中華民國第四十五屆中小學科學展覽會
作品說明書

國中組 數學科

最佳創意獎

030428
巧取末球之因數應用

臺北縣立福和國民中學

作者姓名：
國一 郭至中 國二 陳劭恆

指導老師：
蕭佳驊 郭彥顯

巧取末球之因數應用

壹、摘要

利用正因數的方式，將指定的數列取完，不能再取者敗。例如：

一、單線形規則

規則：在一直線上給定 n 個球，甲乙兩人分別先後依序由左而右拿 n 的正因數個球(本身除外)，不能再取球者敗。

二、多線形規則

規則：在m直線上給定 n 個球，甲乙兩人分別先後依序由左而右拿第╳排 n 的正因數個球(本 身除外)，且不許跨線，一次只能取一列中的球，不能再取球者敗。

貳、研究動機

今年初參加寒假數學營時，我們曾經玩過一種遊戲：兩人輪流說出範圍內的數字，將雙方說出之數字逐一加起來，最先搶到指定數字的隊伍獲勝。

又有次在學校圖書館看見的「數理資優班 獨立研究專輯」時，看見了一個叫「巧取末球」的題目，它是將球以質數的取法來取球。

例如：

$$20 \xrightarrow{11} 9 \xrightarrow[1]{} 8 \xrightarrow{2} 6 \xrightarrow[2]{} 4 \xrightarrow{1} 3 \xrightarrow[3]{} 0 \Rightarrow \text{後取者勝}$$

於是我就想到取走的方式，也可以將取走的數必須要是剩下數之正因數，則會有什麼規律呢？於是我就躍躍欲試，決定尋找正因數之取球方式。

參、研究目的

一、讓學生們更了解，奇數、偶數與正因數之關係。
二、找出此種玩法之勝利之方法。
三、增進數學邏輯思考之能力。

肆、研究設備及器材

紙、筆、電腦

伍、研究過程與方法

一、單線形規則

規則：在一直線上給定 n 個球，甲乙兩人分別先後依序由左而右拿 n 的正 因數個球(本身除外)，不能再取球者敗。

$\xrightarrow{j}$ 先手－甲取 j 個球

$\xrightarrow[j]{}$ 後手－乙取 j 個球

例 1：給定 10 球，甲爲先取者、乙爲後取者

$$10 \xrightarrow{1} 9 \xrightarrow[3]{} 6 \xrightarrow{3} 3 \xrightarrow[1]{} 2 \xrightarrow{1} 1$$（乙不能取，甲勝）

例 2：給定 16 球，甲爲先取者、乙爲後取者

$$16 \xrightarrow{8} 8 \xrightarrow[4]{} 4 \xrightarrow{2} 2 \xrightarrow[1]{} 1$$（甲不能取，乙勝）

由規則可推得贏的策略如下：

若最小質數爲 2，則當剩餘球數爲 2 時只會有一種狀況：

$$2 \xrightarrow{1} 1$$（乙不能取，甲勝）

可以確定，當剩下 2 球時，接著取球者必敗。若可推得必可剩下 2 球，便可確定勝負。則推論如下：

<推論 1>∵ 奇數=奇數×奇數，偶數=偶數×任一整數。由以上奇偶性質得知：奇數只有奇數因數，但偶數卻有奇數與偶數因數，則可推得若現球數是奇數，取者必定將其取爲偶數；但若現是偶數卻不一定會取成奇數或偶數。

<推論 2> 又因 2 是偶數，故若有一者取到比 2 大的第一個奇數「3」，那麼其必定獲勝。又因 3 是奇數，則可能取到 3 的必爲偶數，可推得，只要你將要取的球球數是偶數，則其必定獲勝。

<推論 3> 當 n 爲 2 k ,(k ＝1,2,3,4,5……)，則先取者必勝

∵ 先取者只要取奇數，則剩餘球數爲 2 k +1；因奇數無偶數正因數，後取者只能取奇數。故每回合取球總數爲偶數，經多回合後，必可剩下 2 球。

∴ 可知先取者必勝。

<推論 4> 當 n 爲 2 k +1,(k ＝1,2,3,4,5……)，則後取者必勝

∵ n 的正因數只有奇數，先取者只能取奇數，則奇數－奇數＝偶數，故先取者取完後必會剩偶數，由<1>可推得接下去取球之玩家必勝。

∴ 可知後取者必勝。

因此可知結論：若給定的球是 2 k +1，則後取者勝；反之，先取者贏。

二、多線形規則

規則：在 m 層直線上給定 n 個球，甲乙兩人分別先後依序由左而右拿任一排的 n (此排之球數)的正因數個球(本身除外)，且不許跨線，一次只能取一列中的球，玩到最後不能再取球者敗。

定義符號說明：

$(n_1,n_2,n_3......n_k)$ 表示第一列有 n_1 個球、第二列有個 n_2 球、第三列有個 n_3 球、……、第 k 列有 n_k 個球

$\xrightarrow{[i,j]}$ 表示先取者甲取 i 列 j 個球

$\xrightarrow[{[i,j]}]{}$ 表示後取者乙取 i 列 j 個球

舉例說明：兩列各是 16,10，甲先乙後。

$$(16,10)\xrightarrow{[1,4]}(12,10)\xrightarrow[{[2,5]}]{}(12,5)$$

因多數列較複雜，故我們先用少數列個球數來推推看，再以其結果推出一般規律。

（一）給定兩列球(i , j)

狀況一：若(i ＝2 a +1; j ＝2 b +1),(a , b ＝1,2,3…)。

則可知結果：後取者必勝

研究分析：

∵ 一開始先取者取 i 列數顆球，後取者只要將前者取之 i 列再取爲 $2k+1$，最後取完其中　一列的必爲後取者，故接下去取者必爲前者，又因此排必爲 $2k+1$，則繼續取下去，可知後取者必定獲勝。

例：

$$(9,7)\xrightarrow{[1,3]}(6,7)\xrightarrow[{[1,3]}]{}(3,7)\xrightarrow{[2,1]}(3,6)\xrightarrow[{[2,1]}]{}(3,5)$$

$$\xrightarrow{[1,1]}(2,5)\xrightarrow[{[1,1]}]{}(1,5)\xrightarrow{[2,1]}(1,4)\xrightarrow[{[2,1]}]{}(1,3) \qquad \Rightarrow \text{乙(後取者)勝}$$

$$\xrightarrow{[2,1]}(1,2)\xrightarrow[{[2,1]}]{}(1,1)$$

狀況二： 若(i ＝2 a ; j ＝2 b),(a , b ＝1,2,3…)

(第 1 種) 若 i ＝ j

則可知結果：後取者必勝

研究分析：

∵ 若先取者取 i 之排 n 顆球，後取者只須取 j 之排與前者取之相同球數顆球；若先取者取 j 之排 n 顆球，後取者只須取 i 之排與前者取之相同球數顆球。
則先取者必定先取完一列，故後取　者也會同時取完另一列，則後取者必獲勝。

例：

$$(10,10)\xrightarrow[{}]{[2,5]}(10,5)\xrightarrow[{[1,5]}]{}(5,5)\xrightarrow[{}]{[1,1]}(4,5)\xrightarrow[{[2,1]}]{}(4,4)$$
$$\xrightarrow[{}]{[2,2]}(4,2)\xrightarrow[{[1,2]}]{}(2,2)\xrightarrow[{}]{[2,1]}(2,1)\xrightarrow[{[1,1]}]{}(1,1)$$
$\Rightarrow$ 乙(後取者)勝

(第 2 種) 若 i ≠ j 、(i , j)=d、 $\frac{i}{d}=2n$ $\frac{j}{d}=2n+1$

則可知結果：先取者必勝

研究分析：

∵ 同除最大公因數之後，必有一列爲奇數列，則會變成一奇一偶的狀況，

若照其之規律取球，則先取者必勝。

故先取者只要照其規律取要取的最大公因數倍之球數，結果則爲先取者勝。

例：若兩列球爲(8,18) 則$(\frac{8}{2},\frac{18}{2})=(4,9)$

先以(4,9)狀況爲例

$$(4,9)\xrightarrow[{}]{[1,1]}(3,9)\xrightarrow[{[2,3]}]{}(3,6)\xrightarrow[{}]{[2,3]}(3,3)\xrightarrow[{[1,1]}]{}(2,3)$$
$$\xrightarrow[{}]{[1,1]}(1,3)\xrightarrow[{[2,1]}]{}(1,2)\xrightarrow[{}]{[2,1]}(1,1)$$

可得如下 $\Rightarrow$
$$(8,18)\xrightarrow[{}]{[1,2]}(6,18)\xrightarrow[{[2,6]}]{}(6,12)\xrightarrow[{}]{[2,6]}(6,6)\xrightarrow[{[1,2]}]{}(4,6)$$
$$\xrightarrow[{}]{[1,2]}(2,6)\xrightarrow[{[2,2]}]{}(2,4)\xrightarrow[{}]{[2,2]}(2,2)\xrightarrow[{[1,1]}]{}(1,2)\xrightarrow[{}]{[2,1]}(1,1)$$

(第 3 種) 若 i ≠ j 、(i , j)=d、 $\frac{i}{d}=2n+1$ $\frac{j}{d}=2n+1$

則可知結果：後取者必勝

研究分析：

∵ 若照上方之規律取球，則後取者必勝。

例：若兩列球爲(2,6) 則$(\frac{2}{2},\frac{6}{2})=(1,3)$

先以(1,3)狀況爲例

$$(1,3)\xrightarrow[{}]{[2,1]}(1,2)\xrightarrow[{[2,1]}]{}(1,1)$$

可得如下 $\Rightarrow$ $(2,6)\xrightarrow[{}]{[2,2]}(2,4)\xrightarrow[{[2,2]}]{}(2,2)\xrightarrow[{}]{[1,1]}(1,2)\xrightarrow[{[2,1]}]{}(1,1)$

狀況三：若(i ＝2 a +1; j ＝2 b),(a , b ＝1,2,3...)

則可知結果：先取者必勝

研究分析：

∵ 先取者先將 i 之列取爲 2 k +1，後取者則必將其中一列取爲 2 k 。

由此可知先取者只要讓兩列球數維持在 2 k +1，先取者一定會先用掉一列，剩下的一列因是 2 k +1，所以先取的「後取者」必敗。

例：

$$(9,18)\xrightarrow{[2,9]}(9,9)\xrightarrow[{[1,3]}]{}(6,9)\xrightarrow{[1,3]}(3,9)\xrightarrow[{[1,1]}]{}(2,9)$$
$$\xrightarrow{[1,1]}(1,9)\xrightarrow[{[2,1]}]{}(1,8)\xrightarrow{[2,1]}(1,7)\xrightarrow[{[2,1]}]{}(1,6)\xrightarrow{[2,1]}\quad\Rightarrow \text{甲(先取者)勝}$$
$$(1,5)\xrightarrow[{[2,1]}]{}(1,4)\xrightarrow{[2,1]}(1,3)\xrightarrow[{[2,1]}]{}(1,2)\xrightarrow{[2,1]}(1,1)$$

（二）給定三列球(i , j , k)

狀況一：若(i ＝2 a +1; j ＝2 b +1; k ＝2 c +1),(a , b , c ＝1,2⋯)

則可知結果：後取者必勝

研究分析：

∵ 先取者必定會先將其中一列取爲偶數，後取者只需將此偶數球之列取回奇數，往後，後取者只要將三列球數一直保持在 2 k +1，到最後，必定會由後取者獲勝。

例：

$$(9,7,5)\xrightarrow{[1,3]}(6,7,5)\xrightarrow[{[1,3]}]{}(3,7,5)\xrightarrow{[2,1]}(3,6,5)$$
$$\xrightarrow[{[2,3]}]{}(3,3,5)\xrightarrow{[1,1]}(2,3,5)\xrightarrow[{[1,1]}]{}(1,3,5)\xrightarrow{[3,1]}$$
$$(1,3,4)\xrightarrow[{[3,1]}]{}(1,3,3)\xrightarrow{[2,1]}(1,2,3)\xrightarrow[{[2,1]}]{}(1,1,3)\quad\Rightarrow \text{乙(後取者)勝}$$
$$\xrightarrow{[3,1]}(1,1,2)\xrightarrow[{[3,1]}]{}(1,1,1)$$

狀況二：若(i ＝2 a ; j ＝2 b ; k ＝2 c),(a , b , c ＝1,2⋯)

(第 1 種) i ＝ j ≠ k 或 i ＝ j ＝ k

則可知結果：先取者必勝

研究分析：

∵ 只要先取者先將 k 取爲 2 k +1，則會變爲一奇二偶之狀況。

∴ 由狀況一可知，接下去取球者(即後取 者)必敗。

例：

$$(18,10,10)\xrightarrow{[1,9]}(9,10,10)\xrightarrow[{[2,5]}]{}(9,5,10)\xrightarrow{[3,5]}(9,5,5)$$
$$\xrightarrow[{[1,3]}]{}(6,5,5)\xrightarrow{[1,3]}(3,5,5)\xrightarrow[{[1,1]}]{}(2,5,5)\xrightarrow{[1,1]}(1,5,5)$$
$$\xrightarrow[{[2,1]}]{}(1,4,5)\xrightarrow{[2,1]}(1,3,5)\xrightarrow[{[2,1]}]{}(1,2,5)\xrightarrow{[2,1]}(1,1,5)$$
$$\xrightarrow[{[3,1]}]{}(1,1,4)\xrightarrow{[3,1]}(1,1,3)\xrightarrow[{[3,1]}]{}(1,1,2)\xrightarrow{[3,1]}(1,1,1)$$

$\Rightarrow$ 甲(先取者)勝

(第 2 種)若 i ≠ j ≠ k 、(i , j , k)=d、 $\frac{i}{d}=2n+1$　$\frac{j}{d}=2n+1$　$\frac{k}{d}=2n+1$

則可知結果：後取者必勝

研究分析：同上述方法，三列奇數的結果爲後取者勝，故此結果相同。

(第 3 種)若 i ≠ j ≠ k 、(i , j , k)=d、 $\frac{i}{d}=2n+1$　$\frac{j}{d}=2n+1$　$\frac{k}{d}=2n$

則可知結果：先取者必勝

研究分析：同上述方法，兩列奇數和一列偶數的結果爲先取者勝，故此結果相同。

(第 4 種)若 i ≠ j ≠ k 、(i , j , k)=d、 $\frac{i}{d}=2n+1$　$\frac{j}{d}=2n$　$\frac{k}{d}=2n$

則可知結果： $(\frac{\mathrm{j}}{\mathrm{d}},\frac{\mathrm{k}}{\mathrm{d}})=\mathrm{d}'$

若 $\frac{j}{dd'}=2n+1$　$\frac{k}{dd'}=2n$ 則先取者勝

若 $\frac{j}{dd'}=2n$　$\frac{k}{dd'}=2n$ 則後取者勝

研究分析：同上述兩列方法再執行一次，即可得解。

狀況三：若(i ＝2 a +1; j ＝2 b ; k ＝2 c),(a , b , c ＝1,2⋯)

(第 1 種)若 i ≠ j ＝ k

則可知結果：後取者必勝

研究分析：

∵ 若前者取 j 之列 n 個球，則後取者取對應 k 列前者取之相同球數顆球；若前者取 k 之列 n 個球，則後取者取對應 j 列前者取之相同球數顆球；

若前者取 i 之列的球，後取者只要將 i 之列的偶數球取回 2 k +1。

則可得最後取完兩列偶數球的必定是後取者，又一列的狀況可知能保持將球數取為 $2k+1$ 的為後取者。

∴ 後取者必勝

例：

$(14,14,15)\xrightarrow{[1,7]}(7,14,15)\xrightarrow[{[2,7]}]{}(7,7,15)\xrightarrow{[3,5]}(7,7,10)$

$\xrightarrow[{[3,5]}]{}(7,7,5)\xrightarrow{[2,1]}(7,6,5)\xrightarrow[{[1,1]}]{}(6,6,5)\xrightarrow{[2,3]}$

$(6,3,5)\xrightarrow[{[1,3]}]{}(3,3,5)\xrightarrow{[1,1]}(2,3,5)\xrightarrow[{[2,1]}]{}(2,2,5)$ $\Rightarrow$ 乙(後取者)勝

$\xrightarrow{[1,1]}(1,2,5)\xrightarrow[{[2,1]}]{}(1,1,5)\xrightarrow{[3,1]}(1,1,4)\xrightarrow[{[3,1]}]{}(1,1,3)$

$\xrightarrow{[3,1]}(1,1,2)\xrightarrow[{[3,1]}]{}(1,1,1)$

(第 2 種)若 $j \neq k$ 、$(j,k)=d$、 $\frac{j}{d}=2n+1$ $\quad \frac{k}{d}=2n+1$

則可知結果：後取者必勝

研究分析：同上述方法，三列奇數的結果為後取者勝，故此結果相同。

(第 3 種)若 $j \neq k$ 、$(j,k)=d$、 $\frac{j}{d}=2n+1$ $\quad \frac{k}{d}=2n$

則可知結果：先取者必勝

研究分析：同上述方法，兩列奇數和一列偶數的結果為先取者勝，故此結果相同。

狀況四：若$(i=2a+1;\ j=2b+1;\ k=2c),(a,b,c=1,2\cdots)$

則可知結果：先取者必勝

研究分析：

∵ 先取者將 k 之列取為奇數，後取者必定會先將此三列其中一列取為偶數，先取者只要再將後取者取為偶數之列取為奇數，最終可得，先取者必定會獲勝。

例：

$(7,5,12)\xrightarrow{[3,3]}(7,5,9)\xrightarrow[{[3,3]}]{}(7,5,6)\xrightarrow{[3,3]}(7,5,3)$

$\xrightarrow[{[1,1]}]{}(6,5,3)\xrightarrow{[1,1]}(5,5,3)\xrightarrow[{[1,1]}]{}(4,5,3)\xrightarrow{[1,1]}$

$(3,5,3)\xrightarrow[{[1,1]}]{}(2,5,3)\xrightarrow{[1,1]}(1,5,3)\xrightarrow[{[3,1]}]{}(1,5,2)$ $\Rightarrow$ 甲(先取者)勝

$\xrightarrow{[3,1]}(1,5,1)\xrightarrow[{[2,1]}]{}(1,4,1)\xrightarrow{[2,1]}(1,3,1)\xrightarrow[{[2,1]}]{}(1,2,1)\xrightarrow{[2,1]}(1,1,1)$

（三）給定四列球(i , j , k , L)

狀況一：若(i ＝2 a +1; j ＝2 b +1; k ＝2 c +1; L ＝2 d +1),(a , b , c , d ＝ 1,2⋯)

則可知結果：後取者必勝

研究分析：

先取者必定將其中一列取爲 2 k ，只要後取者再將此先取者取之列取回 2 k +1，直到最後，後取者即可獲勝。

例：

$$(7,9,11,13)\xrightarrow{[1,1]}(6,9,11,13)\xrightarrow[{[1,3]}]{}(3,9,11,13)\xrightarrow{[3,1]}(3,9,10,13)\xrightarrow[{[3,5]}]{}$$

$$(3,9,5,13)\xrightarrow{[4,1]}(3,9,5,12)\xrightarrow[{[4,3]}]{}(3,9,5,9)\xrightarrow{[2,3]}(3,6,5,9)\xrightarrow[{[2,3]}]{}$$

$$(3,3,5,9)\xrightarrow{[1,1]}(2,3,5,9)\xrightarrow[{[1,1]}]{}(1,3,5,9)\xrightarrow{[2,1]}(1,2,5,9)\xrightarrow[{[2,1]}]{}$$

$$(1,1,5,9)\xrightarrow{[4,3]}(1,1,5,6)\xrightarrow[{[4,3]}]{}(1,1,5,3)\xrightarrow{[3,1]}(1,1,4,3)\xrightarrow[{[3,1]}]{}$$

$$(1,1,3,3)\xrightarrow{[4,1]}(1,1,3,2)\xrightarrow[{[4,1]}]{}(1,1,3,1)\xrightarrow{[3,1]}(1,1,2,1)\xrightarrow[{[3,1]}]{}(1,1,1,1)$$

⇒ 乙(後取者)勝

狀況二：若(i ＝2 a ; j ＝2 b ; k ＝2 c ; L ＝2 d),(a , b , c , d ＝1,2⋯)

(第一種) i ＝ j ＝ k ＝ L

則可知結果：後取者必勝

研究分析：

∵ 先取者若取 i , j , k , L 任一列之數顆球，則後取者就取另三列其中一列之相同球數個球，無論如何，一定要讓兩列球數保持在兩組列之球數相同，以此對應之方式取球，則後取者必勝。

例：

$$(8,8,10,10)\xrightarrow{[2,4]}(8,4,10,10)\xrightarrow[{[2,4]}]{}(4,4,10,10)\xrightarrow{[2,2]}(4,2,10,10)$$

$$\xrightarrow[{[1,2]}]{}(2,2,10,10)\xrightarrow{[3,5]}(2,2,5,10)\xrightarrow[{[4,5]}]{}(2,2,5,5)\xrightarrow{[1,1]}(1,2,5,5)$$

$$\xrightarrow[{[2,1]}]{}(1,1,5,5)\xrightarrow{[3,1]}(1,1,4,5)\xrightarrow[{[4,1]}]{}(1,1,4,4)\xrightarrow{[4,2]}(1,1,2,4)$$

$$\xrightarrow[{[3,2]}]{}(1,1,2,2)\xrightarrow{[4,1]}(1,1,2,1)\xrightarrow[{[3,1]}]{}(1,1,1,1)$$

⇒ 乙(後取者)勝

(第二種)　ｉ ≠ ｊ ＝ｋ＝Ｌ，ｉ ≠ ｊ ≠ ｋ＝Ｌ

則可知結果：(ｉ, ｊ)=d　$\frac{i}{d}=2n+1$　$\frac{j}{d}=2n+1$　則後取者勝

(ｉ, ｊ)=d　$\frac{i}{d}=2n$　$\frac{j}{d}=2n+1$　則先取者勝

研究分析：

∵將其分為兩組－(ｉ, ｊ)為一組、(ｊ, ｋ)為一組

⇒(ｉ, ｊ)以上述方法便可解出，且(ｊ, ｋ)兩列以上述方法即可省略

(第三種) ｉ ＝ ｊ ≠ ｋ＝Ｌ

則可知結果：後取者必勝

研究分析：

∵　若先取者取ｉ(或ｊ)之列ｎ顆球，後取者只須取ｊ(或ｉ)之列與前者取之相同球數顆球；若先取者取ｋ(或Ｌ)之列ｎ顆球，後取者只須取Ｌ(或ｋ)之列與前者取之相同球數顆球。

則推至最後，後取者必獲勝。

例：

$(12,12,8,8)\xrightarrow{[3,4]}(12,12,4,8)\xrightarrow[{[4,4]}]{}(12,12,4,4)\xrightarrow{[3,1]}(12,12,3,4)$

$\xrightarrow[{[4,1]}]{}(12,12,3,3)\xrightarrow{[4,1]}(12,12,3,2)\xrightarrow[{[3,1]}]{}(12,12,2,2)\xrightarrow{[1,6]}$

$(6,12,2,2)\xrightarrow[{[2,6]}]{}(6,6,2,2)\xrightarrow{[2,3]}(6,3,2,2)\xrightarrow[{[1,3]}]{}(3,3,2,2)\xrightarrow{[4,1]}$ ⇒乙(後取者)勝

$(3,3,2,1)\xrightarrow[{[3,1]}]{}(3,3,1,1)\xrightarrow{[1,1]}(2,3,1,1)\xrightarrow[{[2,1]}]{}(2,2,1,1)\xrightarrow{[1,1]}$

$(1,2,1,1)\xrightarrow[{[2,1]}]{}(1,1,1,1)$

(第四種) ｉ ≠ ｊ ≠ ｋ ≠ Ｌ

研究分析：同上述兩列方法最多執行三次，即可得解。

狀況三：若(ｉ＝2ａ+1; ｊ＝2ｂ+1; ｋ＝2ｃ; Ｌ＝2ｄ),(ａ, ｂ, ｃ, ｄ＝1,2⋯)

(第一種) ｋ＝Ｌ

則可知結果：後取者必勝

研究分析：

∵ 前者若取ｉ或ｊ之列，後取者則將前者取之列取回 2ｋ+1；若前者取ｋ或(Ｌ列)，後取者則取另依偶數列Ｌ(或ｋ)之相同球數，玩到最後，後取者即可獲勝。

例：

$$(12,5,12,13)\xrightarrow{[2,1]}(12,4,12,13)\xrightarrow[{[2,1]}]{}(12,3,12,13)\xrightarrow{[4,1]}(12,3,12,12)$$
$$\xrightarrow[{[4,3]}]{}(12,3,12,9)\xrightarrow{[3,4]}(12,3,8,9)\xrightarrow[{[1,4]}]{}(8,3,8,9)\xrightarrow{[1,4]}(4,3,8,9)$$
$$\xrightarrow[{[3,4]}]{}(4,3,4,9)\xrightarrow{[1,2]}(2,3,4,9)\xrightarrow[{[3,2]}]{}(2,3,2,9)\xrightarrow{[4,3]}(2,3,2,6)\quad\Rightarrow \text{乙(後取者)勝}$$
$$\xrightarrow[{[4,3]}]{}(2,3,2,3)\xrightarrow{[1,1]}(1,3,2,3)\xrightarrow[{[3,1]}]{}(1,3,1,3)\xrightarrow{[2,1]}(1,2,1,3)$$
$$\xrightarrow[{[4,1]}]{}(1,2,1,2)\xrightarrow{[2,1]}(1,1,1,2)\xrightarrow[{[4,1]}]{}(1,1,1,1)$$

(第二種) $i \neq j \neq k \neq L$

則可知結果：

研究分析：以(k ,L)為一組，以上述方法即可得解

狀況四：若($i = 2a+1$; $j = 2b$; $k = 2c$; $L = 2d$),(a , b , c , d =1,2⋯)

(1) $i \neq j \neq k = L$ 或 $i \neq j = k = L$

則可知結果：先取者必勝

研究分析：

∵ 前者只要 j 之列取為 $2k+1$，則會變為兩奇兩偶之狀況(即狀況三)，只要依其取球，最後獲勝的則是狀況三之後取者(即前者)。

例：

$$(20,8,20,5)\xrightarrow{[2,1]}(20,7,20,5)\xrightarrow[{[1,10]}]{}(10,7,20,5)\xrightarrow{[2,10]}(10,7,10,5)\xrightarrow[{[4,1]}]{}$$
$$(10,7,10,4)\xrightarrow{[4,1]}(10,7,10,3)\xrightarrow[{[2,1]}]{}(10,6,10,3)\xrightarrow{[2,3]}(10,3,10,3)\xrightarrow[{[3,5]}]{}(10,3,5,3)$$
$$\xrightarrow{[1,5]}(5,3,5,3)\xrightarrow[{[1,1]}]{}(4,3,5,3)\xrightarrow{[3,1]}(4,3,4,3)\xrightarrow[{[1,2]}]{}(2,3,4,3)\quad\Rightarrow \text{甲(先取者)勝}$$
$$\xrightarrow{[3,2]}(2,3,2,3)\xrightarrow[{[3,1]}]{}(2,3,1,3)\xrightarrow{[1,1]}(1,3,1,3)\xrightarrow[{[2,1]}]{}(1,2,1,3)$$
$$\xrightarrow{[2,1]}(1,1,1,3)\xrightarrow[{[4,1]}]{}(1,1,1,2)\xrightarrow{[4,1]}(1,1,1,1)$$

(2) $i \neq j \neq k \neq L$

研究分析：

以上述方法得知將成為兩列問題即可得解。

任取兩列為一組，將其以兩列的方法操作即可得解。

狀況五：若($i = 2a+1$; $j = 2b+1$; $k = 2c+1$; $L = 2d$),(a , b , c , d =1,2⋯)

則可知結果：先取者必勝

研究分析：

∵ 先取者只要將偶數列取爲 $2k+1$，後取者就必須將四列其中一列取爲偶數，則如狀況一般，先取者即可獲勝。

例：

$$(9,15,21,22)\xrightarrow{[4,1]}(9,15,21,21)\xrightarrow[{[3,7]}]{}(9,15,14,21)\xrightarrow{[3,7]}(9,15,7,21)$$

$$\xrightarrow[{[4,7]}]{}(9,15,7,14)\xrightarrow{[3,1]}(9,15,6,14)\xrightarrow[{[3,3]}]{}(9,15,3,14)\xrightarrow{[4,7]}(9,15,3,7)$$

$$\xrightarrow[{[4,1]}]{}(9,15,3,6)\xrightarrow{[4,3]}(9,15,3,3)\xrightarrow[{[2,5]}]{}(9,10,3,3)\xrightarrow{[2,5]}(9,5,3,3)$$

$$\xrightarrow[{[1,3]}]{}(6,5,3,3)\xrightarrow{[1,3]}(3,5,3,3)\xrightarrow[{[2,1]}]{}(3,4,3,3)\xrightarrow{[2,1]}(3,3,3,3)$$

$\Rightarrow$ 甲(先取者)勝

$$\xrightarrow[{[1,1]}]{}(2,3,3,3)\xrightarrow{[1,1]}(1,3,3,3)\xrightarrow[{[4,1]}]{}(1,3,3,2)\xrightarrow{[4,1]}(1,3,3,1)$$

$$\xrightarrow[{[2,1]}]{}(1,2,3,1)\xrightarrow{[2,1]}(1,1,3,1)\xrightarrow[{[3,1]}]{}(1,1,2,1)\xrightarrow{[3,1]}(1,1,1,1)$$

(四)給定五列球(i,j,k,L,m)

狀況一：若$(i=2a+1;\ j=2b+1;\ k=2c+1;\ L=2d+1;\ m=2e+1),(a,b,c,d,e=1,2\cdots)$

則可知結果：後取者必勝

研究分析：

先取者必定將其中一列取爲 $2k$，只要後取者再將此先取者取之列取回 $2k+1$，直到最後，後取者即可獲勝。

狀況二：若$(i=2a;\ j=2b;\ k=2c;\ L=2d;\ m=2e),(a,b,c,d,e=1,2\cdots)$

(第一種) $i=j=k=L=m$

則可知結果：先取者必勝

研究分析：

∵ 先取者若取 i,j,k,L 任一列之數顆球，則後取者就取另三列其中一列之相同球數 個 球，無論如何，一定要讓兩列球數保持在兩組列之球數相同，以此對應之方式取球，則後取者必勝。

(第二種) $i=j=k=L\neq m$

則可知結果：先取者必勝

研究分析：

∵ 先取者只要先將m取爲奇數，則後者只有兩種取法：

1. 若取 i , j , k , L 其一 x 個球，先者只需將後取者取之列以外的 i , j , k , L 其中一列也取 x 個球，也就是要將 i , j , k , L 四列保持在有兩對兩列球數相同即可。

2. 或將m列之球取爲偶數，那麼先者只要將其列取回奇數即可。

只要依上面兩種方法取球，可得獲勝必爲先者。

(第三種) $i = j = k \neq L = m$

則可知結果：先取者必勝

∵ 先取者只要先將 k 取爲奇數，則後者只有兩種取法：

1. 若取 i , j 其一 x 個球，先者只需將後取者取之列以外的 i , j ,其中一列也取 x 個球，若取 L ,m 其一 x 個球，先者只需將後取者取之列以外的 L ,m 其中一列也取 x 個球，也就是要將 i , j , L ,m 四列保持在 $i = j$ 且 $L = m$ 即可。

2. 或將m列之球取爲偶數，那麼先者只要將其列取回奇數即可。

只要依上面兩種方法取球，可得獲勝必爲先者。

(第四種) $i = j = k \neq L \neq m$ 或 $i = j \neq k \neq L \neq m$

研究分析：

若將 i , j 分爲一組 k , L ,m 分爲一組，則 i , j 必爲後取者勝， k , L ,m 則用爲最大公因數取法來判別，則可得知結果。

(第五種) $i = j \neq k \neq L = m$

則可知結果：先取者必勝

研究分析：

∵ 先取者只要先將 k 取爲奇數，則後者只有兩種取法：

1. 若取 i , j 其一 x 個球，先者只需將後取者取之列以外的 i , j ,其中一列也取 x 個球，若取 L ,m 其一 x 個球，先者只需將後取者取之列以外的 L ,m 其中一列也取 x 個球，也就是要將 i , j , L ,m 四列保持在 $i = j$ 且 $L = m$ 即可。

2. 或將m列之球取爲偶數，那麼先者只要將其列取回奇數即可。

只要依上面兩種方法取球，可得獲勝必爲先者。

(第六種) $i \neq j \neq k \neq L \neq m$

研究分析：

任取兩列、三列爲一組，則以上述方法即可得解。

狀況三：若($i=2a+1$; $j=2b+1$; $k=2c+1$; $L=2d+1$; $m=2e$),($a,b,c,d,e=1,2\cdots$)

則可知結果：先取者必勝

研究分析：

∵ 前者只須先取m之列，狀況則會變為全部奇數列的情形；可得，若後者取 i , j , k , L 其一列，先取者只需將<u>後取者取之列</u>取回奇數，最後後者即可獲勝。

狀況四：若($i=2a+1$; $j=2b+1$; $k=2c+1$; $L=2d$; $m=2e$),($a,b,c,d,e=1,2\cdots$)

(1) $L=m$

則可知結果：後取者必勝

研究分析：

∵ 前者只有兩種取法：

1. 若其將 i , j , k 其中一列取為 2n，則後者只需將前者取為 2n 的列取回 2n+1 即可獲勝。
2. 或其將 L ,m 其中一列取 n 個球，則後者只要將前者取的另一列也取 n 個球，則後取者也可獲勝

(2) $L\neq m$

研究分析：

兩者同除最大公因數後，若變兩奇數，後者勝，若變一奇一偶，則先者勝。

狀況五：若($i=2a+1$; $j=2b+1$; $k=2c$; $L=2d$; $m=2e$),($a,b,c,d,e=1,2\cdots$)

(第 1 種) $k=L\neq m$ 或 $k=L=m$

則可知結果：先取者必勝

研究分析：

∵ 只要先取者先將m取為 $2k+1$，則會變成狀況四。故接下去取球者(即後取者)必敗。

(第 2 種) $k\neq L\neq m$

研究分析：

以三列偶數的狀況來想，即用最大公因數的方法，則可確定勝負。

狀況六：若(i ＝2 a ; j ＝2 b ; k ＝2 c ; L ＝2 d ;m＝2 e +1),(a , b , c , d , e ＝1,2…)

(第一種) i ＝ j ＝ k ＝ L

則可知結果：後取者必勝

研究分析：

∵ 先取者若取 i , j , k , L 任一列之數顆球，則後取者就取另三列其中一列之相同球數個球，無論如何，一定要讓兩列球數保持在兩組列之球數相同，以此對應之方式取球，則後取者必勝。

(第二種) i ≠ j ＝ k ＝ L 或 i ≠ j ≠ k ＝ L

研究分析：

以(k,L)為一組並將其省略，則(i,j)成兩列偶數問題

(第三種) i ＝ j ≠ k ＝ L

則可知結果：後取者必勝

研究分析：

∵ 若先取者取 i (或 j)之列 n 顆球，後取者只須取 j (或 i)之列與<u>前者取之相同球數</u>顆球；若先取者取 k (或 L)之列 n 顆球，後取者只須取 L (或 k)之列與<u>前者取之相同球數</u>顆球。

則推至最後，後取者必獲勝。

(第四種) i ≠ j ≠ k ≠ L

研究分析：

（五）給定 m 列球

狀況一：(a,b,c,d……=2 k +1);(k =1,2,3…)

結果：後取者必勝

研究分析：

後取者只要將前者取之列取為 2 k +1，不論有無對應，或與哪列不相同，結果都是後取者贏。

∵後取者只要隨前者取之列，將前者取之列取回 2 k +1，則到最後必定後取者贏。

狀況二：(a,b,c,d……=2 k);(k =1,2,3…)

(第一種)2 k 層偶數列

研究分析：

1.當其全列皆成對，則後取者必勝

2.當只有一列不完全成對，則將成對之列爲一組，而後將其餘列分爲一組，則將此組再任取爲兩兩一組，以兩列方式操作即可得解。

3.當其皆不對稱時，以兩兩爲組，以兩列方式操作即可得解。

(第二種)2 k +1 層偶數列

研究分析：

1.當其全列皆成對，必有一列剩餘，則先取者必勝

2.當只有一列不完全成對，則將成對之列爲一組，而後將其餘列分爲一組，則將此組再任取爲兩兩一組，以兩列方式操作即可得解。

狀況三：(a,b,c,d...=2 k +1;A,B,C,D...=2 k);(k =1,2,3,4,5…)

研究分析：

（１）奇數列皆可忽略

（２）偶數列便可將其分爲成對組與不成對組，成對組可忽略

不成對組則以上述方法可得解

陸、研究結果

※註： i , j , k , L ,m爲各列球數(i ≧ j ≧ k ≧ L ≧ m)

$i=2^n$ $j=2^o$ $k=2^p$ $L=2^q$ $m=2^r$

<table>
<tr><td colspan="3">奇數列
偶數列</td><td>0 列</td><td>1 列</td><td>2 列</td><td>3 列</td><td>4 列</td><td>5 列</td></tr>
<tr><td colspan="3">0 列</td><td></td><td>後者</td><td>後者</td><td>後者</td><td>後者</td><td>後者</td></tr>
<tr><td colspan="3">1 列</td><td>先者</td><td>先者</td><td>先者</td><td>先者</td><td>先者</td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="3">2 列</td><td colspan="2">i ＝ j</td><td>後者</td><td>後者</td><td>後者</td><td>後者</td><td rowspan="3" colspan="2"></td></tr>
<tr><td rowspan="2">i ≠ j</td><td>n≠o</td><td>先者</td><td>先者</td><td>先者</td><td>先者</td></tr>
<tr><td>n=o</td><td>後者</td><td>後者</td><td>後者</td><td>後者</td></tr>
<tr><td rowspan="2">3 列</td><td colspan="2">i ＝ j ＝ k</td><td>先者</td><td>先者</td><td>先者</td><td rowspan="2" colspan="3"></td></tr>
<tr><td colspan="2">i ＝ j ≠ k</td><td>先者</td><td>先者</td><td>先者</td></tr>
</table>

	i ≠ j ≠ k	n≠o≠p	先者	先者	先者
		n≠o=p	先者	先者	先者
		n=o=p	後者	後者	後者
4 列	i ＝ j ＝ k ＝ L		後者	後者	
	i ＝ j ≠ k ＝ L		後者	後者	
	i ＝ j ＝ k ≠ L	p≠q	先者	先者	
		p=q	後者	後者	
	i ＝ j ≠ k ≠ L	p≠q	先者	先者	
		p=q	後者	後者	
	i ≠ j ≠ k ≠ L	n=o=p=q	後者	後者	
		n=o=p≠q	先者	先者	
		N=o≠p≠q	先者	先者	
		n≠o≠p≠q	先者	先者	
5 列	i ＝ j ＝ k ＝ L ＝ m		先者		
	i ＝ j ＝ k ＝ L ≠ m		先者		
	i ＝ j ＝ k ≠ L ＝ m		先者		
	i ＝ j ＝ k ≠ L ≠ m	p=q=r	後者		
		P=q≠r	先者		
		p≠q≠r	先者		
	i ＝ j ≠ k ≠ L ＝ m		先者		
	i ＝ j ≠ k ≠ L ≠ m	p=q=r	後者		
		P=q≠r	先者		
		p≠q≠r	先者		
	i ≠ j ≠ k ≠ L ≠ m	n=o=p=q=r	後者		
		N=o=p=q≠r	先者		
		N=o=p≠q≠r	先者		
		N=o ≠ p ≠ q ≠r	先者		
		n≠o≠p≠q ≠r	先者		

柒、討論

<討論一> 由上表可知不論奇數列有多少，或奇數列的球數相不相同，都和結果無重要關係，重要的是偶數列，可知偶數列的個數，與偶數各列之間的關係是引響結果的重要關鍵。

<討論二> 1.不論偶數列有多少，只要將其最大公因數提出，重複動作，便可成爲奇數列問題。

2.將其分組，可用各組勝負判定其勝負。

捌、結論

一、單線形規則

（一）若一開始是奇數，則後取者必勝。

<證明> 奇數只有奇數因數，偶數有奇數與偶數因數，又奇數相減必為偶數，而最小奇數爲「3」，故能取到「3」者必勝，可得能一直將球數保持在奇數者，必爲後取者。

（二）若一開始是偶數，則先取者必勝。

<證明> 與上相同，但因一開始爲偶數，則可得能一直將球數保持在奇數者，必爲先取者。

二、多線形規則

（一）若只有奇數列數個，後取者則必勝。

（二）若列中有偶數列偶數個，不論奇數列有無，且偶數列皆有成對，皆是後取者勝。

<證明> 若先取者取某偶數列，後取者只需將其對應之列取爲相同球數，後取者取奇數列，則先取者只需將那列取回奇數，則後者必勝。

（三）若有偶數列與奇數列數個，只要有兩列以上偶數列球數不是成對的(兩列不等)，且與其餘列不同則如下。

當所有偶數列含 2^n 且 n 爲定值時，後取者勝·

反之則先取者勝。

<證明> ∵ 將其同除最大公因數，若同爲奇數，則後取者勝。

若不同爲奇數，則最少有一列爲偶數，將期偶數列取爲奇數，則先取者勝。

（四）若有偶數列奇數個與奇數列數個，且只有一列偶數球數不是成對的，且與其餘列不同，則先取者獲勝。

<證明> 因先取者只需先將與其餘偶數列之值不同的偶數列取爲奇數，若接下來之後取者取奇數列，則先取者只需將　那列取回奇數，若後取者取偶數列，則先取者

只需將其對應之列取為相同球數，則先者必勝。

※以上述實驗數據得知不論任何條件狀況下，一般來說先取者獲勝機率會較大這與一般遊戲規則頗為一致。

玖、參考資料及其他

書名	出版社	出版日
數理資優班 獨立研究專輯	台北縣立福和國民中學	民國 93 年 6 月
數學課本第一冊(修訂版)	南一書局	民國 93 年 8 月

中華民國第四十五屆中小學科學展覽會
評　　語

國中組 數學科

最佳創意獎

030428
巧取末球之因數應用

臺北縣立福和國民中學

評語：

1. 研究問題很有趣且具創意，但結論似乎比作者所想的來得複雜，且某些推論似乎並不完全，例如：P.4 中第二種情形的討論，在後取方取球後，公因數是會改變的，作者似乎並未考慮此種可能，雖然結論可能仍是正確的，但進一步的討論或許仍是必要的。
2. 口語表達具條理性，反應亦佳。