $1 \leq m < x$ 均存在唯一的整數替代式, 我們只要再證明 $n = x$ 時亦存在唯一的整數替代式。令數列 $\{a_n\}$ 中, a_i 是小於等於 x 的最大項, 即 $a_i \leq x < a_{i+1}$
則 $x > x - a_i = a_{i1} + a_{i2} + a_{i3} + \cdots + a_{ij}$ 且 $a_{i1} > a_{i2} > a_{i3} > \cdots > a_{ij}$ 是廣義 k 階斐波納契數和的唯一表示式 *(*所有 $\leq x$ 的整數均存在唯一的整數替代式*)*
若 $j < k-1$ 則 $x - a_i = a_{i1} + a_{i2} + a_{i3} + \cdots + a_{ij} \Rightarrow x = a_i + a_{i1} + a_{i2} + a_{i3} + \cdots + a_{ij}$ 是其唯一的整數替代式。
若 $j \geq k-1$ 則 $x - a_i = a_{i1} + a_{i2} + a_{i3} + \cdots + a_{ij}$ 是唯一且無 k 個相鄰項的整數替代式 $\Rightarrow x = a_i + a_{i1} + a_{i2} + a_{i3} + \cdots + a_{ij}$ 也是唯一的整數替代式, 且無 k 個相鄰項。因若 $x - a_i = a_{i1} + a_{i2} + a_{i3} + \cdots + a_{ij}$ 恰有 $k-1$ 個相鄰項, 又與 a_i 相鄰, 則依遞迴關係此 k 個相鄰項的和即爲 a_{i+1} , 此時 $x = a_i + a_{i1} + a_{i2} + a_{i3} + \cdots + a_{ij} > a_{i+1} + \cdots$ 與 a_i 是小於等於 x 的最大項, $a_i \leq x < a_{i+1}$ 矛盾 □
（證明數列唯一性）
假設數列 $\boldsymbol{\{a_n\}}$ 是前 k 項爲 $\boldsymbol{2^0, 2^1, 2^2, 2^3, \cdots, 2^{k-1}}$ 的廣義 k 階斐波納契數列, 若存在另一廣義 k 階斐波納契數列 $\boldsymbol{t_1 < t_2 < t_3 < \cdots < t_k}$, 即每一正整數亦可唯一由此數列不同項且非 k 個相鄰項的和來表示, 因此至少存在一整數 p, 在前 k 項內兩數列首先出現相異項, 亦即 $\boldsymbol{a_p \neq t_p}$
若 $\boldsymbol{t_p < a_p}$ 則 $\boldsymbol{t_p}$ 可表示數列 $\boldsymbol{\{t_n\}}$ 的部分和且無 k 個相鄰項的方法超過一種; 即 $\boldsymbol{t_p}$ 自己一種和第二個方法由 $\boldsymbol{t_1, t_2, t_3, \cdots, t_{k-1}}$ 中的部分和產生。
若 $\boldsymbol{t_p > a_p}$ 則 $\boldsymbol{2^p}$ 並不屬於 $\boldsymbol{\{t_n\}}$ 的無 k 個相鄰項的數列和替代, 因爲數列前 p 項共可替代至 $\boldsymbol{2^p - 1}$, 因此 $\boldsymbol{t_p > a_p = 2^p}$ 沒有辦法替代到。
由上可知, 原假設並不成立, 即數列 $\boldsymbol{\{a_n\}}$ 是唯一的。 □

七、結論

(一)、正整係數 k 階線性齊次遞迴關係式的遞增數列是完全數列只有兩種遞迴數列: 前 k 項的初始條件取值只要每項分別小於或等於 $1, 2, 4, 8, \cdots, 2^{k-1}$ 且 $a_i \leq \sum_{j=1}^{i-1} a_j + 1, i > j$ 即是完全數列。

1. 型如 $a_{n+k} = a_{n+k-1} + a_{n+k-2} + \cdots + a_{n+1} + 2a_n$ 的數列。
2. 型如 $a_{n+k} = a_{n+k-1} + a_{n+k-2} + \cdots + a_{n+1} + a_n$, 的 k 階廣義斐波納契數列。

(二)、整係數 k 階線性齊次遞迴關係式的遞增數列是完全數列有無限多種類型:

1. 若 $x = 2$ 是遞迴關係式所對應的特徵方程式的部分根, 且初始條件滿足首項爲1公比爲2的等比數列。即 $\{1, 2, 4, 8, 16, \cdots\}$
2. 若 $x^2 = x + 1$ 是其遞迴關係式所對應的特徵方程式的部分根, 且初始條件滿足斐波納契數列 $\{F\} - \{1\}$ 的前 k-1項。即 $\{1, 2, 3, 5, \cdots\}$
3. 其他: 特徵方程式的部分根與上述兩類型無關的遞迴數列。

(三)、建構出正整係數 k 階線性齊次遞迴數列的正整數拆分具有唯一性與數列的唯一性:

1. 型如 $a_{n+k} = a_{n+k-1} + a_{n+k-2} + \cdots + a_{n+1} + 2a_n$ 的完全數列, 依初始條件的不同有多組數列, 但只有以首項爲1公比爲2的等比數列, 使其正整數的拆分數爲唯一。(推理6.1)
2. 在廣義 k 階斐波納契數列中, 若正整數用數列中不同項的和且非 k 個相鄰項的和來表示: 若前 k 項爲 $2^0, 2^1, 2^2, 2^3, \cdots, 2^{k-1} \Leftrightarrow$ 其正整數的拆分數爲唯一。且此廣義 k 階斐波納契數列亦具有唯一性。(推理6.2)

(四)、k 階正整係數線性齊次遞迴數列, 前 k 項的初始條件取值只要每項小於等於 $1, 2, 4, 8, \cdots, 2^{k-1}$ 且 $a_i \leq \sum_{j=1}^{i-1} a_j + 1)$ 即是完全數列。那麼在兩種類型 (結論一) 中各有幾組初始條件的取法? 尚有待研究探討?

參考資料

[1] 吳振奎, *斐波納契數列* , 台北, 九章出版社,1993.

[2] 陳家聲、徐惠芳, *遞歸數列* , 新竹, 凡異出版社,p.11-38,1994.

[3] Brown, J. L. Jr.,1961, *Notes on Complete Sequences of Integers*, Amer. Math. Monthly 68, 557-560.

[4] Honsberger, R.,1985, *Mathematical Gems III* . Washington, DC: Math. Assoc. Amer., pp. 123-130.

[5] Naomi Utgoff.,2000, *A generalization of Zeckendorf's theorem* ,Brandeis University, Waltham, MA.

中華民國第四十五屆中小學科學展覽會
評　　語

高中組 數學科

佳作

040401
正整係數線齊次遞迴數列中的完全數列

國立新營高級中學

評語：
1.參考資料具有內涵。
2.論文撰寫符合格式。
3.題材古典