中華民國第四十五屆中小學科學展覽會
作品說明書

國中組 數學科

第三名

030426

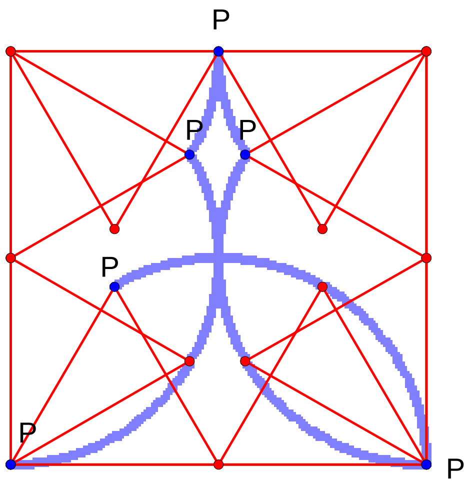
迷途知返

臺北縣立福和國民中學

作者姓名：
國二 鄭維鈞 國二 楊智皓 國二 羅涵之
國二 吳紹慈

指導老師：
吳安振 辛慈宜

迷 途 知 返



摘要

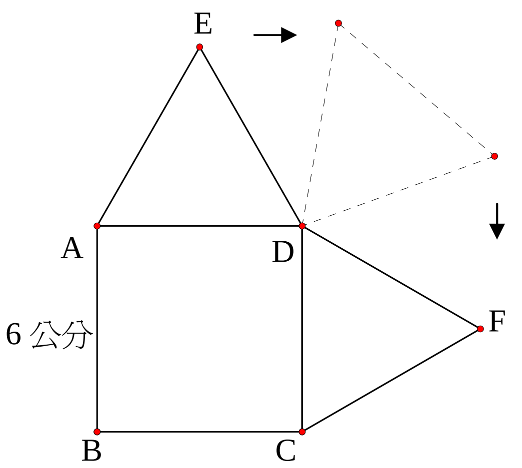
首先，我們從研究關於邊長比為 1：2 的圖形開始，因為剛起步沒有頭緒，也無從下手，於是我們展現人類本能『**土法煉鋼**』，搬出圓規、直尺等一堆工具，徒手繪圖（慢慢畫的方法實在有夠遜!!)，以小正三角形或正方形，甚至是正多邊形去繞大正方形和其他正多邊形內部周圍，一開始很順利，但是當 n 愈來愈大的時候，困擾就產生了；因此激發了我們人類潛能，改以「**自轉**」、「**公轉**」方法，並試著研究正 N 邊形旋轉正 M 邊形(M＞N)，導出公式。

最後，加上 p 的改變，挫折越滾越多，正處於百思不解、困阨之際，所謂:「山不轉路轉，路不轉人轉。」，惟有發揮人類極致的韌性，再以「**機率分配、樹狀圖**」的觀念加持，當能迎刃而解，找出**圈數**與**軌跡長度**之規律，再逐步推廣到邊長比為 1：P。

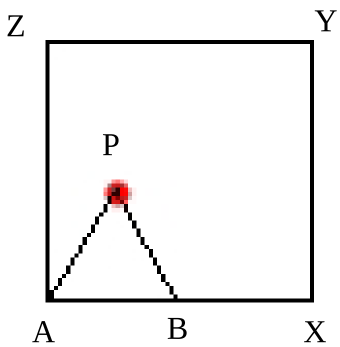
壹、　研究動機

在南一書局第 2 冊第 3 章中，提到「角的度量與弧度」時，延伸教材有一道「91 年基本學測(一)」的試題：「如下圖(一)，有一個邊長為 6 公分的正方形 ABCD，在此正方形的兩邊上放置兩個邊長為 6 公分的正三角形(△ADE、△FDC)。試問當△ADE 以 D 為圓心順時鐘旋轉至與△FDC 完全重合時，E 點所經過的路線長為多少?」，當同學解出答案後，老師就順勢出

道題目”如下圖(二)，正三角形 ABP(邊長 1)置於正方形 AXYZ(邊長 2)內，將正三角形 ABP 沿著正方形邊長順時針方向轉動，請問要經過多少路途才能**歸定位**？”，幾個不知天高地厚的小子就這樣上當囉!!!



(圖一)



(圖二)

貳、 研究目的

正 N 邊形旋轉正 M 邊形(M > N)，圈數與軌跡是否有規律？N 與 M 是否可為任意數？與數學某個性質是否相關聯？

參、 研究設備及器材

紙、筆、gsp 數學軟體、益智玩具。

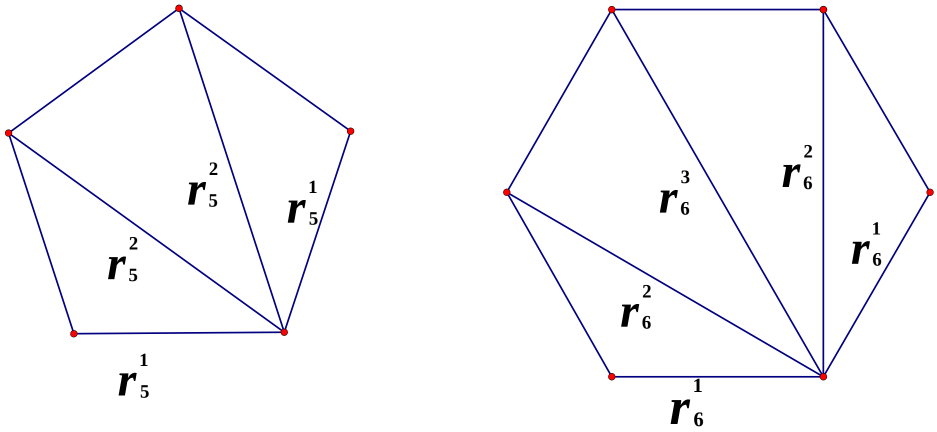
肆、 研究過程

俗話說：「萬事起頭難。」面對這樣看似複雜的問題，我們就以戰戰兢兢的心態來面對。首先讓我們先來小試身手，以徒手繪圖的方法來觀察，看能不能找出規律：

定義：

1. r_n^x：正 n 邊形中，為分類不同長度的旋轉半徑，所使用的名稱。

例如：



2. θ_m ：正 m 邊形任一內角。

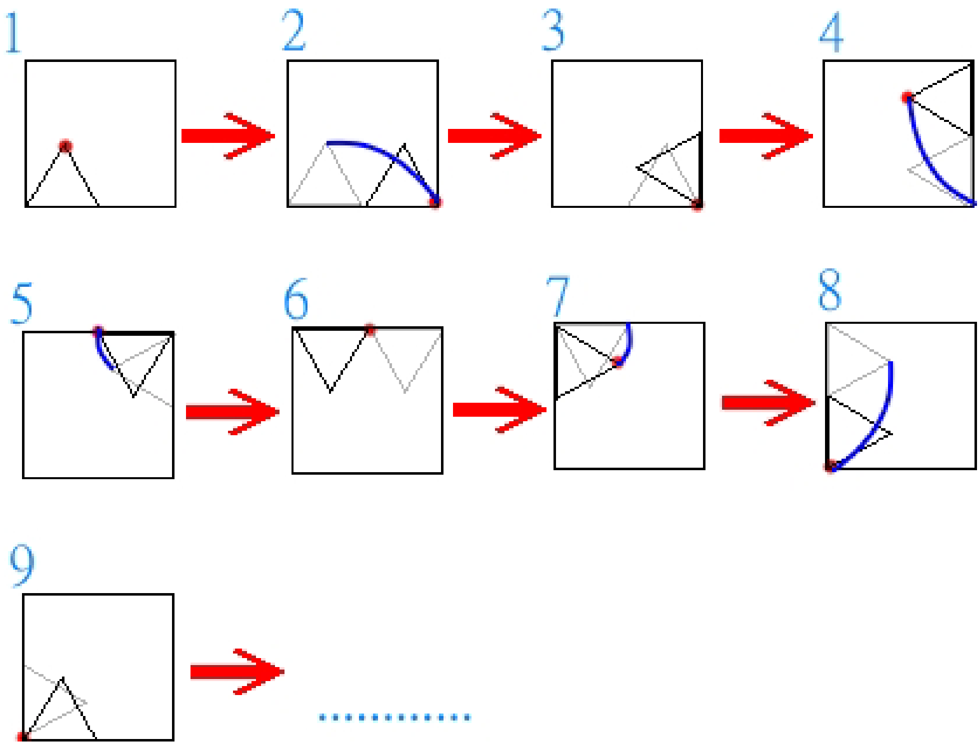
例如：$\theta_4 = \mathbf{90}°$ 、$\theta_5 = \mathbf{108}°$

3. $\mathbf{R}_n^{pm} = \dfrac{[pm,n]}{pm}$ ：正 n 邊形→正 m 邊形，邊長比爲 1：P 的圈數

研究過程(一)

一、正三角形繞正方形邊上旋轉（ 邊長比 1 : 2)：

(一) 圈數：



由上圖可知，小三角形轉大正方形一圈，小三角形上的 P 點會以順時針的方向前進兩個頂點位置，因此，轉三圈後就能回到原定點。

(二) 軌跡路徑長：

由上圖中分析，發現每**六步**中，必有二大步(旋轉120°)、二小步(旋轉30°)、二步不動，**相當於**每三步中，必有一大步、一小步、一步不動，所以三角形轉三圈，每圈走 8 步，且旋轉半徑爲三角形邊長（ $r_3^1=1$)，則：

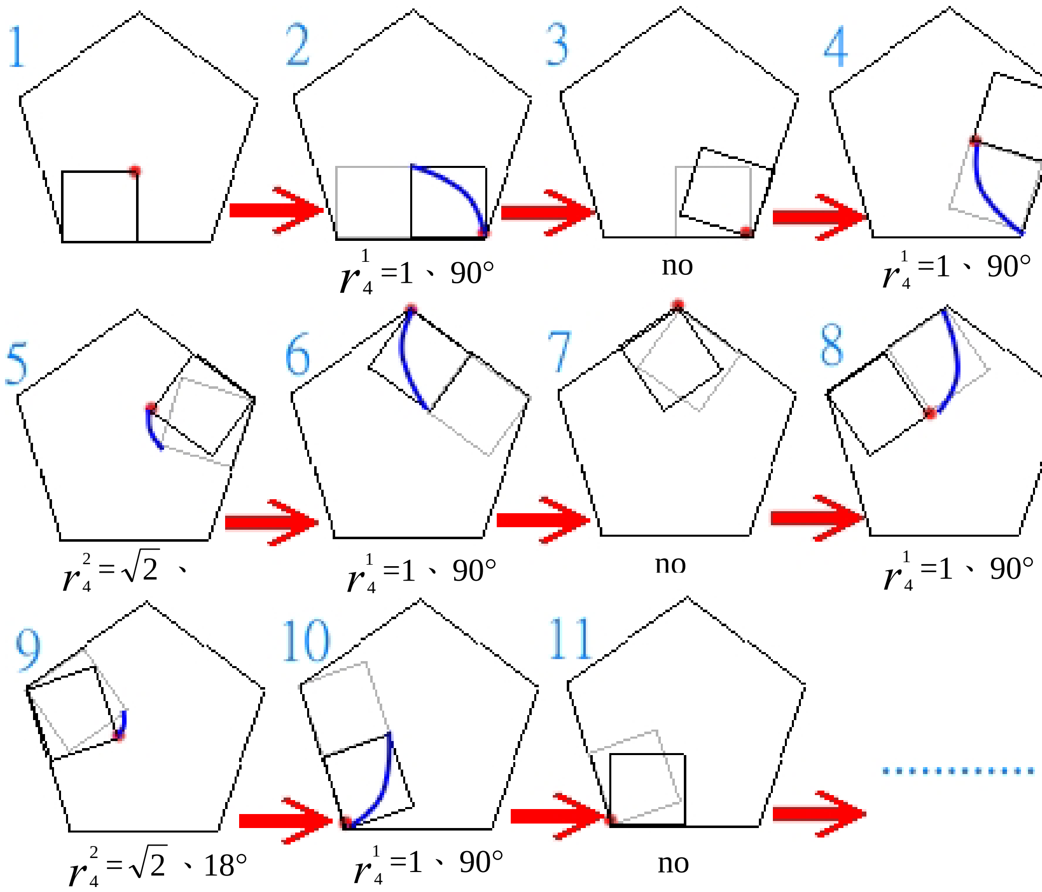
P 點所走的路徑長＝$(\dfrac{120°+30°}{360°})\times 3\times 8\times \dfrac{1}{3}\times 2\pi\times 1=\dfrac{20\pi}{3}$

＊正三角形繞正五邊形也符合此規律。

＊另外起始位置不同時，經過繪圖發現圈數與路徑長皆相同。（見附錄一）

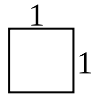
二、正方形繞正五邊形內部旋轉（ 邊長比 1 : 2)：

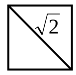
(一) 圈數：



由上圖可知，小正方形轉大正五邊形一圈，小正方形上的 P 點會以順時針的方向前進兩個頂點位置，因此，轉**兩圈**後就能回到原定點。

(二) 軌跡路徑長：

1. 發現旋轉**半徑不同**(分屬兩類：$r_4^1=1$ 

、$r_4^2=\sqrt{2}$ 

)

   ＊ 推測起始位置不同時，所走的軌跡及其路徑長不同。(見附錄一)

2. 每四步中，有兩大步(旋轉 $90°$、$r_4^1=1$)、一小步(旋轉 $18°$、$r_4^2=\sqrt{2}$)、一步不動，所以正方形轉兩圈，每圈走 10 步，則：

   P 點所走的軌跡長$=\dfrac{90°}{360°}\times 10\times 2\times\dfrac{2}{4}\times 2\pi\times 1+\dfrac{18°}{360°}\times 10\times 2\times\dfrac{1}{4}\times 2\pi\times\sqrt{2}$

   $=(5+\dfrac{\sqrt{2}}{2})\pi$

三、正方形繞正六邊形內部旋轉（ 邊長比 1 : 2)：

(一) 圈數：小正方形轉大正六邊形，小正方形上的 P 點轉**一圈**後就能回到原定點。

(二) 軌跡路徑長：

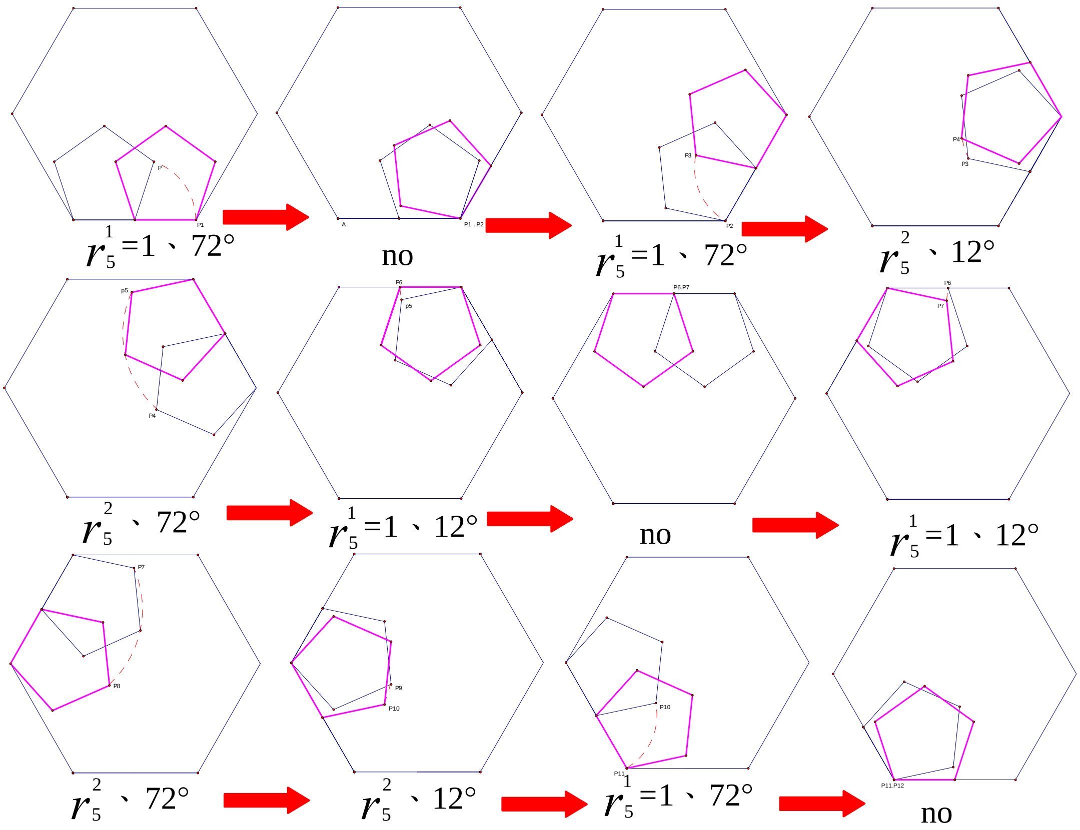
每四步中，有兩大步(旋轉 $90°$、$r_4^1=1$)、一小步(旋轉 $18°$、$r_4^2=\sqrt{2}$)、一步不動，所以正方形轉一圈，每圈走 12 步，則：

P 點所走的軌跡長$=\dfrac{90°}{360°}\times 12\times\dfrac{2}{4}\times 2\pi\times 1+\dfrac{18°}{360°}\times 12\times\dfrac{1}{4}\times 2\pi\times\sqrt{2}$

$=(3+\dfrac{3\sqrt{2}}{10})\pi$

四、正五邊形繞正六邊形內部旋轉（ 邊長比 1 : 2)：

(一) 圈數：

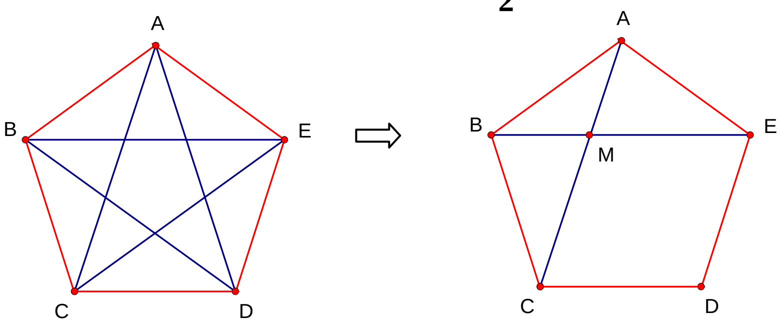


由上圖可知，小正五邊形轉大正六邊形一圈，小正五邊形上的 P 點會以順時針的方向前進兩個頂點位置，因此，**轉五圈**後就能回到原定點。

(二) 軌跡路徑長：

1. **發現旋轉半徑不同**(分屬兩類：$r_5^1=1$、$r_5^2=\dfrac{\mathbf{1+\sqrt{5}}}{\mathbf{2}}$)

r_5^2 推導：



ΔABC~ΔAMB (AAA 相似) 、設 $\boldsymbol{\overline{AB}=1}$ 、 $\boldsymbol{\overline{AC}=x}$ (x 爲正數)

由相似形對應邊成比例知、$\dfrac{1}{x-1}=\dfrac{x}{1}$ ⇨ $x^2-x-1=0$

$x=\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}$ (負不合)

＊ 由此可推測起始位置不同時，圈數相同但所走的軌跡及其路徑長不同。

2. 每十步中，有四大步(旋轉72°、$r_5^2=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$)、四小步(旋轉12°、$r_5^1=1$)、兩步不動，相當於每五步中，有兩大步、兩小步、一不動；而兩大步和兩小步中，旋轉半徑$r_5^1=1$、和$r_5^2=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$各半，所以正五邊形轉五圈，每圈走 12 步，則：

P 點所走的軌跡長

$$=\frac{72°}{360°}\times 12\times 5\times\frac{1}{5}\times 2\pi\times(\frac{1+\sqrt{5}}{2}+1)+\frac{12°}{360°}\times 12\times 5\times\frac{1}{5}\times 2\pi\times(\frac{1+\sqrt{5}}{2}+1)$$

$$=\frac{28}{5}(\frac{3+\sqrt{5}}{2})\pi$$

五、歸納：

(一) 由前幾項圖解可以歸納一些原理，轉多少圈似乎是在找（**最小公倍數**）**問題**。

例如：正三角形→正四邊形　$\dfrac{[8,3]}{8}=3$　(以下皆邊長比 1：2)

正四邊形→正五邊形　$\dfrac{[10,4]}{10}=2$

正五邊形→正六邊形　$\dfrac{[12,5]}{12}=5$

如果繼續推廣下去則可推：

正 n 邊形→正 m 邊形， $\dfrac{[2m,n]}{2m}$ **即可求出旋轉圈數**。

(二) 再運用公式推導正三角形、正五邊形來轉正多邊形所需圈數，

似乎又有一些新發現：

例如：正三角形→正 m 邊形　非一圈即三圈

正五邊形→正 m 邊形　非一圈即五圈

我們大膽預測當 n 爲奇數，正 n 邊形→正 m 邊形呢？

是不是符合非一圈即 n 圈？

看看下列情形：

正九邊形→正十邊形 $\frac{[20,9]}{20}=9$ 正九邊形→正十一邊形 $\frac{[22,9]}{22}=9$

正九邊形→正十二邊形 $\frac{[24,9]}{24}=3$ 正九邊形→正十三邊形 $\frac{[26,9]}{26}=1$

→不符合推論！！

此結果實在令人覺得晴天霹靂，但是失敗為成功之母，繼續努力必有所得！！！

繼續打拼，終於感動上蒼，讓我們發現：

當 n 為質數，正 n 邊形→正 m 邊形，邊長比為 1：2 時，

各種半徑都平均分配，且大步：小步為 1：1(請參閱研究結果 page16)

研究過程(二)

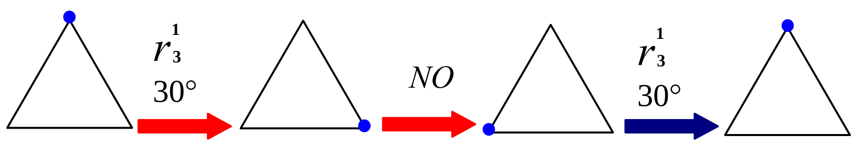
一、接下來我們討論 1：P 的情形，經過一連串辛苦的逐步推演之後，我們發現內部正 n 邊形似乎在做「自轉」運動，於是乎推導的方法大大的進化(見附錄二)：

改變 n 的奇、偶性，看看情形如何：

(一) 正三角形繞正方形邊內部旋轉：

1. 邊長比 1 : 3

(1) 圈數：小三角形轉大正方形**一圈**即回到原定點。



(2) 軌跡路徑長：

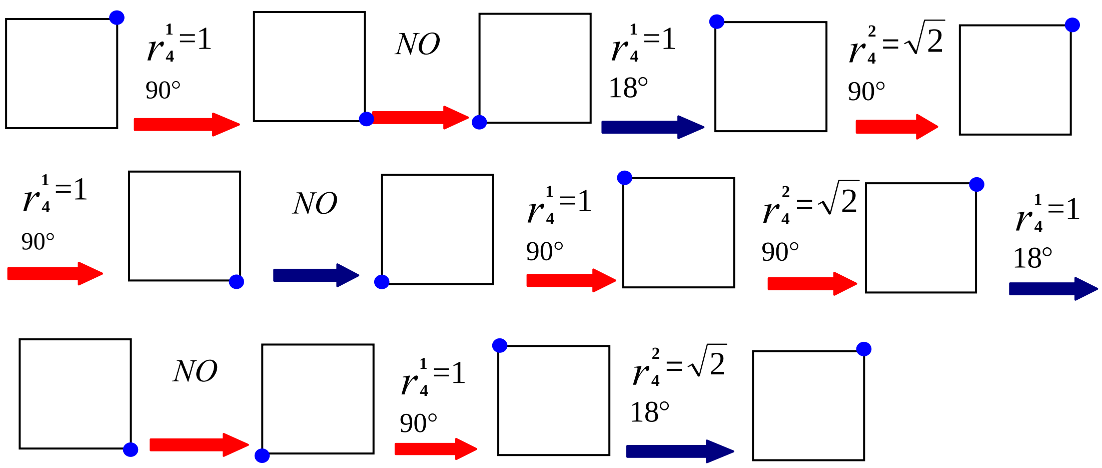
同理，因為每三步中有一大步(旋轉$120°$)、一小步(旋轉$30°$)、一步不動，所以三角形轉一圈，每圈走 12 步，且旋轉半徑為三角形邊長（ r_3^1 = 1)，則：

P 點所走的路徑長=$\left(\dfrac{120°+30°}{360°}\right)\times 3\times 4\times \dfrac{1}{3}\times 2\pi \times 1=\dfrac{10\pi}{3}$

(二) 正方形繞正五邊形內部旋轉：

1. 邊長比 1 ： 3 (如下圖)

(1) 圈數：



由上圖可知，小正方形轉大正五邊形一圈，小正方形上的 P 點會以順時針的方向前進 3 個頂點位置，因此，轉**四圈**後就能回到原定點。

(2) 軌跡路徑長：

總步數中，有$\dfrac{1}{3}$步、r_4^1 =1 的大步；$\dfrac{1}{6}$步、$r_4^2=\sqrt{2}$ 的大步(旋轉$90°$)；$\dfrac{1}{6}$步、r_4^1=1 的小步；$\dfrac{1}{12}$步、$r_4^2=\sqrt{2}$ 的小步 (小步旋轉$18°$)；$\dfrac{1}{4}$步不動，所以正方形轉四圈，每圈走 15 步，

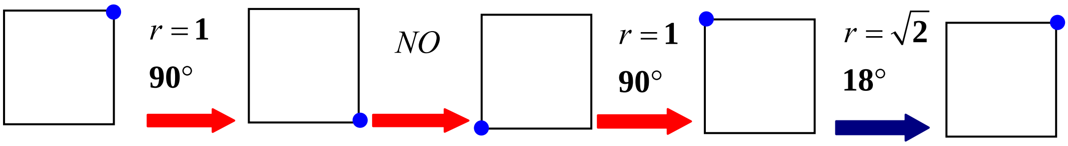
則 P 點所走的軌跡長：

$$\frac{90^0}{360^0}\times 15\times 4\times(\frac{1}{3}\times 2\pi\times 1+\frac{1}{6}\times 2\pi\times\sqrt{2})$$

$$\frac{18^0}{360^0}\times 15\times 4\times(\frac{1}{6}\times 2\pi\times 1+\frac{1}{12}\times 2\pi\times\sqrt{2})=(11+\frac{11}{2}\sqrt{2})\pi$$

2. 邊長比 1 ： 4 (如下圖)

(1) 圈數：



由上圖可知，小正方形轉大正五邊形轉一圈後就能回到原定點。

(2) 軌跡路徑長：

總步數中，有 $\frac{2}{4}$ 步、r_4^1 =1 的大步；0 步、$r_4^2=\sqrt{2}$ 的大步(旋轉 90°)；

0 步、r_4^1=1 的小步；$\frac{1}{4}$ 步、$r_4^2=\sqrt{2}$ 的小步 (小步旋轉 18°)；$\frac{1}{4}$ 步不動，

所以正方形轉一圈，每圈走 20 步，

則 P 點所走的軌跡長：

$$\frac{90^0}{360^0}\times 20\times 1\times\frac{2}{4}\times 2\pi\times 1+\frac{18^0}{360^0}\times 20\times 1\times\frac{1}{4}\times 2\pi\times\sqrt{2}=(5+\frac{\sqrt{2}}{2})\pi$$

3. 以此類推，可發現正四邊形→正 m 邊形，邊長比為 1：P 的規律

(1) 當 P＝4K+1　或 P＝4K-1 時

	1：3	1：5	1：7	1：9	1：11	歸納
大 1	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{5}{11}$	$\frac{P-1}{2P}$
大 $\sqrt{2}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{14}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{5}{22}$	$1-\frac{P-1}{2P}-\frac{1}{2P}-\frac{1}{4P}-\frac{1}{4}$
小 1	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{14}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{22}$	$\frac{1}{2P}$
小 $\sqrt{2}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{28}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{44}$	$\frac{1}{4P}$

(2) 當 P＝4K　或 P＝4K+2 時

	1：4	1：6	1：8	1：10	1：12	歸納
大 1	$\frac{2}{4}$	$\frac{6}{12}$	$\frac{4}{8}$	$\frac{10}{20}$	$\frac{12}{24}$	$\frac{1}{2}$
大$\sqrt{2}$	0	$\frac{2}{12}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{4}{20}$	$\frac{2}{12}$	$p=4k$時$\rightarrow 1-\frac{1}{p}-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}$ $p=4k+2$時$\rightarrow 1-\frac{1}{2p}-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}$
小 1	0	0	0	0	0	0
小$\sqrt{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{12}$	$p=4k$時$\rightarrow \frac{1}{P}$ $p=4k+2$時$\rightarrow \frac{1}{2P}$

＊ 由上可推得，改變邊長比不只影響圈數，更會改變路徑長。

(三) 由前幾項推導，可發現和研究過程(一)相同與相異的結論：

1. 轉多少圈同樣是在找（**最小公倍數**）問題。

例如：

正四邊形→正五邊形 $\frac{[15,4]}{15}=4$ (邊長比 1：3)

正四角形→正五邊形 $\frac{[25,4]}{25}=4$ (邊長比 1：5)

正四邊形→正六邊形 $\frac{[24,4]}{24}=1$ (邊長比 1：4)

◎從中發現，邊長比改變圈數也會跟著改變。

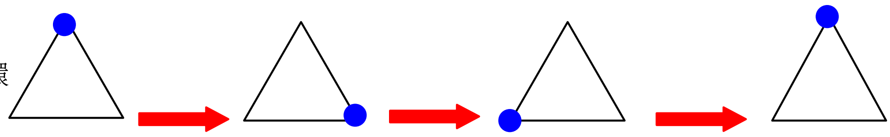
2. 如果繼續推廣下去則可推，當邊長比為 1：p

正 n 邊形→正 m 邊形，$\frac{[pm,n]}{pm}$ 即可求出旋轉圈數。

(四) 回過來研究特殊的情形，正 n 邊形→正 m 邊形，邊長比 1：1

1. 正三邊形→正四邊形

每三步一循環



(1) 圈數：帶公式可算得圈數＝$\frac{[4,3]}{4}=3$

(2) 軌跡路徑長：

總步數中，每三步一循環，有 0 步、r_3^1 =1 的大步(旋轉 90°)；

2 步、r_3^1 =1 的小步 (小步旋轉18°)；1 步不動。

→推知總步數中，$\frac{2}{3}$步、r_3^1 =1 的小步；$\frac{1}{3}$步不動。

2. 以此法類推，可發現正 n 邊形→正 m 邊形，邊長比為 1：1 的步數規律

	正三→正 m	正四→正 m	正五→正 m	正六→正 m	正七→正 m
各種旋轉半徑所佔步數比例	$r_3^1 \to \frac{2}{3}$步	$r_4^1 \to \frac{2}{4}$步	$r_5^1 \to \frac{2}{5}$步	$r_6^1 \to \frac{2}{6}$步	$r_7^1 \to \frac{2}{7}$步
	$\frac{1}{3}$步不動	$r_4^2 \to \frac{1}{4}$步	$r_5^2 \to \frac{2}{5}$步	$r_6^2 \to \frac{2}{6}$步	$r_7^2 \to \frac{2}{7}$步
		$\frac{1}{4}$步不動	$\frac{1}{5}$步不動	$r_6^3 \to \frac{1}{6}$步	$r_7^3 \to \frac{2}{7}$步
				$\frac{1}{6}$步不動	$\frac{1}{7}$步不動

＊ 全都只有小步沒有大步。(請參閱研究結果 page18)

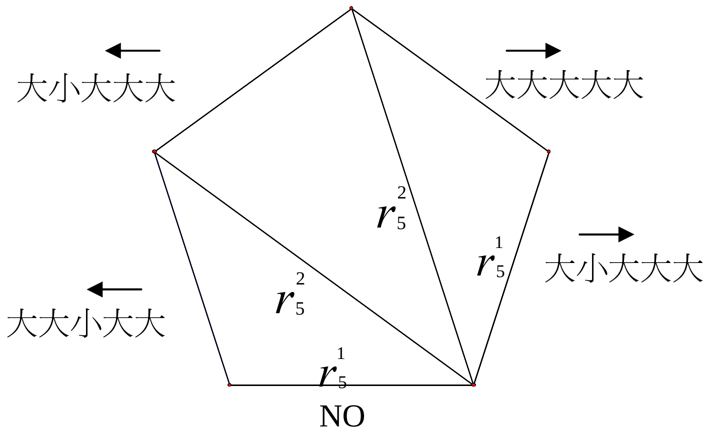
研究過程(三)

到此又有了新發現，各種半徑的步數比例，似乎與機率統計上的樹狀圖有點關聯，加上「自轉」運動，便可簡化成如下圖：

如下討論：（正 n 邊形→正 m 邊形，邊長比 1：P）

1. （p，n）＝1 ，以 1：6，正五邊形→正 m 邊形爲例：（參考下圖）

小步平均分配在各種半徑，且大步：小步＝5：1

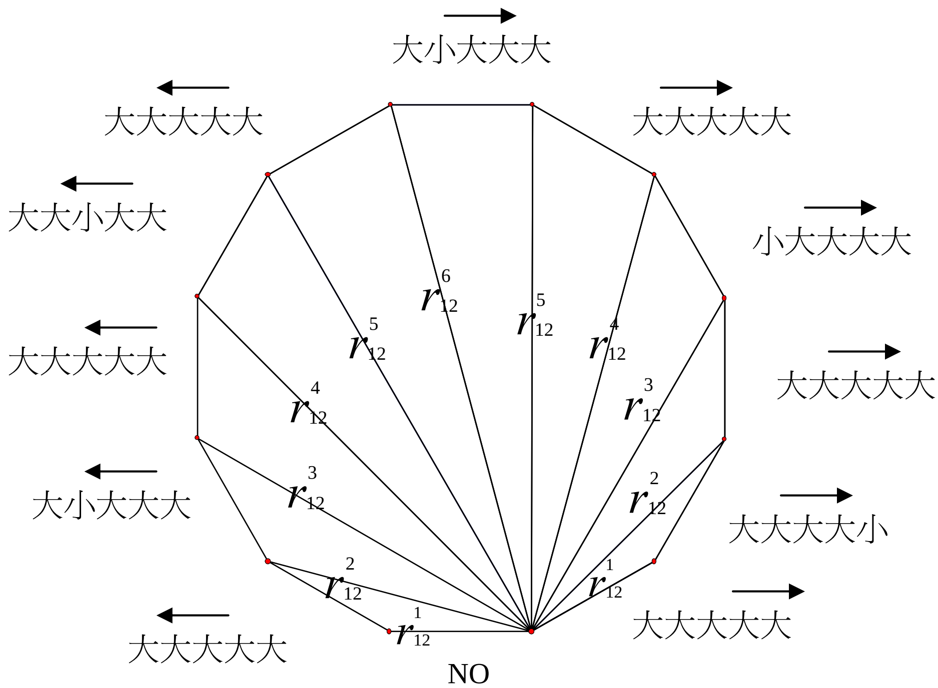


大步	r_5^1 ： $\frac{2}{5}\times\frac{5}{6}$	r_5^2 ： $\frac{2}{5}\times\frac{5}{6}$
小步	r_5^1 ： $\frac{2}{5}\times\frac{1}{6}$	r_5^2 ： $\frac{2}{5}\times\frac{1}{6}$
合計	$\frac{2}{5}$	$\frac{2}{5}$

若（p，n）＝1，則小步會平均分配在各種半徑裡，且大步：小步＝（p－1）：1

2. （p，n）≠1，

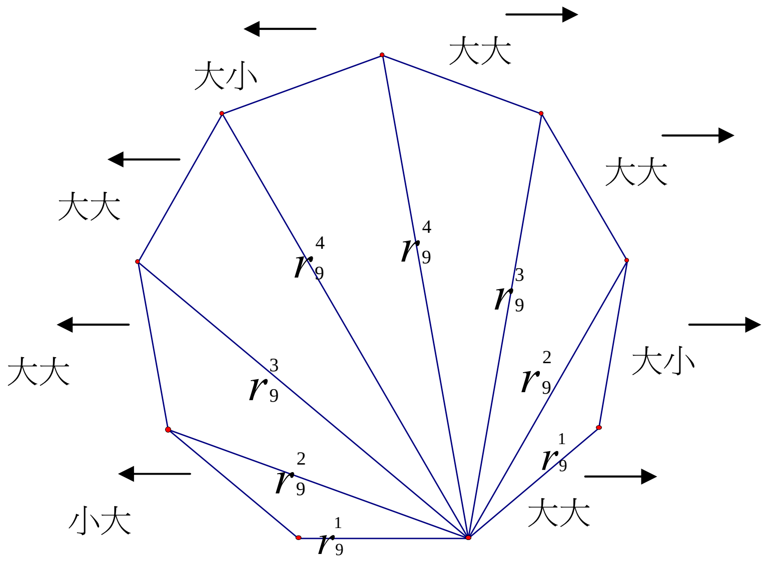
(1) 以 1：10，正 12 邊形→正 m 邊形爲例：參考下圖



$[10,12]=60$、$(10,6)=2$ 小步出現在 r_6^2、r_6^4、r_6^6 中，各二次

大步	$r_{12}^1:\frac{2}{12}$	$r_{12}^2:\frac{2}{12}-\frac{2}{60}$	$r_{12}^3:\frac{2}{12}$	$r_{12}^4:\frac{2}{12}-\frac{2}{60}$	$r_{12}^5:\frac{2}{12}$	$r_{12}^6:\frac{1}{12}-\frac{1}{60}$
小步	$r_{12}^1:0$	$r_{12}^2:\frac{2}{60}$	$r_{12}^3:0$	$r_{12}^4:\frac{2}{60}$	$r_{12}^5:0$	$r_{12}^6:\frac{1}{60}$
合計	$\frac{2}{12}$	$\frac{2}{12}$	$\frac{2}{12}$	$\frac{2}{12}$	$\frac{2}{12}$	$\frac{1}{12}$

(2) 以 1：6，正 9 邊形→正 m 邊形爲例：參考下圖



$[6,9]=18$ 、 $(6,9)=3$ 小步出現在 r_9^2、r_9^1、r_9^4 中，各一次

大步	$r_9^1:\frac{2}{9}-\frac{1}{18}$	$r_9^2:\frac{2}{9}-\frac{1}{18}$	$r_9^3:\frac{2}{9}$	$r_9^4:\frac{2}{9}-\frac{1}{18}$
小步	$r_9^1:\frac{1}{18}$	$r_9^2:\frac{1}{18}$	$r_9^3:0$	$r_9^4:\frac{1}{18}$
合計	$\frac{2}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{2}{9}$

(請參閱結論 page 20~22 頁)

伍、 研究結果

一、先討論 1：2

(一) 正三角形→正 m 邊形　(m＞3)

1. 圈數：

(1)　當 m＝ 3k ，正三角形繞正 m 邊形 $\boldsymbol{R_3^{2m}}$ **=1 圈**後，即能回到原定點。

(2)　當 m≠ 3k ，正三角形繞正 m 邊形 $\boldsymbol{R_3^{2m}}$ **=3 圈**後，即能回到原定點。

2. 軌跡路徑長：

$$\therefore 路徑長＝\left(\frac{120^\circ+\theta_m-60^\circ}{360^\circ}\right)\times R_3^{2m}\times m\times\frac{1}{3}\times 2\pi\times r_3^1 。$$

(二) 正方形→正 m 邊形　(m＞4)

1. 圈數：

(1)　當 m 為偶數，正方形繞正 m 邊形 R_4^{2m} **=1 圈**後，即能回到原定點。

(2)　當 m 為奇數，正方形繞正 m 邊形 R_4^{2m} **=2 圈**後，即能回到原定點。

2. 軌跡路徑長：

$$\therefore 路徑長＝\frac{90^\circ}{360^\circ}\times R_4^{2m}\times m\times\frac{2}{4}\times 2\pi\times r_4^1+(\theta_m-90^\circ)\times R_4^{2m}\times m\times\frac{1}{4}\times 2\pi\times r_4^2 。$$

(三) 正五邊形→正 m 邊形　(m＞5)

1. 圈數：

(1)　當 m ＝ 5k，正五邊形繞正 m 邊形 R_5^{2m} **=1 圈**後，即能回到原定點。

(2)　當 m ≠ 5k，正五邊形繞正 m 邊形 R_5^{2m} **=5 圈**後，即能回到原定點。

2. 軌跡路徑長：

$$\therefore 路徑長＝\frac{72^\circ}{360^\circ}\times \boldsymbol{R_5^{2m}}\times m\times\frac{1}{5}\times 2\pi\times(\boldsymbol{r}_5^1+\boldsymbol{r}_5^2)+\frac{\theta_m-108^\circ}{360^\circ}\times \boldsymbol{R_5^{2m}}\times m\times\frac{1}{5}\times 2\pi\times(\boldsymbol{r}_5^1+\boldsymbol{r}_5^2)$$

(四) 當 n 爲質數，正 n 邊形→正 m 邊形，邊長比爲 1：2 時 ：

1. 圈數：

(1) 當 m 是 n 的倍數 $\mathrm{R}_{n}^{2m}=\dfrac{[\mathbf{2}\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}]}{\mathbf{2}\boldsymbol{m}}=1$ 圈

(2) 若 m 不是 n 的倍數 $\mathrm{R}_{n}^{2m}=\dfrac{[\mathbf{2}\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}]}{\mathbf{2}\boldsymbol{m}}=n$ 圈

2. 軌跡路徑長：$\left[\dfrac{180^{\circ}-\theta_{n}}{360^{\circ}}+\dfrac{\theta_{m}-\theta_{n}}{360^{\circ}}\right]\times R_{n}^{2m}\times 2m\times\dfrac{2}{n}\times\dfrac{1}{2}\times 2\pi\times\sum_{k=1}^{\frac{n-1}{2}}r_{n}^{k}$

二、 再討論邊長比爲 1：P (P＞2)

改變 n 的奇、偶性，看看情形如何：

(一) 正三邊形→正 m 邊形 (m＞3)

1. 若 $(\mathrm{P},3)=1$，路徑長：

$$\frac{120^{\circ}}{360^{\circ}}\times\mathrm{R}_{3}^{pm}\times pm\times\frac{2}{3}\times\frac{p-1}{p}\times 2\pi\times 1+\frac{\theta_{m}-60^{\circ}}{360^{\circ}}\times R_{3}^{pm}\times pm\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{p}\times 2\pi\times 1$$

2. 若 $(\mathrm{P},3)\neq 1$ ，路徑長：

$$\frac{120^{\circ}}{360^{\circ}}\times\mathrm{R}_{3}^{pm}\times pm\times(\frac{2}{3}-\frac{1}{p})\times 2\pi\times 1+\frac{\theta_{m}-60^{\circ}}{360^{\circ}}\times R_{3}^{pm}\times pm\times\frac{1}{p}\times 2\pi\times 1$$

(二) 正四邊形→正 m 邊形 (m＞4)

1. 若 P= 4k （$k\in N$ ）

(1) 圈數：**1 圈**後，即能回到原定點。

(2) 路徑長：

$$\frac{\theta_{4}}{\mathbf{360^{\circ}}}\times pm\times\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\times\mathbf{2}\pi\times\mathbf{1}+\frac{\theta_{m}-\theta_{4}}{\mathbf{360^{\circ}}}\times pm\times\frac{\mathbf{1}}{p}\times\mathbf{2}\pi\times\sqrt{\mathbf{2}}$$
$$+\frac{\theta_{4}}{\mathbf{360^{\circ}}}\times pm\times(\mathbf{1}-\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}-\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{4}}-\frac{\mathbf{1}}{p})\times\mathbf{2}\pi\times\sqrt{\mathbf{2}}$$

2. 若 P= 4k ＋ 2 （k∈N ）

(1) 圈數：

當 m 爲偶數，$R_4^{pm}=$ **1 圈**後即能回到原定點。

當 m 爲奇數，$R_4^{pm}=$ **2 圈**後即能回到原定點。

(2) 路徑長：

$$\frac{\theta_4}{360^\circ}\times R_4^{pm}\times pm\times\frac{1}{2}\times 2\pi\times 1+\frac{\theta_m-\theta_4}{360^\circ}\times R_4^{pm}\times pm\times\frac{1}{2p}\times 2\pi\times\sqrt{2}$$
$$+\frac{\theta_4}{360^\circ}\times R_4^{pm}\times pm\times(1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}-\frac{1}{2p})\times 2\pi\times\sqrt{2}$$

3. 若 P= 4k － 1 或 P= 4k ＋ 1 (k∈N)

(1) 圈數：

當 m 爲偶數，$R_4^{pm}=$ **2 圈**後即能回到原定點。

當 m 爲奇數，$R_4^{pm}=$ **4 圈**後即能回到原定點。

(2) 路徑長：

$$\frac{\theta_4}{360^\circ}\times R_4^{pm}\times pm\times\frac{p-1}{2p}\times 2\pi\times 1+\frac{\theta_m-\theta_4}{360^\circ}\times R_4^{pm}\times pm\times\frac{1}{2p}\times 2\pi\times 1$$
$$+\frac{\theta_4}{360^\circ}\times R_4^{pm}\times pm\times(1-\frac{p-1}{2p}-\frac{1}{2p}-\frac{1}{4p}-\frac{1}{4})\times 2\pi\times\sqrt{2}$$
$$+\frac{\theta_m-\theta_4}{360^\circ}\times R_4^{pm}\times pm\times\frac{1}{4p}\times 2\pi\times\sqrt{2}$$

三、最後討論特殊情形，邊長比爲 1：1

(一) 正 n 邊形→正 m 邊形 (m＞n)

1. 圈數：$R_n^m=\frac{[m,n]}{n}$

2. 路徑長：n 是奇數→ $\frac{\theta_m-\theta_n}{360^0}\times R_n^m\times m\times\frac{2}{n}\times 2\pi\times\sum_{x=1}^{\frac{n-1}{2}} r_n^x$

n 是偶數→ $\frac{\theta_m-\theta_n}{360^\circ}\times R_n^m\times m\times 2\pi\times\left(\frac{2}{n}\times\sum_{x=1}^{\frac{n}{2}-1} r_n^x+\frac{1}{n}\times r_n^{\frac{n}{2}}\right)$

四、到此，總算有點成就，由研究過程(三)得知，(p,n)可決定小步落在何處，在加上機率統計上的樹狀圖，如下討論：（正 n 邊形→正 m 邊形，邊長比 1：P）

(一) (p,n)＝1：

1. n 是偶數：

$$大r_n^x=\frac{2}{n}\times\frac{p-1}{p}\qquad 小r_n^x=\frac{2}{n}\times\frac{1}{p}\qquad \left(x=1,2,3\cdots,(\frac{n}{2}-1)\right)$$

$$大r_n^{\frac{n}{2}}=\frac{1}{n}\times\frac{p-1}{p}\qquad 小r_n^{\frac{n}{2}}=\frac{1}{n}\times\frac{1}{p}$$

2. n 是奇數：

$$大r_n^x=\frac{2}{n}\times\frac{p-1}{p}\qquad 小r_n^x=\frac{2}{n}\times\frac{1}{p}\qquad \left(x=1,2,3\cdots,\frac{n-1}{2}\right)$$

(二) $(p,n)\neq 1$：

討論：

1. $2+2k_1=-2+2k_2$ → $4=2(k_2-k_1)$ → $2=(k_2-k_1)$ 有整數解
2. $2+4k_1=-2+4k_2$ → $4=4(k_2-k_1)$ → $1=(k_2-k_1)$ 有整數解
3. $2+dk_1=-2+dk_2$ → $4=d(k_2-k_1)$ →若 d≠2 , 4 則沒有整數解

因此有如下的結論：

1. (p,n)＝d＝2 or 4 （**n 必為偶數**）

討論小r_n^x身在何處，出現機率為$\frac{2}{[p,n]}$

若$x=2+dk$ or $x=-2+dk$ ，則小$r_n^x=\frac{2}{[p,n]}$ ， 大$r_n^x=\frac{2}{n}-\frac{2}{[p,n]}$

若 $\frac{n}{2}=2+2k$ or $\frac{n}{2}=-2+2k$ ，則小$r_n^{\frac{n}{2}}=\frac{1}{[p,n]}$ ， 大$r_n^{\frac{n}{2}}=\frac{1}{n}-\frac{1}{[p,n]}$

若 $\frac{n}{2}\neq 2+2k$ or $\frac{n}{2}\neq -2+2k$ ，則小 $r_n^{\frac{n}{2}}=0$ ， 大$r_n^{\frac{n}{2}}=\frac{1}{n}$

其餘小r_n^x=0、大$r_n^x=\frac{2}{n}$

2. $(p,n)=d\neq 2$ or 4

(1) n 為偶數

討論小 r_n^x 身在何處，出現機率為 $\frac{1}{[p,n]}$

若 $x=2+dk$ or $x=-2+dk$ ，則小 $r_n^x=\frac{1}{[p,n]}$ ， 大 $r_n^x=\frac{2}{n}-\frac{1}{[p,n]}$

若 $\frac{n}{2}=2+2k$ or $\frac{n}{2}=-2+2k$ ，則小 $r_n^{\frac{n}{2}}=\frac{1}{[p,n]}$ ， 大 $r_n^{\frac{n}{2}}=\frac{1}{n}-\frac{1}{[p,n]}$

若 $\frac{n}{2}\neq 2+2k$ or $\frac{n}{2}\neq -2+2k$ ，則小 $r_n^{\frac{n}{2}}=0$ ， 大 $r_n^{\frac{n}{2}}=\frac{1}{n}$

其餘小 r_n^x=0、大 $r_n^x=\frac{2}{n}$

(2)n 為奇數

討論小 r_n^x 身在何處，出現機率為 $\frac{1}{[p,n]}$

若 $x=2+dk$ or $x=-2+dk$ ，則小 $r_n^x=\frac{1}{[p,n]}$ ， 大 $r_n^x=\frac{2}{n}-\frac{1}{[p,n]}$

若 $\frac{n-1}{2}=2+2k$ or $\frac{n-1}{2}=-2+2k$ ，則小 $r_n^{\frac{n}{2}}=\frac{1}{[p,n]}$ ，大 $r_n^{\frac{n}{2}}=\frac{1}{n}-\frac{1}{[p,n]}$

若 $\frac{n-1}{2}\neq 2+2k$ or $\frac{n-1}{2}\neq -2+2k$ ，則小 $r_n^{\frac{n}{2}}=0$ ， 大 $r_n^{\frac{n}{2}}=\frac{1}{n}$

其餘小 r_n^x=0、大 $r_n^x=\frac{2}{n}$

＊＊ 似乎奇數較單純喔!! 完整的公式請參閱結論 ＊＊

陸、 討論

一、前面研究的圖形邊長都是 1：P（p 為正整數），若 p 是任意數呢？比如說：p=1. 5，轉一步就會產生靠在另一邊長的長度為無理數，而無理數的加減運算無法回復有理數(除非為 0)，因此我們大膽預測是無法回到原點，正確結果仍須多方討論。

二、p 點所在的軌跡函數表示法也是值得探討的問題。

三、旋轉軌跡所得到的圖形，常會使人們有意想不到的驚奇（見附錄三），本專題若改變各種條件旋轉(比如說置於外面旋轉)，再透過繪圖軟體或許會有奇特圖形呈現在你我

眼前哦！讓我們一起努力吧！！！

柒、 結論

一、特殊情形：邊長比為 1：1 ， 正 n 邊形→正 m 邊形 (m＞n)

圈數：$R_n^m = \dfrac{[m,n]}{m}$

路徑長：當 n 是奇數：$\dfrac{\theta_m - \theta_n}{360^0} \times R_n^m \times m \times \dfrac{2}{n} \times 2\pi \times \sum_{x=1}^{\frac{n-1}{2}} r_n^x$

當 n 是偶數：$\dfrac{\theta_m - \theta_n}{360^\circ} \times R_n^m \times m \times 2\pi \times \left(\dfrac{2}{n} \times \sum_{x=1}^{\frac{n}{2}-1} r_n^x + \dfrac{1}{n} \times r_n^{\frac{n}{2}} \right)$

二、一般情形：邊長比為 1：p ， 正 n 邊形→正 m 邊形 (m＞n)

圈數：$R_n^{pm} = \dfrac{[pm,n]}{pm}$

路徑長：

(一) 1:P 正 n → 正 m ，$(p,n)=1$

n 是奇數→ $\left(\dfrac{180^\circ - \theta_n}{360^\circ} \times \dfrac{2}{n} \times \dfrac{p-1}{p} + \dfrac{\theta_m - \theta_n}{360^\circ} \times \dfrac{2}{n} \times \dfrac{1}{p} \right) \times R_n^{pm} \times pm \times 2\pi \sum_{x=1}^{\frac{n-1}{2}} r_n^x$

n 是偶數→ $\left(\dfrac{180^\circ - \theta_n}{360^\circ} \times \dfrac{2}{n} \times \dfrac{p-1}{p} + \dfrac{\theta_m - \theta_n}{360^\circ} \times \dfrac{2}{n} \times \dfrac{1}{p} \right) \times R_n^{pm} \times pm \times 2\pi \sum_{x=1}^{\frac{n}{2}-1} r_n^x +$
$\left(\dfrac{180^\circ - \theta_n}{360^\circ} \times \dfrac{1}{n} \times \dfrac{p-1}{p} + \dfrac{\theta_m - \theta_n}{360^\circ} \times \dfrac{1}{n} \times \dfrac{1}{p} \right) \times R_n^{pm} \times pm \times 2\pi \times r_n^{\frac{n}{2}}$

(二) 1:P 正 n → 正 m，$(p,n) \neq 1$

1. $(p,n) = d = 2$ or 4

(1) 若$\dfrac{n}{2} = 2 + xd$，或 $\dfrac{n}{2} = -2 + xd$，則

$$\frac{180^\circ-\theta_n}{360^\circ}\times R_n^{pm}\times pm\times\left[\frac{2}{n}\times 2\pi\sum_{x=1}^{\frac{n}{2}-1} r_n^{x}+\frac{1}{n}\times 2\pi\, r_n^{\frac{n}{2}}\right]-$$

$$\left(\frac{180^\circ-\theta_n}{360^\circ}-\frac{\theta_m-\theta_n}{360^\circ}\right)\times R_n^{pm}\times pm\times\left(\frac{2}{[p,n]}\times 2\pi\sum r_n^{y}+\frac{1}{[p,n]}\times 2\pi\, r_n^{\frac{n}{2}}\right)$$

其中$1\le y<\frac{n}{2}$ 且$y=2+k_1d$ 或$y=-2+k_2d$ $k_1,k_2\ge 0$整數

(2) 若$\frac{n}{2}\ne 2+xd$ ，或$\frac{n}{2}\ne -2+xd$

$$\frac{180^\circ-\theta_n}{360^\circ}\times R_n^{pm}\times pm\times\left[\frac{2}{n}\times 2\pi\sum_{x=1}^{\frac{n}{2}-1} r_n^{x}+\frac{1}{n}\times 2\pi\, r_n^{\frac{n}{2}}\right]-$$

$$\left(\frac{180^\circ-\theta_n}{360^\circ}-\frac{\theta_m-\theta_n}{360^\circ}\right)\times R_n^{pm}\times pm\times\frac{2}{[p,n]}\times 2\pi\sum r_n^{y}$$

其中$1\le y<\frac{n}{2}$ 且$y=2+k_1d$ 或$y=-2+k_2d$ $k_1,k_2\ge 0$整數

2. $(p,n)=d\ne 2$ or 4

(1) n 是奇數

$$\frac{180^\circ-\theta_n}{360^\circ}\times R_n^{pm}\times pm\times\frac{2}{n}\times 2\pi\sum_{x=1}^{\frac{n-1}{2}} r_n^{x}-\left(\frac{180^\circ-\theta_n}{360^\circ}-\frac{\theta_m-\theta_n}{360^\circ}\right)\times\frac{1}{[p,n]}\times 2\pi\sum r_n^{y}$$

其中 $1\le y\le\frac{n-1}{2}$ 且$y=2+k_1d$ 或$y=-2+k_2d$ $k_1,k_2\ge 0$

(2) n 是偶數

$$\frac{180^\circ-\theta_n}{360^\circ}\times R_n^{pm}\times pm\times\left[\frac{2}{n}\times 2\pi\sum_{x=1}^{\frac{n}{2}-1} r_n^{x}+\frac{1}{n}\times 2\pi\, r_n^{\frac{n}{2}}\right]-$$

$$\left(\frac{180^\circ-\theta_n}{360^\circ}-\frac{\theta_m-\theta_n}{360^\circ}\right)\times R_n^{pm}\times pm\times\frac{1}{[p,n]}\times 2\pi\, r_n^{y}$$

其中 $1\le y\le\frac{n}{2}$ 且$y=2+k_1d$ 或$y=-2+k_2d$ $k_1,k_2\ge 0$ 整數

三、最後討論若 p 不為整數情形：

劇情越演越烈，欲罷不能，若 P **不為整數**的情況，甚至 p **點所在軌跡的函數表示法**，基於時間不允許之下只好暫時擱置，不過我們這群傻小子仍會繼續努力，期盼國展之前能出現奇蹟，更希望有志之士若有良策，能不吝指教，實乃吾等小輩之榮幸也！

捌、 參考資料

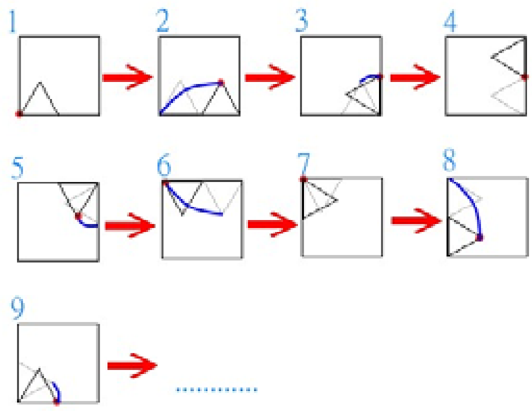
一、南一版數學。

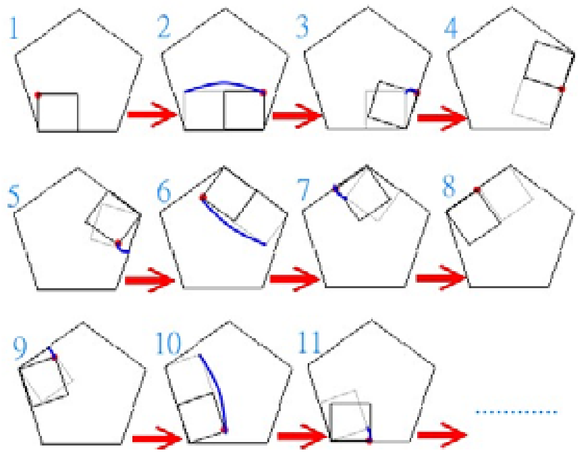
二、美國數學競試試題。

三、gsp 軟體教學教材。

【附錄一】

1. 正三角形→正四邊形：雖然起點不同，但是所含的大小步與旋轉半徑皆不變，所以不會影響圈數與路徑長。

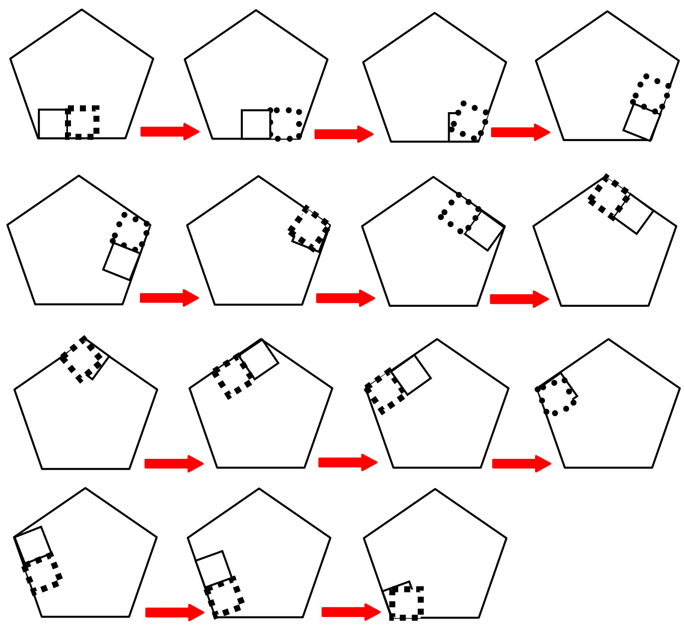




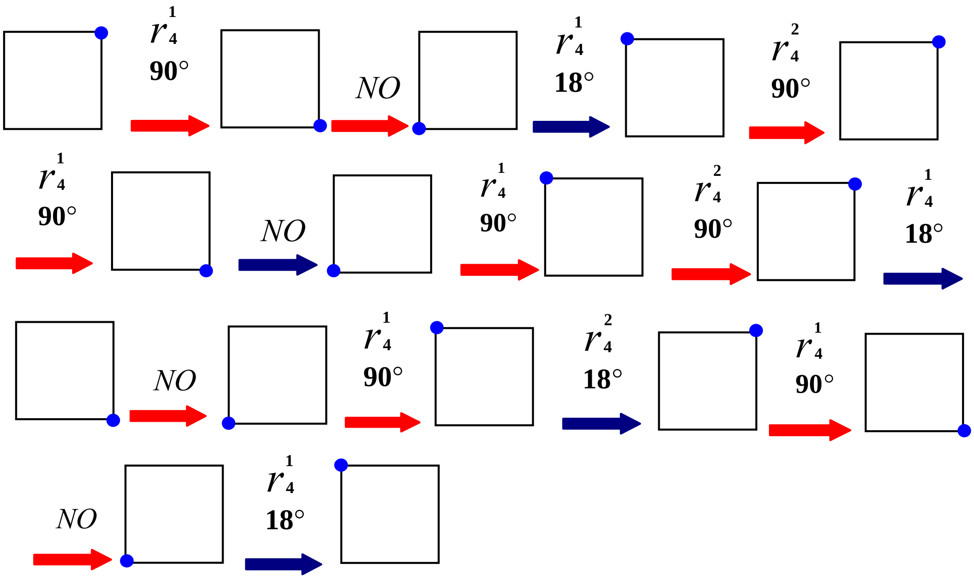
3. 正四邊形→正五邊形：如上圖，起點不同，大步的旋轉半徑與小步的旋轉半徑呈現相對換的狀態。

【附錄二】進化推導法圖示範例： (以正四邊形→正五邊形 邊長比 1：3 為例)

1.原始版：

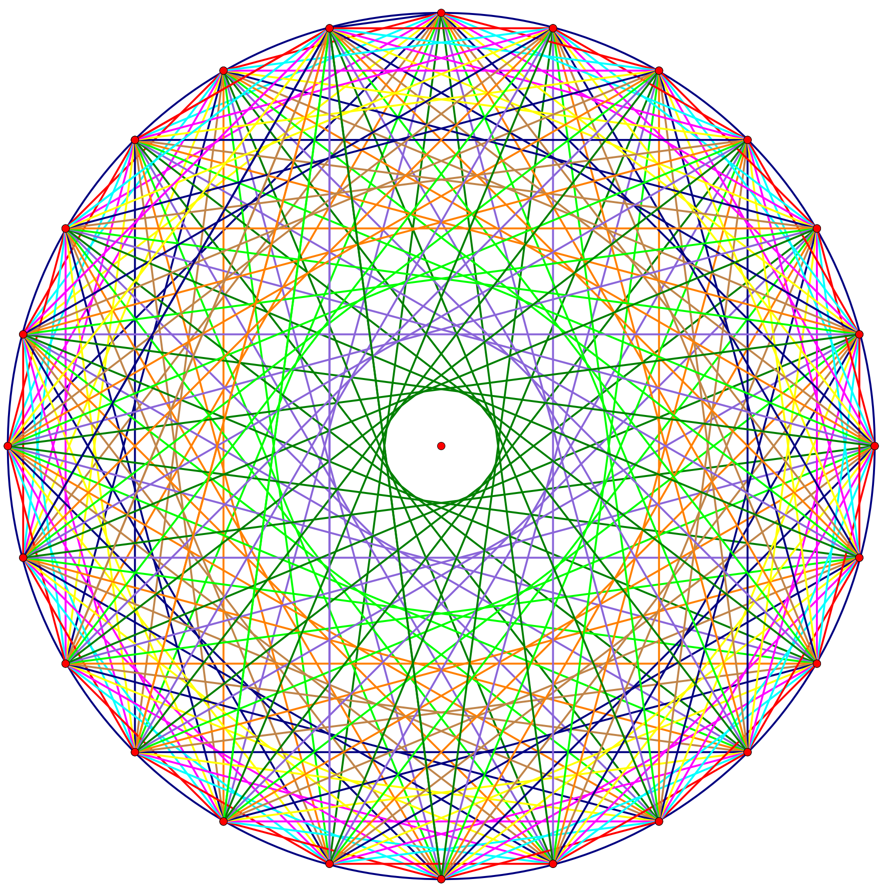


2.進化版：



【附錄三】 下面的圓形除了最外層是真的，其餘可都是由許多條直線緊密而形成的，

您說妙不妙呢！！



中華民國第四十五屆中小學科學展覽會
評　　語

國中組 數學科

第三名

030426
迷途知返

臺北縣立福和國民中學

評語：
考慮正 n 邊形在正 m 邊形內滾動時，某一頂點所移動的路徑長，對 n=3、4、5 和 n 為質數的情況，當邊長比為 1:2 時，做出了完整的討論，也對邊比為 1 = P
n=3、4 的情形作了一些分析，能活用中學所學的概念對一個困難的問題做深入的探討，是很不錯的作品。