

中華民國第四十五屆中小學科學展覽會
作品說明書

高中組 物理科

040122

鋼珠在旋輪線軌道上運動的研究

國立嘉義高級中學

作者姓名：

高二 沈仁翔

指導老師：

李文堂 周黛青

鋼珠在旋輪線軌道上運動的研究

摘要

鋼珠在旋輪線軌道上純滾動時，有等時性，其簡諧運動的週期和振幅無關。用電腦繪圖，畫出旋輪線，再用電腦割字，在壓克力上割出旋輪線，組合成旋輪線軌道。

1. 測量鋼珠在旋輪線軌道上作簡諧運動的週期，證明鋼珠純滾動時，週期和振幅無關。
2. 鋼珠由軌道不同高度(h)釋放，測量運動至底端的時間(t)，質心速度(v)，作 $t-h$ 圖，以及 $v-\sqrt{h}$ 圖，可找到鋼珠發生滑動兼滾動的臨界高度，求得靜摩擦係數。
3. 兩相同的鋼珠，一靜置於完整旋輪線軌道的底部，另一個由高度 h_1 處釋放，被撞鋼珠滾動上升到最大高度 h_2' ，由 h_2' 和 h_1 的關係式可求得恢復係數。再將一鋼珠靜置於半旋輪線軌道的底部，另一個由高度 h_1 處釋放，原靜止鋼珠被撞後作水平拋體運動，可量出 v_2' ，作 $v_2'-v_1$ 圖亦可求出恢復係數。

一、研究動機：

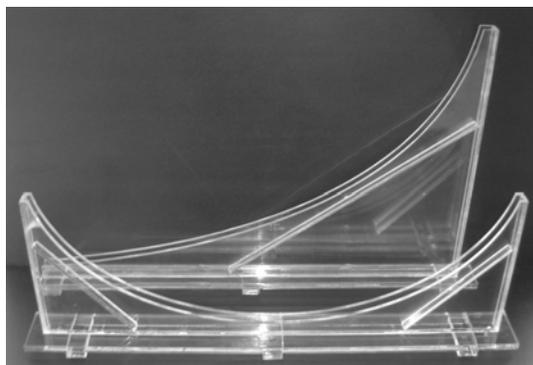
今年一月作者以「利用滾動實驗測量摩擦係數」參加 2005 年台灣國際科學展覽，評審教授指導作者針對旋輪線軌道做進一步研究。本實驗應用高中物質科學物理篇：第四章簡諧運動單元、第八章非彈性碰撞單元及第九章純滾動單元；做完實驗後，對上述三章有更深刻的瞭解。

二、研究目的：

1. 推導鋼珠在旋輪線軌道上作簡諧運動的公式，並實驗證明。
2. 測量鋼珠在旋輪線軌道由純滾動變成滑動兼滾動的高度，求出鋼珠和軌道間的摩擦係數。
3. 利用兩鋼珠在旋輪線軌道上的碰撞，求出恢復係數。

三、實驗器材：

1. 用 Sigma 繪圖軟體畫出旋輪線，用“電腦割字” 割成旋輪線軌道，如圖一，
 - (1)壓克力製：旋輪線軌道(半徑 9.4cm，軌距 1.04cm)
 - (2)壓克力製：半旋輪線軌道(半徑 17.6cm，軌距 1.04cm)。
2. 光電計時器。
3. 鋼珠(半徑 0.75cm 及 1.11cm 各一個，半徑 1.02 cm 二個)。
4. 碼錶、尺。



圖一：旋輪線曲面

四、原理：

1. 半徑 r 的輪子在水平面上純滾動時輪緣上一點 $p(x,y)$ 的軌跡為旋輪線。

$$x = r\phi - r\sin\phi \quad \cdots (1)$$

$$y = r - r\cos\phi \quad \cdots (2)$$

2. 質量為 m ，半徑為 R ，轉動慣量 $I = \frac{2}{5}mR^2$ 的鋼珠，在旋輪線上純滾動時受淨力 F ，距底端 s 處：

$$F = ma = m\frac{5}{7}g\sin\theta \quad \cdots (3)$$

$$F = -ks \Rightarrow \frac{5}{7}mg\sin\theta = -ks \quad \cdots (4)$$

將(1)(2)式微分 $dx = rd\phi(1 - \cos\phi)$ ， $dy = rd\phi\sin\phi$

$$ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = 2r\sin\frac{\phi}{2}d\phi$$

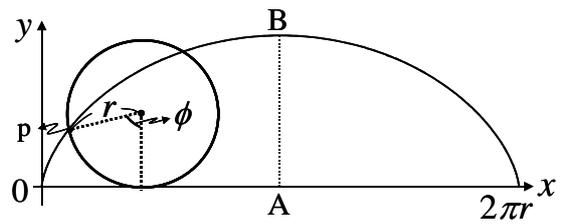
由圖三可知 $\phi = \pi - 2\theta \therefore ds = -4r\cos\theta d\theta$

$$\text{將(4)微分 } \frac{5}{7}mg\cos\theta d\theta = -kds \Rightarrow \frac{5}{7}mg = 4kr \quad \cdots (5)$$

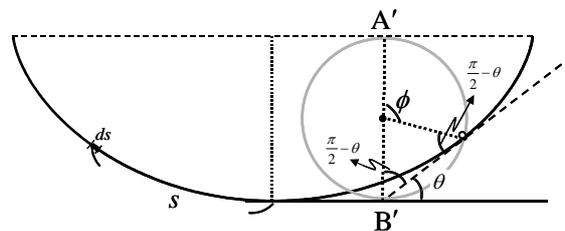
$$\text{簡諧運動的週期 } T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 4\pi\sqrt{\frac{7r}{5g}} \quad \cdots (6)$$

換言之，鋼珠在旋輪線上純滾動時，其週期和振幅無關。

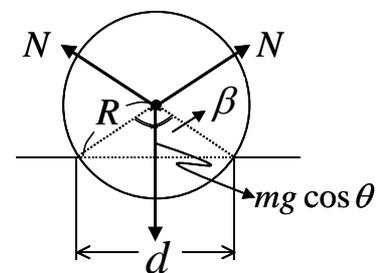
3. 有槽斜板的槽距 d ，斜角 θ ，鋼珠純滾動時，質心速度 $v = r\omega$ ， r 為鋼珠有效的滾動半徑， ω 為角速度，如圖四所示，



圖二：旋輪線



圖三：鋼珠在旋輪線上



圖四：鋼珠在有槽斜面上受力

$$r = R \cos \beta = R \sqrt{\frac{R^2 - d^2 / 4}{R^2}} \quad \cdots (7)$$

4. 鋼珠在有槽斜板上純滾動時，靜摩擦力 f ，力矩 $\tau = fr = I\alpha$ $\cdots (8)$

$$mg \sin \theta - f = ma \quad \cdots (9)$$

$$\text{可得 } f = \frac{2mg \sin \theta}{2 + 5 \cos^2 \beta} \quad \cdots (10)$$

5. 純滾動不生熱，所以力學能守恆 $mgh = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2$ $\cdots (11)$

$$\text{可得 } v = \sqrt{\frac{10gh \cos^2 \beta}{2 + 5 \cos^2 \beta}} \quad \cdots (12)$$

6. 最大靜摩擦力 $f_s = \mu_s N'$, $N' = 2N$ $\cdots (13)$ 由(13)及圖四

$$\text{可得靜摩擦係數 } \mu_s = \frac{2 \tan \theta \cos \beta}{2 + 5 \cos^2 \beta} \quad \cdots (14)$$

7. 鋼珠在槽距 d 的旋輪線軌道作簡諧運動時，由(6)及圖四可得週期為

$$T = 4\pi \sqrt{\frac{r(2 + 5 \cos^2 \beta)}{5g \cos^2 \beta}} \quad \cdots (15)$$

8. 由旋輪線軌道高度 h 處純滾動置底端的時間

$$t = \frac{T}{4} = \pi \sqrt{\frac{r(2 + 5 \cos^2 \beta)}{5g \cos^2 \beta}} \quad \cdots (16)$$

$$\text{質心速度 } v = \sqrt{\frac{10gh \cos^2 \beta}{2 + 5 \cos^2 \beta}} \quad \cdots (12)$$

9. 兩質量相等的鋼珠，一個 m_2 靜止在旋輪線曲面底部，另一個 m_1 由高 h_1 純滾動而下，撞 m_2 後，高度為 h'_1 ，

$$m_1 \text{ 撞 } m_2 \text{ 前 } v_1 = \sqrt{\frac{10g \cos^2 \beta}{2 + 5 \cos^2 \beta}} h_1 \quad \cdots (12)$$

m_2 被撞後有質心速度 v'_2 ，受靜摩擦力作用，純滾動上升 h'_2 ， $\therefore v'_2 = \sqrt{2gh'_2}$

m_1 撞後還有質心速度 v'_1 及角速度 $\omega'_1 = \frac{v'_1}{r}$

$$\text{恢復係數 } e = -\frac{v_2' - v_1'}{v_2 - v_1} \quad \cdots (17)$$

$$\because v_2 = 0 \quad \therefore v_2' - v_1' = ev_1 \quad \cdots (18)$$

$$\text{另由動量守恆 } m_1v_1 = m_1v_1' + m_2v_2' \Rightarrow v_1 = v_1' + v_2' \quad \cdots (19)$$

$$(18) + (19) \text{ 得 } v_2' = \frac{e+1}{2}v_1 \quad \cdots (20)$$

$$\Rightarrow h_2' = \left(\frac{e+1}{2}\right)^2 \cdot \frac{5\cos^2\beta}{2+5\cos^2\beta} h_1 \quad \cdots (21)$$

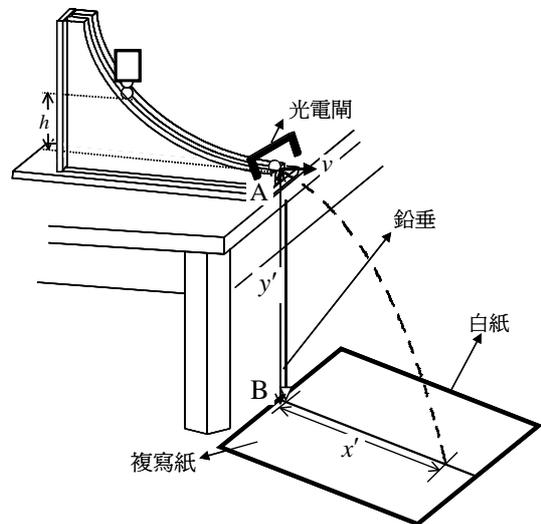
五、實驗方法：

實驗(一) 測量鋼珠在旋輪線軌道上簡諧運動的週期

將半徑 9.4cm 的旋輪線曲面置於水平桌面上，調整曲面底部至真正水平後，鋼珠在軌道上來回滾動，可超過 75 次以上，用碼錶量任意 10 次純滾動的時間，求出週期的平均值。

實驗(二) 測量鋼珠和軌道的靜摩擦係數

1. 半徑 17.6cm 的旋輪線軌道固定在桌緣；軌道出口處上方，放置光電閘，出口處正下方繫一鉛垂，在鉛垂線下方的地面放一張白紙上置複寫紙。
2. 鋼珠被光電計時器的電磁鐵吸住，啟動計時器；當鋼珠抵曲面最底端，通過光電閘時，計時器停止計時，顯現時間 t 。



圖五：測量鋼珠和軌道的靜摩擦係數

3. 鋼珠由曲面底端水平拋出，落入複寫紙上方，在白紙上留下痕跡，量出水平位移 x' ，鉛直位移 y' ，由 $x' = vt$ ， $y' = \frac{1}{2}gt^2 \Rightarrow v = \sqrt{\frac{g}{2y'}}x'$ $\cdots (22)$

4. 利用上述方法，可同時測得鋼珠在軌道上運動的時間 t 及在軌道最低點的質心速度 v 。

5. 改變釋放點的高度 h ，分別量得 t 和 x' ，作 $t-h$ 圖及 $v-\sqrt{h}$ 圖。

實驗(三) 測量鋼珠的恢復係數

(三~1)方法一：

1. 兩質量相等的鋼珠，一由高度 h_1 釋放，另一個靜置於曲面底端，被撞後上滾高度為 h'_2 ，量 h_1 、 h'_2 。

2. 改變 h_1 ，分別量得 h'_2 ，利用(21)式求恢復係數 e 。

(三~2)方法二：

3. 爲了作對照，再進行下述實驗：

(1)鋼珠 $m_1=m_2$ ，將 m_2 靜置於半旋輪線軌道的底端， m_1 由高度 h_1 釋放，由 h_1 和 $\cos\beta$ 算出 v_1 。 m_2 被撞後，和圖五所示一樣，以 v'_2 水平拋出，由(22)式可求得 v'_2 。

(2)由(20) $v'_2 = \frac{e+1}{2}v_1$ ，作 v'_2-v_1 圖，由斜率可求得 e 和方法一所得結果作比較。

六、實驗結果及討論：

實驗(一)：

鋼珠半徑 1.11cm，軌道軌距 1.04cm，軌道半徑 $r=9.4\text{cm}$ ， $\cos\beta=0.8835$ ，

由(15) $T = 4\pi\sqrt{\frac{r(2+5\cos^2\beta)}{5g\cos^2\beta}} = 1.514$ 秒，由測量來回 10 次滾動的時間，得平均

一次時間爲 1.510 秒，誤差僅 -0.26%。

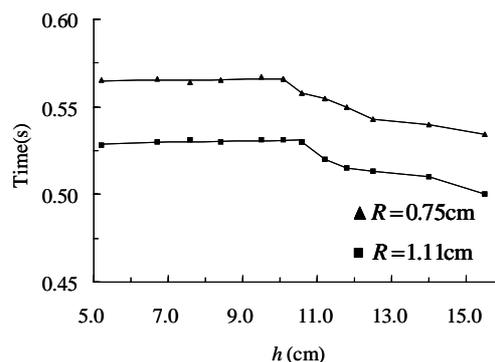
實驗(二)：

1. 鋼珠半徑各爲 0.75cm 及 1.11cm，軌道半徑 $r=17.6\text{cm}$ ，軌距 1.04cm， $\cos\beta$ 分別爲 0.7206 及 0.8835， $t-h$ 圖如圖六所示。

2. 半徑 1.11cm 的鋼珠依 (16)

$$t = \pi \sqrt{\frac{r(2 + 5\cos^2 \beta)}{5g \cos^2 \beta}} = 0.518 \text{ 秒, 實}$$

驗結果為 0.530 秒，相差的時間為電磁鐵殘磁的影響；但在 $h=10.6\text{cm}$ 以內， $t-h$ 為直線， $h>10.6\text{cm}$ 因鋼珠有滑動現象，所以不再有等時性。 $h=10.6\text{cm}$



圖六：鋼珠由軌道滾下的 $t-h$ 關係圖

為純滾動的臨界點，換言之，此時的摩擦力為最大靜摩擦力 f_s ，由 (14)

$$\mu_s = \frac{2 \tan \theta \cos \beta}{2 + 5 \cos^2 \beta}, \text{ 因 } \cos \beta = 0.8835, \text{ 再由 (2) 及 圖二, } y = 2r - h = 24.6\text{cm}$$

$$\Rightarrow \phi = 113.43^\circ = \pi - 2\theta \Rightarrow \theta = 33.28^\circ \text{ 代入 (14) 得 } \mu_s = 0.20.$$

3. 半徑 0.75cm 的鋼珠依 (16) $t = 0.560$ 秒，實驗結果為 0.566 秒。 $h=10.1\text{cm}$ 以上時，鋼珠滑動兼滾動，可得 μ_s 亦為 0.20。

4. 表一、表二分別為兩鋼珠的釋放高度 h 與水平位移 x' 的關係數據，曲面底端離地的高度 $y' = 80.80\text{cm}$ ，將數據分別代入 (22) $v = \sqrt{\frac{g}{2y'} x'}$ ，得鋼珠在軌道最低點的質心速度 v 。

表一：鋼珠半徑 $R=1.11\text{cm}$ ，釋放高度 h 和軌道最低點速度 v 的關係

$h(\text{cm})$	$\sqrt{h} (\sqrt{\text{cm}})$	$\bar{x}' (\text{cm})$	$v(\text{cm/s})$
5.20	2.28	32.50 ± 0.06	80.03 ± 0.15
7.60	2.76	39.30 ± 0.10	96.78 ± 0.25
9.50	3.08	43.90 ± 0.07	108.10 ± 0.17
10.60	3.26	46.90 ± 0.08	115.49 ± 0.20
11.80	3.44	48.80 ± 0.07	120.17 ± 0.17
14.00	3.74	52.90 ± 0.09	130.27 ± 0.22
15.50	3.94	55.00 ± 0.11	135.44 ± 0.27

表二：鋼珠半徑 $R=0.75\text{cm}$ ，釋放高度 h 和軌道最低點速度 v 的關係

$h(\text{cm})$	$\sqrt{h}(\sqrt{\text{cm}})$	$\bar{x}'(\text{cm})$	$v(\text{cm/s})$
5.20	2.28	30.10 ± 0.05	74.12 ± 0.12
7.60	2.76	36.20 ± 0.07	89.14 ± 0.17
9.50	3.08	40.80 ± 0.08	100.47 ± 0.20
10.60	3.26	42.90 ± 0.08	105.64 ± 0.20
11.80	3.44	44.60 ± 0.06	109.83 ± 0.15
14.00	3.74	49.20 ± 0.10	121.16 ± 0.25
15.50	3.94	50.70 ± 0.09	124.85 ± 0.22

5.圖七為兩鋼珠的 $v-\sqrt{h}$ 圖，半徑 1.11cm 的鋼珠，在 $h=10.6\text{cm}$ 以下做純滾動運動，其 $v-\sqrt{h}$ 圖為直線，斜率 $=35.9$ ，由 (12)

$$v = \sqrt{\frac{10gh \cos^2 \beta}{2 + 5 \cos^2 \beta}} = 36.0\sqrt{h} \text{ 相符，且}$$

由 $h=10.6\text{cm}$ 亦可求得 $\mu_s=0.20$ 。

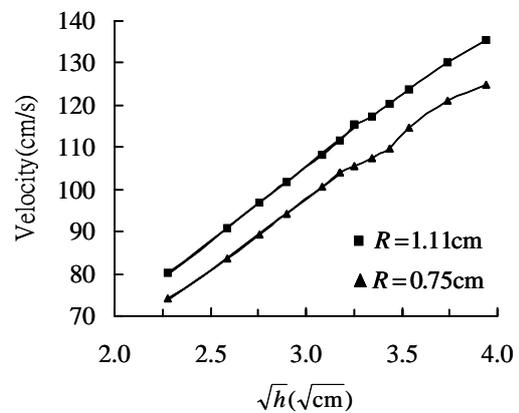
6.半徑 0.75cm 的鋼珠的 $v-\sqrt{h}$ 圖斜

率 33.4 和理論值 33.3 亦相符， $h=10.1\text{cm}$ 以下圖形為直線，亦可得 $\mu_s=0.20$ 。

實驗(三)：

(三~0)動機：

兩相同的鋼珠分別用電磁鐵吸住，將鋼珠置放於軌道兩側等高處，啓動開關，兩鋼珠同時抵達底部，而且具有相同的速率，撞後，兩鋼珠反方向上升，滾回後再同時在底部相撞，相撞四次後兩鋼珠同時停在底部。(1) 依據參考資料鋼珠的恢復係數因材料而異，但高達 $0.90 > e > 0.69$ ，(2)若不碰撞鋼珠可來回 75 趟，相撞只來回 4 趟相差甚多(3)滾動的鋼珠相撞的時間甚短，摩擦又不大，是什麼原因使兩同時滾動的鋼珠僅作四次碰撞？



圖七：鋼珠由軌道滾下的 $v-\sqrt{h}$ 關係圖

(三~1)方法一：

1. 在旋輪線上，兩同大的鋼珠半徑=1.02cm， $\cos \beta = 0.8603$ ，表三為其一鋼珠釋放高度 h_1 與被撞鋼珠撞後高度 h_2' 的關係數據，將數據分別代入

$$(21) \quad h_2' = \left(\frac{e+1}{2}\right)^2 \cdot \frac{5\cos^2 \beta}{2+5\cos^2 \beta} h_1, \text{ 求得恢復係數 } e。$$

表三：被撞球沿旋輪線軌道上升測恢復係數之 $h_2' - h_1$ 關係

$h_1(\text{cm})$	1.30	2.62	4.80	5.80	7.80	9.90	12.60
$\overline{h_2'}(\text{cm})$	0.42 ± 0.01	0.85 ± 0.01	1.56 ± 0.02	1.88 ± 0.01	2.40 ± 0.02	3.10 ± 0.01	4.00 ± 0.03
e	0.410	0.414	0.412	0.413	0.377	0.389	0.399

2. 利用本方法測得鋼珠的恢復係數僅約 0.4，和公認值相去甚遠。

(三~2)方法二：

3. 表四為 m_1 釋放高度 h_1 和被撞鋼珠水平拋出，著地時水平位移 x' 的關係數據，將 h_1 分別代入(12) $v = \sqrt{\frac{10gh\cos^2 \beta}{2+5\cos^2 \beta}}$ ，求得 v_1 ，曲面底端離地的高度

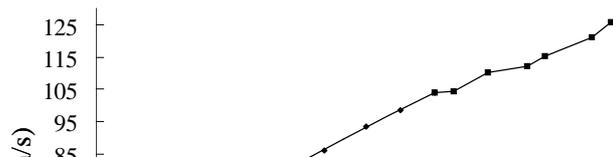
$y' = 80.80\text{cm}$ ，將 x' 分別代入(22) $v = \sqrt{\frac{g}{2y'}}x'$ ，求得 v_2' 。再將數據分別代入

(20) $v_2' = \frac{e+1}{2}v_1$ 求得 e ，由 $h_1 \leq 10.5\text{cm}$ 所得，求得平均值 $e = 0.80 \pm 0.002$ 。

表四：被撞球水平拋體測恢復係數的 $v_2' - v_1$ 關係

$h_1(\text{cm})$	$v_1(\text{cm/s})$	$\overline{x'}(\text{cm})$	$v_2'(\text{cm/s})$	e
3.40	65.77	24.10 ± 0.04	59.35 ± 0.10	0.80
5.70	85.16	31.20 ± 0.05	76.83 ± 0.12	0.80
8.40	103.38	37.90 ± 0.06	93.33 ± 0.15	0.81
10.50	115.58	42.30 ± 0.05	104.17 ± 0.12	0.80
11.10	118.84	42.40 ± 0.08	104.41 ± 0.20	0.76
13.70	132.03	45.60 ± 0.07	112.29 ± 0.17	0.70
16.20	143.57	49.20 ± 0.08	121.16 ± 0.20	0.69

4. 圖八中，在 $h=10.5\text{cm}$ 以下鋼珠₉



做純滾動運動，其

$v_2' - v_1$ 圖為直線，斜率

$=0.90$ ，由

(20) $v_2' = \frac{e+1}{2}v_1$ ，求得

$e=0.80$ 。

5. 兩相同鋼珠用不同的方法

(而且只有測 v_2' 方法不同)，

但求得的恢復係數相差很多，方法二的結果和公認值相符。

6. 由於方法二求 v_2' 時，使鋼珠水平拋出，運動期間僅受空氣阻力，所以求

得的 v_2' 值較接近實際值。方法一中，被撞的鋼珠獲得質心速度 v_2' ，沿軌

道純滾動而上時，摩擦力向下，使其具有角速度 $\omega = \frac{v_2'}{r}$ ；鋼珠上升期間，

重力的分力使其質心速度減慢，摩擦力向上以減低 ω ，至 h_2' 時沒有移動

亦沒有滾動，因撞後在極短的時間內，鋼珠受到軌道的摩擦力要做兩次

的方向改變，而無法純滾動，因此測得的 h_2' 較小， v_2' 較小， $\therefore e$ 值較小。

是否如此，值得進一步研究。

七、結論：

1. 鋼珠在旋輪線軌道上做純滾動的簡諧運動時，有等時性，即週期和振幅無關。

2. 鋼珠由旋輪線軌道上釋放到底端時，若純滾動 $v - \sqrt{h}$ 圖為直線， $t - h$ 圖為水平線，滑動兼滾動時，則不再為線性。找出此臨界點，可算出鋼珠和軌道的靜摩擦係數。

3. 一鋼珠在旋輪線軌道底部，另一大小相同的鋼珠和其正面碰撞，鋼珠在軌道上的運動為純滾動時，可利用鋼珠的釋放高度 h_1 及被撞鋼珠的 v_2' 求出恢復係數。

八、參考資料：

1. 2004 年國際物理奧林匹亞競賽，國家代表對選訓教材第一冊，物理奧林匹亞國家代表隊選訓工作委員會出版，民國 91 年。
2. 林明瑞：高級中學物質科學物理篇下冊。台北市，南一書局，民國 93 年。
3. R. A. Bachman, "Sphere rolling down a grooved track," *Am. J. Phys.* **53**, 765-767 (August 1985)
4. Qing-gong Song, "The requirement of a sphere rolling without slipping down a grooved track for the coefficient of static friction," *Am. J. Phys.* **56**, 1145-1146 (December 1988)
5. Myung-hyun, Yang-kie and Sang Bub Lee, "Development of an apparatus for two-dimensional collision experiment using a cycloidal slide," *Am. J. Phys.* **69**, 1187-1190 (November 2001)

中華民國第四十五屆中小學科學展覽會
評 語

高中組 物理科

040122

鋼珠在旋輪線軌道上運動的研究

國立嘉義高級中學

評語：

1. 本實驗系統化配合理論及實驗數據，探討軌道運動，應予繼續深入探討。
2. 本實驗使用鋼珠分析恢復係數之影響，可以再進一步探討其他材質球珠，並分析其物理可能機制
3. 可以參考更多相關資料，如多變化軌道之球珠運動，以延伸應用本研究探討。