中華民國第四十五屆中小學科學展覽會
作品說明書

國中組 數學科

030427

凸 n 邊形等面積線段數量之分布探索

臺北縣立福和國民中學

作者姓名：
國二 張湘琦 國二 潘雅柔 國二 鄭巧君
國一 廖文偉

指導老師：
鄭釧鋒 陳明貴

凸 n 邊形等面積線段數量之分布探索

摘要

一、利用 ΔABC 周界上一動點 P，作出等面積線段 $\overline{PQ}$，利用 GSP 觀察 $\overline{PQ}$ 在 ΔABC 內移動的軌跡，發現其軌跡形成曲線形狀。

二、將 ΔABC 座標化，我們利用等面積條件求出等面積線移動所形成的曲線，是 $\overline{PQ}$ 中點所構造出的曲線段(雙曲線之一部分)，且共有 3 條曲線段，形成內文所謂的「包絡區」。

1.當 P 點在包絡區內，則有 3 條等面積線段。

2.當 P 點在包絡區周界上，則有 2 條等面積線段。

3.當 P 點在包絡區外，則有 1 條等面積線段。

三、以三角形的研究當基礎，擴展到凸 n 邊形，我們發現：等面積線段數量之分布，仍然與包絡區息息相關，且

1.凸 $2m+1$ 邊形最多有 $2m+1$ 條等面積線段。

2.凸 $2m$ 邊形，必發生內文所謂的「換軌」。因此，最多只有 $2m-1$ 條等面積線段。

3.包絡曲線所分割出的區域，於相同區域其等面積線段數量相同，且相鄰兩區域數量差兩條。

四、若凸 n 邊形有 k 個「換軌點」，則此 n 邊形過定點等面積線段至多有 $n-k$ 條。

註：說明書最後一頁附有本研究的操作光碟，煩請配合使用，以方便內容的了解。

壹、 研究動機

在課堂上，老師提到「三角形中線等分其面積，且三條中線交於一點，稱爲重心」。當時，我們想到利用此結果，可知過重心最少存在 3 條等分面積線段。若在此三角形內取一動點 P 與重心很接近，猜測應該還是有 3 條以上等分面積線段。當 P 點越離開重心時，其等分面積線段數量又會如何？而過定點的等面積線段數量是否與某些特定區域有關？若有，那麼這些特定的區域是如何界定？....？？？一連串的問號，開啓我們的探索之旅。

貳、 研究目的

一、探討三角形等面積線段與其移動所產生的相關曲線之關聯性。

二、探討三角形等面積線段數量之多寡與分布。

三、以三角形研究當基礎，探討凸 n 邊形等面積線段數量之多寡與分布。

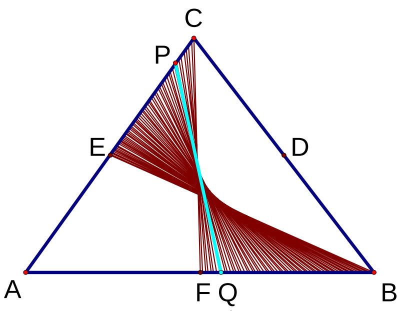
參、 研究器材

電腦、*GSP* 軟體。

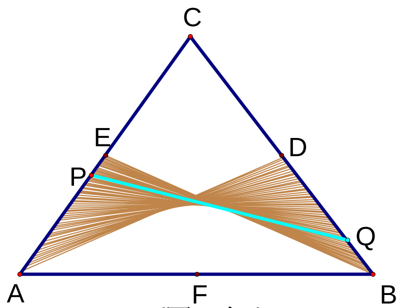
肆、 研究過程

前言：

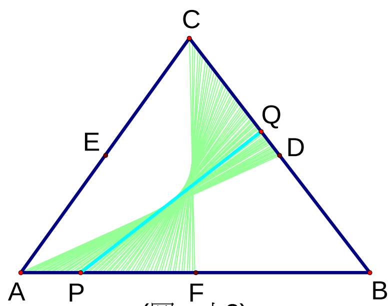
由於「**過三角形周界上一點，必有一條等分面積線段**」，基於這樣的事實，我們想到可利用所學的 GSP 軟體來操作，先在 ΔABC 周界上取一動點 P，接著作 $\overleftrightarrow{PQ}$ (Q 爲 ΔABC 周界上一點)將 ΔABC 面積兩等分，並觀察 $\overleftrightarrow{PQ}$ 移動之軌跡變化(如圖一之 1、2、3)。(圖中，$\overline{AD}$ 、 $\overline{BE}$ 、 $\overline{CF}$ 爲 ΔABC 三條中線)



(圖一之1)



(圖一之2)



(圖一之3)

從圖中我們發現兩個現象：

1. $\overline{PQ}$ 之軌跡構造出 3 條曲線。

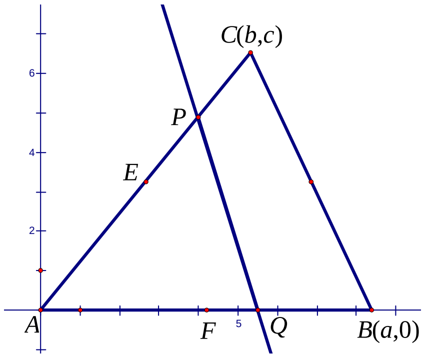
2. 越往 ΔABC 重心靠近之點有較多數量的等分面積線段通過。

我們嘗試任意改變 ΔABC 的圖形，結果上述兩現象仍存在。爲了更加確認，我們上網搜尋是否有相關資料？結果在[黃文達教授的個人網頁之中學科展主題]中，提到三角形等分面積線具有包絡現象及相關作品「第三十一屆科展高中組─三角形分割線形成的包絡線」。利用此線索，我們到市立圖書館找到該作品，由作品內容我們得到上述第一個現象的解答，即「**三角形等分面積線段 $\overleftrightarrow{PQ}$ 構造出的曲線爲雙曲線**」。至於如何得知此雙曲線？由於作品內容僅大略記載，並使用我們尚未學到的數學知識(如向量、矩陣、偏微

分)去解答。因此，老師鼓勵我們可嘗試用其它方式來探索此雙曲線，進而朝我們的研究主題邁進。

[主題一]:三角形等面積線段移動產生的包絡現象與過定點等面積線段數量之探討。

我們想到，將ΔABC放在座標平面上，且設$A(0,0), B(a,0), C(b,c)$，由於過ΔABC周界上一點P必存在一條等面積線，且因爲三角形中線等分其面積。因此，我們可考慮當P在$\overline{CE}$(E爲$\overline{AC}$之中點)上移動時，其等面積線段$\overline{PQ}$之另一端點Q，必也同時在$\overline{BF}$(F爲$\overline{AB}$之中點)上移動，如(圖二之 1)。



(圖二之 1)

假設等面積線$\overleftrightarrow{PQ}: y = mx + k$

因爲 $\overleftrightarrow{AC}: y = m_1 x$(其中$m_1 = \dfrac{c}{b}$)

$\begin{cases} y = mx + k \\ y = m_1 x \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} x = \dfrac{k}{m_1 - m} \\ y = \dfrac{m_1 \cdot k}{m_1 - m} \end{cases}$ 即 $P(\dfrac{k}{m_1 - m}, \dfrac{m_1 k}{m_1 - m})$

$\begin{cases} y = mx + k \\ y = 0 \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} x = -\dfrac{k}{m} \\ y = 0 \end{cases}$ 即 $Q(-\dfrac{k}{m}, 0)$

因爲 ΔPAQ面積=$\dfrac{1}{2}\Delta ABC$面積，所以 $\dfrac{1}{2}(-\dfrac{k}{m})(\dfrac{m_1 k}{m_1 - m}) = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{2} ac$

整理得 $m_1 k^2 = \dfrac{1}{2} acm(m - m_1)$

$$m_1 (y - mx)^2 = \frac{1}{2} acm(m - m_1) \qquad (\text{以 } k = y - mx \text{ 代入})$$

$$m_1 (y^2 - 2mxy + m^2 x^2) = \frac{1}{2} acm(m - m_1)$$

$$m_1 y^2 - 2m_1 xym + m_1 x^2 m^2 = \frac{1}{2} acm^2 - \frac{1}{2} acm_1 m$$

$$(2m_1 x^2 - ac)m^2 + (acm_1 - 4m_1 xy)m + 2m_1 y^2 = 0$$

又因爲自ΔABC周界上一點P，作等面積線有且僅有一條等面積線，所以判別式=0

(若$2m_1 x^2 - ac = 0 \Rightarrow x^2 = \dfrac{ac}{2m_1} = \dfrac{ac}{2 \cdot \dfrac{c}{b}} = \dfrac{ab}{2} \Rightarrow x = \sqrt{\dfrac{ab}{2}}$ 爲ΔABC鉛直等面積線)

可得 $(acm_1 - 4m_1 xy)^2 - 4(2m_1 x^2 - ac)(2m_1 y^2) = 0$

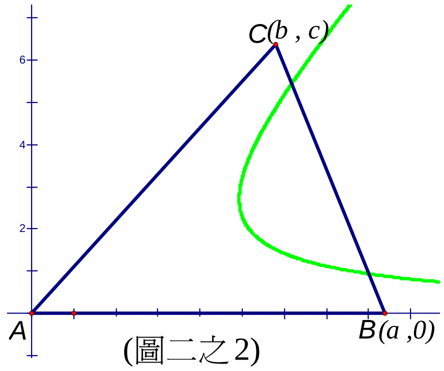
$$a^2c^2m_1^{\ 2}-8acm_1^{\ 2}xy+16m_1^{\ 2}x^2y^2-16m_1^{\ 2}x^2y^2+8m_1acy^2=0$$

$$8y^2-8m_1xy+acm_1=0$$

利用 GSP 軟體，我們繪出圖形如(圖二之 2)。

又此雙曲線圖形與等面積線還有哪些關係呢？

我們試著解下列聯立方程式：



(圖二之 2)

$$\begin{cases} y=mx+k & \cdots\cdots(1) \\ 8y^2-8m_1xy+acm_1=0 & \cdots\cdots(2) \end{cases}$$

(1) 代入 (2)

得 $8y^2-8m_1(\frac{y-k}{m})y+2(-\frac{k}{m})(\frac{m_1k}{m_1-m})m_1=0$ $\quad[\ \because ac=2(-\frac{k}{m})(\frac{m_1k}{m_1-m})\ ]$

$$8m(m-m_1)y^2-8m_1(y-k)\cdot y\cdot(m-m_1)+2m_1^{\ 2}k^2=0$$

$$4(m-m_1)^2y^2+4m_1(m-m_1)ky+m_1^{\ 2}k^2=0$$

$$[2(m-m_1)y+m_1k]^2=0$$

得 $y=\dfrac{m_1k}{2(m_1-m)}$ (重根)

$$x=\frac{(2m-m_1)k}{2m(m_1-m)}$$

即兩方程式圖形交於一點，可知：**三角形等面積線為某一雙曲線之切線。**

進而我們發現：

兩圖形交點座標$\left(\dfrac{(2m-m_1)k}{2m(m_1-m)},\dfrac{m_1k}{2(m_1-m)}\right)$為等面積線段 $\overline{PQ}$ 之中點座標。

接著，由 $8y^2-8m_1xy+acm_1=0$，可推得

當 $8y^2-8m_1xy=0$

$$\Rightarrow y(y-m_1x)=0$$

得 $y=0$，$y=m_1x$ 為 $8y^2-8m_1xy+acm_1=0$ 之圖形---雙曲線的漸進線。仔細一瞧，此兩條線竟然是 $\overleftrightarrow{AB}$ 、$\overleftrightarrow{AC}$。顯然，雙曲線之中心為 ΔABC 的頂點座標 A 點。

因此，綜合上述研究可得結論如下：

當 P 在 $\overline{CE}$ 上移動，其等面積線 $\overleftrightarrow{PQ}$ 所包絡出的曲線方程式假設爲 C_1 ，則

1. C_1 ：$8y^2-8m_1xy+acm_1=0$
2. $\overleftrightarrow{PQ}$ 爲 C_1 之切線
3. $\overleftrightarrow{PQ}$ 與 C_1 之交點座標爲 $\overline{PQ}$ 之中點座標$\left(\dfrac{(2m-m_1)k}{2m(m_1-m)}，\dfrac{m_1k}{2(m_1-m)}\right)$
4. C_1 之漸進線爲 $\overleftrightarrow{AB}$ (x 軸)、$\overleftrightarrow{AC}$ ($y=m_1x$)
5. 雙曲線 C_1 之中心爲 ΔABC 之頂點 A

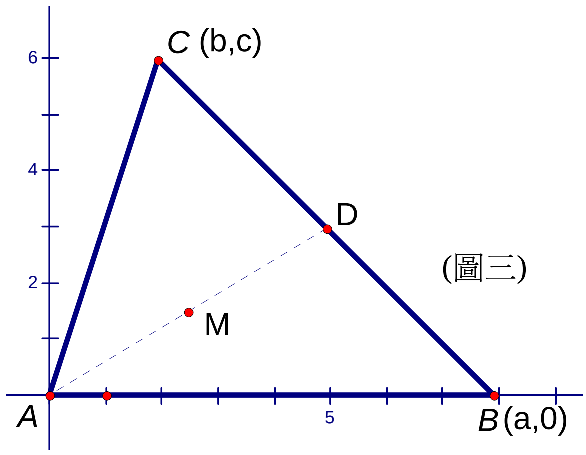
本想用同樣的方式，利用 G.S.P.軟體，透過旋轉功能，將三條雙曲線繪出。結果，我們發現利用 G.S.P 函數繪圖功能得到的圖形不能旋轉。因此，我們不得不還要再找出另二條雙曲線之關係式。還好，由結論我們知另外二條雙曲線之漸進線分別爲

$y=0(\overleftrightarrow{AB})$ 與 $y=m_2(x-a)$ (即 $\overleftrightarrow{BC}$) 及 $y=m_1x\,(\overleftrightarrow{AC})$ 與 $y=m_2(x-a)$

假設 C_2 ：$y(y-m_2x+m_2a)=K_2$ C_3 ：$(y-m_1x)(y-m_2x+m_2a)=K_3$

(1)因爲 $\overline{BC}$ 中點 $D(\dfrac{a+b}{2}，\dfrac{c}{2})\Rightarrow\overline{AD}$ 中點 $M(\dfrac{a+b}{4}，\dfrac{c}{4})$ 代入 C_2

$$\begin{aligned}\Rightarrow K_2&=\frac{c}{4}(\frac{c}{4}-m_2\cdot\frac{a+b}{4}+m_2a)\\&=\frac{c}{4}(\frac{c}{4}+m_2\cdot\frac{3a-b}{4})\\&=\frac{c}{4}(\frac{c}{4}+\frac{c}{b-a}\cdot\frac{3a-b}{4})\\&=\frac{c^2}{16}(1+\frac{3a-b}{b-a})\\&=\frac{c^2}{16}\cdot\frac{2a}{b-a}=\frac{ac^2}{8(b-a)}\\&=\frac{1}{8}acm_2\end{aligned}$$



(圖三)

$$\Rightarrow y(y-m_2x+m_2a)=\frac{1}{8}acm_2$$

所以 C_2 ：$8y^2-8m_2xy+8m_2ay-acm_2=0$ $(x=\dfrac{y}{m_2}+a-\dfrac{ac}{8y})$

(2)將 $\overline{AD}$ 中點 $M(\dfrac{a+b}{4}，\dfrac{c}{4})$ 代入 C_3

得 $K_3=(\dfrac{c}{4}-m_1\times\dfrac{a+b}{4})(\dfrac{c}{4}-m_2\times\dfrac{a+b}{4}+m_2a)$

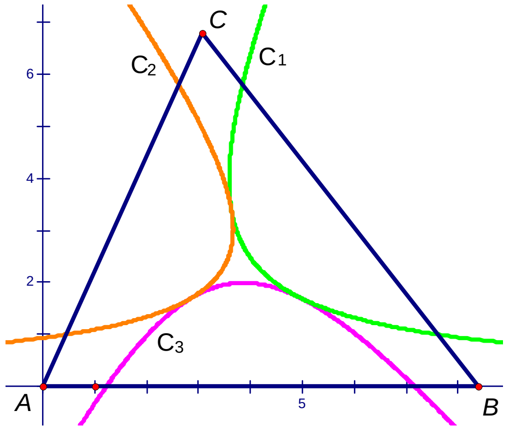
$$=(\frac{c}{4}-\frac{c}{b}\times\frac{a+b}{4})(\frac{c}{4}-\frac{c}{b-a}\times\frac{a+b}{4}+\frac{ac}{b-a})$$

$$=\frac{bc-ac-bc}{4b}\cdot\frac{bc-ac-ac-bc+4ac}{4(b-a)}$$

$$=\frac{(-ac)\cdot(2ac)}{16b(b-a)}$$

$$=\frac{-a^2c^2}{8b(b-a)}=-\frac{1}{8}a^2m_1m_2$$

得 $(y-m_1x)(y-m_2x+m_2a)=-\frac{1}{8}a^2m_1m_2$

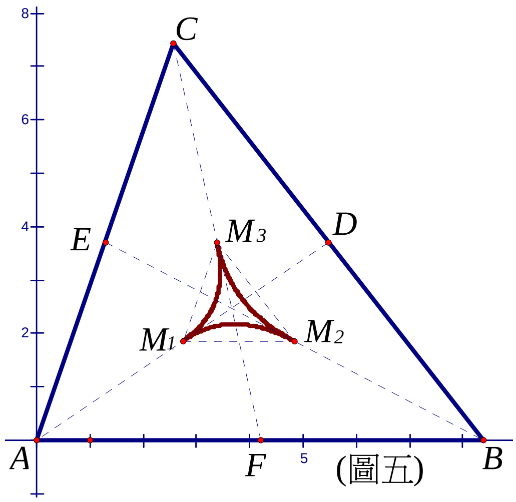


(圖四)

所以 C_3：$8y^2-8(m_2+m_2)xy+8m_1m_2x^2+8m_2ay-8m_1m_2ax+a^2m_1m_2=0$

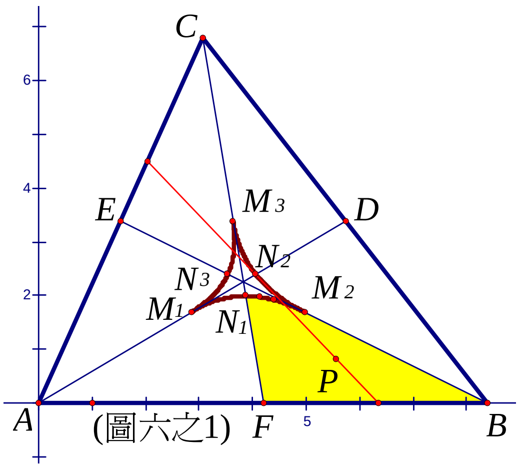
繪出 C_1、C_2、C_3 圖形如(圖四)

重新檢視，當動點 P 在 ΔABC 周界上繞時，其所有等面積線段之中點構造出封閉曲線 $M_1-M_2-M_3$(如圖五)，其中 M_1、M_2、M_3 分別為三中線 $\overline{AD}$、$\overline{BE}$、$\overline{CF}$ 之中點，且 N_1、N_2、N_3 分別為 $\overline{CF}$、$\overline{AD}$、$\overline{BE}$ 與 M_1-M_2、M_2-M_3、M_3-M_1 之交點。令我們好奇的是這條封閉曲線到底還有哪些特殊意義呢？

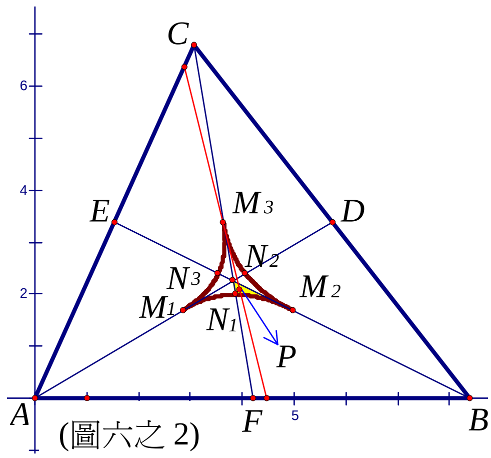


(圖五)

由前面的結論，我們得知 ΔABC 的等面積線是封閉曲線的切線。因此，只要能判定過定點 P 對於此條封閉曲線有幾條切線，就可確定，過 P 有幾條等面積線。針對這樣的事實，我們想到利用 ΔABC 三中線與封閉曲線的三條曲線段(M_1-M_2、M_2-M_3、M_3-M_1)及定點 P 的位置關係，即可判斷出是否有等面積線段？



(圖六之1)



(圖六之 2)

結果如下：

(1) P 點在圖六之 1 中，黃色區域(不含 $N_1 - M_2$ 曲線段)僅能作一條關於 $M_2 - M_3$ 曲線段之切線。所以，過此區域之定點 P 僅有一條等面積線段。

(2) P 點在圖六之 2 中，黃色區域(不含 $N_1 - M_2$ 曲線段)，可作兩條關於 $M_1 - M_2$ 曲線段之切線及一 條關於 $M_2 - M_3$ 曲線段之切線。所以，過此區域之定點 P 共有三條等面積線段。

(3) P 點在 $N_1 - M_2$ 曲線段上(不含 M_2)，則可作一條關於 $M_1 - M_2$ 曲線段之切線及一條關於 $M_2 - M_3$ 曲線段之切線。所以，P 在 $N_1 - M_2$ 曲線段上(不含 M_2)共有兩條等面積線段。至於 P 在 M_2 上則上述兩條切線合而為一。所以，僅有一條等面積線段，即中線 $\overline{BE}$ 。

利用(1)(2)(3)可類推出其它區域。因此，可得過定點 P ，ΔABC 之等分面積線段數量之結論：

(1) 若 P 點在 ΔABC 包絡區外側，則只有一條等面積線段。

(2) 若 P 點在 ΔABC 包絡區周界(M_1 、 M_2 、 M_3 除外)，則有兩條等面積線段。

(3) 若 P 點在 M_1 或 M_2 或 M_3 上，則只有一條等面積線段。

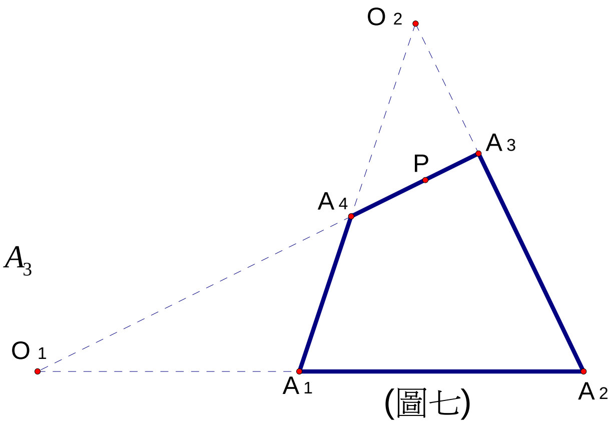
(4) 若 P 點在 ΔABC 包絡區內側，則共有三條等面積線段。

==

接下去，我們以三角形的研究結果當基礎，繼續探討四邊形的一般化問題。

[主題二]：凸四邊形 $A_1A_2A_3A_4$ 等面積線段產生的包絡現象及過定點等面積線段數量探討

一、 若四邊形 $A_1A_2A_3A_4$ 兩雙對邊皆不平行，我們想到可將兩雙對邊分別作延長(如圖七)，形成 $\Delta O_1A_2A_3$ 、 $\Delta O_2A_1A_2$ ，再將 P 點在四邊形 $A_1A_2A_3A_4$ 周界上移動形成的等面積線段 $\overline{PQ}$ 視為在 $\Delta O_1A_2A_3$ 、 $\Delta O_2A_1A_2$ 之 r_1 及 r_2 等分面積線段。



(圖七)

(其中 $r_1=\dfrac{\Delta O_1PQ}{\Delta O_1A_2A_3}$ ， $r_2=\dfrac{\Delta O_2PQ}{\Delta O_2A_1A_2}$)

但問題來了，現在已不是兩等分三角形面積，而之前三角形內部包絡區是由其所有等面積線段之中點構成。

基於上述疑問，我們須解決下面一般化問題：

> ΔABC 中， $A(0,0),B(a,0),C(b,c)$ ， P 爲 ΔABC 周界上的動點，作 $\overline{PQ}$ **(** Q 在 ΔABC 周界上**)**分割 ΔABC 面積，使得 $\Delta PAQ=r\Delta ABC$ 面積。則 $\overline{PQ}$ 與其包絡出的曲線有何關係？

假設 $\overleftrightarrow{PQ}:y=mx+k$

$\overleftrightarrow{AC}:y=m_1x$ (其中 $m_1=\dfrac{c}{b}$)

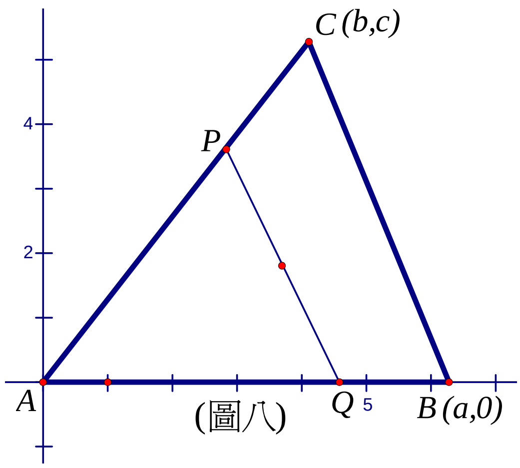
得 $P(\dfrac{k}{m_1-m},\dfrac{m_1k}{m_1-m})$ 、 $Q(-\dfrac{k}{m},0)$

因爲 ΔPAQ 面積$=r\Delta ABC$ 面積

所以 $\dfrac{1}{2}(-\dfrac{k}{m})(\dfrac{m_1k}{m_1-m})=r\times\dfrac{1}{2}ac$

$-\dfrac{m_1k^2}{m(m_1-m)}=rac$

$m_1k^2=racm(m-m_1)$



(圖八)

($k=y-mx$ 代入)

$m_1(y-mx)^2=racm(m-m_1)$

$m_1(y^2-2mxy+m^2x^2)=racm(m-m_1)$

$m_1y^2-2m_1xym+m_1x^2m^2=racm^2-racm_1m$

$(m_1x^2-rac)m^2+(racm_1-2m_1xy)m+m_1y^2=0$

又因爲自 ΔABC 周界上一點 P ，作 ΔPAQ 面積$=r\Delta ABC$ 面積只有一條等面積線

所以判別式=0

(若 $m_1x^2-rac=0\Rightarrow x^2=\dfrac{rac}{m_1}=\dfrac{rac}{\frac{c}{b}}=rab\Rightarrow x=\sqrt{rab}$ 爲 ΔABC 鉛直等面積線)

得 $(racm_1-2m_1xy)^2-4(m_1x^2-rac)(m_1y^2)=0$

$$r^2a^2c^2m_1^{\ 2}-4racm_1^{\ 2}xy+4m_1^{\ 2}x^2y^2-4m_1^{\ 2}x^2y^2+4rm_1acy^2=0$$

$4y^2-4m_1xy+racm_1=0$ ----------- 圖形仍為雙曲線

解下列聯立方程式：

$$\begin{cases} y=mx+k & \cdots\cdots\cdots(1) \\ 4y^2-4m_1xy+racm_1=0 & \cdots\cdots(2) \end{cases}$$

(1) 代入 (2)

得 $4y^2-4m_1(\dfrac{y-k}{m})y+(-\dfrac{k}{m})(\dfrac{m_1k}{m_1-m})m_1=0$ $\quad [\ \because rac=(-\dfrac{k}{m})(\dfrac{m_1k}{m_1-m})\ ]$

$$4m(m-m_1)y^2-4m_1(y-k)\cdot y\cdot(m-m_1)+m_1^{\ 2}k^2=0$$

$$4(m-m_1)^2y^2+4m_1(m-m_1)ky+m_1^{\ 2}k^2=0$$

$$\left[2(m-m_1)y+m_1k\right]^2=0$$

$\Rightarrow y=\dfrac{m_1k}{2(m_1-m)}$ (重根)

$x=\dfrac{(2m-m_1)k}{2m(m_1-m)}$

得兩方程式圖形交於一點，可知：$\overleftrightarrow{PQ}$ **為某一雙曲線之切線，且兩圖形交點座標**

$\left(\dfrac{(2m-m_1)k}{2m(m_1-m)},\dfrac{m_1k}{2(m_1-m)}\right)$ **為** $\overline{PQ}$ **之中點座標，即** $\overline{PQ}$ **之中點座標構造出包絡線。**

顯然兩等分三角形面積，僅是 r 等分三角形面積的特例而已。

利用這樣的結論，我們可得到

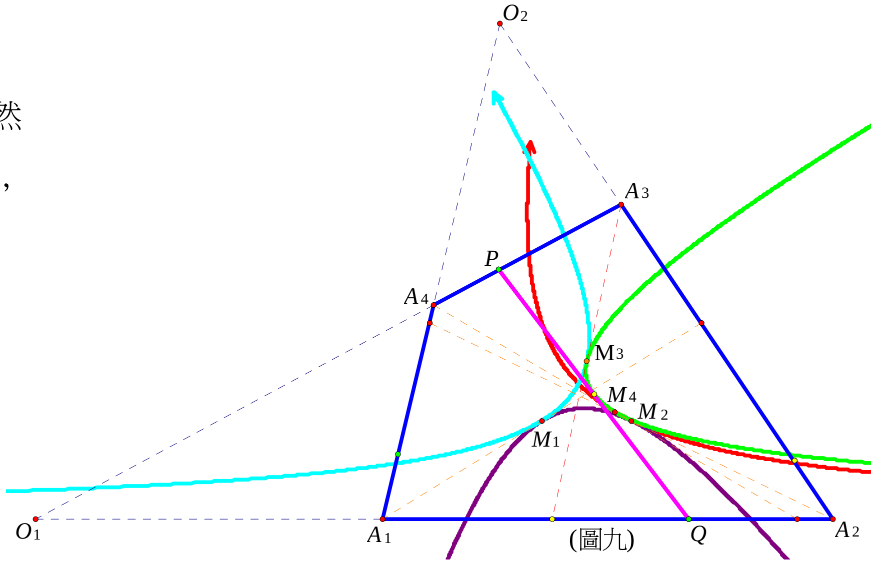
(1) 若凸 n **邊形的等面積線段可包絡出曲線，則此曲線必為雙曲線之一部分，且雙曲線的漸近線必為凸** n **邊形某二邊長的延長線。**

(2) 若凸 n **邊形的等面積線段可包絡出曲線，則此曲線必為其等面積線段之中點座標構造而成。**

==

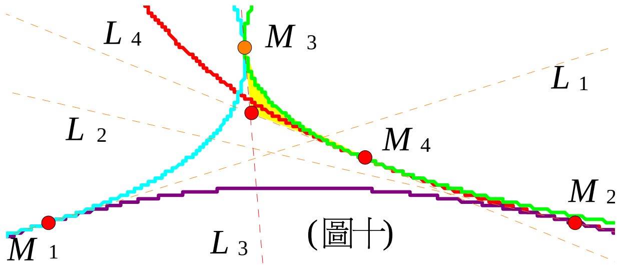
由上述結論，我們得知四邊形 $A_1A_2A_3A_4$ 的所有等面積線段中點構造出的曲線為數個雙曲線的組合。以(圖七)為例，由於可將 P 點在四邊形 $A_1A_2A_3A_4$ 周界上的移動，

視爲在$\Delta O_1A_2A_3$、$\Delta O_2A_1A_2$的部分移動。因此，可判斷出相關的曲線最多有四條，接著利用其漸近線及過頂點等面積線段中點座標，求出相關雙曲線的方程式，利用 *GSP* 繪圖如(圖九)。



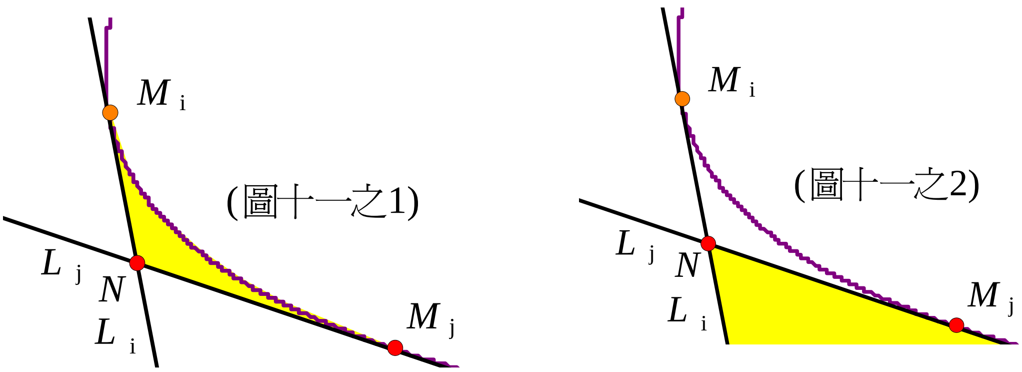
(圖九)

圖九中，包絡區內部顯然太小不容易討論。因此，我們將四邊形$A_1A_2A_3A_4$稍作調整，並將包絡區放大如(圖十)， 圖中L_1、L_2、L_3、L_4與M_1、M_2、M_3、M_4分別爲過頂點A_1、A_2、A_3、A_4之等面積線段與等面積線段中點。



(圖十)

接著，我們作出**[等面積線段判斷圖]**如下：



(圖十一之1)　(圖十一之2)

(1) 若P點在(圖十一之 1)黃色區域中(不含M_i-M_j曲線段)，則有兩條關於M_i-M_j曲線段之切線，即有兩條等面積線段。

(2) 若P點在(圖十一之 2)黃色區域中(不含$\overline{NM_j}$)，則有一條關於M_i-M_j曲線段之切線，即有一條等面積線段。

(3) 若P點在M_i-M_j曲線段上，則有一條關於M_i-M_j曲線段之切線，即有一條等面積線段。

利用**[等面積線段判斷圖]**，我們可判斷出(圖九)中

(1) 若P點在四邊形$A_1A_2A_3A_4$**包絡區外側，則只有一條等面積線段。**

(2) 若P點在四邊形$A_1A_2A_3A_4$**包絡區周界(**M_1、M_2、M_3**除外)，則有兩條等面積線段。**

(3) 若P**點在**M_1**或**M_2**或**M_3**上，則只有一條等面積線段。**

(4) P**點在**四邊形$A_1A_2A_3A_4$**包絡區內側，則共有三條等面積線段。**

所得結論，竟然與三角形等面積線段數量完全相同。為什麼會有這樣的結果？我們重新檢視(圖九)、 (圖十)，發現到一個很有趣的現象，即當P點從A_3移動到A_4時，其等面積線段的中點構造出M_3-M_4曲線段，接著繼續移動產生M_4-M_2曲線段。如果將曲線段延長成兩條雙曲線，我們可發現到當P點移動，其等面積線段的中點也跟著動且在M_4形成「**換軌**」現象。為什麼會有此「**換軌**」現象呢？

回到四邊形一開始的(圖七)，按照圖中O_1、O_2的交點位置，可推得

(1) $\Delta A_1A_2A_3 > \Delta A_1A_2A_4 > \Delta A_1A_3A_4$

所以存在等面積線段兩端點分別在$\overline{A_1A_2}$及$\overline{A_2A_3}$兩鄰邊移動，因此，可視為在$\Delta A_1A_2A_3$作r等分面積移動，其等面積線段中點所構成的曲線段之雙曲線必與$\overline{A_1A_3}$相交。

(2) 當$\Delta A_1A_2A_4 \neq \Delta A_2A_3A_4$

同(1)之推論，可得一雙曲線必與$\overline{A_2A_4}$相交。

(3) 當等面積線段之兩端點分別在$\overline{A_1A_2}$與$\overline{A_3A_4}$兩對邊移動，因此，可得一雙曲線與$\overline{A_2A_3}$相交。

(4) 同(3)之分析，可得第四條雙曲線與$\overline{A_1A_2}$相交。

綜合(1)(2)(3)(4)，在$\Delta A_1A_2A_4 \neq \Delta A_2A_3A_4$時，可得過$A_2$之三線段($\overline{A_1A_2}$、$\overline{A_2A_4}$、$\overline{A_2A_3}$)皆有一條雙曲線通過。因此，必存在有兩條雙曲線凹向相同形成內切，且在其中一條雙曲線的曲線段端點處(如圖九中的M_4)形成「換軌」。當

$\Delta A_1A_2A_4 = \Delta A_2A_3A_4$時，此「接軌」的曲線段($M_2 - M_4$)消失(即$M_2$與$M_4$重合)。

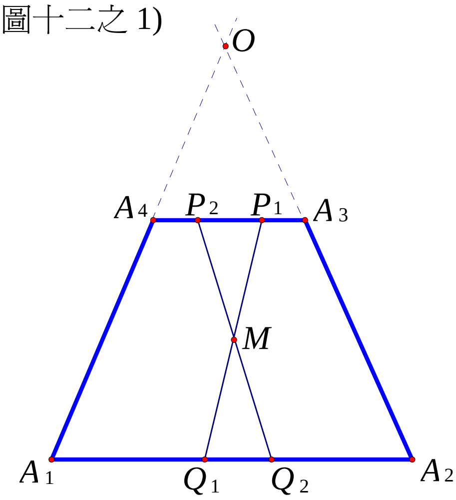
二、若四邊形$A_1A_2A_3A_4$中，$\overline{A_1A_2} // \overline{A_3A_4}, \overline{A_1A_2} \neq \overline{A_3A_4} \Rightarrow$即$A_1A_2A_3A_4$爲梯形。

當$\overline{A_1A_2} > \overline{A_3A_4}$，可延長$\overline{A_1A_4}$與$\overline{A_2A_3}$交於$O$，形如(圖十二之 1)

因爲$\Delta A_1A_3A_4 = \Delta A_2A_3A_4 < \Delta A_1A_2A_3 = \Delta A_1A_2A_4$

所以P自A_3移動至A_4，其等面積線段$\overline{PQ}$之Q點

必在$\overline{A_1A_2}$上移動，且等面積線段中點爲同一點。



(圖十二之1)

證明：1. 設過$\overline{A_3A_4}$上兩相異點P_1、P_2，

其等面積線段分別爲$\overline{P_1Q_1}$、$\overline{P_2Q_2}$

2. 令$\overline{P_1Q_1}$交$\overline{P_2Q_2}$於M

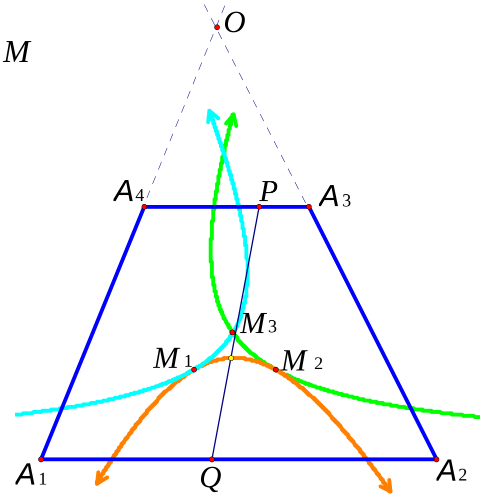
3. 因爲$\overline{A_1A_2} // \overline{A_3A_4}$　所以$\Delta P_1P_2M \sim \Delta Q_1Q_2M$

4. 又ΔP_1P_2M面積$= \Delta Q_1Q_2M$

可得$\Delta P_1P_2M \cong \Delta Q_1Q_2M$

$\Rightarrow M$爲$\overline{P_1Q_1}$、$\overline{P_2Q_2}$之中點

5. 即P自A_3移動至A_4時，其等面積線段的中點爲同一點。



(圖十二之2)

接著，P從A_4逆時針移動直到$\overline{PQ}$與過A_3的等面積線段重合時之過程，可視爲P、Q在ΔOA_1A_2上之移動。

因此，其等面積線段中點所構成的軌跡圖形如(圖十二之 2)　。

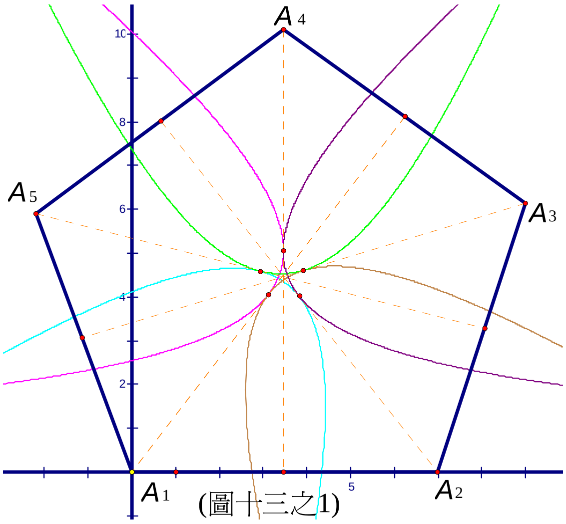
三、若$A_1A_2A_3A_4$爲平行四邊形，則等面積線段中點爲同一點，即平行四邊形$A_1A_2A_3A_4$之中心點。可得

1. 過中心點之等面積線段有無限多條。
2. 平行四邊形$A_1A_2A_3A_4$之中心點除外的點僅有一條等面積線段通過。

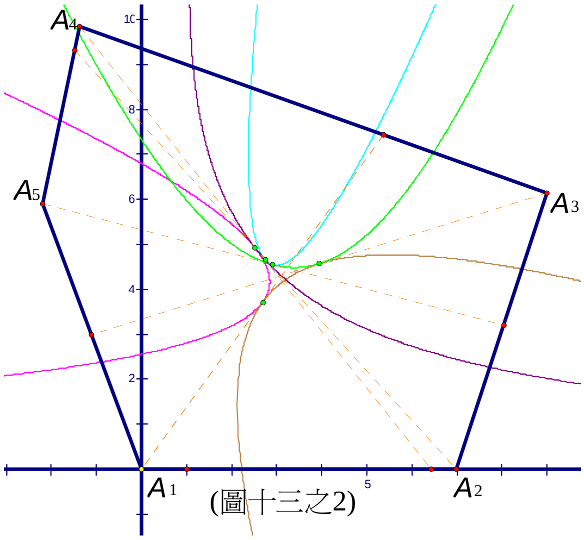
[主題三]：
凸 n 邊形 $A_1A_2.......A_n$ 等面積線段產生的包絡現象及過定點等面積線段數量探討。

經過三角形與四邊形等面積線段移動產生相關問題的研究，我們了解到要解決凸 n 邊形等面積線段數量之研究，首先須找出等面積線段中點所構造出的包絡區。由於包絡區是數個曲線段連接而成的封閉曲線，而每個曲線段端點是過頂點等面積線段之中點。因此，可推得凸 n 邊形所有等面積線段中點至多可構造出 n 條曲線段，當每條曲線段延長之後，可得共有等數量的雙曲線。

又這些雙曲線皆以 n 邊形某兩邊當漸近線，所以，同三角形的作法，我們可求出必要的方程式，再利用 *GSP* 繪出圖形。以五邊形為例，我們繪出圖形(如圖十三之 1、2)。

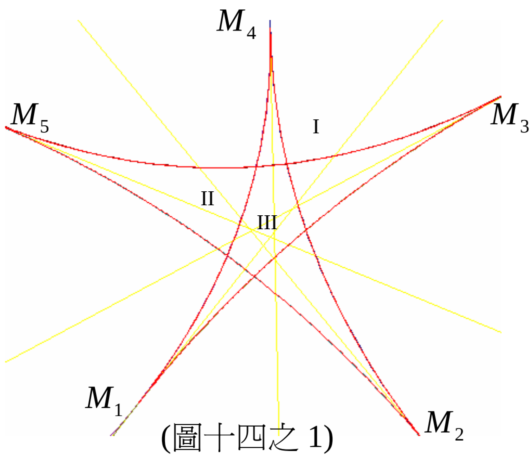


(圖十三之1)

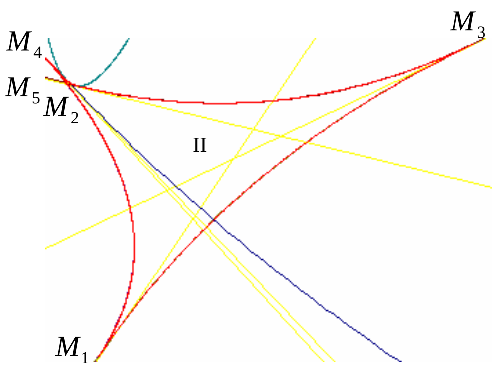


(圖十三之2)

將(圖十三之 1、2)中的包絡區放大得(圖十四之 1、2)。



(圖十四之 1)



(圖十四之 2)

利用「等面積線段判斷圖」可得過定點 P 之等面積數量如下表：

P 點位置 數量 圖形類別	I		II		III
圖十三之 1	1	2	3	4	5
圖十三之 2	1	2	3		

(PS ：1.表中等面積數量為偶數時，表示 P 點在相鄰兩層之曲線段上[不含曲線段交點]。

2.若 P 在曲線段交點上，則等面積數量為與 P 相鄰之內層的數量減 2 條。)

比較(圖十三之 1、2)及上表，我們發現(圖十三之 1)雙曲線皆外切，過定點其等面積線段數量最大值等於其邊數；而(圖十三之 2)其中一條雙曲線與另兩條雙曲線形成內切，造成「換軌」現象，過定點的等面積線段數量最多僅 3 條，比其邊數少 2。又因為在四邊形的探討中，我們得知，四邊形在兩邊皆不平行，且其兩條對角線都不是等面積線段的條件下，必然形成「換軌」，其等面積線段數量最多 3 條比其邊數少 1。

為什麼四邊形與五邊形會有此差異性呢？

針對此疑惑？我們想到凸 n 邊形等面積線段產生的雙曲線有內切情況，則必產生「換軌」現象，其等面積線段數量也隨之減少。若等面積線段數量要最大，則凸 n 邊形等面積線段產生的雙曲線皆須以「外切」來相連，那麼其圖形會是如何？以下是我們對凸 n 邊形的探討：

由於在前面的研究過程中，我們常常會利用到：當等面積線段 $\overline{PQ}$ 之兩端點在某兩條不平行的邊上移動時，其中點所構成的曲線段之雙曲線必通過此二邊延長所形成的三角形之第三邊。反之，當等面積線段 $\overline{PQ}$ 之兩端點在某兩條平行的邊上移動時，會是如何？

<性質> 已知凸 n 邊形 $A_1A_2...A_n$ 中，$\overline{A_iA_{i+1}} // \overline{A_jA_{j+1}}$ ，當且過 A_i 、 A_{i+1} 的等面積線段 $\overline{A_iB_i}$ 、 $\overline{A_{i+1}B_{i+1}}$ 之端點 B_i 、 B_{i+1} 皆在 $\overline{A_jA_{j+1}}$ 上時，則

(1) $\overline{A_iB_i}$ 與 $\overline{A_{i+1}B_{i+1}}$ 之交點 M ，為此兩線段之中點。

(2) 若 P 點在 $\overline{A_iB_i}$ 上，則過 P 點之等面積線段亦必經過 M 。(如圖十五)

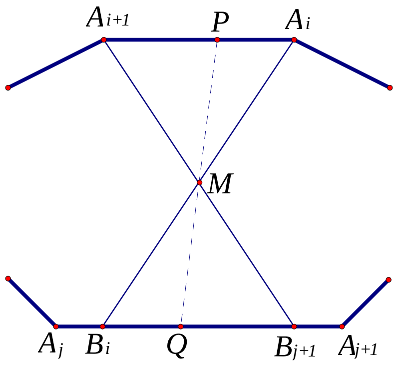
證明：(1) ① 因爲$\overline{A_iA_{i+1}} // \overline{A_jA_{j+1}}$

所以$\Delta A_iA_{i+1}M \sim \Delta B_iB_{i+1}M$

② 又$\Delta A_iA_{i+1}M$ 面積$= \Delta B_iB_{i+1}M$ ，

可得$\Delta A_iA_{i+1}M \cong \Delta B_iB_{i+1}M$

即M 爲$\overline{A_iB_i}$ 、$\overline{A_{i+1}B_{i+1}}$ 之中點



(圖十五)

(2) ① 作$\overrightarrow{PM}$ 交$\overline{B_iB_{i+1}}$ 於Q

② 因爲$\overline{A_iM} = \overline{B_iM}$ ，且$\overline{PA_i} // \overline{B_iQ}$ ，所以$\Delta A_iPM \cong \Delta B_iQM$

即$\overline{PQ}$爲凸n邊形$A_1A_2...A_n$之等面積線段

又因爲過p之等面積線段只一條，所以過P點之等面積線段必經過M

由上述性質可推得

. 1.若凸n邊形具有k組平行邊符合〈性質〉中之條件，則曲線段之端點必少k個。換言之，曲線段所在的雙曲線也必少k條。

2.若凸n邊形符合下列兩條件

(1)所有對角線皆不爲等面積線段

(2)等面積線段兩端點所在的兩邊皆不平行

則過頂點等面積線段必有n條

$\Rightarrow$過頂點等面積線段中點必有n點

$\Rightarrow$所有等面積線段中點構造出的曲線段必有n段

$\Rightarrow$曲線段所在的雙曲線共n條

對於等面積線段兩端點所在的兩邊不平行，則等面積線段可視爲以此兩邊延長所構成的三角形r等分面積之移動，可得一曲線段，且含此曲線段之雙曲線必過第三邊。因此，每一曲線段對應到一條對角線〈或一邊〉爲了方便說明，我們先給出一些符號意義：

C_i ：第i條曲線段

S_i ：將C_i曲線段延長後之雙曲線最先經過的線段(此曲線段爲凸n邊形之邊或對角線)

我們把對應關係寫成$C_i \leftrightarrow S_i$

利用此對應關係，可把等面積線段移動產生的曲線段C_i轉化成S_i之研究。

接著，我們寫出曲線段所在的雙曲線要形成以「外切」相連的要件：

1. 過凸n邊形同一頂點不能有三條以上的S_i。否則，必產生內切。

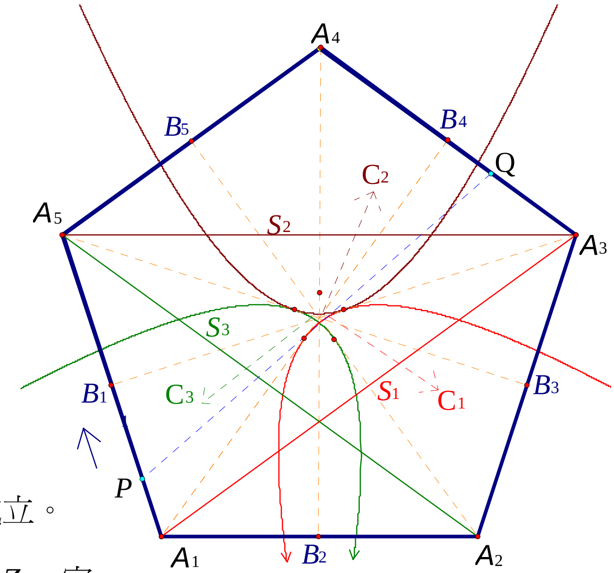
2. 連續三條S_i不能以「Z」字形狀相連接。否則，必產生內切。

又凸n邊形$A_1A_2...A_n$，當P點從A_1做順(逆)時針移動，其**等面積線段$\overline{PQ}$必先與最靠近的過頂點等面積線段重合**。以(圖十六)正五邊形來說明(圖中B_1、B_2、B_3、B_4、B_5分別爲邊上中點)，其移動過程如下：

P從$A_1 \to B_1$得$S_1=\overline{A_1A_3}$

$B_1 \to A_5$得$S_2=\overline{A_3A_5}$

$A_5 \to B_5$得$S_3=\overline{A_5A_2}$

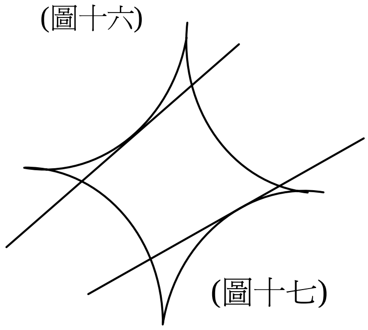


(圖十六)

依序連接所有S_i必形成封閉圖形。

由等面積線段移動可得

1. 四個以上曲線段外切如(圖十七)，必不成立。
2. 任兩條S_i必有交點。[即連續3條S_i以「Z」字形狀相連接之圖形不存在]。


(圖十七)

根據這些推論，若凸n邊形曲線段所在的雙曲線要形成以「外切」來相連，則完成所有S_i之連接必須符合：

(1) 當$n=2m+1$，則兩相鄰S_i之連接須相隔$m-1$個頂點。

(2) 當$n=2m$，則兩相鄰S_i之連接須相隔$m-1$(或m)個頂點。

若不如此，必與上述推論相牴觸。

因此，可推得S_i**之路徑完成，過程是以"V"字型前進**。

(1) 當$n=2m+1$

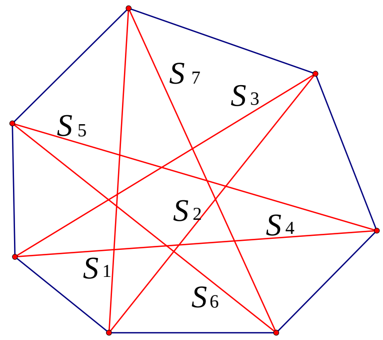
從A_1出發，考慮"V"字型的完成，第一次需3個頂點相連，即

$A_1 \xrightarrow{S_1} A_{m+1} \xrightarrow{S_2} A_{2m+1}$。

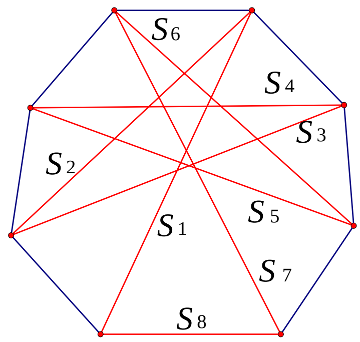
其左右兩側各剩 $(m-1)$ 個頂點，而後續每增一個 $''V''$ 字型的完成，左右各需取一頂點。因此，再經 $(m-1)$ 個 $''V''$ 字型後，路徑通過所有頂點到達 A_{m+2}。最後，連接 $\overline{A_1A_{m+2}}$ 完成星字型之路徑。(如圖十八之 1 為七邊形 S_i 星字型路徑)

(2) 當 $n=2m$

仿上之推論，由於第一次 $''V''$ 字型的完成需 3 個頂點，可知第一次 $''V''$ 字型之後左右兩側頂點數奇偶性不同。因此，不能完成如凸 $2m+1$ 邊形之 S_i 星字型路徑。如(圖十八之 2)。



(圖十八之1)



(圖十八之2)

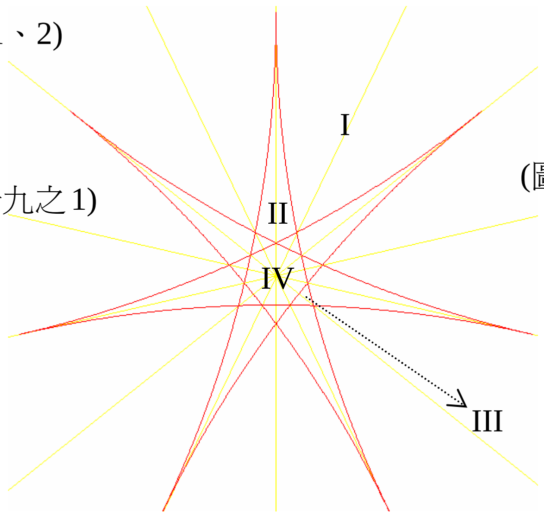
從(圖十八之 1、2)可發現七邊形符合外切之要件，而八邊形呈現出「Z」字形狀相連接，所以圖形不存在]。S_8 與 S_2、S_3、S_4、S_5、S_6 無交點，會形成內切現象。

由上述推論，我們得凸 $2m$ 邊形不符合曲線段所在的雙曲線「外切」相連的要件。換言之，必有「內切」相連，所以存在「換軌」。

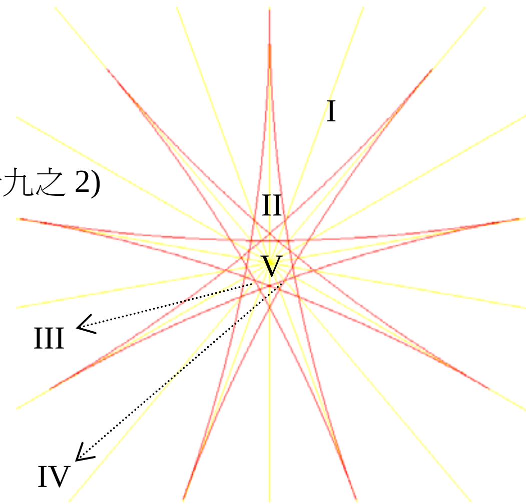
至於凸 $2m+1$ 邊形，以正 $2m+1$ 邊形來說明由於過頂點等面積線段所在的直線剛好為其對稱軸。因此，其所有過頂點等面積線段之中點剛好形成另一個正 $2m+1$ 邊形之頂點。

將這些中點以 $''V''$ 字型方式加上兩點之間以曲線段連接可得其包絡區。(如圖十九之 1、2)

(圖十九之 1)



(圖十九之 2)



由(圖十九之 **1**、**2**)可得等面積數量如下表：

P 點位置 數量 圖形類別	**I**		**II**		**III**		**IV**		**V**
正七邊形	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**		
正九邊形	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**

(**PS：1.**表中等面積數量爲偶數時，表示 P 點在相鄰兩層之曲線段上**[**不含曲線段交點**]**。

2.若 P 在曲線段交點上，則等面積數量爲與 P 相鄰之內層的數量減 **2** 條。**)**

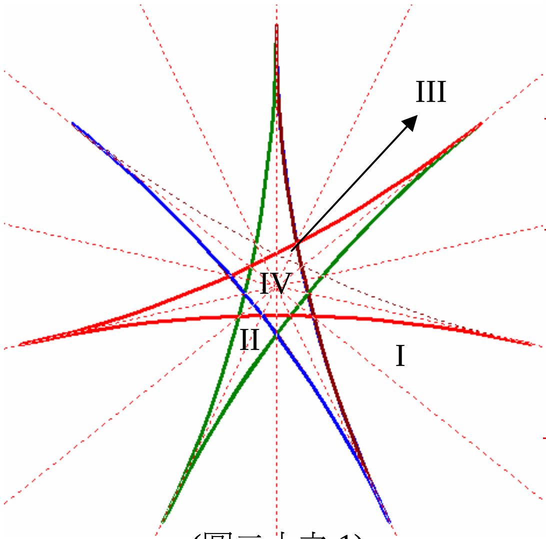
從上表發現當動點 P 從包絡區最內層往外移動到相鄰的外層時，其等面積線段數量會減少 2 條。

理由：因爲 P 點由包絡區內層往相鄰外層移動時，原兩層之共用曲線段對於 P 點位置而言，從曲線段外側變成內側。所以會減少 **2** 條切線，即等面積線段數量減少 **2** 條。

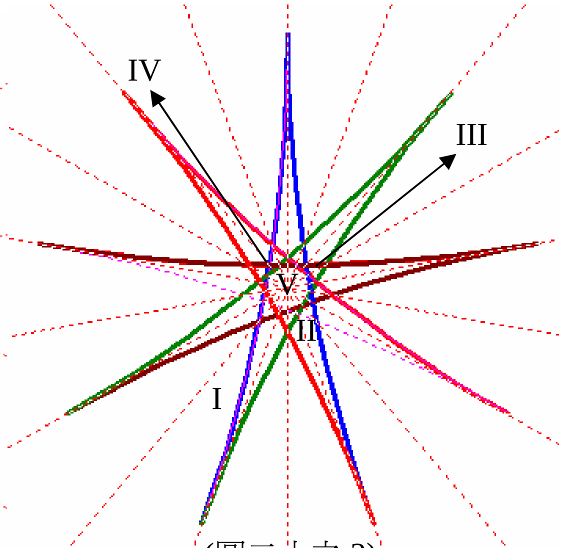
將結果擴展到正 $2m+1$ 邊形，可得正 $2m+1$ 邊形其內部被等面積線段中點所構成的包絡曲線分成 $m+1$ 區，且包絡曲線最內層爲類似正 $2m+1$ 邊形，其周界爲所有曲線段的一部份所構成，此層共有 $2m+1$ 條等面積線段數量，接著往外依次每層減少 **2** 條。**(**同正七、正九邊形之理由)

在前面的討論中，我們得到曲線段所在的雙曲線要形成以「外切」相連，其 S_i 之路徑是以 $''V''$ 字型前進，最後形成星字型之路徑。考慮對應關係 $C_i \leftrightarrow S_i$ ，可得 C_i 之路徑還是以 $''V''$ 字型連接各曲線段，最後形成星字型之封閉曲線。至於，具有此類型之封閉曲線的凸 n 邊形，是否定點 P 在包絡區最內層一定有 n 條等面積線段呢？經過研究，我們寫出下列結論：

由於包絡區是由〝V〞字型曲線段所連接而成。因此，對於包絡區最內層一點 P ，若 P 所在區域被 k 個連續〝V〞字型所包圍，又每個〝V〞字型是由兩個相連曲線段所構成。所以，與 P 所在區域相關之曲線段端點共 $(2k+1)$ 個。即過 P 必有 $2k+1$ 條等面積線段。(如圖二十之 1、2)



(圖二十之 1)


(圖二十之 2)

圖中第 k 區，被 $k-1$ 個〝V〞字型所包圍。所以，當 P 點在第 k 區共必有 $2k-1$ 條等面積線段。

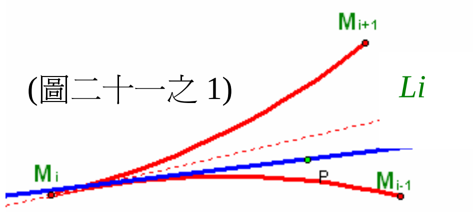
理由：因為有 $(2k+1)$ 個曲線段端點，所以過此 $(2k+1)$ 個端點共有 $(2k+1)$ 條等面積線段。對於任意兩條相接曲線段 $M_{i-1}-M_i$ 與 M_i-M_{i+1} 及過 M_i 之等面積線段 L_i，P 所在位置有 3 種可能(如圖二十一之 1、2、3)：

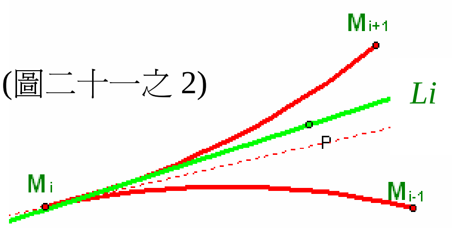
〈1〉 當 P 落在 L_i 與 $M_{i-1}-M_i$ 之內側，過 P 可作一條 $M_{i-1}-M_i$ 曲線段之切線。

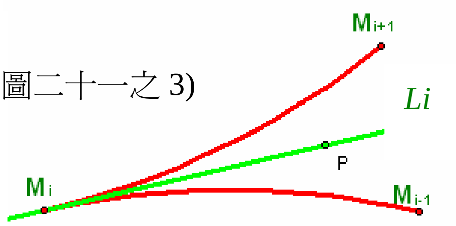
〈2〉 當 P 落在 L_i 與 M_i-M_{i+1} 之內側，過 P 可作一條 M_i-M_{i+1} 曲線段之切線。

〈3〉 當 P 落在 L_i 上，則 $\overleftrightarrow{PM_i}$ 為 $M_{i-1}-M_i$ 與 M_i-M_{i+1} 之公切線。

顯然，不管 P 點位置如何？在此情形下過 P 必有一條等面積線段與 $M_{i-1}-M_i$ 或 M_i-M_{i+1} 曲線段相切。

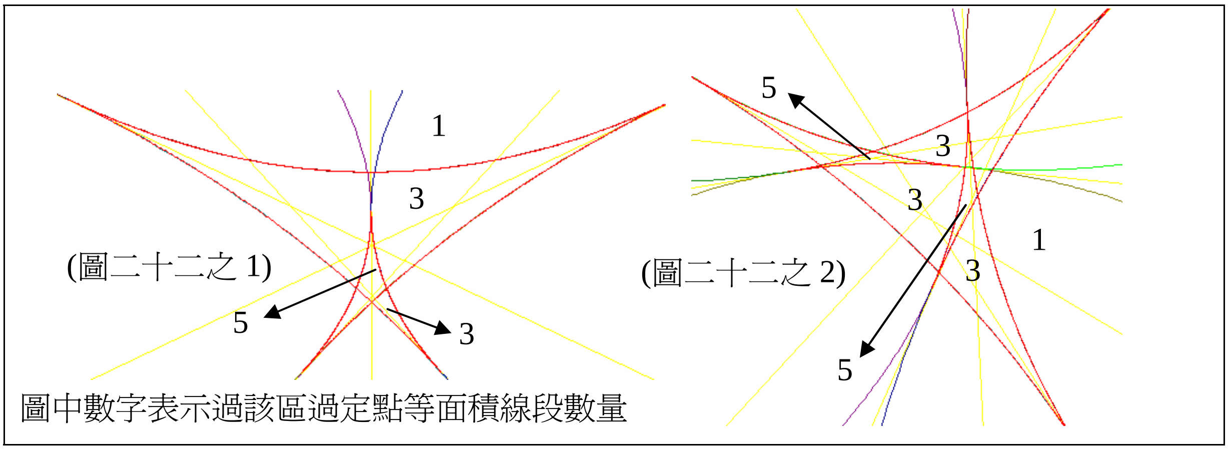
(圖二十一之 1)


(圖二十一之 2)


(圖二十一之 3)


因此，對於凸 n 邊形曲線段所在的雙曲線皆以「外切」相連時，當定點 P 位在包絡區最內層時，其等面積線段數量不一定有 n 條。又當 P 由最內層往外層移動時必減

少 2 條，接著繼續往相鄰外層移動，可視相鄰兩層共用之曲線段凹向來決定增加或減少兩條。(如圖二十二之 1、2)



(圖二十二之 1)　(圖二十二之 2)

圖中數字表示過該區過定點等面積線段數量

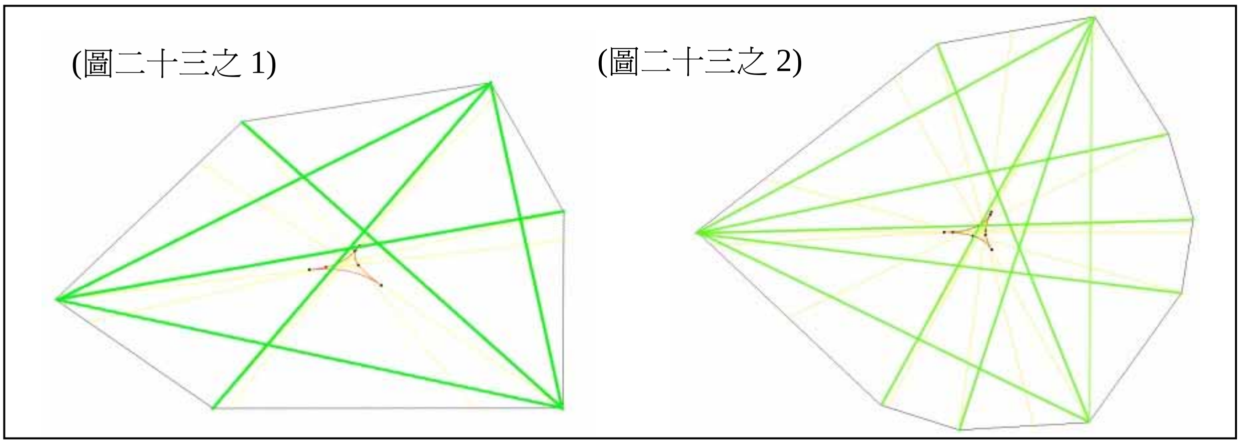
接著，考慮凸$2m$邊形，討論如下：

因為對於每一個凸$2m$邊形，必可找到幾乎與其全等的凸$2m+1$邊形，又此時凸$2m+1$邊形過定點等面積線段數量最多為$2m-1$，即凸$2m$邊形過定點等面積線段數量最多有$2m-1$條，且存在於包絡區的最內層，其餘各層結果必與奇數邊結論同。

最後，我們重新檢視$C_i \leftrightarrow S_i$的對應關係，發現：

「換軌」的形成必產生於當凸 n 邊形的頂點只接一條S_i，且「換軌點」必為過此頂點的等面積線段中點。

理由：若存在凸 n 邊形頂點(假設為A_j)只有接一條S_i，則此條S_i之另一端點(假設為A_k)，接三條以上S_i (其中與A_j相連之S_i必落在所有與A_k相連S_i之內側)。且相鄰三條S_i所對應到的三條曲線段C_i必存在中間的C_i與相鄰兩條C_i的其中一條形成內切。因此，可得「換軌」。且「換軌點」必為兩內切C_i之切點，由於此切點是相鄰兩曲線段的端點，所以可得「換軌點」必為過A_j的等面積線段中點。(如下圖二十三之 1、2)


(圖二十三之 1)　(圖二十三之 2)

[圖二十三之 1]：頂點只接一條 S_i 的共有 3 個頂點，所以共有 3 個換軌點，即此六邊形最多有三(6-3)條等面積線段 [圖二十三之 2]：頂點只接一條 S_i 的共有 6 個頂點，所以共有 6 個換軌點，即此九邊形最多有三(9-6)條等面積線段

至此，我們心中的疑惑大致解除，當然內容還有很多可探討的地方，惟時間不足與能力有限，盼望同好予以指教。

五、 結論

一. ΔABC 中，$A(0,0), B(a,0), C(b,c)$，P 為周界上的動點，則其等面積線段 $\overline{PQ}$ 中點共構造出三條曲線段(雙曲線的一部分)，假設分別為 C_1 、C_2 、C_3，可得

	方程式	漸進線	中心
C_1	$8\ y^2-8m_1xy+acm_1=0$	$\overleftrightarrow{AB}$ 、$\overleftrightarrow{AC}$	A
C_2	$8y^2-8m_2xy+8m_2ay-acm_2=0$	$\overleftrightarrow{BC}$ 、$\overleftrightarrow{AB}$	B
C_3	$8y^2-8(m_2+m_2)xy+8m_1m_2x^2+8m_2ay-8m_1m_2ax+a^2m_1m_2=0$	$\overleftrightarrow{AC}$ 、$\overleftrightarrow{BC}$	C

其中 $\overleftrightarrow{PQ}$ 為曲線段之切線。

二. 若凸 n 邊形的等面積線段之中點構造出一曲線段。則包含此曲線段之雙曲線其漸近線必為 n 邊形某兩邊長的延長線。

三. 凸 $2m+1$ 邊形中

1. 所有等面積線段之中點構造出的封閉曲線段，將形內分成若干區，每相鄰兩區過定點等面積線段數量相差兩條。
2. 過定點等面積線段數量最多有 $2m+1$ 條。

四. 凸 $2m$ 邊形曲線段所在的雙曲線必有「內切」相連，所以存在「換軌」。過定點等面積線段數量最多有 $2m-1$ 條。

五. 若凸 n 邊形有 k 個「換軌點」，則此 n 邊形過定點等面積線段至多有 $n-k$ 條。

六. 過定點等面積線段數量：

<table>
<tr><td>P 點位置
數 量
圖形類別</td><td colspan="2">I</td><td colspan="2">II</td><td colspan="2">III</td><td>IV</td><td>⋯</td><td>第 $m+1$ 區
(最內層)</td></tr>
<tr><td>正 $2m+1$ 邊形</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td><td>7</td><td>⋯</td><td>$2m+1$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">正 $2m$ 邊形</td><td colspan="5">當 P 不在中心點</td><td colspan="4">當 P 在中心點</td></tr>
<tr><td colspan="5">1</td><td colspan="4">無限多條</td></tr>
</table>

(*PS* **：1.**表中等面積數量爲偶數時，表示 P 點在相鄰兩層之曲線段上**[**不含曲線段交點**]**。

2.若 P 在曲線段交點上，則等面積數量爲與 P 相鄰之內層的數量減 **2** 條。**)**

陸、參考資料

一、高中數學第四冊

二、黃文達教授個人網站

http://math.ntnu.edu.tw/~hwangwd/

三、第三十一屆科展高中組

三角形分割線形成的包絡線------作者：陳旻宏

四、〔幾何學辭典〕

P.460 第 2098 題與 P.486 第 2209 題

部貞布郎原著、九章編輯部譯。

中華民國第四十五屆中小學科學展覽會
評　　語

國中組 數學科

030427
凸n邊形等面積線段數量之分布探索

臺北縣立福和國民中學

評語：
有趣的研究問題，搭配GSD軟體的呈現，亦增添生動性。惟報告內容之畫面繕寫仍有進步的空間，此外，數學名詞的使用亦須注意其精準性。